

**T.C.  
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**KESİRLİ İNTEGRAL DENKLEMLER İÇİN  
YAKLAŞIK ÇÖZÜMLER**

**DOKTORA TEZİ**

**SERPİL SALINAN**

**DENİZLİ, HAZİRAN - 2019**

**T.C.**  
**PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**  
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**  
**UYGULAMALI MATEMATİK**



**KESİRLİ İNTEGRAL DENKLEMLER İÇİN**  
**YAKLAŞIK ÇÖZÜMLER**

**DOKTORA TEZİ**

**SERPİL SALINAN**

**DENİZLİ, HAZİRAN - 2019**

## KABUL VE ONAY SAYFASI

Serpil SALINAN tarafından hazırlanan “KESİRLİ İNTEGRAL DENKLEMLER İÇİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLER” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 28.06.2019 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı [Uygulamalı Matematik] Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Danışman  
Prof. Dr. Ayşegül DAŞCIOĞLU  
Pamukkale Üniversitesi



Üye  
Prof. Dr. İbrahim ÇELİK  
Pamukkale Üniversitesi



Üye  
Prof. Dr. Sezai TOKAT  
Pamukkale Üniversitesi



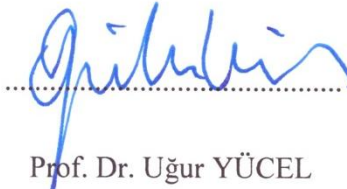
Üye  
Prof. Dr. Mehmet SEZER  
Celal Bayar Üniversitesi



Üye  
Dr. Öğr. Ü. Neşe İŞLER ACAR  
Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi



Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ~~08/08/2019~~ tarih ve ~~32/111~~..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.



Prof. Dr. Uğur YÜCEL

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

✓

**Bu tez çalışması BAP tarafından 2017FEBE033 nolu proje ile desteklenmiştir.**

**Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.**



**SERPİL SALINAN**

# ÖZET

**KESİRLİ İNTEGRAL DENKLEMLER İÇİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLER**  
**DOKTORA TEZİ**  
**SERPİL SALINAN**  
**PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**  
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**  
**UYGULAMALI MATEMATİK**  
**(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. AYŞEGÜL DAŞCIOĞLU)**

**DENİZLİ, HAZİRAN - 2019**

Bu tez çalışması beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; integral denklem, kesirli analiz, kesirli integral, kesirli integral denklem, Abel denklemleri ve bu denklemlerin çözümleri ile ilgili literatür bilgisine yer verilmiştir. İkinci bölümde; ortogonal fonksiyonlardan Laguerre, Hermite, Legendre, Chebyshev ve Jacobi polinomlarının tanımları, özellikleri ve grafikleri ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde; literatürde var olan farklı kesirli integral tanımlarından bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde; öncelikle integral denklemlerle ilgili temel kavramlar verilmiş, ardından Volterra integral denklemleri ve dolayısıyla kesirli integral denklemler için ortogonal polinomlara dayalı iki farklı sıralama yöntemi geliştirilmiştir. Beşinci bölümde ise sekiz farklı problem ele alınmış ve sunulan yöntemlerle farklı ortogonal polinomlar kullanılarak çözülmüştür. Bu çözümlerin program kodları hem Mathcad 15 hem de Matlab R2015a'da yazılmıştır. Ayrıca elde edilen sonuçlar literatürdeki diğer yöntemlerle de karşılaştırılmıştır.

**ANAHTAR KELİMELER:** Kesirli integral denklemler, Abel integral denklemler, Volterra integral denklemler, tekil integral denklemler, sıralama yöntemi.

## ABSTRACT

### APPROXIMATE SOLUTIONS OF FRACTIONAL INTEGRAL EQUATIONS

PH.D THESIS

SERPİL SALINAN

PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE

MATHEMATICS

APPLIED MATHEMATICS

(SUPERVISOR: PROF. DR. AYŞEGÜL DAŞCIOĞLU)

DENİZLİ, JUNE 2019

This thesis consists of five main chapters. The literature information on integral equation, fractional analysis, fractional integral, fractional integral equation, Abel's equations and their solutions, is given in the first chapter. The definitions, properties and graphs of the orthogonal functions, such as Laguerre, Hermite, Legendre, Chebyshev and Jacobi polynomials, are expressed in the second chapter. Different definitions of fractional integral which exist in the literature are mentioned in the third chapter. In the fourth chapter, firstly the basic concepts of integral equations are given, and then two different collocation methods based on the orthogonal polynomials are developed for Volterra integral equations and fractional integral equations. In the fifth chapter, eight different problems are discussed and solved by the methods presented using different orthogonal polynomials. The program codes of these solutions are also written in both Mathcad 15 and Matlab R2015a. In addition, the obtained results are compared with the other methods in the literature.

**KEYWORDS:** Fractional integral equations, Abel integral equations, Volterra integral equations, singular integral equations, collocation method.

# İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
ŞEKİL LİSTESİ .....	iv
TABLO LİSTESİ .....	v
SEMBOL LİSTESİ .....	vi
ÖNSÖZ.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. BAZI ORTOGONAL FONKSİYONLAR .....	6
2.1 Laguerre Polinomları ve Özellikleri .....	6
2.2 Hermite Polinomları ve Özellikleri.....	8
2.3 Legendre Polinomları ve Özellikleri.....	9
2.4 Chebyshev Polinomları ve Özellikleri .....	11
2.5 Jacobi Polinomları ve Özellikleri .....	13
3. KESİRLİ İNTEGRALLER .....	15
4. KESİRLİ İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ.....	19
4.1 İntegral Denklemler .....	19
4.2 Çözüm Yöntemi 1 .....	21
4.3 Çözüm Yöntemi 2 .....	24
5. UYGULAMALAR.....	27
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	41
7. KAYNAKLAR .....	43
8. ÖZGEÇMİŞ .....	49



## ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1: İlk altı Laguerre polinomları.....	7
Şekil 2.2: İlk altı Hermite polinomları.....	9
Şekil 2.3: İlk altı Legendre polinomları.....	10
Şekil 2.4: Birinci tip Chebyshev polinomlarının ilk birkaçı.....	12
Şekil 2.5: İkinci tip Chebyshev polinomlarının ilk birkaçı.....	12

## TABLO LİSTESİ

### Sayfa

Tablo 5.1: Laguerre polinomu kullanarak Örnek 5.1 için $e(i / N)$ değerleri....	30
Tablo 5.2: Örnek 5.1'in farklı ortogonal fonksiyonları ve $N=10$ için $e(x_s)$ değerleri.....	31
Tablo 5.3: Örnek 5.1'in sıralama noktası (a) için $E_{ort}$ değerleri.....	31
Tablo 5.4: Örnek 5.1'in sıralama noktası (b) için $E_{ort}$ değerleri .....	31
Tablo 5.5: Örnek 5.2 için $e(i / N)$ değerleri. ....	32
Tablo 5.6: Örnek 5.7 için $E_{max}$ ve $E_{ort}$ değerleri.....	38
Tablo 5.7: Örnek 5.7 için Mathcad 15'teki $E_{max}$ ve $E_{ort}$ değerleri. ....	39
Tablo 5.8: Örnek 5.8 için (a) sıralama noktasını kullanarak $E_{max}$ değerleri. ....	39
Tablo 5.9: Örnek 5.8 için (b) sıralama noktasını kullanarak $E_{max}$ değerleri. ....	40
Tablo 5.10: Örnek 5.8 için (c) sıralama noktasını kullanarak $E_{max}$ değerleri. ....	40

## SEMBOL LİSTESİ

- $L_n(x)$  : Laguerre Polinomları  
 $H_n(x)$  : Hermite Polinomları  
 $P_n(x)$  : Legendre Polinomları  
 $T_n(x)$  : Birinci Tip Chebyshev Polinomları  
 $U_n(x)$  : İkinci Tip Chebyshev Polinomları  
 $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$  : Jacobi Polinomları  
 $L_1(a,b)$  :  $(a,b)$  üzerinde Lebesgue İntegrallenebilir Fonksiyonlar Uzayı

## ÖNSÖZ

Doktora tez çalışması süresince pozitif enerjisiyle beni yönlendiren, ilgilenen, destek olan, değerli görüşlerini, önerilerini ve bilgi birikimlerini benimle paylaşan çok değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ayşegül DAŞCIOĞLU'na sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım. Tez savunma jürisi hocalarım Sayın Prof. Dr. İbrahim ÇELİK'e, Sayın Prof. Dr. Sezai TOKAT'a, Sayın Prof. Dr. Mehmet SEZER'e ve Sayın Dr. Öğr. Ü. Neşe İŞLER ACAR'a çok değerli görüş ve önerileri için ayrıca çok teşekkür ederim.

Bugünlere gelmemde büyük emekleri olan öncelikle ilkokul hocam Sayın Gülseren İPLİKÇİ'ye, ortaokul matematik hocam Sayın Süheyla Tort'a, lise matematik hocam Sayın Ali ŞÜKÜN'e, mezun olduğum Denizli Anadolu Lisesi'ndeki tüm hocalarıma ve PAÜ MATEMATİK bölümü hocalarıma ayrı ayrı çok teşekkür eder, en derin saygılarımı sunarım.

Hayat yolculuğunda varlığının benim için çok özel bir anlamı olan bana kattıkları, öğrendiklerim ve beni bugün olduğum yere yönlendiren, öncelikle bana hayat veren, varlığımın her döneminde hep yanımda olan bana güvenen, beni cesaretlendiren varlığına şükrettiğim canım ANNEME ve şu an hayatta olmayan BABAMA en içten teşekkürlerimi, saygılarımı ve sevgilerimi sunarım.

Şu an hayatta olmayan anneannem ve dedeme de çok teşekkür ederim.

*“Hayat bu, bir bakarsın her şey bir anda son bulur. Hayat bu, son dediğin anda her şey yeniden can bulur”* (Şems-i Tebrizi). Mucizeler hep ansızın gelir.

*“İnsanın kaderinde öyle bir kırılma noktası vardır ki tam isyan edeceğin an, evet, işte o an ufacık bir dua ile kaderinin yönünü avuçlarındaki gözükmeyen tılsımla değiştirebilirsin. Her gecenin nasıl bir sabahı varsa her derdin de bir sonu var. Düştükten sonra kalkacak ve üstünü silkeleyip tekrar devam edeceksin koşmaya... Ve unutmayacaksın ki Allah yanında, seninle birlikte... Eğer yüreğinde Rabb'in varsa, bu hayatta kimseye ihtiyacın yok demektir. Her şer denilen şeyin içinde kocaman bir hayır var, sakın unutma”* (Nemutlu 2018).

Serpil SALINAN

# 1. GİRİŞ

İntegral denklem, integral işareti altında bilinmeyen fonksiyonu içeren denklemdir. İntegral denklemler; sonlu bir kapalı aralık için başlangıç değer problemleriyle modellenen kimya, biyoloji, fizik ve mühendislik uygulamalarında ortaya çıkar (Wazwaz 1997).

İntegral denklemlerinin konusu, soyut ve uygulamalı matematikte en kullanışlı matematiksel araçlardan biridir. Birçok fiziksel problemlerde çok geniş uygulamaları vardır. Adi ve kısmi diferansiyel denklemlerle ilişkili birçok başlangıç ve sınır değer problemleri, integral denklemlerin yaklaşık çözümüne dönüştürülebilir. 1825'te Abel, ünlü tautochrone problemiyle bağlantılı bir integral denklemi ilk kez türetmiştir. İntegral denklemler teorisinin başlıca araştırmacıları; Vito Volterra (1860-1940), Ivar Fredholm (1866-1927), David Hilbert (1862-1943) ve Erhard Schmidt (1876-1959) dir. Volterra, teorisinin önemini fark eden ve sistematik olarak çalışan ilk kişidir (Rahman 2007).

Kesirli analiz; fen ve mühendisliğin akışkan akışı, reoloji, elektromanyetik teori ve olasılık gibi birçok alanında kullanılır (Dos Santos 2018, Sandev 2017, Fernandez 2018). Kesirli türevler ve kesirli integraller, diferansiyelleme ve integrallemenin tamsayı olmayan keyfi mertebeye genelleştirilmesidir. Kesirli türev ve kesirli integral kavramları Leibniz'in L'Hôpital'e 1695 yılında yazmış olduğu mektupla literatüre girmiştir (Kilbas ve diğ. 2006).

Kesirli integral denklem ise kesirli integralleri içeren bir integral denklemdir (Podlubny 1999). Kesirli integral fikri Abel integral denklemiyle bağlantılıdır (Samko ve diğ. 1993).

Abel denklemlerinin; ısı iletimi, akışkan akışı, kimyasal reaksiyonlar, matematiksel fizik, yarı iletkenler ve sismoloji gibi çeşitli alanlarda birçok uygulaması vardır. Niels Henrik Abel, 1823'te düşey düzlemde uzanan düzgün bir eğri boyunca ilerleyen bir parçacığın hareketini araştırırken Abel integral denklemini

türetmiştir (Vanani ve Soleymani 2013). Sonlu segmentteki genelleştirilmiş Abel integral denklemi Zeilon (1924) tarafından incelenmiştir.

Abel integral denkleminin çözümü ile ilgili çalışmaların süreci şöyledir; Brunner ve diğ. (1991) ikinci tip Abel integral denklemlerinin sayısal çözümü için c-yöntemlerinin kararlılık özelliklerini analiz etmişlerdir. Chakrabarti ve George (1994) genelleştirilmiş Abel integral denkleminin çözümü için yeni bir formül türetmişlerdir. Wazwaz (1997) Abel integral denklemini çözmek için Adomian ayrıştırma yöntemini uygulamıştır. Piessens (2000) Chebyshev polinomlarını kullanarak Abel integral denkleminin çözümünü ele almıştır. Yousefi (2006) Abel integral denklemini çözmek için Legendre dalgacık (wavelets) yöntemini kullanmıştır. Liu ve Tao (2006) ve Liu ve Tao (2007) birinci tip Abel integral denklemlerinin çözümü için sırasıyla kombinasyon ve mekanik quadrature yöntemlerini uygulamışlardır. Huang ve diğ. (2008) Abel integral denkleminin yaklaşık çözümü için bilinmeyen fonksiyonun Taylor açılımını kullanarak yeni bir yaklaşım sunmuşlardır. Saadatmandi ve Dehghan (2008) birinci ve ikinci tip Abel integral denklemlerinin çözümü için kaydırılmış (shifted) Legendre sıralama (collocation) yöntemini uygulamışlardır. Pandey ve diğ. (2009) homotopi pertürbasyon, modifiye homotopi pertürbasyon, Adomian ayrıştırma ve modifiye Adomian ayrıştırma yöntemlerini kullanarak Abel integral denkleminin yaklaşık çözümünü bulmuşlardır. Yousefi (2010) Abel integral denklemini çözmek için Bernstein polinomu (B-polinomu) çoklu dalgacık yaklaşımlarını kullanmıştır. Bougoffa ve diğ. (2011) Adomian ayrıştırma yöntemini kullanarak lineer ve lineer olmayan Abel integral denklemlerinin yaklaşık çözümlerini elde etmişlerdir. Avazzadeh ve diğ. (2011) Chebyshev yöntemini geliştirerek genelleştirilmiş Abel integral denklemlerinin çözümlerini bulmuşlardır. Sohrabi (2011) Chebyshev dalgacık yaklaşımına dayalı yöntemi birinci ve ikinci tip Abel integral denkleminin sayısal çözümünde kullanmıştır. Dixit ve diğ. (2011) genelleştirilmiş Abel integral denklemini çözmek için Bernstein polinomlarını kullanmışlardır. Shahsavaran (2011) Block-Pulse fonksiyonlarını ve Taylor açılımını birlikte kullanarak ikinci tip Abel integral denkleminin çözümünü bulmuştur. Singh ve diğ. (2012) homotopi analiz yöntemini kullanarak Abel tip integral denklemler için analitik yaklaşık çözümler elde etmişlerdir. Setia ve Pandey (2012) makalelerinde genelleştirilmiş Abel integral denklem sisteminin sayısal çözüm yaklaşımı için Laguerre polinomlarını

kullanmışlardır. Khan ve Gondal (2012) Laplace dönüşümü ve Laplace ayrıştırma yöntemlerini birleştirerek ikinci tip Abel integral denklemlerinin tam çözümlerini bulmuşlardır. Rahman ve diğ. (2012) makalesinde Laguerre polinomlarına dayalı Galerkin ağırlıklı kalanlar yöntemini kullanarak birinci tip, ikinci tip ve tekil Volterra integral denklemlerinin sayısal çözümünü elde etmişlerdir. Vanani ve Soleymani (2013) birinci ve ikinci tip zayıf tekil Volterra integral denklemlerini çözmek için Tau yöntemini kullanmışlardır. Yang (2014) Abel integral denkleminin çözümü için Laplace dönüşümünü ve Taylor açılımını uygulamışlardır. Kumar ve diğ. (2015) Abel integral denkleminin analitik ve yaklaşık çözümlerini, homotopi pertürbasyon dönüşüm yöntemi gibi homotopi pertürbasyonla Laplace dönüşümü yönteminin birleşmesinden oluşan yeni yöntemi kullanarak elde etmişlerdir. Jahanshahi ve diğ. (2015) birinci tip Abel integral denklemlerini çözmek için kesirli integraller ve Caputo türevleri yaklaşımlarına dayalı yeni bir yöntem kullanmışlardır. Abdelkawy ve diğ. (2015) kaydırılmış Jacobi polinomlarına dayalı spektral sıralama yöntemini kullanarak birinci ve ikinci tip Abel integral denklemlerinin yaklaşık çözümlerini bulmuşlardır. Becker (2016) lineer Abel integral denklemin çekirdeğinin çözücüsünün yeni özelliklerini türetmiş ve yeni sonuçlar elde etmiştir. Pandey ve diğ. (2016) genelleştirilmiş Abel integral denklemlerini çözmek için sıralama yöntemini kullanmışlardır. Noeiaghdam ve diğ. (2016) homotopi analiz dönüşüm yöntemini kullanarak birinci tip Abel integral denklemlerini çözmüşlerdir. Fathizadeh ve diğ. (2017) rasyonel Haar dalgacık yöntemini birinci ve ikinci tip Abel integral denklemlerine uygulamışlardır. Li ve Clarkson (2018) Abel integral denklemlerinin çözümleri için Babenko yaklaşımını kullanmışlardır.

