T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

FUZZY UZAYLARINDA MEKANİK YAPILAR VE ENERJİ DENKLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OSMAN ARSLAN

DENİZLİ, EYLÜL - 2019

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

FUZZY UZAYLARINDA MEKANİK YAPILAR VE ENERJİ DENKLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OSMAN ARSLAN

DENİZLİ, EYLÜL - 2019

KABUL VE ONAY SAYFASI

OSMAN ARSLAN tarafından hazırlanan "**FUZZY UZAYLARINDA MEKANİK YAPILAR VE ENERJİ DENKLEMLERİ**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 09.09.2019 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri EnstitüsüMatematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Doç.Dr.Cansel AYCAN Pamukkale Üniversitesi	C. Aycan ....
Üye Doç. Dr. Murat BEŞENK Pamukkale Üniversitesi	....
Üye Dr. Öğr. Üyesi Neşe İşler ACAR Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi	....

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 18/09/2019 tarih ve 37/16 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....

Prof. Dr. Uğur YÜCEL

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

OSMAN ARSLAN

ÖZET

FUZZY UZAYLARINDA MEKANİK YAPILAR VE ENERJİ DENKLEMLERİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
OSMAN ARSLAN
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI:DOÇ. DR. CANSEL AYCAN)

DENİZLİ, EYLÜL - 2019

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, Fuzzy mantığının tarihçesine ve kullanım alanlarına değinilmiştir.

İkinci bölümde, Fuzzy uzayının temel kavramları, Fuzzy metrik uzayı ve topolojisi tanımlanarak $C^k -$ sınıfından Fuzzy atlası oluşturulmuş ve bu atlas üzerinde Fuzzy manifoldu elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde, öncelikle Euler-Lagrange ve Hamilton enerji yapıları tanıtılmıştır. Daha sonra Fuzzy uzayında gerekli geometrik yapılar oluşturularak Lagrange ve Hamilton enerji denklemleri elde edilmiştir. Daha sonra, yapılan çalışmanın bir uygulaması olarak Fuzzy silindiri üzerinde hareketli bir cisim için Lagrange ve Hamilton enerji denklemleri hesaplanmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Fuzzy uzayı, Fuzzy manifoldu, Fuzzy uzayında lagrange ve hamilton enerji denklemleri

ABSTRACT

THE MECHANICAL SYSTEMS AND ENERGY EQUATIONS ON FUZZY SPACES
MSC THESIS
OSMAN ARSLAN
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATİCS

(SUPERVISOR:ASSOC. DR. CANSEL AYCAN)

DENİZLİ, SEPTEMBER 2019

This study consist of three sections.

In the first section, the history of Fuzzy Logic and usage area is presented informing to readers.

In the second section, the basic concepts of Fuzzy Space, Fuzzy Metric Space and Fuzzy Topology are defined and over this Fuzzy chart systems are formed. Also, with this geometric properties Fuzzy differential manifolds are examined.

In the third section, firstly Euler-Lagrange and Hamilton energy structures are introduced. Then, necessary geometric structures for Lagrangian and Hamiltonian energy systems were created in Fuzzy space and energy equations were obtained. Then, as an application of this study, Lagrangian and Hamiltonian energy equations were calculated for a moving particle on the Fuzzy cylinder.

KEYWORDS: Fuzzy space, Fuzzy manifold, Lagrangian and hamiltonian equations in fuzzy space

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\boldsymbol{\mu_A}$	:	Fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu
$\boldsymbol{L^p}$	:	Lebesque uzayı normu
$\boldsymbol{H(A,B)}$	:	A ve B kümeleri arasındaki fuzzy mesafesi
$\boldsymbol{C^k}$	:	k. Mertebeden diferansiyellenebilir
$\boldsymbol{C^\infty}$	:	Her mertebeden diferansiyellenebilir
$\boldsymbol{C^{r+1}}$	:	(r+1). mertebeden diferansiyellenebilir
$\boldsymbol{TM}$	:	*M* Manifoldunun tanjant demeti
$\boldsymbol{T^*M}$	:	M Manifoldunun kotanjant demeti
$\boldsymbol{S^1}$	:	Birim çember
$\wedge^{p}\ (\boldsymbol{TM})$	:	*TM* tanjant demeti üzerinde p-formların cümlesi
$\boldsymbol{\chi(TM)}$	:	*TM* tanjant demeti üzerinde vektör alanlarının cümlesi
$\boldsymbol{J_0^1(\mathbb{R},M)}$	:	Orjin noktasında birinci mertebeden jet
$\boldsymbol{J^1(\mathbb{R},M)}$	:	Birinci mertebeden jet manifold
$\boldsymbol{J_t^1\sigma}$	:	*t* noktasındaki birinci mertebeden jet

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans programında hazırlanmıştır.

Bu tezin konusunun belirlenmesinde, çalışmanın araştırılması ve hazırlanma süresince, tecrübesini ve çok değerli zamanını harcayarak bana her zaman yardımcı olan değerli hocam Sayın Doç.Dr.Cansel AYCAN'a sonsuz teşekkür ederim.

Ayrıca tüm eğitim hayatım boyunca bana desteğini esirgemeyen aileme ve arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

OSMAN ARSLAN

1. GİRİŞ VE TARİHÇE

Bu bölümde, ilk olarak fuzzy (bulanık) mantığın ortaya çıkışındaki nedenler, tarihçesi, uygulama alanları ve işlevselliği ele alınmıştır. Daha sonra fuzzy uzayında küme kavramıyla ilgili tanım ve teoremler verilerek, fuzzy topolojisi ve fuzzy harita ve atlas yapısı tanımlanmıştır. Daha sonra ise Fuzzy tanjant demeti incelenmiştir.

Bunların yanı sıra, diğer bölümlerde Euler-Lagrange ve Hamilton denklemleri ile ilgili genel kavramlar verilerek, fuzzy uzayı üzerinde Lagrangian ve Hamiltonian enerji denklemleri oluşturulmuştur.

1.1 Fuzzy (Bulanık) Mantığın Oluşumu

Fuzzy mantığı oluştururken gündelik hayatta kullandığımız temel unsurlardaki doğru veya yanlış olma değerlendirmesi kullanılmıştır. Örneğin, “Bugün hava çok sıcak’’ , “Selma’nın saçları çok uzundur” , “ Bu araba çok pahalıdır” gibi cümleler göreceli kavram içeriyor diyebiliriz. Göreceli kavram herkes için aynı sonuca sahip olmayan kavramlardır diyebiliriz. Herkes için doğruluk değeri aynı biçime sahiptir şeklinde nitelendiremeyiz. Biliyoruz ki klasik mantıkta bir önermenin doğruluk değeri ya “0” ya da “1”dir. Yani söz konusu eleman ya kümeye aittir ya da ait değildir. Dolayısıyla o araba bir grup insan için pahalı olarak nitelendirilebilirken, başka bir grup insan için aşırı ucuz, başka bir grup için ise ucuz olarak nitelendirilebilir. “güzellik-çirkinlik”, “ucuzluk-pahalılık”, “uzunluk-kısalık” gibi kavramların netliği yoktur. Uzun ile kısa arasında, soğuk ile sıcak arasında bir çok basamak oluşturulabilir. Örneğin; “aşırı soğuk, soğuk, az soğuk, az sıcak, sıcak, aşırı sıcak” gibi basamaklar. Günlük hayatta illaki bu basamaklara ihtiyaç duyulmaktadır.

Fuzzy mantığı da bu iletişim sorununu çözmek ve bu tarz belirsizlik durumlarını ortadan kaldırma fikriyle oluşmuştur. Peki bu belirsizlik durumu herkes için aynı değilken, tek bir anlam içeren doğruluk değerini nasıl verecek? Bunun cevabı ise; devamlı ya da dereceli biçimde doğruluk kavramını kullanmakta bulunur.

Yani klasik mantıktaki gibi doğruluk değeri sadece “0” ile “1” değil, “0” ile “1” dahil olmak üzere bu sayılar arasındaki tüm değerleri dahil ederek, fuzzy (bulanık) doğruluk kavramını buluyoruz. Klasik mantık ile fuzzy mantığın benzerlikleri vardır fakat fuzzy mantığı daha genel ve daha geniş uygulama alanı getirmiştir. Belirsizlik ve doğruluğu keskin bir şekilde tanımlayamama durumlarında işe yaramaktadır.

1.2 Fuzzy (Bulanık) Mantığın Tarihçesi

Mantıksal paradokslar ve Heisenberg’in belirsizlik ilkesi, 1920 ve 1930’lu yıllarda önemli görülen bazı mantık sistemlerinin gelişmesine yol açtı. Kuantum teorisyenleri, bu mantık sistemlerinin “doğru” ve “yanlış” tan oluşan değer kümesine, bir üçüncü olarak orta doğruluk değeri sayılan bir değer biçimi ekleyerek “belirlenemezlik” in ifade edilebilmesine imkân sağladılar. Bundan sonraki aşamada ise ‘doğru’ ve ‘yanlış’, “belirlenemezlik” unsurunun sınır şartları olarak görülüp belirlenemezlik kriteri de derecelendirildi. Heisenberg’in belirsizlik ilkesi, belirlenemezlik ilkesinin sürekliliğiyle, bilim insanlarını daha çeşitli düşünmeye zorladı. Bazı filozoflar çok değerliliği benimsemesine rağmen, Lukasiewicz, Gödel, ve Black, ilk çok-değerli mantık diğer deyişle bulanık mantık ile bulanık küme sistemlerini geliştirdiler. 1930’lu yılların başlarında Polonyalı mantıkçı Jan Lukasiewicz ilk üç-değerli mantık sistemini geliştirdi. Lukaziewicz, daha sonra doğruluk değerlerinin kümesini tüm sayılara genelleştirdi. Yine 1930’lu yıllarda kuantum filozofu Max Black, sürekli değerlere sahip mantığı, küme kavramının eleman oluşumuna uyguladı. Black, bulanık kümede üyelik fonksiyonlarından bahseden ilk kişi oldu. Black, ifade etmeye çalıştığı yapılardaki belirsizliği ‘şüphecilik’ olarak adlandırdı. Zadeh’in sunduğu bulanık-küme teorisinin tersine, Black’in çok değerli kümelerindeki her bir eleman, sürekli değerlere sahip bir mantık çerçevesinde ele alınan bir küme ile eşdeğer olur. Fuzzy kavramı ilk kez 1965’te, Azerbaycan doğumlu Lotfi Askar Zadeh (Lütfü Askerzade)’ye ait olan “Fuzzy Kümeler (Fuzzy Sets)” başlıklı bir makalede ele alındı. Berkeley Kaliforniya Üniversitesi’nde profesör olan L. Askerzade, 1961 yılında, yayımladığı bir makalesinde “olasılık dağılımıyla tanımlanamayan bulanık ya da belirsiz nicelikler için farklı bir matematiğe” gereksinim olduğunu yazıyordu. Çünkü, Askerzade doğadaki gözlenebilen unsurlar ile süreçlerin sonlu değerli mantıkla açıklanamayacağını düşünüyordu. 1960'lı yılların sonlarında Askerzade'nin makalesi kesinlik vurgusundan vazgeçmeyen bilimsel çevreler tarafından kabul görmemiş, dahası ABD Kongresi'nde ABD Ulusal Bilim Vakfı (NSF–NationalScience Foundation) kaynaklarının boşa harcanmasına örnek olarak anılmıştı. 1970'li yıllarda ve sonraki yıllarda Avrupalı ve özellikle Japonyalı bilim insanlarının fuzzy mantığı üzerinde araştırmaları ve mühendislik uygulamaları nedeniyle fuzzy mantık ile fuzzy kümeler teorisi giderek gelişti. Günümüzde fuzzy mantık, otomobillerin vites kutularından bulaşık makinelerine, elektronik devreleri ile yapay zekanın karar verme algoritmalarına kadar oldukça kapsamlı teknik uygulamalara sahiptir üstelik Tokyo monorail sistemi fuzzy metro temelli bilgisayar yapısına bağlı olan mühendislik sistemleriyle işlemektedir. Bilgisayar ile enformatik bilimleri, kontrol sistemleri, karar alma algoritmaları fuzzy mantığın yoğun olarak kullanıldığı alanlar olarak gösterilebilir.

Fuzzy mantığın başlıca özellikleri aşağıdaki gibi listelenebilir:

i)"doğru" , "çok doğru" , "az çok doğru" v.b. gibi sözel olarak ifade edilen (dilsel değişkenli) doğruluk derecelerine sahip olması,

ii) Geçerliliği kesin değil fakat yaklaşık olan çıkarım kurallarına sahip olması,

iii) Her kavramın bir derecesinin olması,

iv) Her mantıksal sistemin fuzzy sistemine aktarılabilmesi,

v) Fuzzy mantıkta bilginin, fuzzy kısıtlara ait değişkenlerin esnekliği veya denkliğiyle yorumlanması.

1.3 Fuzzy Mantığın Avantaj ve Dezavantajları

Bu kısımda ise Fuzzy mantık ile ortaya çıkan fuzzy denetleyici unsurların üstünlükleri ve zayıflıkları, avantajları ve dezavantajlarını ele alacağız.

1.3.1 Avantajları

Fuzzy mantığı, günlük hayatta karşımıza çıkabilen önceki kısımda da değindiğimiz bazı yapılarda olduğu gibi belirsiz, zamanla değişen, karmaşık, iyi tanımlanmamış sistemlerin denetimine basit çözümler getirir.

Sunulan eğer basit bir matematiksel modelle tanımlanabilen bir sistemse o zaman geleneksel bir denetim yeterli olacaktır. Ama karmaşık bir sisteme geleneksel bir mantık uygulamak hem çok zor hem de yüksek maliyetlidir. Buna karşılık fuzzy mantık denetimi geleneksel mantığa göre sistemi daha iyi analiz edebileceği gibi aynı zamanda da ekonomiktir.

Fuzzy mantıkta işaretler bazı ön işlemlerle ele alınırlar, ayrıca kullanılan değerler oldukça geniş bir alan kapsamında olmalarına rağmen daha az sayıda üyelik fonksiyonlarına indirgenebilirler. Bu nedenle, fuzzy denetimi genellikle daha küçük bir yazılımla daha hızlı bir şekilde sonuçlanır. Bahsi geçen değerler üzerinde uygulanacak kural sayısı da az olduğundan sonuca ulaşmak daha da hızlı olacaktır. Bu durum geleneksel bilgisayar ortamında da hızlı olabileceği gibi, özel geliştirilmiş donanımlı bir bilgisayar ile sonuca daha da hızlı ulaşmak mümkündür. Örneğin; Sanyo-Fisher firması mühendisleri, video kayıt cihazında kullanmayı düşündükleri mikro bilgisayarın yetersiz kalmasından dolayı, fuzzy denetim sistemini kullanmaya karar vermişlerdir. Bunun nedeni, Fuzzy denetim sistemi ile yazılım boyutlarının daha küçük kalması sağlandığı için, dış bellek kullanımına gerek kalmamasıdır.

Fuzzy mantık denetiminin sağladığı bir diğer avantaj ise doğrudan kullanıcı girişlerine ve kullanıcının deneyimlerinden yararlanabilmesine olanak sağlamasıdır. Bilindiği gibi otomatik vites değişimi motorun belli hızlara ulaşması sonucunda otomatik olarak gerçekleşir. Buna karşılık manuel vitesli bir arabada ise sürücü, yol, yük ve kendi araba kullanış tarzına göre belli durumlarda vites değiştirir. Subaru tarafından üretilen justy tipi otomobilde kullanılan aktarım organının değiştirilmesi, bir kayışın konumunun fuzzy mantık kullanılarak değiştirilmesi ile sağlanır. Böylece arabanın ivmesi ve performansı sürekli olarak ayarlanır hale gelir. Subaru, bu otomobilde kullandığı fuzzy mantık üyelik fonksiyonlarını, otomobili test şoförlerine kullandırarak ve onlardan ivme ve performans açısından en iyi aktarım oranını öğrenerek ayarlamıştır. Bu konuda Honda ve Nissan da benzer çalışmalar yapmışlardır.

1.3.2 Dezavantajlar

Fuzzy denetim mekanizmalarında kullanılan bazı kurallar deneyimlere bağlıdır. Üyelik fonksiyonlarının seçiminde ise belirli bir yöntem yoktur. En uygun fonksiyon deneme yöntemi ile bulunur. Bu da oldukça uzun bir zaman alabilir. Denetlenen sistemin bir kararlılık analizi yapmak zor olabileceği gibi sistemin nasıl cevap vereceğide önceden kestirilemez. Yapılacak tek şey benzetim çalışması olacaktır.

1.4 Fuzzy Mantığın Uygulama Alanları

Fuzzy mantık uygulamaları ilk olarak çimento sektöründe kullanılmaya başlanmıştır. Bu sektörde kireç taşı ve kil 1000-1400 derece sıcaklıkta reaksiyona girmektedir. Fırın içindeki sıcaklık ve oksijen oranı çimentonun kalitesini doğrudan etkilemektedir. Bu konular üzerine uzman operatörler ancak istenilen sınırlar dahilinde kaliteli ürünler elde edebilmektedirler. Ama vardiyalı sistemle çalışan bir fabrikada çok sayıda operatör vardır ve her operatörün uzmanlıklarının farklı olması nedeniyle farklı niteliklerde ve verimlilikte ürün elde edebilmektedirler. İstenilen kalitede ürün sadece bu işte yıllardır çalışan uzmanlar tarafından sağlanabilmektedir. Dolayısıyla söylenebilir ki çimento üretimi bir fuzzy yapısına uygundur ve süreç kontrolünü fuzzy kurallar sağlamaktadır. Örneğin ısıyı 10 derece yükselt veya 5 derece azalt gibi kesin kurallar değil biraz azalt, biraz yükselt gibi bulanık terimlerle ifade edilen kurallarla kontrol edilmeye uygundur. Bir Danimarka firması bu sürecin kontrolü için uzman operatörlerin kullandığı 50-60 pratik kuraldan hareketle bir mikro kontrolör oluşturmuşlar ve sonuç olarak sabit ürün kalitesi ve yakıtta büyük tasarruf elde etmişlerdir.

Daha sonraki yıllarda bu çalışmaların devamı olarak, fuzzy mantık; Mühendislik, Tıp, Sosyoloji, Psikoloji, İşletme, Ulaştırma, Yapay zekâ, Kavşak Sinyalizasyonu gibi alanlarda yaygın olarak kullanılmaya başlanmıştır. Günümüzde Fuzzy Mantık hemen hemen her alanda kendine kolaylıkla uygulama alanı bulabilmektedir.

1.4.1 Fuzzy Mantığın Kullanıldığı Alanlar

- Asansör Denetimi

Asansöre binen yolcu trafiğini değerlendirmede kullanılır.

- SLR Fotoğraf Makinesi

Ekranda birkaç obje olması durumunda en iyi fokusu ve aydınlatmayı belirlemede kullanılır.

- Video Kayıt Cihazı

Cihazın elle tutulması nedeniyle çekim sırasında oluşan sarsıntıları ortadan kaldırmada kullanılır.

- Çamaşır Makinesi

Çamaşırın kirliliğini, ağırlığını, kumaş cinsini değerlendirerek, ona göre yıkama programını seçmede kullanılır.

- Elektrik Süpürgesi

Zeminin durumu ve kirliliğini değerlendirerek motor gücünü ayarlamada kullanılır.

- Su Isıtıcısı

Kullanılan suyun miktar ve sıcaklığına göre ısıtmayı ayarlamada kullanılır.

- Klima

Ortam koşullarını değerlendirerek en iyi çalışma durumunu algılamada kullanıldığı gibi, odaya insan girip çıkması sonucunda ısıyı algılayarak soğutmayı arttırmada kullanılır.

- ABS Fren Sistemi

Tekerleklerin kilitlenmeden frenlenmesini sağlamada kullanılır.

- El Bilgisayarı

El yazısı ile veri ve komut girişine olanak tanır.

- Sendai Metro Sistemi

Hızlanma ve yavaşlamayı ayarlayarak rahat bir yolculuk sağlanmasının yanı sıra durma konumunu iyi ayarlar, böylece güçten tasarruf sağlamayada imkan sağlar.

- Televizyon

Ekran kontrastını, parlaklığını ve rengini ayarlamada kullanılır.

2. FUZZY UZAYININ TEMEL KAVRAMLARI

Bu bölümde öncelikle fuzzy metrik uzayı ve fuzzy topolojisi tanımlanarak C^k −sınıfından fuzzy atlası oluşturulacaktır ve bu atlas üzerinde fuzzy manifoldu elde edilecektir.

2.1 Fuzzy Küme Kavramı

Tanım 2.1.1: X herhangi bir küme ve $A \subset X$ olsun.

$$\chi A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlı $\chi A(x)$:$X \rightarrow \{0,1\}$ fonksiyonuna A kümesinin *karakteristik fonksiyonu* denir (Çınar 2015).

Tanım 2.1.2: A herhangi bir küme ve $A \subset X \times I$ (burada I=[0,1]) olsun. Bu durumda μ_A: $X \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu tarafından karakterize edilen

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X\} \subset X \times I \tag{2.2}$$

kümesine X de bir *fuzzy küme* denir. μ_A ile tanımlı fonksiyona A fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu ve her $x \in X$ için $\mu_A(x) \in I$ değerine de x in A ya ait olma derecesi adı verilir.

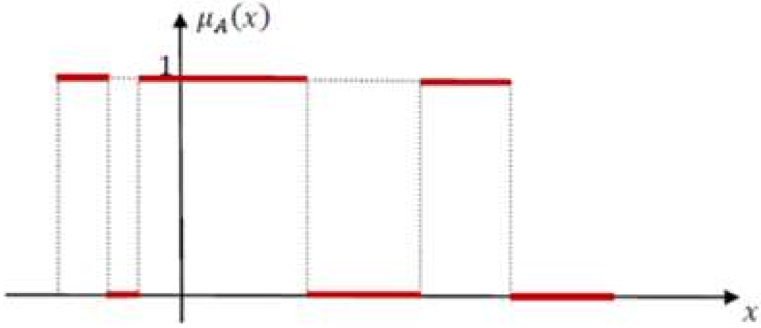
$\mathbb{R}$ üzerindeki tüm fuzzy kümelerin ailesi $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ ile gösterilir.

Klasik küme teorisinde A bir küme olmak üzere; A 'nın üyelik (karakteristik) fonksiyonu $\mu_A(x)$, $x \in A$ iken 1 ve $x \notin A$ iken 0 olmak üzere iki değer almaktadır. Üyelik fonksiyonu sadece 0 ve 1 değerini alan bu kümelere adi veya basit küme denir.

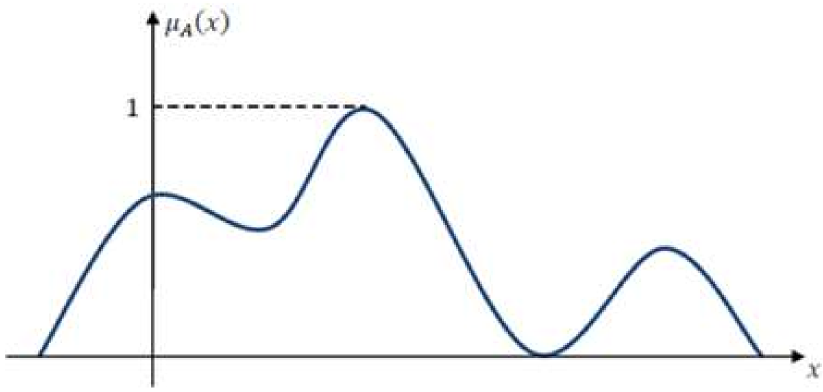
Özel olarak;

X Fuzzy kümesi; $\mu_X(x) = 1$ olmak üzere $X = \{(x, 1) | x \in X\}$,

ϕ Fuzzy kümesi; $\mu_{\phi}(x) = 0$ olmak üzere $\phi = \{(x, 0) | x \in X\}$ şeklinde tanımlanır (Çınar 2015).



Şekil 2.1: Klasik bir A kümesinin grafiği



Şekil 2.2: ℝ de bir A fuzzy kümesinin grafiği

2.2 Fuzzy Kümeleri Üzerinde Notasyonlar

A ve B, X kümesinde birer fuzzy kümeler olsun.