Diğer kesirli integral denklemlerle ilgili teorik çalışmaların süreci şöyledir: Darwish ve El-Bary (2006) gecikmeli lineer olmayan kesirli mertebeden integral denklemin çözümlerinin varlığını kanıtladılar. Darwish (2009) kesirli mertebeden kuadratik integral denkleminin çözümlerinin varlığını ispatlamıştır. Abbas (2010) kesirli mertebeden lineer olmayan kuadratik Volterra integral denkleminin lokal olarak ilgi çeken çözümlerinin varlığını kanıtlamak için hibrit sabit nokta teoremini kullanmıştır. Muslim ve diğ. (2010) Banach sabit nokta teoremi ve analitik yarı-grup teorisini kullanarak kesirli integral denkleminin çözümlerinin varlığını, tekliğini ve yaklaşımını ispatlamışlardır. Darwish (2011) pertürbe kuadratik kesirli integral denkleminin çözümlerinin varlık teoremini vermiştir. Wang ve diğ. (2012) kuadratik

Urysohn kesirli integral denklemlerinin çözümlerinin varlığını ve kararlılığını Tichonov sabit nokta teoreminden elde etmişlerdir. Wei ve diğ. (2012) iki yeni kararlılık çalışması olan Hyers-Ulam-Rassias ve Hyers-Ulam kararlılığını kesirli Volterra tip integral denklemler için önermişlerdir. Banaś ve Rzepka (2012) kesirli mertebeden Volterra-Stieltjes tip lineer olmayan integral denklemler sisteminin çözülebilirliğini çalışmışlardır. Chen ve diğ. (2014) kuadratik Weyl kesirli integral denklemlerin periyodik çözümlerinin varlığını kompakt olmayan ölçü tekniğini kullanarak Schauder sabit nokta teoremiyle ispat etmişlerdir. Malinowski (2015) rastgele bulanık kesirli integral denklemlerin çözümlerinin varlığını ve tekliğini ardışık yaklaşımlar yöntemini kullanarak göstermiştir. Gholami ve Ghanbari (2016) hibrit sabit nokta teoremini uygulayarak kesirli kuadratik integral denklemlerin hibrit sistemlerinin çözülebilirliğini ele almışlardır. Jleli ve diğ. (2016) Darbo's teoreminin genelleştirilmiş versiyonuyla birleştirilmiş kompakt olmayan argüman ölçüsü kullanılarak kesirli mertebeden  $q$ -integral denklemler sınıfının çözümlerinin varlığını çalışmışlardır. Dhage ve diğ. (2016) lineer olmayan kuadratik kesirli integral denklemin yerel çekicilik (local attractivity) ve kararlılık analizine yer vermişlerdir. Jleli ve Samet (2017) kompakt olmayan ölçü argümanı ve Darbo's sabit nokta teoreminin genişlemesine dayalı olan yöntemde  $q$ -kesirli integral denklemin çözülebilirliğine değinmişlerdir. Nieto ve Samet (2017) kompakt olmayan ölçüyle ilişkili Darbo's teoreminin genelleştirilmiş versiyonunu kullanarak kapalı kesirli integral denklemin çözümlerinin varlığıyla ilgili çalışmışlardır.

Abel dışındaki kesirli integral denklemlerle ilgili sayısal çalışmaların süreci ise şöyledir: Cao ve diğ. (2003) zayıf tekil çekirdekli ikinci tip Volterra integral denklemlerinin çözümünde hibrit sıralama yöntemini kullanmışlardır. Baratella ve Orsi (2004) zayıf tekil ikinci tip Volterra integral denklemlerinin çözüm yaklaşımlarını düzeltme (smoothing) tekniği uygulamasına dayandırmışlardır. Babolian ve Shamloo (2008) parçalı sabit ortogonal fonksiyonların işlevsel (operational) matrislerini kullanarak zayıf tekil ikinci tip Volterra integral denkleminin çözümlerini elde etmişlerdir. Bhattacharya ve Mandal (2008) lineer Volterra integral denklemlerinin yaklaşık çözümleri için Bernstein polinomlarını kullanmışlardır. Lepik (2009) kesirli Fredholm ve kesirli Volterra integral denklemlerinin çözümü için Haar dalgacık yöntemini uygulamıştır. Bandrowski ve diğ. (2010) zaman değişkeninde kesirli denklemlere eşdeğer olan Volterra



denklemler sınıfının çözümünü bulmak için zaman değişkeninde Galerkin yöntemini kullanmışlardır. Maleknejad ve diğ. (2011) Bernstein yaklaşımını kullanarak birinci, ikinci ve tekil tip Volterra integral denklemlerinin yaklaşık çözümünü bulmuşlardır. Atangana ve Bildik (2013) ikinci tip Volterra kesirli integral denklemlerini çözmek için Simpson 3/8 kuralı yöntemini kullanmışlardır. Kalitvin (2016) mekanik quadrature yöntemini parçalı integralli lineer Volterra integral denkleme uygulamıştır. Eshaghi ve diğ. (2016) lineer olmayan zayıf tekil Volterra integral denklemlerinin çözümü için kesirli Legendre-Gauss-Lobatto quadrature formüllerini türetip ayrıca Legendre Pseudospektral yöntemini kullanmışlardır. Micula (2018) ikinci tip kesirli integral denklemlerin yaklaşık çözümlerinde yineleme (iterative) sayısal yöntemini önermiştir.

Tezin amacı; Volterra integral denklemler ve dolayısıyla kesirli integral denklemleri çözmek için sıralama yöntemi geliştirmektir. Jacobi, Legendre, Chebyshev, Hermite ve Laguerre polinomları gibi ortogonal polinomları kullanarak ayrıca bu yaklaşımları karşılaştırmak ve en iyi yaklaşımı belirlemektir.

## 2. BAZI ORTOGONAL FONKSİYONLAR

Genellikle özel fonksiyonlar olarak bilinen fonksiyonların çoğu ikinci mertebe lineer diferansiyel denklemlerin çözümleridir. Bu denklemler bazı matematiksel ve fiziksel kaynaklarda görülmektedir. Birleşik hipergeometrik (Kummer) ve hipergeometrik denklemlerin bağımsız değişkende özelleşmesiyle, standart dönüşümlerle veya analitik süreklilikle Hermite, Legendre, ... gibi çeşitli denklemler elde edilir (Beals ve Wong 2010). Bu bölümde bu ortogonal fonksiyonlardan bazıları hakkında genel bilgilere Bell (1968), Daşcıoğlu ve Sezer (2017) kaynaklarından yararlanarak yer verilmiştir. Daha detaylı olarak Rainville (1960), Lebedev (1965), Bayın (2000) kaynaklarından da yararlanılabilir.

### 2.1 Laguerre Polinomları ve Özellikleri

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$$

şeklinde ifade edilen Laguerre diferansiyel denkleminin çözümü

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!(k!)^2} x^k, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

polinom fonksiyonları olarak bilinen  $n$ . dereceden Laguerre polinomlarıdır. Bu polinomlarının bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

Genelleştirilmiş (Associated) Laguerre polinomları ise

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} \frac{(-x)^k}{k!(n-k)!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \alpha > -1$$

şeklinde olup,

$$xy'' + (\alpha+1-x)y' + ny = 0$$

genelleştirilmiş Laguerre denkleminin çözümüdür. Genelleştirilmiş Laguerre denklemi,  $\alpha$  parametresinin sıfır olduğu durumlarda Laguerre denklemine dönüşür ve  $L_n^0(x) = L_n(x)$  olur.

İlk altı Laguerre polinomunun açık hali aşağıdaki şekilde yazılabilir ve grafikleri Şekil 2.1’de verilmiştir.

$$L_0(x) = 1$$

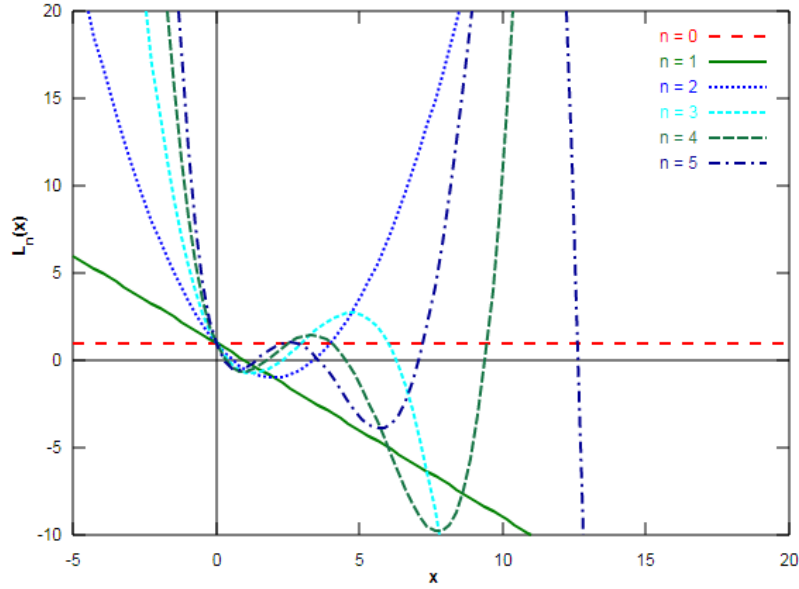
$$L_1(x) = 1 - x$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$$

$$L_3(x) = \frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)$$

$$L_4(x) = \frac{1}{24}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24)$$

$$L_5(x) = \frac{1}{120}(-x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120)$$



Şekil 2.1: İlk altı Laguerre polinomları

Laguerre polinomlarının özellikleri aşağıdaki şekilde verilebilir:

a) Laguerre polinomları için Rodrigues formülü:

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}).$$

b) Laguerre polinomlarının bazı özel değerleri:  $L_n(0) = 1$ ,  $L'_n(0) = -n$ .

c) Laguerre polinomlarının dikliği:  $\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = \delta_{nm}$ .

d) Fonksiyonların Assosiyel Laguerre Serisine Açılımı: Eğer  $\alpha > -1$  olmak üzere  $(0, \infty)$  açık aralığında tanımlanmış reel  $f(x)$  fonksiyonu,  $0 < x_1 < x_2 < \infty$  olan her sonlu  $[x_1, x_2]$  aralığında parçalı düzgün ve  $\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha f^2(x) dx$  integrali sonlu ise katsayıları

$$c_n = \frac{n!}{\Gamma(n + \alpha + 1)} \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha f(x) L_n^\alpha(x) dx$$

ile hesaplanan  $f(x) = \sum_{n=0}^\infty c_n L_n^\alpha(x)$ ,  $0 < x < \infty$  serisi  $f(x)$ 'in her süreklilik noktasında  $f(x)$ 'e yakınsar. Bir süreksizlik noktasında ise  $[f(x+0) + f(x-0)]/2$  fonksiyonuna yakınsar.

## 2.2 Hermite Polinomları ve Özellikleri

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

şeklinde ifade edilen Hermite diferansiyel denkleminin çözümü

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{1}{2}n \rfloor} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

polinom fonksiyonları olarak bilinen  $n$ . dereceden Hermite polinomlarıdır. İlk altı Hermite polinomunun açık hali aşağıdaki şekilde olup grafikleri Şekil 2.2'de verilmiştir.

$$H_0(x) = 1$$

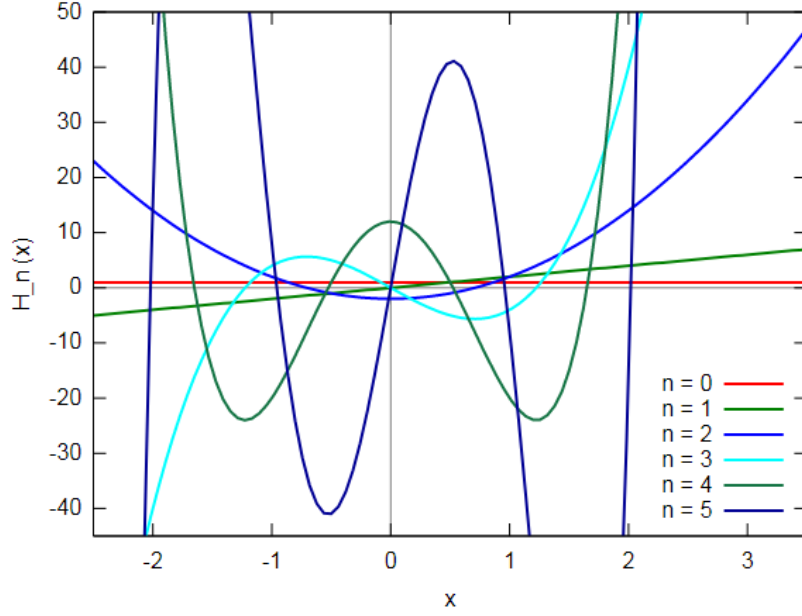
$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$$



Şekil 2.2: İlk altı Hermite polinomları

Hermite polinomlarının özellikleri aşağıdaki şekilde verilebilir:

a) Hermite polinomları için Rodrigues formülü:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

b) Hermite polinomlarının bazı özel değerleri:

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}, \quad H_{2n+1}(0) = 0.$$

c) Hermite polinomlarının dikliği:  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm}.$

### 2.3 Legendre Polinomları ve Özellikleri

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

şeklinde ifade edilen Legendre diferansiyel denkleminin çözümü

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

polinom fonksiyonları olarak bilinen  $n$ . dereceden Legendre polinomlarıdır. İlk altı Legendre polinomunun açık hali aşağıdaki şekilde olup grafikleri Şekil 2.3'te verilmiştir.

$$P_0(x) = 1$$

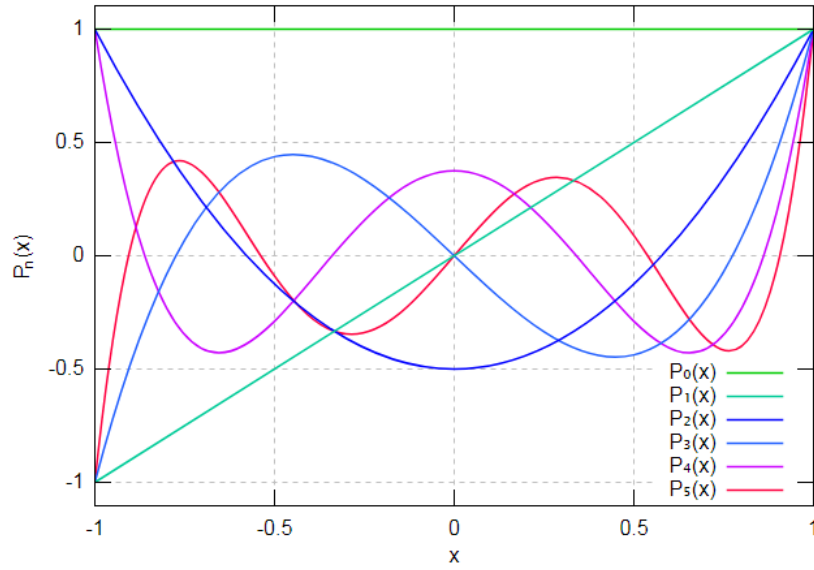
$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$