(i) $A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x)$ (eşitlik)

(ii) $A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ (alt küme)

(iii) $C = A \cup B \Leftrightarrow \mu_C(x) = max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ (birleşim)

(iv) $D = A \cap B \Leftrightarrow \mu_D(x) = min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ (kesişim)

(v) $E = A^c \Leftrightarrow \mu_E(x) = 1 - \mu_A(x)$ (tamlayan)

şeklinde notasyonları verilir. Bu notasyonları eğer

$\{A_j\}_{j\in J}$ ailesinde genellersek;

$$D = \bigcup_{j\in J} A_j \qquad C = \bigcap_{j\in J} A_j$$

olmak üzere,

$$\mu_D(x) = sup\mu_{A_j}(x) \;\; \mu_C(x) = inf\mu_{A_j}(x) \tag{2.3}$$

olacaktır.

Tanım 2.2.1: X ve Y herhangi kümeler ve $f: X \to Y$ bir dönüşüm olsun. $\forall x \in X$ ve $B \in Y$ fuzzy kümesi olmak üzere, f dönüşümü altındaki B nin ters görüntüsü

$$\mu_A(x) = \mu_B(f(x))$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanan A fuzzy kümesidir. Eğer bunun tersini düşünecek olursak, şu soruyu sormalıyız:

"f dönüşümüyle oluşturulan Y nin fuzzy kümesi B için üyelik fonksiyonu nedir?"

Eğer f bire bir değilse X kümesine ait olan ve A üzerinde farklı üyelik dereceleriyle ifade edilen iki ya da daha fazla aynı nokta Y üzerinde aynı y noktası ile eşleşirse belirsizlik ortaya çıkar. Burada ifade edilen $\mu_B(X)$ üyelik fonksiyonu ile bu ifade

$$\mu_B(y) = \begin{cases} sup\{\mu_A(z)\}\; z \in f^{-1}(y) & , f^{-1}(y) \neq \phi \\ 0 & , f^{-1}(y) = \phi \end{cases} \tag{2.4}$$

$$(f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\})$$

şeklinde gösterilir (Soliman 2016).

Tanım 2.2.2: X'de fuzzy küme A, $\mu_{y_\lambda}(x)$ üyelik fonksiyonu ile verilen fuzzy nokta , $x \in X$ olmak üzere

$$\mu_{y_\lambda}(x) = \begin{cases} \lambda, & x = y \\ 0, & diğer\ durumlar \end{cases} \tag{2.5}$$

üyelik fonksiyonu şeklinde tanımlanır (Soliman 2016).

Tanım 2.2.3: $\mathbb{R}$ üzerindeki tüm fuzzy kümelerin ailesini $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ ile gösterelim. Her $\mu \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ için eğer μ, aşağıdaki özellikleri sağlarsa bir fuzzy sayısıdır.

(i) μ normaldir:

$(yani\ \exists x_0 \in R : \mu(x_0) = 1)$

(ii) μ konvekstir:

$(yani\ \mu(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq min\{\mu(x), \mu(y)\}\ x, y \in R\ \ ve\ \lambda \in I\ )$

(iii)μ üst yarı süreklidir:

Tüm fuzzy sayıların kümesini E ile gösterelim. $\mathbb{R}$, E'ye kolayca gömülebilir. Eğer $\mu(x) = 0\ ve\ \forall x < 0$ ise $\mu \in E$ 'ye negatif sayı denir.

Bütün negatif olmayan fuzzy sayılarının kümesini E^+ ile göstereceğiz (Soliman 2016).

Tanım 2.2.4: X^nnotasyonu, Jindeks kümesine dahil olan kümelerin ürünü anlamında kullanılmaktadır. X^n de fuzzy kümelerinin iki farklı kategorisi vardır. Yani geleneksel fuzzy kümeleri X^n de tanımlanır ve fuzzy vektörler kartezyen ürünler tarafından üretilir.

Kabul edelimki, X^n kümeler tarafından üretilsin ve $A \subset X^n$ olsun. Fuzzy üyelik fonksiyonlarını $(k \leq n)$olmak üzere;

$$\mu_A(x) = X^n \to \prod_k I$$

olarak tanımlayalım. $k = n$ alınması en kullanışlı uygulamadır. Bu nedenle bu çalışmada da $k = n$ olduğunu varsayacağız (Soliman 2016).

Tanım 2.2.5: $\{A_j\}$ X kümesi üzerinde fuzzy kümelerin ailesi olsun. Fuzzy vektörü,

$$x_\lambda \epsilon A = \prod_{j\epsilon J} A_j \qquad (x_\lambda = \begin{pmatrix} y_{\lambda_1} \\ y_{\lambda_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{\lambda_n} \end{pmatrix})$$

olarak tanımlı bir üye olarak tanımlanır.

Fuzzy vektörü üzerinde bir fuzzy L^p normu ise

$$\|x\|_p = (\textstyle\sum_{j\epsilon J} \left(y_{\lambda_j} \lambda_j\right)^p)^{1/p} \tag{2.6}$$

olarak ifade edilir. Bu L^p normu bilinen norm fonksiyonu ile aynı özellikleri sağlar. Yani $\lambda_j = 1$ ise bu x deki L^p normuna indirgenir.

0 vektörünün normu 0 dır ve $0 = \begin{pmatrix} k_0 \\ k_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ k_0 \end{pmatrix}$, $\|0\|_p = 0$ şeklinde gösterilir (Soliman, 2016).

Tanım 2.2.6: A ve B , X^n de fuzzy vektörlerin koleksiyonu olsun.

(i) $A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x)$

(ii) $A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$

Diğer yandan, K bir indeks kümesi olmak üzere,

(iii) $C = \bigcup_{k\in K} A_k \Leftrightarrow \mu_C(x) = \sup_{k\in K}\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \begin{pmatrix} sup\left\{\mu_{A_{k_1}}\left(x_{k_1}\right)\right\} \\ sup\left\{\mu_{A_{k_2}}\left(x_{k_2}\right)\right\} \\ \cdot \\ \cdot \\ sup\left\{\mu_{A_{k_n}}\left(x_{k_n}\right)\right\} \end{pmatrix}$

(iv) $D = \bigcap_{k\in K} A_k \Leftrightarrow \mu_D(x) = \inf_{k\in K}\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \begin{pmatrix} inf\left\{\mu_{A_{k_1}}\left(x_{k_1}\right)\right\} \\ inf\left\{\mu_{A_{k_2}}\left(x_{k_2}\right)\right\} \\ \cdot \\ \cdot \\ inf\left\{\mu_{A_{k_n}}\left(x_{k_n}\right)\right\} \end{pmatrix}$

olarak tanımlanır (Soliman 2016).

2.3 Fuzzy Metriği

Bu bölümde öncelikle fuzzy metriğini tanımlayacağız ve bunun geometrik uygulamalarına değineceğiz. Öncelikle bunun için gerekli temel kavramları sunalım.

Tanım 2.3.1: (Hausdorf Uzaklığı)

Fuzzy uzayında L^p normu verilsin. *x* ve *y* fuzzy noktalar olmak üzere,

$$\|x - y\|_p = d(x, y) \tag{2.7}$$

fuzzy sayısına x ve y noktaları arasındaki uzaklık ya da $\overrightarrow{xy}$ fuzzy vektörünün boyu denir. Burada *d* uzaklık fonksiyonudur.

A ve B, X metrik uzayında boş olmayan iki küme olsun. A fuzzy kümesinin *maksimum üyeliği*;

$$\alpha^* = max\{\mu_A(x) | x \in X\}$$

olarak ifade edilir.

Fuzzy olmayan küme $\mathcal{A}_{max} = \{x | \mu_A(x) = \alpha^*\}$ olarak tanımlansın. $\mathcal{A}_\ell$, X'in boş olmayan ve fuzzy olmayan alt kümesi olmak üzere

$$\mathcal{A}_{max} \subset \mathcal{A}_\ell$$

dir. Herhangi iki fuzzy küme A ve B için

$$\mathcal{A}_\ell = \mathcal{B}_\ell \Leftrightarrow \mathcal{A}_{max} = \mathcal{B}_{max}$$

olur.

$\mathcal{A}_t$ fuzzy kümesinin ailesini $t \in [0,1]$ için

$$\mathcal{A}_t = \begin{cases} \{x | \mu_A(x) \in [t, \alpha^*]\}, & t \leq \alpha^* \\ \mathcal{A}_\ell \quad , & t > \alpha^* \end{cases} \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlayalım.

$t = \alpha^*$ ise $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_{max}$ dir ve $\alpha^* = 1$ ise $\mathcal{A}_t$ ile $\mathcal{A}_{max}$ eşit olmazlar.

Şimdi üyelik fonksiyonlarının $j \in J$ (J indeks kümesi) olmak üzere farklı t_j değerlerinin olduğunu kabul edelim. $\mathcal{A}$ ile $\mathcal{B}$ fuzzy kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı $H(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ şeklinde gösterilir ve

$$H(\mathcal{A},\mathcal{B}) = max\left\{\sup_{a\in\mathcal{A}} \inf_{b\in\mathcal{B}} d(a,b), \sup_{b\in\mathcal{B}} \inf_{a\in\mathcal{A}} d(a,b),\right\}$$

olarak tanımlanır.

Diğer yandan fuzzy küme mesafesi ise aşağıdaki şekilde tanımlanacaktır,

$$H(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \frac{\sum_{j\in J} t_j H\left(\mathcal{A}_{t_j},\mathcal{B}_{t_j}\right)}{\sum_{j\in J} t_j} \tag{2.9}$$

$\mathcal{A}$ ile $\mathcal{B}$ fuzzy kümelerinin sürekli değişken olduğu durumu ele alacak olursak, benzer biçimde fuzzy küme mesafesini tanımlayabiliriz. Böylece bu koşulda fuzzy küme mesafesi,

$$H(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \frac{\int_0^1 tH(\mathcal{A}_t,\mathcal{B}_t)\,dt}{\int_0^1 t\,dt} = 2\int_0^1 tH(\mathcal{A}_t,\mathcal{B}_t)\,dt \tag{2.10}$$

şeklinde ifade edilir. Açıktır ki bu tanım $\mathcal{A}_\ell$ nin nasıl seçileceğine bağlıdır. Eğer A fuzzy kümesi maximum üyelik değeri $\alpha^* = 1$ ise $\mathcal{A}_\ell$'nin tanımlanmasına gerek yoktur. Çünkü $\mathcal{A}_t$'nin seçimi $\mathcal{A}_\ell$'nin tanımlanmasına dayanmaz. Ancak $\alpha^* < 1$ ise $\mathcal{A}_\ell = \mathcal{A}_{max} \cup \{x_A\}$ olarak tanımlanmalıdır. Bu tek noktanın uzaklık üzerinde önemsiz bir etkisi vardır. $\mathcal{A}_\ell$'yi tutarlı seçtiğimiz sürece sonuçlarımız tutarlı olacaktır (Soliman 2016).

Teorem 2.3.1: Boş olmayan A fuzzy kümesi için $\mathcal{A}_t \neq \phi$, $\forall t \in [0,1]$ dir (Soliman 2016).

Teorem 2.3.2: Eğer $A = B$ ise her t için $\mathcal{A}_t = \mathcal{B}_t$ bulunur (Soliman 2016).

Teorem 2.3.3: $A \neq B$ için $t > 0$ olmak üzere $\mathcal{A}_t \neq \mathcal{B}_t$ mevcuttur.

İspat: İspat için iki durum düşünmeliyiz.

(1) A ve B nin aynı maksimum üyelik değerlerine sahip olması durumu,
(2) Farklı maksimum üyelik değerlerine sahip olması durumu.

Durum (1): $\alpha^* = \beta^*$olsun. $A = B$ için $\mu_A(x_0) \neq \mu_B(x_0)$ olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır. Eğer $\mu_A(x_0) > \mu_B(x_0)$ ise tanım gereği $\mathcal{A}_{\mu_A(x_0)} \neq \mathcal{B}_{\mu_A(x_0)}$ dir. $x_0 \in \mathcal{A}_{\mu_A(x_0)}$ fakat $x_0 \notin \mathcal{B}_{\mu_A(x_0)}$ dir.

Aynı şekilde $\mu_B(x_0) > \mu_A(x_0)$ iken $\mathcal{A}_{\mu_A(x_0)} \neq \mathcal{B}_{\mu_A(x_0)}$ olduğu gösterilebilir. Sonuç olarak durum (1) için önerme doğrudur.

Durum (2): $\alpha^* > \beta^*$ olsun. Eğer $\mathcal{A}_{max} = \mathcal{B}_{max}$ ise $t = \alpha^*$ alınırsa önerme doğru olur. $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_{max}$ fakat $\mathcal{B}_t = \mathcal{B}_\ell = \mathcal{A}_\ell \supset \mathcal{A}_{max}$ olur. $\mathcal{A}_{max} \neq \mathcal{B}_{max}$ alırsak $t = \alpha^*$ aldığımızda $\mathcal{B}_t = \mathcal{B}_\ell \neq \mathcal{A}_{max}$ olduğunda $\mathcal{B}_\ell \neq \mathcal{A}_{max}$ bulunur.

2.4 Fuzzy Topolojisi

Bu bölümde fuzzy topolojisi ve özellikleri sunulacaktır.

Tanım 2.4.1: (Fuzzy Topolojisi)

X^n de tanımlı olan fuzzy kümelerinin bir kolleksiyonu $\mathcal{F}$ olmak üzere,

(i) $0,1 \in \mathcal{F}$

(ii) Eğer $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B \in \mathcal{F}$ dir.

(iii) $A_j \in \mathcal{F}, \forall j \in J$ $\quad \bigcup_{j\in J} A_j \in \mathcal{F}$

şartları sağlanırsa *X* üzerinde bir *fuzzy topolojisi* elde edilir (Soliman 2016).

Tanım 2.4.2: (Fuzzy Komşuluğu)

$G \subset N$ ve $\mu_N(x) = \mu_G(x)$ olduğunda $G \in (X, \mathcal{F})$ varsa $(X, \mathcal{F})$ de N fuzzy kümesine $x \in X$ in fuzzy komşuluğu denir (Soliman 2016).

2.5 Fuzzy Topolojik Vektör Uzayları

Bu bölümde fuzzy topolojisi ile donatılmış fuzzy vektör uzayını tanımlayacak ve geometrik özelliklerini sunacağız.

Tanım 2.5.1: (Fuzzy Topolojik Küme)

V , K alanı üzerinde bir vektör uzayını göstersin.

$\{A_j\}_{1\leq j\leq n}$, V vektör uzayında fuzzy kümelerin sonlu ailesi olsun.

$\{A_j\}$ ailesinin toplamı olarak verilen,

$$A = \sum_{j=1}^{n} A_j$$

fuzzy küme üzerinde

$$\mu_A(x) = \sup_{\sum_j x_j} \min_{1 \le j \le n} \left\{\mu_{A_j}(x_j)\right\}$$

$x \in V$ fonksiyonu ile verilen fuzzy kümedir. Üstelik $\alpha \in K$ ve $A \in V$ nin αA skaler değeri ; $\lambda = \sup_{y \in V} \mu_A(y)$ olmak üzere

$$\mu_{\alpha A}(x) = \begin{cases} \mu_A\left(\frac{x}{\alpha}\right) & ,\alpha \neq 0 \\ \mu_{0_\lambda}(x) & ,\alpha = 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

üyelik fonksiyonu ile verilen bir fuzzy kümedir. Bu şekilde üyelik fonksiyonu skalerlik altında değişmezdir yani iyi tanımlanmıştır (Soliman 2016).

Tanım 2.5.2: (Fuzzy Vektör Uzayı)

K alanı alışılmış topoloji $\mathcal{H}$ ile donatılsın, $V \times V$ ve $K \times V$ çarpım topolojileri için aşağıdaki verilen dönüşümler sürekli olsunlar. Bu durumda V ye $\mathcal{F}$ fuzzy topolojisi ile donatılmış *fuzzy topolojik vektör uzayı* denir (Soliman 2016).

(i) $\psi: V \times V \to V \quad ,(x, y) \to x + y$

(ii) $\phi: K \times V \to V \quad ,(\lambda, x) \to \lambda x$

2.6 $\mathcal{C}^k$ −Sınıfından Fuzzy Atlası

$\mathcal{C}^k$ −sınıfından fuzzy harita-atlas yapısını kurmak için önce fuzzy uzayında diffeomorfizmi tanımlayacağız. Daha sonra fuzzy haritaları ile fuzzy atlasın geometrik yapısını oluşturacağız.

Tanım 2.6.1: (Diffeomorfizm)

E ve F iki fuzzy topolojik vektör uzayı olsun. Sürekli fuzzy diferansiyellenebilir $f: E \to F$ dönüşümü birebir ve örten , $f^{-1}: F \to E$ tersi var, tersi de sürekli ve fuzzy diferansiyellenebilir ise f ye *diffeomorfizm* denir.

Eğer Df fuzzy sürekli ve $\partial^p f$ ve f^{-p} ($1 \leq \mathrm{p} \leq \mathrm{k}$) mevcut ise f ye, $\mathcal{C}^k$ −sınıfından diffeomorfizm denir (Soliman 2016).

Tanım 2.6.2: (Fuzzy Atlası)

X bir küme olsun. X üzerinde aşağıdaki koşulları sağlayan (φ_j, A_j) haritalarının koleksiyonu $\mathcal{C}^k$ −sınıfından bir fuzzy atlasıdır (Soliman 2016).

(i) $\forall A_j$,

$$\bigcup_j A_j = \sup_j \left\{\mu_{A_j}(x)\right\} = 1$$

özelliğini sağlayan fuzzy kümedir. Yani $\mathcal{U} = \left\{A_j\right\}$, X kümesinin bir fuzzy açığıdır.

(ii) $\forall \varphi_j$, A_j yi açık fuzzy kümesi $\varphi_j[A_j] \in E$ ye dönüştüren birebir ve örten dönüşüm için

$$sup(A_j) = \left\{x \in X, \mu_{A_j}(x) > 0\right\}$$

olur.

Üstelik $\forall i \in J$ indeksi için $\varphi_j[A_j \cap A_i]$, E de bir açık fuzzy kümedir.

(iii) $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}: \varphi_j[A_j \cap A_i] \to \varphi_i[A_j \cap A_i]$ iyi tanımlı dönüşümü; $\varphi_i[A_j \cap A_i]$ ve $\varphi_j[A_j \cap A_i]$ resimleri E de açık fuzzy kümeler olmak üzere , $\mathcal{C}^k$-sınıfından fuzzy diffeomorfizmdir.

Tanım 2.6.3: (Fuzzy Haritası)

Her (φ_j, A_j) çifti fuzzy atlasının bir *fuzzy haritası* adını alır.

Örnek 2.6.1:

$X = S^1$, R^2 de birim çember noktalarının kümesi olsun. A; $(cost, sint)$, $0 \leq t < 2\pi$ noktalarını içeren S^1 in fuzzy kümesi ve A nın üyelik fonksiyonu

$$\mu_A = S^1 \to I$$

$$\mu_A(t) = 1$$

ile tanımlansın.

$\phi_1 : S^1 \to R$ fonksiyonu R nin açık fuzzy kümesi üzerine birebir ve örten dönüşüm ve böylece (ϕ_1, A), S^1 için fuzzy haritadır. Eğer farklı bir S^1 in

$$\mu_B = S^1 \to I$$

$$\mu_B(t) = \frac{1}{2}$$

üyelik fonksiyonu ile verilen B fuzzy kümesi için $(cost, sint)$, $-\pi \leq t < \pi$ olsun. (ϕ_2, B), $\phi_2 : S^1 \to R$ için başka bir fuzzy haritası olur.

$$sup\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = 1$$

olduğunu görmek kolaydır. Eğer;

$0 \leq \phi_1 < \pi$ ise $\phi_1 = \phi_2$ ve

$\pi \leq \phi_1 < 2\pi$ ise $\phi_2 = \phi_1 - 2\pi$

ile tanımlarsak

$$\phi_2 \circ {\phi_1}^{-1} : R \to R$$

ve

$$\phi_2 \circ {\phi_1}^{-1} = \begin{cases} t, & 0 \leq t < \pi \\ t - 2\pi, & \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Bu dönüşüm $\mathcal{C}^1$ sınıfından diffeomorfizmdir. Bu yüzden A ve B fuzzy haritaları S^1 üzerinde $\mathcal{C}^1$ fuzzy atlasını oluştururlar (Soliman 2016).

2.7 Fuzzy Manifoldu ve Fuzzy Tanjant Manifoldu

Bu bölümde diferansiyel geometrinin temel özelliklerine bağlı kalarak M ile gösterilecek olan fuzzy manifoldlarını tanımlayacağız. Ardından fuzzy tanjant manifoldunu ifade edeceğiz.

Tanım 2.7.1: (Fuzzy Manifoldu)

$S = \{(\varphi_j, A_j)\}$, $\mathcal{C}^k$-sınıfından atlas yapısı ile X kümesine bir *fuzzy manifoldu* denir (Soliman 2016).

Tanım 2.7.2: (Fuzzy Tanjant Manifoldu)

Fuzzy tanjant uzayını bilinen tanjant uzaya benzer olarak tanımlayacağız. M bir $\mathcal{C}^{r+1} -$ sınıfından differansiyellebilir manifold olsun. Tanjant uzayınında $\mathcal{C}^r -$sınıfından olacağı açıktır. O halde fuzzy tanjant uzayınıda fuzzy vektörlerin denklik sınıfları cinsinden tanımlayarak oluşturacağız. M de bir fuzzy tanjant vektör $((x, i, y_\lambda) \in M \times \wedge \times E)$ olmak üzere, $[x, i, y_\lambda]$ denklik sınıfıdır. $(x \in M)$. Fuzzy tanjant manifoldduda *TM* ile göstereceğiz.

$[x, i, v_\lambda] \cong [y, i, w_\lambda]$ denklik ilişkisini ancak ve ancak $x = y$ ve $\partial\left(\varphi_j {\varphi_i}^{-1}\right)\left(\varphi_i(x)\right) v_\lambda = w_\lambda$ durumunda elde ederiz. Bu yüzden $\mathcal{TM}$ fuzzy tanjant uzayı , $\mathcal{M}$ de içerilen tanjant vektörlerin bir kümesidir.

$$\pi_{\mathcal{M}} = \mathcal{TM} \to \mathcal{M}$$

$$[x, i, y_\lambda] \to x$$

dönüşümü iyi tanımlıdır.

$$\pi^{-1}(x) = \mathcal{T}_x\mathcal{M}$$

olmak üzere, fuzzy tanjant manifoldu;

$$\mathcal{TM} = \bigcup_{x \in \mathcal{M}} \mathcal{T}_x\mathcal{M}$$

olarak ifade edilir. Aynı zamanda bu bir tanjant demet olur.

TM ile ifade ettiğimiz fuzzy tanjant demeti aynı zamanda bir lifli demettir. Diğer yandan, $\mathcal{TM}$ nin $\mathcal{C}^r -$ sınıfından olduğunu gösterebiliriz. Fuzzy diferansiyellenebilir yapısı ele alındığında, (φ_j, U_j) haritası için iyi tanımlı birebir ve örten dönüşüm aşağıdaki gibi ifade edilecektir.

$$\mathcal{T}\varphi_j : \mathcal{T}U_j \to \varphi_j(U_j) \times E \subset E \times E$$

$$[(x, i, y_\lambda)] \to \left(\varphi_j(x), y_\lambda\right) \tag{2.12}$$

Buradan;

$$\left(\mathcal{T}\varphi_j\right)(\mathcal{T}\varphi_i)^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \times E \to \varphi_j(U_i \cap U_j) \times E$$

$$\left(x, y_\lambda\right) \to (\varphi_j{\varphi_i}^{-1}(x), \partial(\varphi_j{\varphi_i}^{-1})(x)y_\lambda) \tag{2.13}$$

homeomorfizmini yazabiliriz. Böylece $\mathcal{TM}$, $\mathcal{C}^r -$ sınıfından manifold olur (Soliman 2016).

Tanım 2.7.3: (Fuzzy Dönüşümü)

$\mathcal{M}$ ve $\mathcal{N}$ fuzzy manifoldları, $\mathcal{TM}$ ve $\mathcal{TN}$ fuzzy tanjant manifoldları olmak üzere, $f: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, $\mathcal{C}^r -$sınıfından bir dönüşüm olsun. $\mathcal{T}f: \mathcal{TM} \to \mathcal{TN}$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlar:

(i) $\mathcal{T}f$ dönüşümü $\mathcal{M}$ için $\mathcal{TM}$ nin (φ_i, U_i) ve $\mathcal{N}$ için (ϕ_i, V_i) haritaları üzerinde türevlenebilirdir.