Şekil 2.3: İlk altı Legendre polinomları

Legendre polinomlarının özellikleri aşağıdaki şekilde verilebilir:

a) Legendre polinomları için Rodrigues formülü:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

b) Legendre polinomlarının bazı özel değerleri:

$$\begin{aligned}
P_n(1) &= 1, & P_n(-1) &= (-1)^n \\
P'_n(1) &= \frac{1}{2}n(n+1), & P'_n(-1) &= (-1)^{n-1} \frac{1}{2}n(n+1) \\
P_{2n}(0) &= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}, & P_{2n+1}(0) &= 0.
\end{aligned}$$

c) Legendre polinomlarının dikliği:

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}, \quad \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases} \quad \text{Kronecker delta}$$

## 2.4 Chebyshev Polinomları ve Özellikleri

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$$

ve

$$(1-x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y = 0$$

şeklinde ifade edilen Chebyshev diferansiyel denklemlerinin çözümü negatif olmayan  $n$  tamsayısı için ve  $x = \cos \theta$  olmak üzere

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= \cos(n\theta) \\
U_n(x) &= \sin((n+1)\theta/\sin \theta), \quad -1 \leq x \leq 1
\end{aligned}$$

sırasıyla birinci ve ikinci tip Chebyshev polinomlarıdır. Ayrıca bu fonksiyonlar

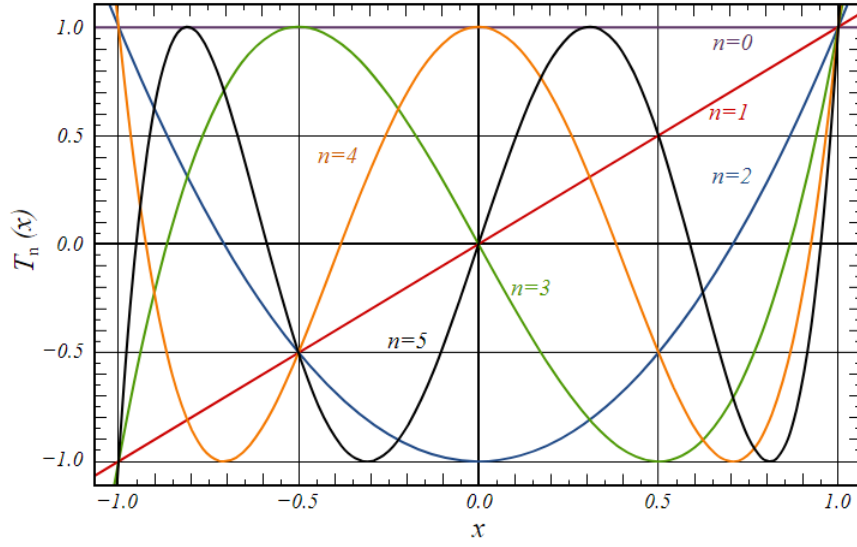
$$\begin{aligned}
T_n(x) &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{1}{2}n \rfloor} (-1)^k \frac{n!}{(2k)!(n-2k)!} (1-x^2)^k x^{n-2k} \\
U_n(x) &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{1}{2}(n-1) \rfloor} (-1)^k \frac{n!}{(2k+1)!(n-2k-1)!} (1-x^2)^{k+\frac{1}{2}} x^{n-2k-1}
\end{aligned}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

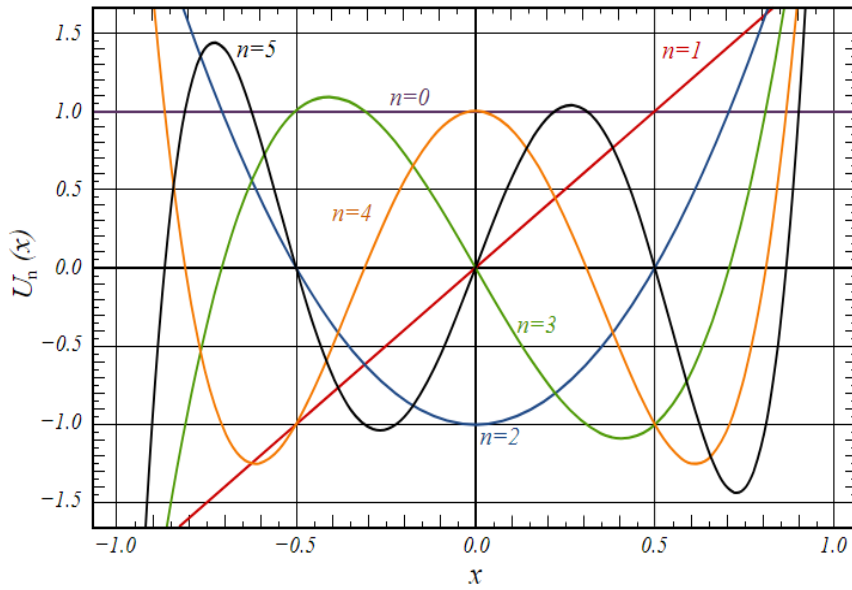
İlk altı birinci tip ve ilk dört ikinci Chebyshev polinomlarının açık hali aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$T_0(x) = 1$	$U_0(x) = 1$
$T_1(x) = x$	$U_1(x) = 2x$
$T_2(x) = 2x^2 - 1$	$U_2(x) = 4x^2 - 1$
$T_3(x) = 4x^3 - 3x$	$U_3(x) = 8x^3 - 4x$
$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$	$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$
$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$	$U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x$

İlk altı birinci ve ikinci tip Chebyshev polinomunun grafikleri Şekil 2.4 ve Şekil 2.5'te verilmiştir.



Şekil 2.4: Birinci tip Chebyshev polinomlarının ilk birkaçı



Şekil 2.5: İkinci tip Chebyshev polinomlarının ilk birkaçı



Birinci tip Chebyshev polinomlarının bazı özellikleri aşağıdaki şekilde verilebilir:

a) Chebyshev polinomları için Rodrigues formülü:

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n)!} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}},$$

b) Chebyshev polinomlarının bazı özel değerleri:

$$\begin{aligned} T_n(1) &= 1, & T_n(-1) &= (-1)^n \\ T_{2n}(0) &= (-1)^n, & T_{2n+1}(0) &= 0 \end{aligned}$$

c) Chebyshev polinomlarının dikliği:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi/2, & m = n \neq 0 \\ \pi, & m = n = 0 \end{cases}$$

## 2.5 Jacobi Polinomları ve Özellikleri

$$(1-x^2)y'' + \{\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x\}y' + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0$$

şeklinde ifade edilen Jacobi diferansiyel denkleminin çözümü  $\alpha, \beta > -1$  ve  $n \geq 0$  için

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(\alpha + k + 1)\Gamma(n + \beta - k + 1)(n - k)!k!} \left(\frac{x-1}{2}\right)^k \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-k} \\ P_n^{(\alpha, \beta)}(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + k + \alpha + \beta + 1)}{\Gamma(\alpha + k + 1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)(n - k)!k!} \left(\frac{x-1}{2}\right)^k \\ P_n^{(\alpha, \beta)}(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} \Gamma(n + \beta + 1)\Gamma(n + k + \alpha + \beta + 1)}{\Gamma(\beta + k + 1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)(n - k)!k!} \left(\frac{x+1}{2}\right)^k \end{aligned}$$

seri açılımları olan Jacobi polinomlarıdır. Bu polinomlar ortogondur:

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_m^{(\alpha, \beta)}(x) dx = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \beta + 1)}{(2n + \alpha + \beta + 1)n! \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)} \delta_{nm}.$$

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$  Jacobi polinomlarında  $\alpha = \beta = 0$  için  $P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x)$  Legendre polinomları,  $\alpha = \beta = -1/2$  için birinci tip Chebyshev polinomları,  $\alpha = \beta = 1/2$  için ise ikinci tip Chebyshev polinomları elde edilir. Dolayısıyla Legendre ve Chebyshev polinomları Jacobi polinomlarının özel halleridir.

### 3. KESİRLİ İNTEGRALLER

Kesirli integral için farklı tanımlar mevcuttur. Bunlardan bazıları aşağıdaki şekilde verilebilir.

**3.1 Tanım (Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri)**  $f(x)$ ,  $(0, \infty)$  'da parçalı sürekli ve  $[0, \infty)$  'un herhangi bir sonlu alt aralığında integrallenebilir bir fonksiyon ve  $\text{Re}(\alpha) > 0$  olsun. O zaman  $x > 0$  için

$${}_0D_x^{-\alpha} f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

integraline  $\alpha$ . mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali denir (Miller ve Ross 1993).

$f(x) \in L_1(a, b)$  ve  $\alpha > 0$  olmak üzere

$$(I_{a+}^{\alpha} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x > a$$

ve

$$(I_{b-}^{\alpha} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x < b$$

kesirli integralleri  $\alpha$ . mertebeden sol ve sağ taraflı Riemann-Liouville kesirli integralleri olarak adlandırılırlar (Samko ve diğ. 1993).

**3.2 Tanım (Chen Kesirli İntegrali)**  $c \in R^1$  keyfi nokta ve  $\alpha > 0$  olsun.

$$(I_c^{\alpha} f)(x) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, & x > c \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^c (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, & x < c \end{cases}$$

ifadesine Chen kesirli integrali denir (Samko ve diğ. 1993).

### 3.3 Tanım (Weyl Kesirli İntegrali)

$$W^{-\alpha} f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \text{Re}(\alpha) > 0, x > 0$$

eşitliğine Weyl kesirli integrali denir (Miller ve Ross 1993).

### 3.4 Tanım (Grünwald-Letnikov Kesirli İntegrali) Eğer $f(x)$ fonksiyonu

$m+1$  kez sürekli türevlere sahipse

$${}_a D_x^{-\alpha} f(x) := \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+k+1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+k} f^{(m+1)}(t) dt$$

eşitliğine Grünwald-Letnikov kesirli integrali denir (Podlubny 1999).

### 3.5 Tanım (Erdélyi-Kober Tip Kesirli İntegraller) $(a,b)$ $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$

$\mathbb{R}^+$  yarı ekseninin sonlu veya sonsuz bir aralığı,  $\sigma > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Re}(\alpha) > 0$  ve  $\eta \in \mathbb{C}$  olsun.

$$(I_{a+;\sigma,\eta}^{\alpha} f)(x) := \frac{\sigma x^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x^{\sigma} - t^{\sigma})^{\alpha-1} t^{\sigma\eta+\sigma-1} f(t) dt \quad (0 \leq a < x < b \leq \infty)$$

ve

$$(I_{b-;\sigma,\eta}^{\alpha} f)(x) := \frac{\sigma x^{\sigma\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t^{\sigma} - x^{\sigma})^{\alpha-1} t^{\sigma(1-\alpha-\eta)-1} f(t) dt \quad (0 \leq a < x < b \leq \infty)$$

$\alpha$ . mertebeden sırasıyla sol ve sağ taraflı tanımlanan integrallerdir.  $a = -\infty$  ve  $b = \infty$  alınırsa,

$$(I_{+;\sigma,\eta}^{\alpha} f)(x) := \frac{\sigma x^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x^{\sigma} - t^{\sigma})^{\alpha-1} t^{\sigma\eta+\sigma-1} f(t) dt \quad (x > 0)$$

ve

$$(I_{-;\sigma,\eta}^{\alpha} f)(x) := \frac{\sigma x^{\sigma\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} (t^{\sigma} - x^{\sigma})^{\alpha-1} t^{\sigma(1-\alpha-\eta)-1} f(t) dt \quad (x > 0)$$

notasyonları kullanılır. Yukarıdaki dört ifade de Erdélyi-Kober tip kesirli integraller olarak adlandırılır (Kilbas ve diğ. 2006).

**3.6 Tanım (Hadamard Tip Kesirli İntegraller)**  $\alpha > 0$  ve  $x > 0$  olmak üzere  $\alpha$ . mertebeden Hadamard kesirli integrali

$$(J_{0+}^{\alpha} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left( \log \frac{x}{t} \right)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt$$

olarak adlandırılır (Hadamard 1892).  $x > 0$ ,  $\alpha > 0$  ve  $\mu \in \mathbb{C}$  olmak üzere

$$(J_{0+,\mu}^{\alpha} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left( \frac{t}{x} \right)^{\mu} \left( \log \frac{x}{t} \right)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt$$

ve

$$(I_{0+,\mu}^{\alpha} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left( \frac{t}{x} \right)^{\mu} \left( \log \frac{x}{t} \right)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{x} dt$$

ifadeleri sol taraflı Hadamard tip integrallerdir.  $x > 0$ ,  $\alpha > 0$  ve  $\mu \in \mathbb{C}$  olmak üzere

$$(J_{-,\mu}^{\alpha} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} \left( \frac{x}{t} \right)^{\mu} \left( \log \frac{t}{x} \right)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt$$

ve

$$(I_{-,\mu}^{\alpha} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} \left( \frac{x}{t} \right)^{\mu} \left( \log \frac{t}{x} \right)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{x} dt$$

ifadeleri ise sağ taraflı Hadamard tip integrallerdir (Butzer ve diğ. 2002).

**3.7 Tanım (Katugampola Kesirli İntegrali)** Hem Riemann-Liouville hem de Hadamard kesirli integrallerini tek bir formda genelleştiren kesirli integrali

$${}_{a}^{\rho} I_x^{\alpha} f(x) := \frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x^{\rho+1} - t^{\rho+1})^{\alpha-1} t^{\rho} f(t) dt, \rho \neq -1, \alpha \in \mathbb{R}, \rho \in \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanıp Katugampola kesirli integrali olarak adlandırılır (Katugampola 2011).

### 3.8 Tanım (Cossar Kesirli İntegrali)

$$I_c^\alpha [f(x)] := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, x > c$$

eşitliğine Cossar kesirli integrali denir (De Oliveira ve Tenreiro Machado 2014).

### 3.9 Tanım (Lokal Kesirli Yang İntegrali)

$${}_a I_b^\alpha [f(x)] := \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b f(t) (dt)^\alpha$$

ifadesine lokal kesirli Yang integrali denir (De Oliveira ve Tenreiro Machado 2014).

### 3.10 Tanım (k-Kesirli Hilfer İntegrali)

$$I_k^\alpha f(x) := \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha/k-1} f(t) dt$$

ifadesine  $k$  – kesirli Hilfer integrali denir (De Oliveira ve Tenreiro Machado 2014).

**3.11 Tanım (Uyumlu (Conformable) Kesirli İntegral)**  $0 < \alpha \leq 1$  olmak üzere

$$(I_a^\alpha f)(x) := \int_a^x f(t) d\alpha(t, a) = \int_a^x (t-a)^{\alpha-1} f(t) dt$$

ve

$$({}^b I_\alpha f)(x) := \int_x^b f(t) d\alpha(b, t) = \int_x^b (b-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

operatörleri  $\alpha$ . mertebeden sol ve sağ uyumlu (conformable) kesirli integrallerdir (Abdeljawad 2015).

## 4. KESİRLİ İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, önce integral denklemlerden sonrasında sıralama noktalarına dayalı olarak geliştirilen iki farklı sıralama yönteminden bahsedilecektir.

İlk olarak, Yalçınbaş ve diğ. (2010) makalesinde ele alınan problemler kesirli olmayan integral denklemlerle ilgili olup çözümlerini bulmak için kullandıkları yöntemde kaynak fonksiyonunun tek değişkenli, çekirdek fonksiyonunun ise iki değişkenli Laguerre serisine açıldığı ve bu durumun kullanışlı olmadığı tespit edilmiştir. Ayrıca Akyüz ve Sezer (1999) çalışması da incelenmiştir. Bu çalışmada matris yöntemi olan Chebyshev sıralama yöntemi kullanılarak lineer integro-diferansiyel denklemler sayısal olarak çözülmüştür. Bunun üzerine sıralama yöntemi geliştirilmeye karar verilmiştir.

Bu incelenen makalelerin ışığında iki farklı yöntem geliştirilmiştir. İlk önce çekirdek tek değişkenli Laguerre serisine açılıp, kaynak fonksiyonunu seriye açmayarak sıralama noktalarına dayalı bir yöntem üzerinde çalışılmıştır. Daha sonra ise, sıralama noktalarına dayalı ancak çekirdek seriye açılmadan yeni bir yöntem geliştirilerek kesirli integral denklemler çözülmüştür.

### 4.1 İntegral Denklemler

İntegral denklemler fizik, kimya, biyoloji ve mühendislik problemlerinde ortaya çıkar. Ayrıca diferansiyel denklemlerin temsili formlarıdır.

$$y(x) = g(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)y(t)dt$$

integral denklem formunda;  $K(x,t)$  integral denklemin çekirdeği,  $y(x)$  bilinmeyen fonksiyon,  $\alpha(x)$  ve  $\beta(x)$  integrasyon sınırlarıdır.