(ii) $f(U_i) \subset V_j$ olmak üzere $V_i \subset f(U_i)$ açık kümeleri için $U_i \cap f^{-1}(V_i)$ açıktır. Böylece

$$(\mathcal{T}f)_{i,j} : \mathcal{T}U_i \to \mathcal{T}V_i$$
$$[x, i, y_\lambda] \to [f(x), j, \partial(\theta_j f \varphi^{-1})(\varphi_i(x))y_\lambda]$$

dönüşümü $\mathcal{C}^r -$ sınıfından bir dönüşüm olur.

Ayrıca $\mathcal{T}f : \mathcal{TM} \to \mathcal{TN}$ dönüşümü iyi tanımlı olup $f(x) = y$ olmak üzere,

$$T_x f : T_x\mathcal{M} \to T_x\mathcal{N}$$

dir (Soliman 2016).

3. EULER-LAGRANGE VE HAMİLTON ENERJİ DENKLEMLERİ

Bu bölümde öncelikle Lagrangian ve Hamiltonian enerji denklemlerini elde etmek için gerekli temel kavramları vereceğiz. Daha sonra fuzzy uzayında bu enerji denklemlerini elde edeceğiz.

3.1 Lagrange ve Hamilton Enerji Denklemleri İçin Temel Kavramlar

Tanım 3.1.1: $2m$ boyutlu bir manifold *M* ve *M*'nin tanjant demeti *TM* olsun. *TM* üzerinde $J^2 = 0$ eşitliğini sağlayan ve $rankJ = m$ ile verilen (1,1) tipindeki J tensör alanına *yaklaşık tanjant yapı* denir. *M* manifoldu üzerinde lokal koordinatlar (x^i), $1 \leq i \leq m$ ve TM tanjant demeti üzerindeki lokal koordinatlar ise $(x^i, \dot{x}^i)$ olmak üzere *TM* üzerinde J yaklaşık tanjant yapısı,

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\,, J\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\right) = 0 \tag{3.1}$$

olarak tanımlanır (De Leon ve Rodrigues 1989).

Yaklaşık tanjant yapı şu şekilde de ifade edilebilir:

E boyutu, $(k+1)boyM$ olan bir manifold ve $J: TE \longrightarrow TE$ bir endomorfizm olsun.

$$J^{k+1} = 0 \text{ ve } rankJ = km$$

ise J'ye E üzerinde (k. mertebeden) *yaklaşık tanjant yapı* ve (E, J) ikilisine de *yaklaşık tanjant manifold* denir (De Leon ve Rodrigues 1989).

Tanım 3.1.2: m boyutlu bir manifold *M* ve *M*'nin tanjant demeti *TM* olsun. *TM* üzerindeki bir vektör alanına *M* üzerinde Semispray (ikinci mertebeden diferensiyel denklem) denir (De Leon ve Rodrigues 1989).

Bir semispray aynı zamanda *TM* tanjant demetinin bir kesitidir. ε vektör alanı *M* üzerinde bir semispray olsun. Bu durumda ε lokal olarak,

$$\varepsilon = x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \varepsilon^i \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \tag{3.2}$$

$$\varepsilon^i = \varepsilon^i(x^i, \dot{x}^i) = \ddot{x}^i$$

$$\ddot{x}^i = \dot{x}^i$$

ile verilir.

Tanım 3.1.3: ε **,** *M* manifoldu üzerinde bir semispray olsun, α ise *M* manifoldu üzerinde bir integral eğrisi olmak üzere, bu eğriye ε semisprayinin bir çözümü (path ya da solution) denir (De Leon ve Rodrigues 1989).

Tanım 3.1.4: J, m boyutlu *M* manifoldunun tanjant demeti üzerinde bir yaklaşık tanjant yapı olsun. Bu durumda *TM* üzerinde lokal koordinatlar $(x^i, \dot{x}^i)$, $1 \leq i \leq m$ ve $\varepsilon = x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \varepsilon^i \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}$ vektör alanı *M* üzerinde semispray olmak üzere;

$$V = J\varepsilon = x^i \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \tag{3.3}$$

ile tanımlanan V vektör alanına *Liouville vektör alanı* denir (De Leon and Rodrigues 1989).

Teorem 3.1.1: TM üzerinde tanımlı ε vektör alanının bir semispray olması için gerek ve yeter şart $J\varepsilon = \mathrm{V}$ olmasıdır (De Leon ve Rodrigues 1989).

Tanım 3.1.5: *M*, m boyutlu bir manifold ve TM tanjant demeti olsun. $L: TM \longrightarrow \mathbb{R}$ bir $C^\infty -$fonksiyon olmak üzere, TM üzerindeki $\phi_L = -dd_J L$ ile tanımlı kapalı $2 -$formu için $E_L = VL - L$ eşitliği L ile birleşen enerji fonksiyonu ve L'ye de *TM* tanjant demeti üzerindeki *Lagrange fonksiyonu* denir. *TM* ise *M* konfigürasyon manifoldunun hız uzayı olarak adlandırılır (De Leon ve Rodrigues 1989).

Şimdi J 'nin adjoint operatörü J^* ı gözönüne alalım. TM üzerindeki p −formların cümlesi $\wedge^p\ (TM)$ ve TM üzerindeki vektör alanlarının cümlesi $\chi(TM)$ olsun. Bu durumda J^*,

$$J^*(f) = f, f \in C^\infty(TM)$$

$$(J^*\omega)(X_1, \dots, X_p) = \omega(JX_1, \dots, JX_p), X_1, \dots, X_p \in \chi(TM), \omega \in \wedge^p\ (TM)$$

olarak tanımlanır. J^* lokal olarak,

$$J^*(dx^i) = 0\ , J^*(d\dot{x}^i) = dx^i$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 3.1.6: *M* manifoldunun tanjant demeti *TM* üzerindeki p −formların cümlesi sırasıyla $\wedge^p\ (TM)$ ve vektör alanlarının cümlesi $\chi(TM)$ olsun.

$$i_J f = 0\ , f \in C^\infty(TM)$$

$$i_J f(X_1, \dots, X_p) = \sum_{i=1}^{p} \omega(X_1, \dots, JX_i, \dots, X_p);\ \in\wedge^p\ (TM), X_1, \dots, X_p \in \chi(TM)$$

olarak tanımlı i_J fonksiyonuna *düşey türev* denir (De Leon ve Rodrigues 1989).

Aynı zamanda,

$$i_J(df) = J^*(df), f \in C^\infty(TM)$$

olup

$$i_J(dx^i) = 0\ , \qquad i_J(d\dot{x}^i) = dx^i$$

dir.

Tanım 3.1.7: $\omega \in\wedge^p M$,

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_{i_1 \dots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

ise ω, p −formunun diferansiyeli

$$d\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_p} d\omega_{i_1\ldots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$$

şeklinde tanımlı bir $p+1$ −formdur. $d\omega \in \wedge^{p+1} M$ için $x \in M$ de,

$$d\omega(x) = \sum_{i_1<\cdots<i_p} (d\omega_{i_1\ldots i_p})(x) \wedge dx^{i_1}(\mathrm{x}) \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}(x)$$

şeklinde değer alır (Kobayashi ve Nomizu 1963).

Tanım 3.1.8: M manifoldunun tanjant demeti TM üzerindeki p ve $p+1$ formların cümlesi sırasıyla $\wedge^p\ (TM)$ ve $\wedge^{p+1}\ (TM)$ olsun.

$$d_j\colon \wedge^p\ (TM) \longrightarrow \wedge^{p+1}\ (TM), d_j = [i_J d, d] = i_J d - d i_J$$

ile tanımlanan TM üzerindeki d_j fonksiyonuna *düşey diferansiyel* denir (De Leon and Rodrigues 1989).

Tanım 3.1.9: $\forall \mathrm{X} \in \chi(M)$ vektör alanı ile bir ω, p −formunun $i_x\omega$ iç çarpımı aşağıdaki şartları sağlayan bir $(p-1)$ −formdur;

i.	$i_x\omega = 0$	eğer $p = 0$
ii.	$i_x\omega = \omega(X)$	eğer $p = 1$
iii.	$i_x\omega = \omega(X, Y_1, \ldots, Y_{p-1})$	$Y_1, \ldots, Y_{p-1} \in \chi(M)$

bu durumda $i_x\omega \in \wedge^{p-1}\ (M)$ olur (De Leon ve Rodrigues 1989).

Tanım 3.1.10: $M, m-$boyutlu bir manifold ve M'nin TM tanjant demeti üzerinde ϕ bir $2-$form olsun. Eğer ϕ maksimal ranklı bir kapalı $2-$form ise, (M, ϕ) ikilisine *simplektik manifold* denir. Burada maksimal ranklı ϕ 2 −formuna da *simplektik* adı verilir (De Leon ve Rodrigues 1989).

Sonuç 3.1.1: TM üzerinde $\phi_L = -dd_J L$ kapalı $2-$form olmak üzere, eğer ϕ_L simplektik ise, bu durumda $L\colon TM \longrightarrow \mathbb{R}$ Lagrange fonksiyonu regülerdir (veya non-dejeneredir) (De Leon ve Rodrigues 1989).

Tanım 3.1.11: (M, ϕ) simplektik manifold olmak üzere; L regüler Lagrange fonksiyonuna karşılık gelen E_L enerji fonksiyonuna Hamilton enerji fonksiyonu (veya Hamilton Fonksiyonu) denir ve bu fonksiyon $H: M \longrightarrow \mathbb{R}$ ile gösterilir (De Leon ve Rodrigues 1989).

Şimdi,

$$M_\emptyset: X \in \chi(M) \longrightarrow M_\emptyset(X) = i_x\omega \in \wedge^1 (M)$$

izomorfizmini göz önüne alalım. Burada $i_x\omega$, X vektör alanı ile $\omega, 2-$formunun iç çarpımıdır.

Tanım 3.1.12: (M, ϕ) simplektik manifold, koordinatları ise $(x^i, \dot{x}^i)$ olsun. M üzerinde

$$X_H = M_\emptyset^{-1}(dH) = \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{x}^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^i} - \left(\frac{\partial H}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \tag{3.4}$$

olarak tanımlı vektör alanına Hamilton Vektör Alanı denir (De Leon ve Rodrigues 1989).

Tanım 3.1.13: TM tanjant demeti üzerinde $\phi_L = -dd_JL$ kapalı $2-$form, $E_L$enerji fonksiyonu, ε bir semispray olmak üzere; $i_\varepsilon\phi_L = dE_L$ denklemine Lagrange denklemleri için dinamik denklemi denir (De Leon ve Rodrigues 1989).

Tanım 3.1.14: (M, ϕ) simplektik manifoldu üzerinde H Hamilton enerji fonksiyonu ve Hamilton vektör alanı ise X_H olmak üzere; $i_{X_H}\phi = dH$ denklemine Hamilton sistemleri için dinamik denklemi ya da Hamilton sistemlerinin simplektik (esas) formu adı verilir (De Leon ve Rodrigues 1989).

Tanım 3.1.15: $L: TM \longrightarrow \mathbb{R}$ Lagrange fonksiyonu olsun. $i_\varepsilon\phi_L = dE_L$ denklemini sağlayan bir tek ε semisprayine L için *Euler-Lagrange vektör alanı* adı verilir ve ε_L ile gösterilir. (M, ϕ_L, E_L) üçlüsüne de bir *Lagrangian sistem* adı verilir (De Leon ve Rodrigues 1989).

ε_L vektör alanı koordinatlarda lokal olarak,

$$\varepsilon_L = \dot{x}^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) + \varepsilon^i \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\right) \tag{3.5}$$

$\varepsilon^i = \varepsilon^i(x^i, \dot{x}^i)$ olarak ifade edilir.

Tanım 3.1.16: M manifoldunun tanjant demeti TM üzerinde lokal koordinatlar $(x^i, \dot{x}^i)$, $1 \leq i \leq m$ olmak üzere $i_\varepsilon \phi_L = dE_L$ eşitliğinin çözümlenmesiyle,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \tag{3.6}$$

denklemi elde edilir. (3,6) ile verilen denkleme *Euler-Lagrange enerji denklemi* denir (De Leon ve Rodrigues 1989).

Tanım 3.1.17: M, m-boyutlu bir manifold, M'nin kotanjant demeti T^*M ve $\pi_M: T^*M \longrightarrow M$ kanonik projeksiyon olsun. M'nin koordinatları (x^i) ve T^*M nin uyarlanmış koordinatları (x^i, p_i) olarak verilsin.

$$\lambda_M(p)(X) = \langle T\pi_M(X), p\rangle\,,\ \ X \in T_p(T^*M),\ \ p \in T^*M$$

şeklinde tanımlı λ_M, T^*M üzerinde bir (kanonik) 1-form olup

$$\lambda_M = p_i dx_i$$

ile ifade edilir. λ_M ye *Lioville form* adı verilir (De Leon ve Rodrigues 1989).

λ_M, T^*M üzerinde bir Lioville form ise, bu durumda T^*M üzerinde tanımlı

$$\phi_M = -d\lambda_M = dx^i \wedge \mathrm{d}p_i$$

simplektik formu *kanonik simplektik form* olarak bilinir.

Tanım 3.1.18: (M, ϕ) simplektik manifold ve $H: M \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, M üzerinde tanımlı Hamiltonian enerji fonksiyonu olsun. $i_{X_H}\phi = dH$ denklemi sağlayan X_H vektör alanına, H Hamilton enerji fonksiyonu ile birleşen *Hamilton vektör alanı* denir. (M, ϕ, X_H) veya (M, ϕ, H) üçlüsüne de *Hamilton sistemi* adı verilir.

Tanım 3.1.19: (M, ϕ) simplektik manifoldu üzerindeki uyarlanmış lokal koordinatlar (x^i, p_i) olsun. $i_{X_H}\phi = dH$ simplektik formu bazında koordinatlar düzenlenir ve çözülürse,

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}\ ,\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i} \tag{3.7}$$

denklemleri elde edilir. (3,7) ile verilen denklemlere *Hamiltonian enerji denklemleri* adı verilir (De Leon ve Rodrigues 1989).

Şimdi, yukarıda verilen tanım ve teoremlerin zamana bağlı olan Euler-Lagrange ve Hamilton sistemlerdeki karşılıklarını tanımlayacağız. Gerekli temel kavramları ise aşağıdaki biçimde sunacağız.

Zamana bağlı Lagrange sistemleri oluşturmak için jet manifoldlardan yararlanılacaktır. Bunun sebebi zamana bağlı enerji sistemlerinin tanjant demetler kullanılarak elde edilmesindendir. Çünkü birinci mertebeden bir jet demeti birinci mertebeden bir tanjant demet ile özdeştir. Buradaki tanjant demeti oluştururken kullanılan tanjant manifoldda tanımlanan türevsel koordinatlar zaman parametrelerine bağlı olarak türevlenmeyi temsil eder. M, m −boyutlu bir manifold ve $(E = M \times \mathbb{R}\,, \rho, \mathrm{c})$ bir trivial demet olsun. M'nin koordinatları (x^i), $1 \leq i \leq m$ ve $\mathbb{R}$ Öklid uzayının koordinatları (t) olarak verilsin.

$\sigma: \mathbb{R} \longrightarrow M$ dönüşümlerinin $0 \in \mathbb{R}$ orjin noktasındaki birinci jetlerinin cümlesi olan $J_0^1(\mathbb{R}, \mathrm{M})$, aynı zamanda M manifoldunun hız uzayıdır. O halde yukarıda ifade ettiğimiz gibi; $J_0^1(\mathbb{R}, \mathrm{M})$ ile TM özdeştir. $J^1(\mathbb{R}, \mathrm{M})$ de $\mathbb{R} \times \mathrm{TM}$ ile izomorftur. $\sigma: \mathbb{R} \longrightarrow M$ eğrisinin t noktasındaki birinci jetleri $J_t^1\sigma$ ve σ'nın $\sigma(t)$ toktasındaki tanjant vektörü $\dot{\sigma}(t)$ olsun.

$$J_t^1\sigma \longrightarrow (t, \dot{\sigma}(t))$$

dönüşümü ile bu izomorfizm ifade edilir. Böylece, $(E, \rho, \mathbb{R})$ aşikar demet ise $\sigma: \mathbb{R} \longrightarrow M$ dönüşümlerinin ve $(E, \rho, \mathbb{R})$ demetinin k-jetleri özdeşleştirilebilir. σ eğrisinin herhangi bir t noktasında birinci jetleri $J_t^1\sigma$ olmak üzere, birinci jetlerin cümlesi olarak ifade edilen birinci jet manifold $J^1(\mathbb{R}, \mathrm{M})$ ile gösterilir, koordinatları ise $(t, x^i, \dot{x}^i)$, $\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}$ dir.

$J^1(\mathbb{R}, \mathrm{M})$ üzerinde zamana bağlı Lagrange fonksiyonu $L: J^1(\mathbb{R}, \mathrm{M}) \longrightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı bir C^∞ −dönüşümüdür.

Böylece, $J^1(\mathbb{R}, \mathrm{M})$ üzerinde $(\tilde{J})^2 = 0$ eşitliğini sağlayan ve $rank\tilde{J} = m$ ile verilen $(1,1)$ tipinde $\tilde{J}$ tensör alanı *zamana bağlı yaklaşık tanjant yapı* olarak bilinir (De Leon ve Rodrigues 1989).

Ayrıca, V bir Liouville vektör alanı olmak üzere,

$$\tilde{J} = J - V \otimes dt$$

eşitliği ile verilen $\tilde{J}$ yaklaşık tanjant yapısı,

$$\tilde{J}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = -V\,, \quad \tilde{J}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\,, \quad \tilde{J}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\right) = 0 \qquad (3.8)$$

şeklinde tanımlanır.

Zamana bağlı durumda, $\wedge(J^1(\mathbb{R}, \mathrm{M}))$ üzerinde $\tilde{J}$ ile birleşen $i_{\tilde{J}}$ ve $d_{\tilde{J}}$ operatörleri,

$$i_{\tilde{J}}\omega(X_1, \dots, X_p) = \sum_{i=1}^{p} \omega(X_1, \dots, \tilde{J}X_i, \dots, X_p)$$

$$d_{\tilde{J}} = [i_{\tilde{J}}, d] = i_{\tilde{J}}d - di_{\tilde{J}}$$

olarak ifade edilir.

Ayrıca, $\pi_1: J^1(\mathbb{R}, \mathrm{M}) \longrightarrow \mathbb{R}$ kanonik projeksiyonu $\pi_1(J_t^1\sigma) = t$ olarak tanımlıdır.

M manifoldu üzerinde bir $\sigma: \mathbb{R} \longrightarrow M$ eğrisinin *birinci jet prolongasyonu,* $J^1((\mathbb{R}, \mathrm{M}), \pi_1, \mathbb{R})$ lifli manifoldunun $J^1\sigma$ ile gösterilen bir kesitidir. Bu kesit,

$$J^1\sigma: t \in \mathbb{R} \longrightarrow (J_t^1\sigma)(t) = J_t^1\sigma \in J^1(\mathbb{R}, \mathrm{M})$$

olarak tanımlanır. Ayrıca, $J_t^1\sigma, J^1(\mathbb{R}, \mathrm{M})$ de bir eğridir (De Leon ve Rodrigues 1989).

π_1 demetinin bir μ kesiti, M manifoldu üzerinde bir eğrinin kanonik prolongasyonu ise, bu durumda $\theta^i = dx^i - \dot{x}^i dt, 1 \leq i \leq m$, $\theta^i \in \Lambda^1 \left(J^1(\mathbb{R}, \mathrm{M})\right)$ olmak üzere $\mu^*\theta^i = 0$ dır. Böylece, μ *holonomik* olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.20: İntegral eğrileri holonomik olan $J^1(\mathbb{R}, \mathrm{M})$ üzerinde tanımlı bir vektör alanına bir *semispray* denir (De Leon ve Rodrigues 1989).

Teorem 3.1.2: $J^1(\mathbb{R}, \mathrm{M})$ üzerinde bir ε vektör alanının semispray olması için gerek ve yeter şart $J\varepsilon = \mathrm{V}$, $\tilde{J}\varepsilon = 0$ olmasıdır (De Leon ve Rodrigues 1989).

Bu durumda zamana bağlı ε semisprayi lokal olarak,

$$\varepsilon = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \varepsilon^i \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \tag{3.9}$$

$\varepsilon^i = \varepsilon^i\left(t, x^i, \dot{x}^i\right)$, $\dot{x}^i = \ddot{x}^i$, $1 \leq i \leq m$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 3.1.21: ε, $J^1(\mathbb{R}, \mathrm{M})$ üzerinde bir semispray olsun. M de bir σ eğrisine, eğer kanonik prolangasyonu ε semisprayinin bir integral eğrisi ise ε nun bir *çözümü (path solution)* denir (De Leon ve Rodrigues 1989).

M üzerindeki σ eğrisi $(x^i(t))$ olarak tanımlansın. Birinci jetler, $(t, x^i(t), \left(\frac{dx^i}{dt}\right)(t))$ olmak üzere, σ nın ε nin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \varepsilon^i\left(t, x^i, \frac{dx^i}{dt}\right), \quad 1 \leq i \leq m$$

ikinci mertebeden diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

Tanım 3.1.22: $L: J^1(\mathbb{R}, \mathrm{M}) \longrightarrow \mathbb{R}$ zamana bağlı Lagrange fonksiyonu olsun. $J^1(\mathbb{R}, \mathrm{M})$ üzerinde,

$$\alpha_L = d_{\bar{J}}L + Ldt$$

1-formuna *Poincare-Cartan 1-formu* ve

$$\Omega_L = dd_{\bar{J}}L + dL \wedge dt$$

2-formuna *Poincare-Cartan 2-formu* adı verilir (De Leon ve Rodrigues 1989).

Tanım 3.1.23: $J^1(\mathbb{R}, \mathrm{M})$ jet manifoldu üzerinde,

$$i_{\varepsilon_L}\Omega_L = 0\,, \quad i_{\varepsilon_L}dt = 1 \tag{3.10}$$

denklemlerini sağlayan bir tek ε_L vektör alanına *zamana bağlı Euler-Lagrange vektör alanı* ve $(J^1(\mathbb{R}, \mathrm{M}), \Omega_L, \varepsilon_L)$ üçlüsüne de *zamana bağlı Lagrange sistemi* denir (De Leon ve Rodrigues 1989).

Teorem 3.1.3: L zamana bağlı Lagrange fonksiyonu, ε_L (3.10) ile verilen bir vektör alanı olsun. ε, $J^1(\mathbb{R}, \mathrm{M})$ üzerinde integral eğrileri Euler-Lagrange denklemlerinin çözümleri olan bir semispraydır (De Leon ve Rodrigues 1989).

Tanım 3.1.24: $J^1(\mathbb{R}, \mathrm{M})$ jet manifoldu üzerinde ε_L zamana bağlı bir Euler-Lagrange vektör alanı olmak üzere, (3,10) sisteminin çözümlenmesiyle,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \tag{3.11}$$

denklemleri elde edilir. (3,11) ile verilen denklemlere *zamana bağlı Euler-Lagrange denklemleri* denir (De Leon ve Rodrigues 1989).

Zamana bağlı Hamilton sistemler aşağıdaki şekilde ifade edilecektir.

(M, ϕ) bir simplektik manifold, $\mathbb{R}$ Öklid uzayı olmak üzere, $\mathbb{R} \times M$ çarpım manifoldu üzerinde $p_M : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ kanonik projeksiyonu

$$p_M(t, x) = x$$

olarak tanımlansın. Böylece, $\mathbb{R} \times M$ üzerinde bir kapalı 2-form

$$\phi' = (p_M)^*\phi$$

şeklinde ifade edilecektir (De Leon ve Rodrigues 1989).

Tanım 3.1.25: (M, ϕ) bir simplektik manifold ve $\mathbb{R} \times M$ üzerinde tanımlı bir Hamiltonian enerji fonksiyonu $H: \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ olsun. Bu durumda $\forall\, t \in \mathbb{R}$ için $H_t: M \longrightarrow M$, $H_t(x) = H(t, x)$ olarak tanımlanan fonksiyona *zamana bağlı Hamilton enerji fonksiyonu* (veya Hamilton fonksiyonu) denir (De Leon ve Rodrigues 1989).

Tanım 3.1.26: (M, ϕ) bir simplektik manifold ve $\mathbb{R} \times M$ üzerinde bir vektör alanı $X: \mathbb{R} \times M \longrightarrow TM$ olsun. $\forall\, t \in \mathbb{R}$ için $X_t: M \longrightarrow TM$, $X_t(t) = X(t, x) \in T_x M$, $x \in M$ olarak tanımlanan X_t vektör alanına *zamana bağlı vektör alanı* adı verilir (De Leon ve Rodrigues 1989).