Fredholm ve Volterra integral denklemleri en sık kullanılan lineer integral denklemlerdir. Volterra integral denklemlerinin standart formu

$$c(x)y(x) = g(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)y(t)dt$$

şeklindedir. Burada integral işareti altındaki  $y(x)$  bilinmeyen fonksiyonu lineer olarak görülür. Bu denklemde  $c(x) \equiv 0$  durumunda,

$$g(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)y(t)dt = 0$$

birinci tip Volterra integral denklemi olarak adlandırılır.  $c(x) \equiv 1$  olması durumunda ise,

$$y(x) = g(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)y(t)dt$$

ikinci tip Volterra integral denklemi olarak adlandırılır.  $c(x) \neq 0,1$  için üçüncü tip Volterra integral denklemi olarak sınıflandırılır.

İntegrasyonun alt limiti, üst limiti veya her ikisinin de sonsuz olması durumunda birinci tip veya ikinci tip integral denklemlere tekil denir. Ayrıca integrasyon bölgesinin bir veya daha fazla noktasında  $K(x,t)$  çekirdeği sonsuz ise bu birinci ve ikinci tip integral denklemler tekil integral denklem olarak adlandırılır. Bunlardan en temel olanı Abel integral denklemidir ve aşağıdaki şekilde verilir:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} y(t)dt = g(x), \quad x > 0, \quad 0 < \alpha < 1$$

(Samko ve diğ. 1993). Abel integral denklemi, birinci tip Volterra integral denklemlerinin bir özel durumudur, aynı zamanda çalışılan ilk kesirli integral denklemdir.

Ayrıca, ikinci tip Volterra integral denklemlerinin ikinci tip zayıf tekil olanı



$$y(x) = g(x) + \int_0^x \frac{\beta}{\sqrt{x-t}} y(t) dt, \quad x \in [0, T]$$

ile verilir. Bu denklem sıkça; ısı iletimi, kristal büyümesi ve elektrokimya gibi matematiksel fizik ve kimya uygulamalarında görülür. Burada  $\beta$  bir sabit ve açıklanan fen modeline bağlı olarak  $T = 1$ ,  $T = 2$ , veya  $T = 3$  tür (Wazwaz 1997).

## 4.2 Çözüm Yöntemi 1

$$y(x) = g(x) + \lambda \int_0^x K(x,t) y(t) dt, \quad 0 \leq x \leq b \quad (4.1)$$

ikinci tip Volterra integral denklemdir. Burada  $K(x,t)$  çekirdek fonksiyonu,  $\lambda$  ise sabittir.  $y(x)$  ise bilinmeyen fonksiyondur. (4.1) denkleminin çözümü

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n \phi_n(x) \quad (4.2)$$

olsun. Burada  $\phi_n(x)$ ,  $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ ,  $P_n(x)$ ,  $T_n(x)$ ,  $U_n(x)$ ,  $H_n(x)$ ,  $L_n(x)$  gibi  $n$ . dereceden ortogonal polinomlardır ve  $a_n$  ( $n = 0, 1, \dots, N$ ) bilinmeyen katsayılardır. (4.2) ile verilen kesilmiş Laguerre serisinin matris formu,

$$\Phi(x) = [\phi_0(x) \quad \phi_1(x) \quad \dots \quad \phi_N(x)],$$

$$\mathbf{A} = [a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_N]^T$$

olmak üzere

$$y_N(x) = \Phi(x) \mathbf{A} \quad (4.3)$$

şeklindedir.

Tek değişkene göre seriye açılan  $K(x,t)$  çekirdek fonksiyonu

$$K(x, t) \cong K_N(x, t) = \sum_{n=0}^N k_n(x) \phi_n(t)$$

formunda olsun.  $\mathbf{k}(x) = [k_0(x) \ k_1(x) \ \dots \ k_N(x)]$  olmak üzere

$$K_N(x, t) = \mathbf{k}(x) \boldsymbol{\phi}^T(t) \quad (4.4)$$

matris formunda yazılabilir. (4.3) ve (4.4) matris formları (4.1) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\boldsymbol{\phi}(x) \mathbf{A} = g(x) + \lambda \int_0^x \mathbf{k}(x) \boldsymbol{\phi}^T(t) \boldsymbol{\phi}(t) \mathbf{A} dt$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\mathbf{z}(x) = \int_0^x \boldsymbol{\phi}^T(t) \boldsymbol{\phi}(t) dt = \left[ \int_0^x \phi_i(t) \phi_j(t) dt \right] = [z_{ij}(x)], \quad i, j = 0, 1, \dots, N$$

olmak üzere

$$\{\boldsymbol{\phi}(x) - \lambda \mathbf{k}(x) \mathbf{z}(x)\} \mathbf{A} = g(x)$$

şeklinde lineer cebirsel denklem sistemi olarak yazılır. Burada sıralama noktaları yerlerine yazılırsa,

$$[\boldsymbol{\phi}(x_s) - \lambda \mathbf{k}(x_s) \mathbf{z}(x_s)] \mathbf{A} = g(x_s), \quad s = 0, 1, \dots, N$$

matris denklemini elde edilir. Bu lineer cebirsel denklem sistemi  $s = 0, 1, \dots, N$  için kısaca

$$(\boldsymbol{\Phi} - \lambda \mathbf{KZ}) \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (4.5)$$

matris formunda ifade edilir. Burada boyutları  $(N+1) \times (N+1)$ ,  $(N+1) \times 1$ ,  $(N+1) \times (N+1)^2$ ,  $(N+1)^2 \times (N+1)$  olan  $\boldsymbol{\Phi}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{Z}$  matrislerinin açık şekli aşağıdaki biçimdedir:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi(x_0) \\ \phi(x_1) \\ \vdots \\ \phi(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \dots & \phi_N(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \dots & \phi_N(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_0(x_N) & \phi_1(x_N) & \dots & \phi_N(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}(x_0) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}(x_1) & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{k}(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}(x_0) \\ \mathbf{z}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{z}(x_N) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_0(x_0) & k_1(x_0) & \dots & k_N(x_0) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k_0(x_1) & k_1(x_1) & \dots & k_N(x_1) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & k_0(x_N) & k_1(x_N) & \dots & k_N(x_N) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_{00}(x_0) & z_{01}(x_0) & \dots & z_{0N}(x_0) \\ z_{10}(x_0) & z_{11}(x_0) & \dots & z_{1N}(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{N0}(x_0) & z_{N1}(x_0) & \dots & z_{NN}(x_0) \\ z_{00}(x_1) & z_{01}(x_1) & \dots & z_{0N}(x_1) \\ z_{10}(x_1) & z_{11}(x_1) & \dots & z_{1N}(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{N0}(x_1) & z_{N1}(x_1) & \dots & z_{NN}(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{00}(x_N) & z_{01}(x_N) & \dots & z_{0N}(x_N) \\ z_{10}(x_N) & z_{11}(x_N) & \dots & z_{1N}(x_N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{N0}(x_N) & z_{N1}(x_N) & \dots & z_{NN}(x_N) \end{bmatrix}.$$

(4.5) lineer cebirsel denklem sistemi ifadesi  $\mathbf{WA} = \mathbf{G}$  şeklinde yazılabilir. Burada  $\mathbf{W} = \Phi - \lambda \mathbf{KZ}$  olup  $|\mathbf{W}| \neq 0$  ise

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{G}, \quad \lambda \neq 0 \quad (4.6)$$

olur. Böylece  $a_n$  ( $n=0,1,\dots,N$ ) bilinmeyen katsayıları (4.6) denkleminden bulunur.

Bu katsayılar (4.1) integral denkleminin tek çözümü olan (4.2)'de yerine yazılır.

### 4.3 Çözüm Yöntemi 2

$$c(x)y(x) = g(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)y(t)dt, \quad 0 \leq a \leq x \leq b \quad (4.7)$$

Volterra integral denkleminin çözümü araştırılacaktır. Burada  $\lambda$ 'nın sağındaki integral için Tanım 3.1'den Tanım 3.11'e kadar olan tanımlar alınırsa (4.7) denklemini

$$c(x)y(x) = g(x) + h(x)I^\alpha y(x), \quad 0 \leq a \leq x \leq b \quad (4.8)$$

şeklinde kesirli integral formu haline gelir. (4.7) Volterra integral denklemini için, çekirdeği ne seriye açmayı ne de sayısal integral hesaplamayı gerektiren bir sıralama yöntemi geliştirilmiştir. (4.7) integral denkleminin polinom çözümü (4.2) formunda olup, bu kesilmiş serinin matris formu (4.3) ile Bölüm 4.2'de verilmiştir. (4.3) matris formu ve sıralama noktaları (4.7) denkleminde yerlerine yazılıp denklem sadeleştirilirse,

$$\{c(x_s)\boldsymbol{\phi}(x_s) - \lambda \mathbf{v}(x_s)\} \mathbf{A} = \mathbf{g}(x_s), \quad s = 0, 1, \dots, N$$

sistemi elde edilir. Burada

$$\mathbf{v}(x) = \int_a^x K(x,t)\boldsymbol{\phi}(t)dt = \begin{bmatrix} v_0(x) & v_1(x) & \dots & v_N(x) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu lineer sistemin matris formu

$$(\mathbf{C}\boldsymbol{\Phi} - \lambda \mathbf{V})\mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (4.9)$$

olur. Burada boyutları  $(N+1) \times (N+1)$  olan  $\mathbf{C}$ ,  $\boldsymbol{\Phi}$ ,  $\mathbf{V}$  ve boyutu  $(N+1) \times 1$  olan  $\mathbf{G}$  matrislerinin açık hali aşağıdaki biçimdedir:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c(x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c(x_N) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}(x_0) \\ \boldsymbol{\phi}(x_1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\phi}(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \dots & \phi_N(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \dots & \phi_N(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_0(x_N) & \phi_1(x_N) & \dots & \phi_N(x_N) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}(x_0) \\ \mathbf{v}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{v}(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0(x_0) & v_1(x_0) & \dots & v_N(x_0) \\ v_0(x_1) & v_1(x_1) & \dots & v_N(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_0(x_N) & v_1(x_N) & \dots & v_N(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{bmatrix}.$$

Bilinmeyen  $\mathbf{A}$  matrisi, (4.9) eşitliği ile elde edilen denklem sistemi çözülerek bulunur. Böylece bu katsayılar (4.2)'de yerine yazılırsa (4.7) integral denkleminin çözümü elde edilir.

(4.8) eşitliğini  $m$  adet integral operatörü için genellersek,  $I^{\alpha_i}$  herhangi  $\alpha_i$ 'nci mertebeden kesirli integral olmak üzere

$$c(x)y(x) = g(x) + \sum_{i=0}^m h_i(x)I^{\alpha_i}y(x), \quad 0 \leq x \leq R \quad (4.10)$$

haline gelir. (4.3) matris formu ve sıralama noktaları (4.10) denkleminde yerlerine yazılıp denklem sadeleştirilirse,

$$\mathbf{I}^{\alpha_i}(x) = I^{\alpha_i}\boldsymbol{\phi}(x)$$

olmak üzere

$$\left\{ c(x_s)\boldsymbol{\phi}(x_s) - \sum_{i=0}^m h_i(x_s)\mathbf{I}^{\alpha_i}(x_s) \right\} \mathbf{A} = g(x_s), \quad s = 0, 1, \dots, N$$

sistemi elde edilir. Bu lineer sistemin matris formu

$$\left( \mathbf{C}\boldsymbol{\Phi} - \sum_{i=0}^m \mathbf{H}_i \mathbf{I}_i \right) \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (4.11)$$

olur. Burada boyutları  $(N+1) \times (N+1)$  olan  $\mathbf{H}_i$  ve  $\mathbf{I}_i$  matrislerinin açılımları aşağıdaki biçimdedir:

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} h_i(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_i(x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h_i(x_N) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{\alpha_i}(x_0) \\ \mathbf{I}^{\alpha_i}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{I}^{\alpha_i}(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I^{\alpha_i} \phi_0(x_0) & I^{\alpha_i} \phi_1(x_0) & \dots & I^{\alpha_i} \phi_N(x_0) \\ I^{\alpha_i} \phi_0(x_1) & I^{\alpha_i} \phi_1(x_1) & \dots & I^{\alpha_i} \phi_N(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I^{\alpha_i} \phi_0(x_N) & I^{\alpha_i} \phi_1(x_N) & \dots & I^{\alpha_i} \phi_N(x_N) \end{bmatrix}.$$

Bilinmeyen  $\mathbf{A}$  matrisi, (4.11) eşitliği ile elde edilen denklem sistemi çözümlenerek bulunur. Böylece bu katsayılar (4.2)'de yerine yazılırsa (4.10) kesirli integral denkleminin çözümü elde edilir.

## 5. UYGULAMALAR

Bu bölümde, (4.7) ve (4.10) eşitlikleri ile verilen kesirli integral denklemlerinde yöntemi örneklendirmek için sekiz tane problem verilmiştir. Bu örneklerde Laguerre, Hermite, Jacobi, Legendre ve Chebyshev polinomları kullanılarak çözümler elde edilmiştir.

Bölüm 4.2'de verilen Çözüm Yöntemi 1 ve Bölüm 4.3'te verilen Çözüm Yöntemi 2 ile birinci ve ikinci tip Volterra integral denklemleri ve kesirli integral olarak çeşitli örnekler çözülmüştür. Sayısal sonuçların gerçek sonuçlara olan yakınlığı tespit edilerek en iyi yaklaşımın elde edilmesinde Mathcad 15 ve Matlab R2015a'da program kodları yazılmıştır. Burada sonuçların program koduna göre farklı olup olmadığı analiz edilmek istenmiştir. Ayrıca elde edilen sonuçlar literatürde var olan sonuçlarla da karşılaştırılmıştır. Yeni yöntemin daha iyi ve daha hızlı olduğu gözlemlenmiştir.

Bu bölümde Laguerre, Hermite, Jacobi, Legendre, birinci ve ikinci tip Chebyshev polinomlarını kullanarak farklı sıralama noktaları için kesirli, Abel ve tekil integralleri içeren Volterra integral denklemlerin çözümleri ele alınacaktır.

Çözülecek örneklerde sıralama noktaları üzerinde tanımlı;

$$e(x_s) = |y(x_s) - y_N(x_s)|, \quad E_{\max} = \max_{0 \leq s \leq N} e(x_s), \quad E_{ort} = \frac{1}{N+1} \sum_{s=0}^N e(x_s)$$

formülleri mutlak hata, maksimum hata ve ortalama hataların hesabında kullanılmıştır.

Diğer taraftan  $(0, R]$  aralığı ve  $s = 0, 1, \dots, N$  için problemlerde kullanılan sıralama noktaları aşağıdaki üç şekildedir:

(a)  $x_s = \frac{s+1}{N+1} \cdot R$  (Eşit aralıklı noktalar)

(b)  $x_s = \frac{R}{2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{(s+1)\pi}{N+1}\right) \right]$  ( $T_{N+1}\left(\frac{2}{R}x - 1\right)$ 'in ekstrem noktaları)

$$(c) \quad x_s = \frac{R}{2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{(2s+1)\pi}{2(N+1)} \right) \right] \quad (T_{N+1} \left( \frac{2}{R} x - 1 \right) \text{'in sıfırları})$$

Eğer aralık 0 ve  $R$ 'yi içerirse, (a) ve (b)'de  $s+1$  ve  $N+1$  sırasıyla  $s$  ve  $N$  ile değiştirilir.

### 5.1 Örnek Zayıf tekil çekirdekli birinci tip Volterra integral denklemi

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} y(t) dt = x^5, \quad 0 \leq x \leq 1$$

verilsin. Bu denklemin tam çözümü  $y(x) = \frac{1280}{315\pi} x^{9/2}$  dir. Bu problemin Riemann-Liouville kesirli formu Tanım 3.1'den

$$\sqrt{\pi} I^{1/2} y(x) = x^5, \quad 0 \leq x \leq 1$$

ile gösterilir.