Tanım 3.1.27: (M, ϕ) bir sipmlektik manifold olsun. Bu durumda M üzerinde $i_{X_{H_t}}\phi = dH_t$ denklemi sağlayan X_{H_t} vektör alanına *zamana bağlı Hamilton vektör alanı* ve (M, ϕ, X_{H_t}) üçlüsüne de *zamana bağlı Hamilton sistemi* adı verilir (De Leon ve Rodrigues 1989).

Böylece; X_{H_t} lokal olarak,

$$X_{H_t} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H_t}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial H_t}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial p_i} \tag{3.12}$$

şeklinde ifade edilir.

M manifoldunun koordinatları (x^i, p_i) ve ϕ 2-formu, $\phi = dx^i \wedge dp_i$ ise ϕ' 2-formunun lokal ifadesi de aynı şekilde verilecektir. Yani, $\phi' = dx^i \wedge dp_i$ dir.

$\sigma: I = (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R} \times M$, $\epsilon > 0$ için X_{H_t} vektör alanının bir integral eğrisi olsun. Böylece,

$$\sigma(t) = (t, q^i(t), p_i(t))$$

ve ayrıca σ, X_{H_t} nin bir integral eğrisi olduğundan;

$$\dot{\sigma}(t) = X_{H_t}(\sigma(t)) = \frac{\partial}{\partial t} + X_t\left(x^i(t), p_i(t)\right)$$

olur.

Tanım 3.1.28: X_{H_t} zamana bağlı bir Hamilton vektör alanı ve σ, X_{H_t} nin bir integral eğrisi olsun. Bu durumda $i_{X_{H_t}}\phi = dH_t$ simplektik formu çözümlenerek elde edilen

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \ \ 1 \leq i \leq m \tag{3.13}$$

denklemlerine, (M, ϕ) simplektik manifoldu üzerinde tanımlı *zamana bağlı Hamiltonian enerji denklemleri* denir (De Leon ve Rodrigues 1989).

Şimdi, yukarıda verdiğimiz tanım ve teoremleri ele alarak aşağıda fuzzy uzayında Lagrangian ve Hamiltonian enerji denklemlerini elde edeceğiz.

3.2 Fuzzy Uzayında Lagrange Enerji Denklemi

Tanım 3.2.1: J, m boyutlu bir M fuzzy manifoldunun tanjant demeti üzerinde yaklaşık tanjant yapı olmak üzere,

$$\varepsilon = \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \quad (1 \leq i \leq m) \tag{3.14}$$

vektör alanı bir semispraydir. Ayrıca,

$$V = j\varepsilon = \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{3.15}$$

vektör alanını da Louville vektör alanı denir.

Tanım 3.2.2: $L: TM \longrightarrow [0,1] \subset \mathbb{R}$ C^∞ bir fonksiyon olmak üzere TM üzerindeki $\phi_L = -dd_jL$ ile tanımlı kapalı $2-$formu için $E_L = V_L - L$ eşitliğine L Lagrange fonksiyonu ile birleşen enerji fonksiyonu denir.

Ayrıca,

$$i_\varepsilon \phi_L = dE_L \tag{3.16}$$

diferansiyel denklemine Lagrange enerji sistemleri için tanımlı dinamik denklem adı verilir.

Buradaki E_L vektör alanına, $L: TM \longrightarrow [0,1] \subset \mathbb{R}$ Lagrange fonksiyonu için Euler-Lagrange vektör alanı denir. Burada,

$$E_L = \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}$$

ile tanımlıdır ve $\varepsilon_i = \varepsilon_i(x_i, \dot{x}_i)$ dir.

$i_\varepsilon \phi_L = dE_L$ nin çözümü ile Lagrange enerji denklemleri elde edilir. Buna göre bu diferansiyel denklem,

$$0 = \dot{x}_i \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{x}_i} - \dot{x}_i^{\,2} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial \dot{x}_i} - \dot{x}_i^{\,2} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i^{\,2}} - \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial x_i}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \qquad (3.17)$$

olarak elde edilecektir.(3.17) ye fuzzy uzayında Euler-Lagrange enerji denklemleri denir.

Buradaki ayrıcalık fuzzy uzayındaki Lagrange enerji fonksiyonunun $L: TM \longrightarrow [0,1] \subset \mathbb{R}$ ve diğer yandan koordinat fonksiyonlarının da $x_i: M \longrightarrow [0,1] \subset \mathbb{R}$ ye tanımlı olmasıdır. M ise bir fuzzy manifoldudur.

Diğer uzaylarda enerji fonksiyonunun değerleri için $[0,1]$ aralığına kısıtlanması söz konusu değildir. Hatta Lagrange enerjisi zaman genişlediği ve hız arttığı durumlarda stabil hale gelmektedir. Fuzzy uzayında ise bu fonksiyon sadece $[0,1] \subset \mathbb{R}$ aralığında değer alacağı gibi stabil duruma ulaştığındaki değeride en çok 1 olabilir.

3.3 Fuzzy Uzayında Hamilton Enerji Denklemi

$(E, \pi, \mathbb{R})$ demeti ve $m+1$ boyutlu E manifoldunun koordinatları (x_i) olsun. Burada J^1E manifoldunun koordinatları da $(t, x_i, \dot{x}_i)$ dir ($\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$).

T^*E kotanjant demeti üzerinde $\varphi = \dot{x}_i\, dx_i$ bir süper kanonik formunu tanımlayabiliriz. Aynı zamanda kanonik simplektik formu ise

$$\phi = -\mathrm{d}\ell = dx_i \wedge d\dot{x}_i$$

dir.

Eğer ϕ kapalı $(\mathrm{d}\phi = 0)$ ve dejenere olmamış ise J^1E sistemine *fuzzy simplektik manifold* deriz.

J^1E fuzzy manifoldu üzerindeki Hamilton vektör alanı ise

$$X_H = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \tag{3.18}$$

şeklindedir.

Yukarıdaki X_H fuzzy manifoldu üzerindeki Hamilton vektör alanını açalım:

$$X_H = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{E}_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \mu_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \tag{3.19}$$

$$J^1E\colon\ \chi(J^1E) \to \wedge'\ (J^1E)$$

Buradan, denklemleri çözerek;

$$i_{X_H}\phi = \mathcal{E}_i d\dot{x}_\iota - \mu_i dx_i \tag{3.20}$$

$$dH = \frac{\partial H}{\partial t}dt + \frac{\partial H}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_i}d\dot{x}_i \tag{3.21}$$

elde edilir.

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{x}_i} = \mathcal{E}_i$$

$$-\frac{\partial H}{\partial x_i} = \mu_i$$

için, $i_{X_H}\phi$=dH denklemini çözersekte Hamiltonian mekanik sistemi yazabiliriz.

Buradan da Fuzzy Hamilton vektör alanı

$$X_H = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_i}\ \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 3.3.1: J^1E fuzzy demeti üzerindeki Hamilton enerji denklemleri

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{x}_i} = \frac{dx_i}{dt}\ ,\quad -\frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{d\dot{x}_i}{dt} \tag{3.22}$$

dir.

İspat: X_H süper vektör alanına ait integral eğrisi α olsun.

$$\alpha(t)=(t, x_i, \dot{x}_i) \tag{3.23}$$

$$X_H(\alpha(t))=\alpha'(t)\ , \forall\ t\ \in I \tag{3.24}$$

$$\alpha'(t) = \frac{dt}{dt}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx_i}{dt}\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{d\dot{x}_i}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}$$

buradan da;

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{dx_i}{dt} \qquad \text{ve} \qquad -\frac{\partial H}{\partial \dot{x}_i} = \frac{dx_i}{dt} \tag{3.25}$$

elde edilir ve böylece (3.25) ile fuzzy uzayında Hamilton enerji denklemleri elde edilmiş olur.

Buradan, Hamilton enerji denklemlerinin genel formlarından farklı olmadığını görebiliriz. Ancak; fuzzy uzayında, M baz manifoldunun koordinat fonksiyonları $x_i: M \to [0,1]$ dir.

Aynı zamanda, Hamilton enerji fonksiyonları $H: T^*E \to [0,1]$ şeklinde tanımlanır. Böylece (3.22) deki fuzzy manifoldu üzerindeki Hamilton enerji denklemleri $[0,1]$ aralığında hesaplanır. Hamiltonian enerjisi her zaman farklı alanlarda sabit bir değere sahiptir. Fakat fuzzy manifoldlarda Hamiltonian enerjisi sıfıra yakınsayan değerleri vardır. Zaman aralığı genişletildiğinde fuzzy uzayın Hamiltonian enerjisi azalır.

3.4 Fuzzy Silindiri İçin Hamilton Enerji Denklemleri

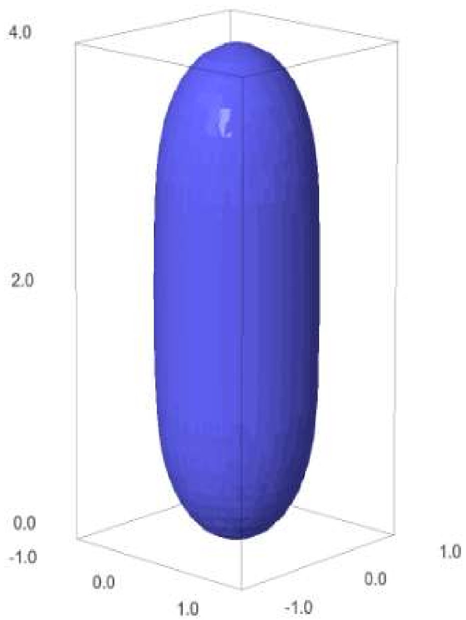
Önceki kısımda fuzzy manifoldlar üzerindeki Hamilton enerji denklemlerini (3.25) elde etmiştik. Burada bu denklemlerin bir uygulaması olan fuzzy silindiri tanımlayıp, bu silindir üzerinde hareketli bir parçacık için Hamilton enerji denklemlerini elde edeceğiz.

Yarıçağı r olan bir fuzzy silindirini şu şekilde tanımlayabiliriz;

$$V = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\mu_A(x_1), \ldots, \mu_A(x_n)\right)$$

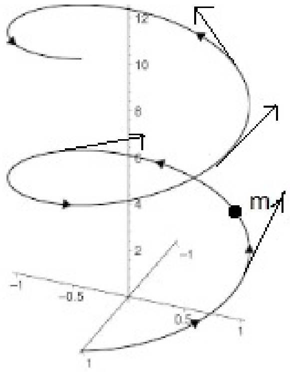
Ayrıca,

$$V.V = \sum_{i,j=1}^{n} \mu_A(x_i) \, . \, \mu_A(x_j) = \begin{matrix} r^2, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{matrix} \qquad (3.26)$$



Şekil 3.1: fuzzy silindiri

Şimdi, bir m parçacığının fuzzy silindir üzerindeki hareketini inceleyelim.



Şekil 3.2: Fuzzy silindiri üzerindeki m parçacığının hareketi

Fuzzy silindir koordinatlarda aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$x = rcost$$

$$y = rsint$$

$$z = t$$

Bu silindir üzerinde enerji denklemini elde etmek için kurmamız gereken jet demetin koordinatları ise;

$$(t, rcost, rsint, \dot{r}cost, \dot{r}sint) \tag{3.27}$$

olur.

Burada t zaman parametresi olmak üzere, (3.27) ’deki koordinatlar ve (3.25)’deki hamilton enerji denklemleri kullanılarak fuzzy silindir için Hamilton enerji denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \frac{\partial H}{\partial(\dot{r}cos\theta)} = \frac{d(rcos\theta)}{dt} \\
&(2) \quad \frac{\partial H}{\partial(\dot{r}sin\theta)} = \frac{d(rsin\theta)}{dt} \\
&(3) \quad -\frac{\partial H}{\partial(rcos\theta)} = \frac{d(\dot{r}cos\theta)}{dt} \\
&(4) \quad -\frac{\partial H}{\partial(rsin\theta)} = \frac{d(\dot{r}sin\theta)}{dt}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Ayrıca bu denklemlerin çözümü ise gerekli olan işlemler yapıldığında,

(1) $\frac{\partial H}{\partial \dot{r} cos\theta} = cos\theta . \frac{dr}{dt}$

(2) $\frac{\partial H}{\partial \dot{r} sin\theta} = sin\theta . \frac{dr}{dt}$

(3) $-\frac{\partial H}{\partial r cos\theta} = cos\theta . \frac{d\dot{r}}{dt}$

(4) $-\frac{\partial H}{\partial r sin\theta} = sin\theta . \frac{d\dot{r}}{dt}$ (3.29)

denklemleri elde edilir.