Verilen Abel integral denkleminde  $g(x) = x^5$  ve  $\lambda = -1$  dir. Bölüm 4.2'de verilen Çözüm Yöntemi 1 uygulandığında, (4.5)'ten

$$\mathbf{KZA} = \mathbf{G}$$

sistemi elde edilir.  $\mathbf{K}$  matrisini hesaplayabilmek için çekirdek önce

$$K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{x-t}} = (x-t)^{-\frac{1}{2}} = \left[ x \left( 1 - \frac{t}{x} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}} \left( 1 - \frac{t}{x} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

şeklinde yazılır ve

$$\left( 1 - \frac{t}{x} \right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{x} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2!} \cdot \left( \frac{t}{x} \right)^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3!} \left( \frac{t}{x} \right)^3 + \dots$$

binom serisinden faydalanılır.

$$K(x, t) \cong K_N(x, t) = \sum_{n=0}^N k_n(x) L_n(t)$$

olduğundan



$$K_1(x, t) = x^{-\frac{3}{2}} \left[ \left(x + \frac{1}{2}\right) L_0(t) - \frac{1}{2} L_1(t) \right]$$

$$K_2(x, t) = x^{-\frac{5}{2}} \left[ \left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) L_0(t) + \left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right) L_1(t) + \frac{3}{4} L_2(t) \right]$$

$$K_3(x, t) = x^{-\frac{7}{2}} \left[ \left(x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{15}{8}\right) L_0(t) + \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{45}{8}\right) L_1(t) \right. \\ \left. + \left(\frac{3}{4}x + \frac{45}{8}\right) L_2(t) - \frac{15}{8} L_3(t) \right]$$

$$K_4(x, t) = x^{-\frac{9}{2}} \left[ \left(x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{15}{8}x + \frac{105}{16}\right) L_0(t) + \left(-\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{45}{8}x - \frac{105}{4}\right) L_1(t) \right. \\ \left. + \left(\frac{3}{4}x^2 + \frac{45}{8}x + \frac{315}{8}\right) L_2(t) + \left(-\frac{15}{8}x - \frac{105}{4}\right) L_3(t) + \frac{105}{16} L_4(t) \right]$$

$$K_5(x, t) = x^{-\frac{11}{2}} \left[ \left(x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{4}x^3 + \frac{15}{8}x^2 + \frac{105}{16}x + \frac{945}{32}\right) L_0(t) \right. \\ \left. + \left(-\frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{45}{8}x^2 - \frac{105}{4}x - \frac{4725}{32}\right) L_1(t) \right. \\ \left. + \left(\frac{3}{4}x^3 + \frac{45}{8}x^2 + \frac{315}{8}x + \frac{4725}{16}\right) L_2(t) + \left(-\frac{15}{8}x^2 - \frac{105}{4}x - \frac{4725}{16}\right) L_3(t) \right. \\ \left. + \left(\frac{105}{16}x + \frac{4725}{32}\right) L_4(t) - \frac{945}{32} L_5(t) \right]$$

$$K_6(x, t) = x^{-\frac{13}{2}} \left[ \left(x^6 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{15}{8}x^3 + \frac{105}{16}x^2 + \frac{945}{32}x + \frac{10395}{64}\right) L_0(t) \right. \\ \left. + \left(-\frac{1}{2}x^5 - \frac{3}{2}x^4 - \frac{45}{8}x^3 - \frac{105}{4}x^2 - \frac{4725}{32}x - \frac{31185}{32}\right) L_1(t) \right. \\ \left. + \left(\frac{3}{4}x^4 + \frac{45}{8}x^3 + \frac{315}{8}x^2 + \frac{4725}{16}x + \frac{155925}{64}\right) L_2(t) \right. \\ \left. + \left(-\frac{15}{8}x^3 - \frac{105}{4}x^2 - \frac{4725}{16}x - \frac{51975}{16}\right) L_3(t) \right. \\ \left. + \left(\frac{105}{16}x^2 + \frac{4725}{32}x + \frac{155925}{64}\right) L_4(t) + \left(-\frac{945}{32}x - \frac{31185}{32}\right) L_5(t) \right. \\ \left. + \frac{10395}{64} L_6(t) \right]$$

elde edilir.

Laguerre polinomları ve  $x_s = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{s\pi}{N+1}\right) \right]$ ,  $s = 1, 2, \dots, N+1$  sıralama noktaları kullanılarak problem çözülmüştür. Tablo 5.1'de  $x_i = i/N$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$  noktaları ve farklı  $N$  değerleri için elde edilen mutlak hatalar Mathcad 15'de hesaplatılarak verilmiştir. Burada  $N$  değerinin arttıkça Çözüm Yöntemi 1 sonuçlarının iyileştiği ancak yine de çözümlerin çok iyi olmadığı gözlemlenmiştir.

**Tablo 5.1:** Laguerre polinomu kullanarak Örnek 5.1 için  $e(i / N)$  değerleri

$x_i$	$N=2$	$N=3$	$N=4$	$N=5$	$N=6$
0.0	0.332	0.074	$4.68 \times 10^{-3}$	$1.834 \times 10^{-4}$	$5.51 \times 10^{-4}$
0.1	0.048	0.016	$1.825 \times 10^{-3}$	$6.121 \times 10^{-5}$	$3.162 \times 10^{-5}$
0.2	0.118	0.034	$1.548 \times 10^{-4}$	$9.259 \times 10^{-4}$	$7.217 \times 10^{-4}$
0.3	0.17	0.021	$7.218 \times 10^{-3}$	$5.494 \times 10^{-3}$	$4.887 \times 10^{-3}$
0.4	0.114	0.012	0.024	0.02	0.018
0.5	0.038	0.042	0.061	0.054	0.049
0.6	0.272	0.137	0.137	0.123	0.111
0.7	0.567	0.322	0.276	0.245	0.222
0.8	0.896	0.612	0.505	0.447	0.404
0.9	1.225	1.017	0.859	0.76	0.686
1.0	1.515	1.542	1.376	1.221	1.103

Aynı probleme Bölüm 4.3'te verilen Çözüm Yöntemi 2 uygulandığında, (4.9)'dan  $\mathbf{VA} = \mathbf{G}$  temel matris bağıntısı elde edilir.  $N=10$  ve  $s = 0,1,\dots,10$   $x_s = [1 - \cos((s+1)\pi / 11)] / 2$ , için farklı ortogonal polinomlar kullanılarak Mathcad 15'de hesaplanan mutlak hata sonuçları Tablo 5.2'de karşılaştırılmıştır. Ortalama hata sonuçları ise Mathcad 15 kullanılarak  $s = 0,1,\dots,N$  olmak üzere  $x_s = (s+1)/(N+1)$  ve  $x_s = [1 - \cos((s+1)\pi / (N+1))] / 2$  noktaları için sırasıyla Tablo 5.3 ve Tablo 5.4'te verilmiştir. Bu tablolar incelendiğinde  $N=7$ 'ye kadar Tablo 5.3'teki değerlerin Tablo 5.4'ten daha iyi olduğu sonraki  $N$  değerleri için ise Tablo 5.4'ün Tablo 5.3'ten daha iyi olduğu gözükmektedir.

Elde edilen sonuçlardan da görüldüğü üzere Çözüm Yöntemi 2, Çözüm Yöntemi 1'den daha iyidir. Tablo 5.2'den,  $N = 10$  için Hermite polinomları kullanılarak elde edilen mutlak hata değerlerinin diğer polinomlara göre daha küçük olduğu ve ortalama hatanın  $10^{-8}$  mertebeden olduğu görülmektedir. Tablo 5.3 ve Tablo 5.4'te ise  $N = 7$  için ortalama hata  $10^{-7}$  mertebeden elde edilmiştir. Burada  $N=7$  ve (a) sıralama noktaları için Jacobi (1,1) ve birinci tip Chebyshev polinomları kullanımında sonuçların iyi olduğu gözlemlenmektedir. Verilen problemde; Bhattacharya ve Mandal (2008) Bernstein polinomlarını kullanarak  $N = 10$  için mutlak hatayı  $10^{-7}$  mertebeden elde etmişlerdir. Ayrıca Rahman ve diğ. (2012), Laguerre polinomlarını kullanarak  $N = 10$  için mutlak hatayı  $10^{-8}$  mertebeden bulmuşlardır. Dolayısıyla sunulan yöntemin yukarıda bahsedilen iki yöntemden daha iyi olduğu görülmektedir.

**Tablo 5.2:** Örnek 5.1'in farklı ortogonal fonksiyonları ve  $N=10$  için  $e(x_s)$  değerleri

$x_s$	Laguerre	Hermite	Jacobi(0,1)	Jacobi(1,1)	Legendre	Chebyshev (birinci tip)	Chebyshev (ikinci tip)
$x_0$	$1.5 \times 10^{-7}$	$7.7 \times 10^{-8}$	$7.8 \times 10^{-8}$	$2.7 \times 10^{-7}$	$7.8 \times 10^{-8}$	$7.8 \times 10^{-8}$	$7.8 \times 10^{-8}$
$x_1$	$1 \times 10^{-7}$	$4.5 \times 10^{-8}$	$4.6 \times 10^{-8}$	$3.3 \times 10^{-7}$	$4.5 \times 10^{-8}$	$4.6 \times 10^{-8}$	$4.6 \times 10^{-8}$
$x_2$	$8.4 \times 10^{-8}$	$2.8 \times 10^{-8}$	$2.9 \times 10^{-8}$	$6.2 \times 10^{-7}$	$2.9 \times 10^{-8}$	$2.9 \times 10^{-8}$	$2.9 \times 10^{-8}$
$x_3$	$8.2 \times 10^{-8}$	$1.9 \times 10^{-8}$	$2 \times 10^{-8}$	$4.7 \times 10^{-7}$	$1.9 \times 10^{-8}$	$2 \times 10^{-8}$	$2 \times 10^{-8}$
$x_4$	$2.1 \times 10^{-7}$	$1.3 \times 10^{-8}$	$1.4 \times 10^{-8}$	$5.8 \times 10^{-8}$	$1.4 \times 10^{-8}$	$1.4 \times 10^{-8}$	$1.4 \times 10^{-8}$
$x_5$	$8 \times 10^{-8}$	$8.4 \times 10^{-9}$	$1 \times 10^{-8}$	$9.5 \times 10^{-8}$	$1 \times 10^{-8}$	$1 \times 10^{-8}$	$1 \times 10^{-8}$
$x_6$	$5.9 \times 10^{-7}$	$9.9 \times 10^{-9}$	$7.3 \times 10^{-9}$	$2.3 \times 10^{-8}$	$7.1 \times 10^{-9}$	$7.3 \times 10^{-9}$	$7.3 \times 10^{-9}$
$x_7$	$8 \times 10^{-7}$	$9.3 \times 10^{-9}$	$6.5 \times 10^{-9}$	$4.5 \times 10^{-8}$	$6.2 \times 10^{-9}$	$6.5 \times 10^{-9}$	$6.5 \times 10^{-9}$
$x_8$	$5 \times 10^{-7}$	$6 \times 10^{-9}$	$3.4 \times 10^{-9}$	$9.4 \times 10^{-9}$	$2.8 \times 10^{-9}$	$3.4 \times 10^{-9}$	$3.4 \times 10^{-9}$
$x_9$	$1.6 \times 10^{-6}$	$5.9 \times 10^{-9}$	$4.7 \times 10^{-9}$	$2.7 \times 10^{-8}$	$5.5 \times 10^{-9}$	$4.7 \times 10^{-9}$	$4.7 \times 10^{-9}$
$x_{10}$	$2.3 \times 10^{-6}$	$3.9 \times 10^{-10}$	$1.1 \times 10^{-9}$	$1.1 \times 10^{-9}$	$3.3 \times 10^{-9}$	$1.1 \times 10^{-9}$	$1.1 \times 10^{-9}$

**Tablo 5.3:** Örnek 5.1'in sıralama noktası (a) için  $E_{ort}$  değerleri

Ortogonal polinomlar	$N=4$	$N=5$	$N=6$	$N=7$	$N=8$	$N=9$	$N=10$
Laguerre	$4.8 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$	$6.5 \times 10^{-5}$	$2.4 \times 10^{-5}$	$3.7 \times 10^{-6}$	$1.2 \times 10^{-5}$	$1.7 \times 10^{-6}$
Hermite	$5.2 \times 10^{-4}$	$2.4 \times 10^{-5}$	$3.2 \times 10^{-6}$	$7 \times 10^{-7}$	$2.1 \times 10^{-7}$	$7.1 \times 10^{-8}$	$2.7 \times 10^{-8}$
Jacobi(0,1)	$5.2 \times 10^{-4}$	$2.4 \times 10^{-5}$	$3.2 \times 10^{-6}$	$7 \times 10^{-7}$	$3.9 \times 10^{-7}$	$7.2 \times 10^{-8}$	$2.9 \times 10^{-8}$
Jacobi(1,1)	$5.2 \times 10^{-4}$	$2.4 \times 10^{-5}$	$3.2 \times 10^{-6}$	$6.9 \times 10^{-7}$	$2.1 \times 10^{-7}$	$2.3 \times 10^{-7}$	$2.9 \times 10^{-8}$
Legendre	$5.2 \times 10^{-4}$	$2.3 \times 10^{-5}$	$3.2 \times 10^{-6}$	$7.1 \times 10^{-7}$	$2.1 \times 10^{-7}$	$9.1 \times 10^{-7}$	$2.9 \times 10^{-8}$
1. Chebyshev	$5.2 \times 10^{-4}$	$2.4 \times 10^{-5}$	$3.2 \times 10^{-6}$	$6.9 \times 10^{-7}$	$2.1 \times 10^{-7}$	$5.9 \times 10^{-7}$	$2.9 \times 10^{-8}$
2. Chebyshev	$5.2 \times 10^{-4}$	$2.4 \times 10^{-5}$	$3.2 \times 10^{-6}$	$7.5 \times 10^{-7}$	$2.1 \times 10^{-7}$	$2.4 \times 10^{-7}$	$2.9 \times 10^{-8}$

**Tablo 5.4:** Örnek 5.1'in sıralama noktası (b) için  $E_{ort}$  değerleri

Ortogonal polinomlar	$N=4$	$N=5$	$N=6$	$N=7$	$N=8$	$N=9$	$N=10$
Laguerre	$5.5 \times 10^{-4}$	$1.5 \times 10^{-4}$	$1.3 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-5}$	$9.8 \times 10^{-6}$	$4.8 \times 10^{-7}$	$5.9 \times 10^{-7}$
Hermite	$5.9 \times 10^{-4}$	$2.8 \times 10^{-5}$	$3.6 \times 10^{-6}$	$7.1 \times 10^{-7}$	$1.8 \times 10^{-7}$	$5.7 \times 10^{-8}$	$2 \times 10^{-8}$
Jacobi(0,1)	$5.9 \times 10^{-4}$	$2.8 \times 10^{-5}$	$3.6 \times 10^{-6}$	$7.1 \times 10^{-7}$	$1.9 \times 10^{-7}$	$5.6 \times 10^{-8}$	$2 \times 10^{-8}$
Jacobi(1,1)	$5.9 \times 10^{-4}$	$2.8 \times 10^{-5}$	$3.6 \times 10^{-6}$	$7.1 \times 10^{-7}$	$1.8 \times 10^{-7}$	$5.7 \times 10^{-8}$	$1.8 \times 10^{-7}$
Legendre	$5.9 \times 10^{-4}$	$2.8 \times 10^{-5}$	$3.6 \times 10^{-6}$	$7.2 \times 10^{-7}$	$1.8 \times 10^{-7}$	$1.1 \times 10^{-7}$	$2 \times 10^{-8}$
1. Chebyshev	$5.9 \times 10^{-4}$	$2.8 \times 10^{-5}$	$3.6 \times 10^{-6}$	$7.2 \times 10^{-7}$	$1.8 \times 10^{-7}$	$8.4 \times 10^{-8}$	$2 \times 10^{-8}$
2. Chebyshev	$5.9 \times 10^{-4}$	$2.8 \times 10^{-5}$	$3.6 \times 10^{-6}$	$7.1 \times 10^{-7}$	$1.9 \times 10^{-7}$	$5.8 \times 10^{-8}$	$2 \times 10^{-8}$

**5.2 Örnek** Tam çözümü  $y(x) = x^3 - x^2 + 1$  olan

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} y(t) dt = \frac{2}{105} \sqrt{x} (105 - 56x^2 + 48x^3), \quad 0 \leq x \leq 1$$

Abel integral denklemi (zayıf tekil çekirdekli birinci tip Volterra integral denklemi) göz önüne alınsın. Bu problemin Riemann-Liouville kesirli formu Tanım 3.1'den

$$\sqrt{x} I^{1/2} y(x) = \frac{2}{105} \sqrt{x} (105 - 56x^2 + 48x^3), \quad 0 \leq x \leq 1$$

ile gösterilir.