Aşağıdaki toplamları takip edersek,

(1)+(2):

$$2\frac{\partial H}{\partial \dot{r}} = \frac{dr}{dt} \quad (*)$$

(3)+(4):

$$-2\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{d\dot{r}}{dt} \quad (**)$$

Burada yarıçap sadece zamana bağlı iken Hamilton enerji fonksiyonuda hem yarıçap hem de zamana bağlı olacaktır. Yani;

$$H = H(r,t) \text{ ve } r = r(t)$$

dir.

Fakat biz bu denklemleri sadece özel şartlarda çözebiliriz. Çünkü, denklemlerimi nonlineer kısmi türevli denklemler olduğundan sadece özel koşullar altında çözülebilirler. Biz bu koşulları tespit ederken hareketin ve enerjinin gerçekliğine bağlı kalarak en uygun koşulları belirledik. r'nin t'ye göre türevi sabit değilse denklemin çözümü gerçekleşmez.

Böylece,

$$\frac{dr}{dt} = \lambda \quad , \quad (\dot{r} = \lambda)$$

olarak kabul edelim.

$$2\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \lambda$$

$$2\partial H = \lambda \partial \lambda$$

$$2H = \frac{\lambda^2}{2} + C$$

Sonuç olarak, fuzzy silindiri üzerindeki m hareketlisi için Hamilton enerji denklemlerini bulmuş olduk. Burada, $r = \lambda t$ dir ve fuzzy uzaylarında $r(t)\epsilon[0,1]$ ve $H(r,t)\epsilon[0,1]$ dir.

Örneğin;

i) $r = \frac{1}{2}$ ve $t = \frac{1}{8}, \lambda = 4$ ve $H = \frac{16}{4} + c$
(buradaki c belirtilmezse $H = 4$'tür)

ii) $r = \frac{1}{2}$ ve $t = \frac{1}{4}, \lambda = 2$ ve $H = 1$

iii) $r = \frac{1}{2}$ ve $t = \frac{1}{2}, \lambda = 1$ ve $H = \frac{1}{4}$

Sonuç olarak; yarıçap stabil ve zaman değişken olduğunda, Hamilton enerjisinde sıfıra yakınsama vardır. Genel olarak Hamilton enerjisinin kararlı bir durumu vardır diyebiliriz. Fakat fuzzy uzayında zaman genişletilirse Hamilton enerjisi sıfıra yakınsama gösterir.

3.5 Fuzzy Silindiri İçin Lagrange Enerji Denklemleri

Fuzzy silindiri üzerindeki hareketli parçacığın Lagrange enerji denklemini elde etmek için

$$i_\varepsilon \phi_L = dL$$

diferansiyel denkleminin çözümlenmesiyle elde edilen (3.17) denklemi silindirin jet demet koordinatlarına göre tekrar düzenlemeliyiz. Böylece, aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$0=(\dot{r}cost)\frac{\partial^2 L}{\partial t\partial(\dot{r}cost)}+(\dot{r}sint)\frac{\partial^2 L}{\partial t\partial(\dot{r}sint)}-(\dot{r}cost)^2\frac{\partial^2 L}{\partial(rcost)(\dot{r}sint)}-$$
$$(\dot{r}sint)^2\frac{\partial^2 L}{\partial(rsint)\partial(\dot{r}sint)}-(\dot{r}cost)^2\frac{\partial^2 L}{(\partial\dot{r}cost)^2}-(\dot{r}sint)^2\frac{\partial^2 L}{(\partial\dot{r}sint)^2}-\dot{r}cost\frac{\partial L}{\partial(\dot{r}cost)}-$$
$$\dot{r}sint\frac{\partial L}{\partial(\dot{r}sint)}-\dot{r}cost\frac{\partial L}{\partial(rcost)}-\dot{r}sint\frac{\partial L}{\partial(rsint)}\,.$$

Buradan;

$$0=(\dot{r}cost)\left[\frac{\partial^2 L}{\partial t\partial(\dot{r}cost)}-(\dot{r}cost)\frac{\partial^2 L}{\partial(rcost)\partial(\dot{r}sint)}-(\dot{r}cost)\frac{\partial^2 L}{(\partial\dot{r}cost)^2}-\frac{\partial L}{\partial(\dot{r}cost)}-\right.$$
$$\left.\frac{\partial L}{\partial(rcost)}\right]+(\dot{r}sint)\left[\frac{\partial^2 L}{\partial t\partial(\dot{r}sint)}-(\dot{r}sint)\frac{\partial^2 L}{\partial(rsint)\partial(\dot{r}sint)}-(\dot{r}sint)\frac{\partial^2 L}{(\partial\dot{r}sint)^2}-\right.$$
$$\left.\frac{\partial L}{\partial(\dot{r}sint)}-\frac{\partial L}{\partial(rsint)}\right].$$

daha sonra;

$$(1)\ \frac{\partial^2 L}{\partial t\partial(\dot{r}cost)}-(\dot{r}cost)\frac{\partial^2 L}{\partial(rcost)\partial(\dot{r}sint)}-(\dot{r}cost)\frac{\partial^2 L}{(\partial\dot{r}cost)^2}-\frac{\partial L}{\partial(\dot{r}cost)}-$$
$$\frac{\partial L}{\partial(rcost)}=0,$$
$$(2)\ \frac{\partial^2 L}{\partial t\partial(\dot{r}sint)}-(\dot{r}sint)\frac{\partial^2 L}{\partial(rsint)\partial(\dot{r}sint)}-(\dot{r}sint)\frac{\partial^2 L}{(\partial\dot{r}sint)^2}-\frac{\partial L}{\partial(\dot{r}sint)}-$$
$$\frac{\partial L}{\partial(rsint)}=0\,.$$

(1) ve (2) numaralı denklemlerin ortak çözümleri hesaplandığında ise;

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial(\dot{r}cost)}+\frac{\partial L}{\partial(\dot{r}sint)}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial(rcost)}+\frac{\partial L}{\partial(rsint)}\right)=0$$

denklemi elde edilir. Bu denklem fuzzy silindiri üzerindeki hareketli parçacığın Euler-Lagrange enerji denklemidir. Burada yine non-lineer diferansiyel denklem sistemlerini çözmek için fiziksel realiteye bağlı özel koşullar altında çözüm yapmamız gerektiğini hatırlatalım. Buna göre; burada da

$$\frac{dr}{dt}=\dot{r}=\lambda\quad(\lambda\ sabit)$$

alırsak çözüme ulaşabilmekteyiz. Bu koşul altında yukarıdaki denklemin çözümünden

$$L = \lambda . c \quad (c \; sabit)$$

sabit değeri elde edilebilir, fakat fuzzy uzayında L Lagrange enerji fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında değer alması gerektiği için bu enerji maksimum “1” reel değerine ulaşabilir. Enerji ancak cisim hareketsiz iken “0” değerini alır. Fakat biliyoruzz ki Lagrange enerjisi cisim maksimuma ulaştığında stabil bir değerde kalmaktadır. O halde, bu değer fuzzy uzayı için en fazla “1” olabilir.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Fuzzy uzaylarının diferansiyel geometride özel mekanik yapılar üzerinde bir çalışması henüz planlanan doğrultuda yapılmamıştır. Bu bağlamda bu tez çalışmasında fuzzy uzayının manifold ve demet yapısı tanımlanmış ve bu yapılar üzerinde mekanik sistemler oluşturulmuştur. Bu sistemlerin çözümü ile Lagrangian ve Hamiltonian enerji denklemleri hesaplanmış, çalışmanın geometrik ve fiziksel yorumunu sunabilmek adına fuzzy silindiri üzerinde örnek verilmiştir.

Bu çalışmanın diferansiyel geometrinin uygulamaları açısından araştırmacılara yeni fikirler vereceğini düşünmekteyiz.

5. KAYNAKLAR

Aycan, C., The Lift of Euler-Lagrange and Hamiltonian Equations on the Extended Jet Bundles, D. Sc. Thesis, *Osmangazi Univ.* , Eskisehir, (2003).

Aycan, C., Dagli, S., Improving Hamiltonian energy equation on the Kahler jet bundles, IJGMMP, V10 N3, March, (2013).

Buckley, J., "An Introduction to Fuzzy Logic and Fuzzy Sets", *PhysicaVerlag*, New York, (2002).

Bhutani, R., "Fuzzy sets, Fuzzy relationsand Fuzzy Groups", InformSci., 73,107-115 (1993).

Chang, C.L., "Fuzzy Topological Spaces", *J.Math. Anal. Appl.,* 24, 182-190, (1986).

Çınar, M., "Fuzzy metrik uzay", Yüksek Lisans Tezi, *Bülent Ecevit Üniversitesi*, (2015).

Dib, K.A. , "The Fuzzy Topological Spaces on a Fuzzy Space", Fuzzy Sets and Systems 108, 103-110, (1999).

Dubois, D. ve Prade H., "Fuzzy Sets and Systems", *Academic Press*., New York, (1980).

De Leon, M. and Rodrigues P.R.; "Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanic", North-Holland Math. Ser. 152, *Elsevier Sc. Pub. Com. Inc*., Amsterdam, (1989).

Erceg, M.A.,"Metric Spaces in Fuzzy Set Theory", *J.Math. Anal. Appl.,*69,205-230, (1979).

Ermiş, T., "Bulanık kümeler ve Bulanık kümeler Üzerine", Yüksek Lisans Tezi, *Osmangazi Univ.,* Eskişehir, (2009).

Ferrero, M. and Foster, D., "Fuzzy Manifolds", Fuzzy sets and systems 54, (1993).

George, A. and Vereemani, P., "On Some results of Analysis for Fuzzy Metric Spaces", Fuzzy Sets and Systems 90, 365-368, (1997).

Kandasamy, W.B., "Smarandache Fuzzy Algebraces", *Indian Enst*., Madras, (2003).

Kaleva, O. and Seikkala, S., "On Fuzzy Metric Spaces", Fuzzy sets and Systems, 19,193-197 (1986).

Karcı, A., "Kesir Dereceli Türevin Yeni Yaklaşımının Özellikleri", *Journal of The Faculty of Engineeringand Architecture of Gazi University* , Vol:30, No.3, 487-501, (2015).

Lubczonoc, P., "Fuzzy Vector Spaces" ,Fuzzy Sets and Systems, 329-343, (1990).

Matthew, N. Moore, Fundamentals of Fractional Calculus, Seminar, April 4, (2013).

Mordeson, J., "Bases of Fuzzy Vector Spaces", Inform Sci.,67,87-92, (1993).

Nanda, S., "On Fuzzy Topological Spaces", Fuzzy sets and Systems, 12,215-229 (1984).

Najarian, M ve M1. Akman, Y., "The Fuzzy Metric Spaces", M. Sc. Thesis, *Gazi Univ.,* Ankara, (2007).

Sardanashvily, G. , "Hamiltonian time-dependent mechanics" , *Jour. of Math. Phys.*, 39-(5), (1998).

Soliman, Y., "Fuzzy Differential Geometry- Theory and Applications to Machine Learning and Manifold Estimation, (2016).

Sykora, A., "The Fuzzy Space Construction on Kit", Arxiv,1610.01504v1, (2016).

Podlunby, I., Fractional of Equations, Ac. Press, USA, (1995).

Qiu, J.Q. and Zhang, M., “ Fuzzy Space Analytic Geometry”, Proo. *V. Int. Conference on Machine Learning*, Dalian, 13-16 August, (2006).

6. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Osman ARSLAN

Doğum Yeri ve Tarihi : Denizli-26/07/1990

Lisans Üniversite :Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi

Elektronik posta : o1arslan@hotmail.com

İletişim Adresi : Bağbaşı mh. Huzur cd. D blok No: 18D İçKapı No:9 Pamukkale/DENİZLİ

Konferans listesi:

Osman Arslan, Cansel Yormaz, Simge Şimşek, “Hamiltonian Energy Systems for Fuzzy Manifolds on Fuzzy Space” 15th International Geometry Symposium, 2017 (Amasya Üniversitesi)