Çözüm Yöntemi 1 uygulandığında temel matris bağıntısı

$$\mathbf{KZA} = \mathbf{G}$$

şeklinde olup  $x_s = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{s\pi}{N+1}\right) \right]$ ,  $s = 1, 2, \dots, N+1$  sıralama noktaları ve Laguerre polinomları kullanılarak Mathcad 15'de hesaplanan mutlak hatalar Tablo 5.5'te verilir. Ayrıca Tablo 5.5'te mutlak hatalar  $x_i = i/N$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$  noktaları ve farklı  $N$  değerleri için hesaplanmıştır. Burada  $N$  değerinin arttıkça Çözüm Yöntemi 1 sonuçlarının yavaş olarak iyileştiği ancak yine de çözümlerin çok iyi olmadığı gözlemlenmiştir.

**Tablo 5.5:** Örnek 5.2 için  $e(i/N)$  değerleri

$x_i$	$N=2$	$N=3$	$N=4$	$N=5$	$N=6$
0.0	0.579	0.376	0.326	0.291	0.265
0.1	0.46	0.369	0.32	0.286	0.26
0.2	0.383	0.351	0.305	0.272	0.248
0.3	0.342	0.329	0.286	0.255	0.232
0.4	0.333	0.309	0.268	0.24	0.218
0.5	0.347	0.296	0.257	0.23	0.209
0.6	0.381	0.296	0.257	0.23	0.209
0.7	0.427	0.317	0.275	0.245	0.223
0.8	0.479	0.362	0.314	0.28	0.254
0.9	0.532	0.439	0.38	0.339	0.307
1.0	0.58	0.554	0.479	0.426	0.386

Çözüm Yöntemi 2 uygulandığında ise, (4.9)'dan

$$\mathbf{VA} = \mathbf{G}$$

temel matris bağıntısı elde edilir. Burada ise sıralama noktaları  $x_0 = 0.25$ ,  $x_1 = 0.5$ ,  $x_2 = 0.75$ ,  $x_3 = 1$  seçilerek  $N = 3$  için Laguerre polinomlarını kullanarak temel denklemdaki matrisler

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{6} & \frac{41}{60} & \frac{461}{840} \\ \sqrt{2} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{5} & \frac{4\sqrt{2}}{21} \\ \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3\sqrt{3}}{20} & -\frac{23\sqrt{3}}{280} \\ 2 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{15} & -\frac{58}{105} \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \frac{409}{420} \\ \frac{97\sqrt{2}}{105} \\ \frac{25\sqrt{3}}{28} \\ \frac{194}{105} \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Sistem, Mathcad 15'te sembolik hesaplamayla çözdürüldüğünde  $\mathbf{A} = [5 \ -14 \ 16 \ -6]^T$  tam çözümü elde edilir. Aynı sonuç Matlab R2015a kullanılarak da elde edilmiştir.

Elde edilen sonuçlardan da görüldüğü üzere Çözüm Yöntemi 2, Çözüm Yöntemi 1'den daha iyidir. Üstelik Çözüm Yöntemi 2 problemin tam çözümünü vermiştir.

Verilen problemin;  $N = 3$  için Tau yöntemi (Vanani ve Soleymani 2013), Chebyshev yöntemi (Avazzadeh ve diğ. 2011), Legendre dalgacık yöntemi (Yousefi 2006), kaydırılmış Legendre sıralama yöntemi (Saadatmandi ve Dehghan 2008) ve Bernstein polinomu çoklu dalgacık yaklaşımları (Yousefi 2010) kullanılarak tam çözümü bulunmuştur. Ayrıca Sohrabi (2011)  $N = 4$  için Chebyshev dalgacık yöntemini uygulayarak tam çözümü elde etmiştir. Yang (2014) Laplace dönüşümünü kullanarak Mathematica'da sembolik hesaplamayla tam çözümü bulmuştur.  $N = 10$  için Maleknejad ve diğ. (2011) Bernstein yaklaşımını kullanarak mutlak hatayı  $10^{-7}$  mertebeden elde etmişlerdir. Aynı  $N$  değeri için Rahman ve diğ. (2012) Laguerre polinomlarını kullanarak mutlak hatayı  $10^{-16}$  mertebeden elde etmişlerdir. Noeiaghdam ve diğ. (2016)  $x = 1$  ve  $N = 20$  için homotopi analiz dönüşüm yöntemini uygulayarak mutlak hatayı  $10^{-7}$  mertebeden bulmuşlardır. Dolayısıyla verilen Çözüm Yöntemi 2 bahsedilen diğer yöntemlerden daha hassas ve hızlıdır.

### 5.3 Örnek Zayıf tekil ikinci tip Volterra integral denklemi

$$y(x) = x + \frac{4}{3}x^{3/2} - \int_0^x \frac{y(t)}{\sqrt{x-t}} dt, \quad 0 \leq x \leq 1$$

göz önüne alınsın. Bu denklemin tam çözümü  $y(x) = x$  dir. Bu problemin Riemann-Liouville kesirli formu Tanım 3.1'den

$$y(x) = x + \frac{4}{3}x^{3/2} - \sqrt{\pi} I^{1/2} y(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

ile ifade edilir. Çözüm Yöntemi 2 uygulandığında, (4.9)'dan

$$(\Phi + \mathbf{V})\mathbf{A} = \mathbf{G}$$

formunda temel matris bağıntısı elde edilir.  $N = 1$  ve  $x_0 = 0, x_1 = 1$  sıralama noktaları için Laguerre polinomlarını kullanarak ana denklemdeki matrisler

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

haline gelir. Sistem, Mathcad 15 ve Matlab R2015a'da sembolik hesaplamayla çözülmüşse bilinmeyen katsayılar matrisi  $\mathbf{A} = [1 \quad -1]^T$  olarak elde edilir. Buradan da verilen problemin tam çözümüne ulaşılır.

Verilen problem için; Pandey ve diğ. (2009),  $N = 18$  için homotopi pertürbasyon yöntemini kullanarak sırasıyla  $\approx 0.005$  ve  $\approx 0.5$  maksimum hata, maksimum bağıl hata değerlerini elde etmişlerdir. Ayrıca Adomian ayrıştırma yöntemiyle  $O(x^{2+N/2})$  hata ile yaklaşık çözümü bulmuşlardır. Bunların yanında hem modifiye homotopi pertürbasyon hem de modifiye Adomian ayrıştırma yöntemlerini de kullanarak tam çözümü elde etmişlerdir. Tam çözümü bulmak için Li ve Clarkson (2018) Babenko yaklaşımını uygulamışlardır. Bunlara ek olarak,  $N \geq 1$  için Avazzadeh ve diğ. (2011) Chebyshev polinomlarını, Abdelkawy ve diğ. (2015) spektral sıralama yöntemini kullanarak tam çözümü bulmuşlardır. Singh ve diğ. (2012)  $N = 14$  ve farklı yakınsaklık parametreleri için homotopi analiz yöntemini kullanarak  $\approx 10^{-10}$  mutlak hatalı analitik yaklaşık çözümler elde etmişlerdir. Kumar ve diğ. (2015), homotopi pertürbasyon dönüşüm yöntemini kullanarak  $N = 25$  için

maksimum hatayı  $7.1 \times 10^{-5}$  olarak bulmuşlardır. Verilen yöntem; homotopi yöntemlerinden daha iyi, aynı doğruluğa sahip diğer yöntemlerden ise daha hızlıdır.

**5.4 Örnek** Tam çözümü  $y(x) = x^2$  olan

$$y(x) = x^2 + \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}} - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} y(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1$$

zayıf tekil Volterra integral denklemi ele alınsın. Bu problemin Erdélyi-Kober tip kesirli formu Tanım 3.5'ten

$$y(x) = x^2 + \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}} - \sqrt{\pi x} I_{0+;1,0}^{1/2} y(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

ile gösterilir. Çözüm Yöntemi 2 uygulandığında, (4.11)'den

$$(\Phi + \mathbf{H}_0 \mathbf{I}_0) \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

bağıntısı elde edilir.  $N = 2$  ve  $x_0 = 0.25, x_1 = 0.75, x_2 = 1$  sıralama noktaları için

Legendre polinomları kullanılarak  $h_0(x) = \sqrt{\pi x}$  olmak üzere

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{\pi}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3\pi}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\pi} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I}_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \begin{bmatrix} 2 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{5} \\ 2 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 2 & \frac{2}{3} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{23}{240} \\ \frac{3\sqrt{3}}{10} + \frac{9}{16} \\ \frac{31}{15} \end{bmatrix}$$

matrisleri elde edilir. Sistem, Mathcad 15'de sembolik hesaplamayla çözülmüşse

$\mathbf{A} = [1/3 \quad 1/2 \quad 1/6]^T$  bulunur. Böylece problemin tam çözümüne ulaşılr.

Yousefi (2006),  $N = 2$  için Legendre dalgacıklarını kullanarak tam çözümü elde etmiştir. Homotopi pertürbasyon yöntemi ile Pandey ve diğ. (2009)  $N = 18$  için maksimum hatayı yaklaşık 0.00076 bulmuşlardır. Ayrıca hem modifiye homotopi pertürbasyon hem de modifiye Adomian ayrıştırma yöntemlerini de kullanarak tam çözümü elde etmişlerdir. Shamsavaran (2011) Block-Pulse fonksiyonları yardımıyla mutlak hatayı  $10^{-3}$  mertebeden bulmuşlardır.  $N = 14$  için Singh ve diğ. (2012) homotopi analiz yöntemini uygulayarak yaklaşık çözüm bulmuşlardır. Noeiaghdam ve diğ. (2016) homotopi analiz dönüşüm yöntemini kullanarak  $N = 20$  için maksimum hatayı yaklaşık  $3.5 \times 10^{-12}$  olarak elde etmişlerdir. Dolayısıyla verilen çözüm yöntemi bahsedilen diğer yöntemlerden daha hassas ve hızlıdır.

**5.5 Örnek** Tam çözümü  $y(x) = \pi x^3$  olan

$$\frac{2}{3} \pi x^3 = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2 - t^2}} y(t) dt, \quad 0 < x < 2$$

Volterra integral denklemi ele alınsın (Eker 2014). Bu problemin Erdélyi-Kober kesirli formu Tanım 3.5'ten

$$\frac{4}{3} \sqrt{\pi} x^3 = I_{0+;2,-1/2}^{1/2} y(x), \quad 0 < x < 2$$

ile ifade edilir. Çözüm Yöntemi 2 uygulandığında,  $\mathbf{VA} = \mathbf{G}$  temel matris bağıntısı elde edilir. Burada  $N = 3$  için Legendre polinomları ve  $x_0 = 0.5, x_1 = 1, x_2 = 1.5, x_3 = 2$  sıralama noktaları kullanılarak

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} & 1 - \frac{\pi}{2} & \frac{19\pi}{32} - \frac{3}{2} & \frac{77}{24} - \frac{31\pi}{32} \\ \frac{\pi}{2} & 1 - \frac{\pi}{2} & \frac{7\pi}{8} - 3 & \frac{23}{3} - \frac{19\pi}{8} \\ \frac{\pi}{2} & \frac{3}{2} - \frac{\pi}{2} & \frac{43\pi}{32} - \frac{9}{2} & \frac{117}{8} - \frac{151\pi}{32} \\ \frac{\pi}{2} & 2 - \frac{\pi}{2} & 2\pi - 6 & \frac{76}{3} - 8\pi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \pi/12 \\ 2\pi/3 \\ 9\pi/4 \\ 16\pi/3 \end{bmatrix}$$

matrisleri elde edilir. Bu sistem Matlab R2015a'da sembolik hesaplamayla çözülerek  $\mathbf{A} = [2\pi \quad 18\pi/5 \quad 2\pi \quad 2\pi/5]^T$  elde edilip tam çözüm bulunmuştur. Aynı sonuçlar Mathcad 15 kullanılarak da elde edilmiştir. Ayrıca aynı  $N$  değeri ve sıralama



noktaları için diğer ortogonal polinomlardan olan Laguerre, Hermite, birinci ve ikinci tip Chebyshev polinomları da kullanılarak hem Matlab R2015a'da hem de Mathcad 15'te sembolik hesaplamayla problemin tam çözümü bulunmuştur.

### 5.6 Örnek Tam çözümü $y(x) = x^2$ olan

$$\int_0^x \frac{x^2 t^3 + t^4 + 1}{(x-t)^{1/4}} y(t) dt = \frac{32768}{100947} x^{3/4} + \frac{262144}{908523} x^{27/4} + \frac{128}{231} x^{11/4}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Volterra integral denklemi göz önüne alınsın. Bu problemin Erdélyi-Kober kesirli formu Tanım 3.5'ten

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \left[ x^{23/4} I_{0+;1,3}^{3/4} y(x) + x^{19/4} I_{0+;1,4}^{3/4} y(x) + x^{3/4} I_{0+;1,0}^{3/4} y(x) \right] = g(x)$$

ile gösterilir. Burada  $g(x) = \frac{32768}{100947} x^{3/4} + \frac{262144}{908523} x^{27/4} + \frac{128}{231} x^{11/4}$  dir.

Çözüm Yöntemi 2 uygulandığında,  $\sum_{i=0}^2 \mathbf{H}_i \mathbf{I}_i \mathbf{A} = \mathbf{G}$  veya  $\mathbf{V} \mathbf{A} = \mathbf{G}$  temel matris bağıntısı elde edilir.  $N=2$  için Laguerre polinomları ve  $x_0=1/3, x_1=2/3, x_2=1$  sıralama noktaları kullanılarak, Mathcad 15'te sembolik hesaplamayla sistem çözülmüştür.  $a_0=2, a_1=-4, a_2=2$  elde edilip tam çözüm bulunmuştur. Ayrıca  $N=2$  için Matlab R2015a kullanılarak  $1.1 \times 10^{-17}$  ortalama hatalar elde edilmiştir.

Liu ve Tao (2006), orta nokta, yamuk kuadratur, ortalamaları, kombinasyon sonuçları ve posteriori yaklaşım yöntemlerini kullanarak  $h=0.025$  durumunda sırasıyla  $1 \times 10^{-3}, 8 \times 10^{-3}, 4 \times 10^{-3}, 5 \times 10^{-5}, 5 \times 10^{-3}$  maksimum hataları elde etmişlerdir. Bunun yanında, Liu ve Tao (2007), orta nokta ve yamuk kuadratur yöntemleri, Richardson ekstrapolasyonları ve katlı integral yöntemleriyle  $h=0.025$  ve  $x=1$  durumunda sırasıyla  $4 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-4}, 1 \times 10^{-6}, 2 \times 10^{-3}$  mutlak hatalarını bulmuşlardır. Ayrıca  $h=0.0125$  ve  $x=1$  için orta nokta ve yamuk kuadratur yöntemleri, Richardson ekstrapolasyonları ve katlı integral yöntemlerini kullanarak sırasıyla  $1 \times 10^{-5}, 3 \times 10^{-5}, 2 \times 10^{-8}, 7 \times 10^{-4}$  mutlak hatalarını elde etmişlerdir. Çözümü elde ederken 40 ve 80 nokta kullanmışlardır. Halbuki biz 3 nokta kullandık. Sunulan yöntem bahsedilen quadrature yöntemlerinden daha hassas ve daha hızlıdır. Üstelik Abdelkawy ve diğ. (2015), spektral sıralama yöntemini kullanarak  $N \geq 2$  için tam

çözümü elde etmişlerdir. Geliştirilen çözüm yöntemi burada bahsedilen yöntemlerden daha pratiktir.

**5.7 Örnek** Tam çözümü  $y(x) = x^4$  olan

$$\frac{6}{25}x^{25/6} = \int_0^x \frac{1}{(x^5 - t^5)^{1/6}} y(t) dt, \quad 0 < x < 2$$

Volterra integral denklemi ele alınsın (Eker 2014). Bu problemin Erdélyi-Kober kesirli formu Tanım 3.5'ten

$$\frac{6}{5\Gamma(\frac{5}{6})}x^4 = I_{0+;5,-4/5}^{5/6}y(x), \quad 0 < x < 2$$

ile ifade edilir. Çözüm Yöntemi 2 uygulandığında,  $\mathbf{VA} = \mathbf{G}$  temel matris bağıntısı elde edilir.

Sunulan yöntem uygulanarak  $N=4$  için Matlab R2015a'da hesaplanan maksimum ve ortalama hata değerleri Tablo 5.6'da verilmiştir. Tablo 5.6 incelendiğinde, hemen hemen tüm polinomların hatalarının (c) noktaları kullanılarak daha iyi çıktığı gözlemlenir. Ayrıca, (a) ve (c) sıralama noktaları için Hermite, (b) sıralama noktası için ise ikinci tip Chebyshev polinomları kullanılarak maksimum ve ortalama hataların diğer polinomlara göre daha küçük olduğu görülmektedir. Burada çözümün polinom olmasına rağmen tam olarak elde edilememesi sebebi integral kısmının sembolik olarak hesaplanamamasından kaynaklanır.

**Tablo 5.6:** Örnek 5.7 için  $E_{\max}$  ve  $E_{ort}$  değerleri

Ortogonal polinomlar	Maksimum hata			Ortalama hata		
	a	b	c	a	b	c
Laguerre	$3.47 \times 10^{-14}$	$2.17 \times 10^{-14}$	$1.45 \times 10^{-14}$	$1.22 \times 10^{-14}$	$1.17 \times 10^{-14}$	$7.65 \times 10^{-15}$
Hermite	$9.56 \times 10^{-16}$	$4.77 \times 10^{-15}$	$7.37 \times 10^{-16}$	$4.12 \times 10^{-16}$	$1.40 \times 10^{-15}$	$2.40 \times 10^{-16}$
Jacobi(0,1)	$6.18 \times 10^{-15}$	$2.79 \times 10^{-15}$	$1.94 \times 10^{-15}$	$1.95 \times 10^{-15}$	$1.59 \times 10^{-15}$	$1.17 \times 10^{-15}$
Jacobi(1,1)	$3.95 \times 10^{-15}$	$2.12 \times 10^{-15}$	$2.12 \times 10^{-15}$	$1.50 \times 10^{-15}$	$8.08 \times 10^{-16}$	$7.23 \times 10^{-16}$
Legendre	$4.78 \times 10^{-15}$	$2.11 \times 10^{-15}$	$1.99 \times 10^{-15}$	$1.63 \times 10^{-15}$	$1.03 \times 10^{-15}$	$5.26 \times 10^{-16}$
1. Chebyshev	$6.84 \times 10^{-15}$	$3.13 \times 10^{-15}$	$3.09 \times 10^{-15}$	$2.09 \times 10^{-15}$	$1.17 \times 10^{-15}$	$7.86 \times 10^{-16}$
2. Chebyshev	$1.48 \times 10^{-15}$	$1.47 \times 10^{-15}$	$3.45 \times 10^{-15}$	$6.83 \times 10^{-16}$	$6.67 \times 10^{-16}$	$8.61 \times 10^{-16}$

Mathcad 15'te sembolik hesaplanamıyor. Sayısal hesaplanarak elde edilen maksimum ve ortalama hata değerleri Tablo 5.7'de verilmiştir. Burada (a) sıralama

noktası için ikinci tip Chebyshev polinomu, (b) sıralama noktası için Laguerre polinomu, (c) sıralama noktası için ise Hermite polinomları en iyi yaklaşımları verir. Tablo 5.7’de elde edilen sonuçlara göre hatalar muazzam bir şekilde değişiyor. Belli bir düzen yoktur.

**Tablo 5.7:** Örnek 5.7 için Mathcad 15’teki  $E_{\max}$  ve  $E_{ort}$  değerleri

Ortogonal polinomlar	Maksimum hata			Ortalama hata		
	a	b	c	a	b	c
Laguerre	$1.44 \times 10^{-3}$	$5.64 \times 10^{-11}$	$1.81 \times 10^{-3}$	$4.45 \times 10^{-4}$	$2.46 \times 10^{-11}$	$5.81 \times 10^{-4}$
Hermite	$8.88 \times 10^{-11}$	$2.1 \times 10^{-6}$	$8.13 \times 10^{-11}$	$2.79 \times 10^{-11}$	$1.27 \times 10^{-6}$	$2.45 \times 10^{-11}$
Jacobi(0,1)	$3.03 \times 10^{-4}$	$2.79 \times 10^{-5}$	$1.98 \times 10^{-4}$	$1.76 \times 10^{-4}$	$1.44 \times 10^{-5}$	$5.26 \times 10^{-5}$
Jacobi(1,1)	$8.97 \times 10^{-11}$	$2.15 \times 10^{-7}$	$2.49 \times 10^{-6}$	$2.8 \times 10^{-11}$	$1.3 \times 10^{-7}$	$1.09 \times 10^{-6}$
Legendre	$1.11 \times 10^{-4}$	$1.61 \times 10^{-5}$	$1.23 \times 10^{-4}$	$3.42 \times 10^{-5}$	$4.68 \times 10^{-6}$	$3.22 \times 10^{-5}$
1. Chebyshev	$1.22 \times 10^{-3}$	$1.05 \times 10^{-4}$	$4.92 \times 10^{-4}$	$4.58 \times 10^{-4}$	$3.03 \times 10^{-5}$	$1.32 \times 10^{-4}$
2. Chebyshev	$8.85 \times 10^{-11}$	$1.05 \times 10^{-6}$	$2.49 \times 10^{-6}$	$2.79 \times 10^{-11}$	$3.44 \times 10^{-7}$	$1.09 \times 10^{-6}$

### 5.8 Örnek Tam çözümü $y(x) = \cos x$ olan

$$\frac{4}{3}(\sin x)^{3/4} = \int_0^x \frac{1}{(\sin x - \sin t)^{1/4}} y(t) dt, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

tekil Volterra integral denklemi göz önüne alınsın (Eker 2014). Bu denklem kesirli integrallerin mevcut tanımlarından dolayı kesirli formda ifade edilemez.

Yöntem yedi farklı polinom ve (a), (b), (c) ile verilen üç farklı sıralama noktaları için kullanıldığında maksimum hatalar sırasıyla Tablo 5.8, Tablo 5.9 ve Tablo 5.10’da verilmiştir. Sonuçlar Mathcad 15’te sayısal olarak hesaplanmıştır. Fakat Matlab R2015a’da integral kısmı hesaplanamamıştır.

**Tablo 5.8:** Örnek 5.8 için (a) sıralama noktasını kullanarak  $E_{\max}$  değerleri

Ortogonal polinomlar	$N=2$	$N=3$	$N=4$	$N=5$	$N=6$	$N=7$	$N=8$	$N=9$	$N=10$
Laguerre	$1.4 \times 10^{-2}$	$1.2 \times 10^{-3}$	$1.5 \times 10^{-4}$	$1.3 \times 10^{-5}$	$1.6 \times 10^{-6}$	$5.7 \times 10^{-5}$	$5.7 \times 10^{-8}$	$9.9 \times 10^{-6}$	$6.5 \times 10^{-7}$
Hermite	$1.4 \times 10^{-2}$	$1.2 \times 10^{-3}$	$1.8 \times 10^{-4}$	$1.2 \times 10^{-5}$	$1.2 \times 10^{-6}$	$6.7 \times 10^{-8}$	$2.4 \times 10^{-6}$	$4.5 \times 10^{-9}$	$5.2 \times 10^{-9}$
Jacobi(0,1)	$1.4 \times 10^{-2}$	$1.2 \times 10^{-3}$	$1.8 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-5}$	$2.6 \times 10^{-6}$	$6.5 \times 10^{-8}$	$1.3 \times 10^{-5}$	$7.7 \times 10^{-8}$	$5 \times 10^{-4}$
Jacobi(1,1)	$1.4 \times 10^{-2}$	$1.2 \times 10^{-3}$	$1.8 \times 10^{-4}$	$1.3 \times 10^{-5}$	$1.2 \times 10^{-6}$	$3.8 \times 10^{-6}$	$2.2 \times 10^{-9}$	$1.2 \times 10^{-5}$	$3.5 \times 10^{-6}$
Legendre	$1.4 \times 10^{-2}$	$1.2 \times 10^{-3}$	$1.8 \times 10^{-4}$	$1.3 \times 10^{-5}$	$1.2 \times 10^{-6}$	$3.9 \times 10^{-6}$	$3.9 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-5}$	$4.3 \times 10^{-9}$
1. Chebyshev	$1.4 \times 10^{-2}$	$1.2 \times 10^{-3}$	$1.8 \times 10^{-4}$	$9.3 \times 10^{-6}$	$1.2 \times 10^{-6}$	$3.9 \times 10^{-6}$	$1.3 \times 10^{-6}$	$1.3 \times 10^{-5}$	$4.2 \times 10^{-4}$
2. Chebyshev	$1.4 \times 10^{-2}$	$1.2 \times 10^{-3}$	$1.8 \times 10^{-4}$	$1.3 \times 10^{-5}$	$1.2 \times 10^{-6}$	$4 \times 10^{-6}$	$1.4 \times 10^{-7}$	$1.3 \times 10^{-5}$	$4.5 \times 10^{-9}$

**Tablo 5.9:** Örnek 5.8 için (b) sıralama noktasını kullanarak  $E_{\max}$  değerleri

Ortogonal polinomlar	$N=2$	$N=3$	$N=4$	$N=5$	$N=6$	$N=7$	$N=8$	$N=9$	$N=10$
Laguerre	$1.2 \times 10^{-2}$	$1.4 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-4}$	$1.8 \times 10^{-5}$	$2.8 \times 10^{-5}$	$2.2 \times 10^{-8}$	$3.9 \times 10^{-6}$	$8.8 \times 10^{-7}$	$4.8 \times 10^{-9}$
Hermite	$1.2 \times 10^{-2}$	$1.4 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-4}$	$8.2 \times 10^{-6}$	$4.3 \times 10^{-7}$	$2.4 \times 10^{-8}$	$6.1 \times 10^{-9}$	$7.4 \times 10^{-9}$	$5.8 \times 10^{-9}$
Jacobi(0,1)	$1.2 \times 10^{-2}$	$1.4 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-4}$	$8.2 \times 10^{-6}$	$4.3 \times 10^{-7}$	$2.5 \times 10^{-8}$	$4.3 \times 10^{-9}$	$4.7 \times 10^{-6}$	$3.4 \times 10^{-7}$
Jacobi(1,1)	$1.2 \times 10^{-2}$	$1.4 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-4}$	$8 \times 10^{-6}$	$4.3 \times 10^{-7}$	$4.3 \times 10^{-7}$	$1.2 \times 10^{-8}$	$5 \times 10^{-7}$	$1.9 \times 10^{-8}$
Legendre	$1.2 \times 10^{-2}$	$1.4 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-4}$	$8 \times 10^{-6}$	$4.3 \times 10^{-7}$	$4.5 \times 10^{-7}$	$4.9 \times 10^{-9}$	$6.1 \times 10^{-7}$	$6.6 \times 10^{-9}$
1.Chebyshev	$1.2 \times 10^{-2}$	$1.4 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-4}$	$8 \times 10^{-6}$	$4.3 \times 10^{-7}$	$4 \times 10^{-7}$	$4.6 \times 10^{-9}$	$5.2 \times 10^{-7}$	$7.7 \times 10^{-6}$
2.Chebyshev	$1.2 \times 10^{-2}$	$1.4 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-4}$	$8 \times 10^{-6}$	$4.3 \times 10^{-7}$	$4.5 \times 10^{-7}$	$6 \times 10^{-8}$	$5.2 \times 10^{-7}$	$6.8 \times 10^{-9}$

**Tablo 5.10:** Örnek 5.8 için (c) sıralama noktasını kullanarak  $E_{\max}$  değerleri

Ortogonal polinomlar	$N=2$	$N=3$	$N=4$	$N=5$	$N=6$	$N=7$	$N=8$	$N=9$	$N=10$
Laguerre	$2.6 \times 10^{-2}$	$3.2 \times 10^{-3}$	$3.3 \times 10^{-4}$	$2.9 \times 10^{-5}$	$1.6 \times 10^{-6}$	$1.8 \times 10^{-7}$	$1.5 \times 10^{-8}$	$1.6 \times 10^{-7}$	$2.1 \times 10^{-6}$
Hermite	$2.6 \times 10^{-2}$	$3.2 \times 10^{-3}$	$3.3 \times 10^{-4}$	$2.4 \times 10^{-5}$	$1.6 \times 10^{-6}$	$3.5 \times 10^{-7}$	$5.4 \times 10^{-9}$	$2.6 \times 10^{-9}$	$3.6 \times 10^{-9}$
Jacobi(0,1)	$2.6 \times 10^{-2}$	$3.2 \times 10^{-3}$	$3.3 \times 10^{-4}$	$2.4 \times 10^{-5}$	$1.6 \times 10^{-6}$	$1.1 \times 10^{-7}$	$2.6 \times 10^{-6}$	$3 \times 10^{-7}$	$1.6 \times 10^{-5}$
Jacobi(1,1)	$2.6 \times 10^{-2}$	$3.2 \times 10^{-3}$	$3.3 \times 10^{-4}$	$2.4 \times 10^{-5}$	$9.8 \times 10^{-7}$	$8.4 \times 10^{-8}$	$6.8 \times 10^{-7}$	$2.8 \times 10^{-7}$	$8.3 \times 10^{-7}$
Legendre	$2.6 \times 10^{-2}$	$3.2 \times 10^{-3}$	$3.3 \times 10^{-4}$	$2.4 \times 10^{-5}$	$9.1 \times 10^{-7}$	$8.3 \times 10^{-8}$	$6.6 \times 10^{-7}$	$2 \times 10^{-9}$	$5.1 \times 10^{-6}$
1.Chebyshev	$2.6 \times 10^{-2}$	$3.2 \times 10^{-3}$	$3.3 \times 10^{-4}$	$2.4 \times 10^{-5}$	$9.6 \times 10^{-7}$	$9.7 \times 10^{-8}$	$9.1 \times 10^{-7}$	$5.5 \times 10^{-7}$	$8.1 \times 10^{-7}$
2.Chebyshev	$2.6 \times 10^{-2}$	$3.2 \times 10^{-3}$	$3.3 \times 10^{-4}$	$2.4 \times 10^{-5}$	$9.6 \times 10^{-7}$	$8.4 \times 10^{-8}$	$7 \times 10^{-7}$	$2.1 \times 10^{-8}$	$7.8 \times 10^{-7}$

Tablo 5.8, Tablo 5.9 ve Tablo 5.10’da incelendiğinde genel olarak (b) sıralama noktaları kullanılarak elde edilen sonuçların (a) ve (c)’den daha iyi olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca  $N = 7$ ’ye kadar hataların giderek azaldığı daha sonra ise böyle bir düzenin olmadığı gözlemlenmektedir. Bundan dolayı hangi polinomun en iyi sonucu verdiğini söylemek mümkün olamamaktadır.

## 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında; kesirli, Abel ve tekil integralleri içeren Volterra integral denklemlerini çözmek için ortogonal polinomlara dayalı Çözüm Yöntemi 1 ve Çözüm Yöntemi 2 olmak üzere iki farklı sıralama yöntemi sunulmuştur. Bunların çözümünde yedi çeşit ortogonal polinom (Laguerre, Hermite, Jacobi(0,1), Jacobi(1,1), Legendre, birinci ve ikinci tip Chebyshev polinomları) için üç çeşit sıralama noktaları kullanılmıştır.

Sunulan yöntemlerle sekiz farklı problem Mathcad 15 ve Matlab R2015a'da yazılan program kodları yardımıyla çözülmüştür. Bu problemlerin 4 tanesi Erdélyi-Kober kesirli formu, 3 tanesi Riemann-Liouville kesirli formu ile ifade edilirken 1 tanesi de kesirli formda ifade edilemeyendir. Problemlerin çözümünde mutlak, maksimum ve ortalama hatalar hesaplanmıştır. Bu hata değerleri on adet tabloda verilmiştir. Elde edilen çözümler literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Çoğu yöntemden (Chebyshev dalgacık yöntemi, Bernstein yaklaşımı, Galerkin ağırlıklı kalanlar yöntemi, homotopi analiz dönüşüm yöntemi, homotopi pertürbasyon yöntemi, Adomian ayrıştırma yöntemi, homotopi analiz yöntemi, homotopi pertürbasyon dönüşüm yöntemi, Block-Pulse fonksiyonları ve Taylor açılımına dayalı sıralama yöntemi, quadrature yöntemleri) daha iyi sonuçların elde edildiği gözlemlenmiştir, bazıları (Tau yöntemi, Legendre dalgacık yöntemi, kaydırılmış Legendre sıralama yöntemi, Bernstein polinomu çoklu dalgacık yaklaşımları, Babenko yaklaşımı, Laplace dönüşümü) ile aynı doğruluk derecesine sahip olmasına rağmen, sunulan yöntem daha hızlıdır.

Örnek 5.1 ve Örnek 5.2 iki yöntemle de çözülmüş,  $N$  arttıkça Çözüm Yöntemi 1'in Çözüm Yöntemi 2'ye göre daha yavaş yakınsamakta olduğu gözlemlendiği için kalan diğer örneklerin hepsi Çözüm Yöntemi 2 ile çözülmüştür. Ayrıca Çözüm Yöntemi 2 literatürde var olan diğer yöntemlerden daha hızlı ve daha yakınsaktır. Eğer çözüm bir polinomsa hem Mathcad 15 hem de Matlab R2015a'da sembolik hesaplamayla tam çözüm elde edilmiştir. Polinom olmayan çözümlerde ise sayısal yaklaşım elde edilmiştir. Çözülen sayısal örneklerde az sayıdaki  $N$  terimleri için iyi yaklaşımlar bulunmuştur. Yaklaşık

Çözümlerin doğruluğu iyi derecededir. Sayısal sonuçlar, yöntemin geçerliliğini ve uygulanabilirliğini gösterir. Doęruluęu yüksek ve mevcut yöntemlerle karşılaştırılabilir.

## 7. KAYNAKLAR

Abbas, M. I., “On the Existence of Locally Attractive Solutions of a Nonlinear Quadratic Volterra Integral Equation of Fractional Order”, *Adv. Difference Equ.*, 2010, (2010).

Abdeljawad, T., “On Conformable Fractional Calculus”, *J. Comput. Appl. Math.*, 279, 57-66, (2015).

Abdelkawy, M.A., Ezz-Eldien, S.S. and Amin, A.Z.M., “A Jacobi Spectral Collocation Scheme for Solving Abel’s Integral Equations”, *Progr. Fract. Differ. Appl.*, 1 (3), 187–200, (2015).

Akyüz, A. and Sezer, M., “A Chebyshev Collocation Method for the Solution of Linear Integro-Differential Equations”, *Int. J. Comput. Math.*, 72 (4), 491-507, (1999).

Atangana, A. and Bildik, N., “Existence and Numerical Solution of the Volterra Fractional Integral Equations of the Second Kind”, *Math. Probl. Eng.*, 2013, 1-11 (2013).

Avazzadeh, Z., Shafiee, B. and Loghmani, G. B., “Fractional Calculus for Solving Abel’s Integral Equations Using Chebyshev Polynomials”, *Appl. Math. Sci.*, 5 (45), 2207-2216, (2011).

Babolian, E. and Shamloo, A. S., “Numerical Solution of Volterra Integral and Integro-Differential Equations of Convolution Type by Using Operational Matrices of Piecewise Constant Orthogonal Functions”, *J. Comput. Appl. Math.*, 214, 495–508, (2008).

Banaś, J. and Rzepka, B., “The Technique of Volterra-Stieltjes Integral Equations in the Application to Infinite Systems of Nonlinear Integral Equations of Fractional Orders”, *Comput. Math. Appl.*, 64, 3108-3116, (2012).

Bandrowski, B., Karczewska, A. and Rozmej, P., “Numerical Solutions to Integral Equations Equivalent to Differential Equations with Fractional Time”, *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 20 (2), 261-269, (2010).

Baratella, P. and Orsi, A.P., “A New Approach to the Numerical Solution of Weakly Singular Volterra Integral Equations”, *J. Comput. Appl. Math.*, 163, 401–418, (2004).

Bayın, S. Ş., *Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler*, Ankara: METU Press, (2000).

- Beals, R. and Wong, R., *Special Functions*, New York: Cambridge University Press, (2010).
- Becker, L. C., “Properties of the Resolvent of a Linear Abel Integral Equation: Implications for a Complementary Fractional Equation”, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, (64), 1-38, (2016).
- Bell, W. W., *Special Functions for Scientists and Engineers*, London: D. Van Nostrand Company, (1968).
- Bhattacharya, S. and Mandal, B. N., “Use of Bernstein Polynomials in Numerical Solutions of Volterra Integral Equations”, *Appl. Math. Sci.*, 2 (36), 1773–1787, (2008).
- Bougoffa, L., Rach, R. C. and Mennouni, A., “A Convenient Technique for Solving Linear and Nonlinear Abel Integral Equations by the Adomian Decomposition Method”, *Appl. Math. Comput.*, 218 (5), 1785-1793, (2011).
- Brunner, H., Crisci, M. R., Russo, E. and Vecchio, A., “A Family of Methods for Abel Integral Equations of the Second Kind”, *J. Comput. Appl. Math.*, 34, 211-219, (1991).
- Butzer, P. L., Kilbas, A. A. ve Trujillo, J. J., “Mellin Transform Analysis and Integration by Parts for Hadamard-Type Fractional Integrals”, *J. Math. Anal. Appl.*, 270, 1-15, (2002).
- Cao, Y., Herdman, T. and Xu, Y., “A Hybrid Collocation Method for Volterra Integral Equations with Weakly Singular Kernels”, *SIAM J. Numer. Anal.*, 41 (1), 364–381, (2003).
- Chakrabarti, A. and George, A. J., “A Formula for the Solution of General Abel Integral Equation”, *Appl. Math. Lett.*, 7 (2), 87-90, (1994).
- Chen, Q., Wang, J., Chen, F. and Zhang, Y., “Periodic Solutions of Quadratic Weyl Fractional Integral Equations”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 19 (6), 1945-1955, (2014).
- Darwish, M. A. and El-Bary, A. A., “Existence of Fractional Integral Equation with Hysteresis”, *Appl. Math. Comput.*, 176, 684-687, (2006).
- Darwish, M. A., “On Existence and Asymptotic Behaviour of Solutions of a Fractional Integral Equation”, *Appl. Anal.*, 88 (2), 169-181, (2009).
- Darwish, M. A., “On a Perturbed Quadratic Fractional Integral Equation of Abel type”, *Comput. Math. Appl.*, 61 (2), 182-190, (2011).
- Daşcıoğlu, A. and Sezer, M., *Diferansiyel Denklemler 2 Teori ve Problem Çözümleri*, Bursa: Dora, (2017).



- De Oliveira, E. C. and Tenreiro Machado, J. A., “A Review of Definitions for Fractional Derivatives and Integral”, *Math. Probl. Eng.*, 2014, (2014).
- Dhage, B. C., Dhage, S. B. and Graef, J. R., “Local Attractivity and Stability Analysis of a Nonlinear Quadratic Fractional Integral Equation”, *Appl. Anal.*, 95 (9), 1989-2003, (2016).
- Dixit, S., Pandey, R. K., Kumar, S. and Singh, O. P., “Solution of the Generalized Abel Integral Equation by Using Almost Bernstein Operational Matrix”, *Am. J. Comput. Math.*, 1, 226–234, (2011).
- Dos Santos, M. A. F., “Non-Gaussian Distributions to Random Walk in the Context of Memory Kernels”, *Fractal Fract.*, 2 (3), 1-15, (2018).
- Eker, E., “Abel ve Tekil İntegral Denklemlerin Farklı Çözüm Metotları”, Yüksek Lisans Tezi, *Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Erzurum, (2014).
- Eshaghi, J., Adibi, H. and Kazem, S., “Solution of Nonlinear Weakly Singular Volterra Integral Equations Using the Fractional-Order Legendre Functions and Pseudospectral Method”, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 39 (12), 3411-3425, (2016).
- Fathizadeh, E., Ezzati, R. And Maleknejad, K., “Hybrid Rational Haar Wavelet and Block Pulse Functions Method for Solving Population Growth Model and Abel Integral Equations”, *Math. Probl. Eng.*, 2017, (2017).
- Fernandez, A., “An Elliptic Regularity Theorem for Fractional Partial Differential Operators”, *Comput. Appl. Math.*, 37 (4), 5542–5553, (2018).
- Gholami, Y. and Ghanbari, K., “Existence of Positive Solution for a Coupled Hybrid System of Quadratic Fractional Integral Equations”, *Azerb. J. Math.*, 6 (2), 13-23, (2016).
- Hadamard, J., “Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor”, *J. Pure Appl. Math.*, 4 (8), 101-186, (1892).
- Huang, L., Huang, Y. and Li, X.-F., “Approximate Solution of Abel Integral Equation”, *Comput. Math. Appl.*, 56 (7), 1748-1757, (2008).
- Jahanshahi, S., Babolian, E., Torres, D. F. M. and Vahidi, A., “Solving Abel Integral Equations of First Kind via Fractional Calculus”, *J. King Saud Univ. Sci.*, 27 (2), 161-167, (2015).
- Jleli, M., Mursaleen, M. and Samet, B., “Q-Integral Equations of Fractional Orders”, *Electron. J. Differential Equations*, 2016 (17), 1-14, (2016).

- Jleli, M. and Samet, B., “Solvability of a Q-Fractional Integral Equation Arising in the Study of an Epidemic Model”, *Adv. Difference Equ.*, 2017:21, (2017).
- Kalitvin, V. A., “Numerical Solution of Integral Equations with Fractional and Partial Integrals and Variable Integration Limits”, *J. Math. Sci.*, 219 (1), 143-149, (2016).
- Katugampola, U. N., “New Approach to a Generalized Fractional Integral”, *Appl. Math. Comput.*, 218 (3), 860-865 (2011).
- Khan, M. and Gondal, M.A., “A Reliable Treatment of Abel’s Second Kind Singular Integral Equations”, *Appl. Math. Lett.*, 25, 1666–1670 (2012).
- Kilbas, A.A., Srivastava, H.M. ve Trujillo, J.J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, 1st ed.; Elsevier B.V.: Amsterdam, The Netherlands, (2006).
- Kumar, S., Kumar, A., Kumar, D., Singh, J. and Singh, A., “Analytical Solution of Abel Integral Equation Arising in Astrophysics via Laplace Transform”, *J. Egypt. Math. Soc.*, 23 (1), 102-107, (2015).
- Lebedev, N. N., *Special Functions and Their Applications*, USA: Prentice-Hall Englewood Cliffs, N. J., (1965).
- Lepik, Ü., “Solving Fractional Integral Equations by the Haar Wavelet Method”, *Appl. Math. Comput.*, 214, 468-478, (2009).
- Li, C. and Clarkson, K., “Babenko’s Approach to Abel’s Integral Equations”, *Mathematics*, 6 (3), 1-15, (2018).
- Liu, Y. P. and Tao, L., “High Accuracy Combination Algorithm and A Posteriori Error Estimation for Solving the First Kind Abel Integral Equations”, *Appl. Math. Comput.*, 178, 441-451, (2006).
- Liu, Y. P. and Tao, L., “Mechanical Quadrature Methods and Their Extrapolation for Solving First Kind Abel Integral Equations”, *J. Comput. Appl. Math.*, 201, 300-313, (2007).
- Maleknejad, K., Hashemizadeh, E. and Ezzati, R., “A New Approach to the Numerical Solution of Volterra Integral Equations by Using Bernstein’s Approximation”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 16, 647–655, (2011).
- Malinowski, M. T., “Random Fuzzy Fractional Integral Equations-Theoretical Foundations”, *Fuzzy Sets and Systems*, 265, 39-62, (2015).
- Micula, S., “An Iterative Numerical Method for Fractional Integral Equations of the Second Kind”, *J. Comput. Appl. Math.*, 339, 124–133, (2018).

- Miller, K. S. and Ross, B., *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, New York: John Wiley & Sons, (1993).
- Muslim, M., Conca, C. and Nandakumaran, A. K., “Approximation of Solutions to Fractional Integral Equation”, *Comput. Math. Appl.*, 59, 1236-1244, (2010).
- Nemutlu, E. E., *Dua Kader Değiştirir*, İstanbul: Olimpos Yayınları, (2018).
- Nieto, J. J. and Samet, B., “Solvability of an Implicit Fractional Integral Equation via a Measure of Noncompactness Argument”, *Acta Math. Sci. Ser. B*, 37 (1), 195-204, (2017).
- Noeiaghdam, S., Zarei, E. and Kelishami, H. B., “Homotopy Analysis Transform Method for Solving Abel’s Integral Equations of the First Kind”, *Ain Shams Eng. J.*, 7, 483-495, (2016).
- Pandey, R. K., Singh, O. P. and Singh, V. K., “Efficient Algorithms to Solve Singular Integral Equations of Abel Type”, *Comput. Math. Appl.*, 57, 664–676, (2009).
- Pandey, R. K., Sharma, S. and Kumar, K., “Collocation Method for Generalized Abel’s Integral Equations”, *J. Comput. Appl. Math.*, 302, 118-128, (2016).
- Piessens, R., “Computing Integral Transforms and Solving Integral Equations Using Chebyshev Polynomial Approximations”, *J. Comput. Appl. Math.*, 121 (1-2), 113–124, (2000).
- Podlubny, I., *Fractional Differential Equations*, 198, San Diego: Academic Press, (1999).
- Rahman, M., *Integral Equations and their Applications*, Southampton, Boston: Wit Press, (2007).
- Rahman, M. A., Islam, M. S. ve Alam, M. M., “Numerical Solutions of Volterra Integral Equations Using Laguerre Polynomials”, *J. Sci. Res.*, 4 (2), 357-364, (2012).
- Rainville, E.D., *Special Functions*, USA: The Macmillan Company (N. Y.), (1960).
- Saadatmandi, A. and Dehghan, M. “A Collocation Method for Solving Abel’s Integral Equations of First and Second Kinds”, *Z. Naturforsch. A*, 63, 752–756, (2008).
- Samko, S. G., Kilbas, A. A. and Marichev, O. I., *Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications*, Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, (1993).

- Sandev, T., “Generalized Langevin Equation and the Prabhakar Derivative”, *Mathematics*, 5, 66, (2017).
- Setia, A. and Pandey, R. K., “Laguerre Polynomials Based Numerical Method to Solve a System of Generalized Abel Integral Equations”, *Procedia Eng.*, 38, 1675-1682, (2012).
- Shahsavaran, A., “Numerical Approach to Solve Second Kind Volterra Integral Equation of Abel Type Using Block-Pulse Functions and Taylor Expansion by Collocation Method”, *Appl. Math. Sci.*, 5, 685–696, (2011).
- Singh, K. K., Pandey, R. K., Mandal, B. N. and Dubey, N., “An Analytical Method for Solving Singular Integral Equations of Abel Type”, *Procedia Eng.*, 38, 2726-2738, (2012).
- Sohrabi, S., “Comparison Chebyshev Wavelets Method with BPFs Method for Solving Abel’s Integral Equation”, *Ain Shams Eng. J.*, 2, 249-254, (2011).
- Vanani, S. K. and Soleymani, F. “Tau Approximate Solution of Weakly Singular Volterra Integral Equations”, *Math. Comput. Modell.*, 57, 494–502, (2013).
- Wang, J. R., Dong, X. W., and Zhou, Y., “Existence, Attractiveness and Stability of Solutions for Quadratic Urysohn Fractional Integral Equations”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 17, 545-554, (2012).
- Wazwaz, A. M., *A First Course in Integral Equations*, Singapore: World Scientific, (1997).
- Wei, W., Li, X. and Li, X., “New Stability Results for Fractional Integral Equation”, *Comput. Math. Appl.*, 64, 3468-3476, (2012).
- Yalçınbaş, S., Akkaya, T. and Aynigül, M., “Laguerre Series Solutions of Fredholm Integral Equations”, *Erciyes University Journal of the Institute of Science and Technology*, 26 (2), 131-142, (2010).
- Yang, C., “An Efficient Numerical Method for Solving Abel Integral Equation”, *Appl. Math. Comput.*, 227, 656-661, (2014).
- Yousefi, S. A., “Numerical Solution of Abel’s Integral Equation by Using Legendre Wavelets”, *Appl. Math. Comput.*, 175, 574-580, (2006).
- Yousefi, S. A., “B-Polynomial Multiwavelets Approach for the Solution of Abel’s Integral Equation”, *Int. J. Comput. Math.*, 87 (2), 310-316, (2010).
- Zeilon, N., “Sur Quelques Points de la Theorie de l’Equation Integrale d’Abel”, *Arkiv. Mat. Astr. Fysik.*, 18, 1-19, (1924).

## 8. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Serpil SALINAN

Doğum Yeri ve Tarihi : Denizli, 10 Kasım 1981

Lisans Üniversite : Pamukkale Üniversitesi

Y. Lisans Üniversite : Pamukkale Üniversitesi

Elektronik posta : ssalinan@pau.edu.tr

İletişim Adresi :Pamukkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi  
D Blok 2. Kat Matematik Bölümü  
Kınıklı Kampüsü / DENİZLİ

**Yayın Listesi** :

• Daşcıoğlu, A. and Salınan, S., “Comparison of the Orthogonal Polynomial Solutions for Fractional Integral Equations”, *Mathematics*, 7(1) 59, (2019).

**Konferans listesi** :

• Serpil Salınan, Workshop on Differential Equations and Applications, 2008 (Pamukkale Üniversitesi, Denizli) (Dinleyici)

• Serpil Salınan, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM2015), 2015 (Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul) (Dinleyici)

• Murat Sarı and Serpil Salınan, “Seismic Response in Layered Media” 2nd International Conference on Pure and Applied Science (ICPAS2016), 2016 (Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul) (Özet Bildiri)

• Serpil Salınan and Ayşegül Daşcıoğlu, “Jacobi Polynomial Solutions of Erdélyi-Kober Type Fractional Integral Equations” 2nd International Conference on Mathematical and Related Sciences (ICMRS2019), 2019 (Antalya) (Özet Bildiri)