T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TAM ÇÖZÜMLERİ İÇİN METOTLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SARA MAGHSOUDI KHOUZANI

DENİZLİ, HAZİRAN - 2019

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TAM ÇÖZÜMLERİ İÇİN METOTLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SARA MAGHSOUDI KHOUZANI

DENİZLİ, HAZİRAN - 2019

KABUL VE ONAY SAYFASI

SARA MAGHSOUDI KHOUZANI tarafından hazırlanan "**BAZI LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TAM ÇÖZÜMLERİ İÇİN METOTLAR**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 28.06.2019 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Prof. Dr. Uğur YÜCEL Pamukkale Üniversitesi	....
Üye Doç. Dr. Özcan SERT Pamukkale Üniversitesi	....
Üye Dr. Öğr. Üyesi Elçin GÖKMEN Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi	....

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 10/07/2019 tarih ve ..28/10.. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....

Prof. Dr. Uğur YÜCEL

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

SARA MAGHSOUDI KHOUZANI

ÖZET

BAZI LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TAM ÇÖZÜMLERİ İÇİN METOTLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SARA MAGHSOUDI KHOUZANI

PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI:PROF. DR. UĞUR YÜCEL)

DENİZLİ, HAZİRAN - 2019

Kısmi diferansiyel denklemler fen, mühendislik ve diğer çeşitli uygulamalarda karşılaşılan olayların evrimini tanımlamada bizlere yardımcı olduklarından genel olarak matematiğin gelişiminde temel rol oynamaktadırlar. Bu çalışmada bir bilgisayar cebiri sistemi olan Maple yardımıyla lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri için farklı yaklaşımlar takip edeceğiz. Bunun için son zamanlarda geliştirilen ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin hareketli dalga çözümlerini elde etmemize izin veren üç metot, tanh-fonksiyonu metodu, deneme fonksiyonu metodu ve en basit denklem metodu, ele alınmaktadır. Bu metotların kullanımı çeşitli lineer olamayan evrim denklemlerine uygulanarak açıklanmıştır ve elde edilen çözümlerden bazılarının grafikleri verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: tanh-fonksiyonu metodu, en basit denklem metodu, deneme fonksiyonu metodu

ABSTRACT

METHODS FOR EXACT SOLUTIONS OF SOME NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS
MSC THESIS
SARA MAGHSOUDI KHOUZANI
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE MATHEMATICS
(SUPERVISOR: PROF. DR. UĞUR YÜCEL)

DENİZLİ, SEPTEMBER 2019

Theory of partial differential equations plays a central role within the general advancement of mathematics, since they help us to describe the evolution of many phenomena in various fields of science, engineering, and numerous other applications. In this work, we follow different approaches to solve nonlinear partial differential equations with the aid of computer algebra system, Maple. We consider recently developed three methods, namely tanh-function method, trial function method and simplest equation method, which allow us to construct travelling wave solutions of nonlinear partial differential equations. The use of these methods is illustrated by applying them to a variety of nonlinear evolution equations and graphs are drawn for some of the obtained solutions.

KEYWORDS: tanh-function method, simplest equation method, trial function method

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Bazı fiziksel olayların matematiksel modelleri olan kısmi diferansiyel denklemler 18. yüzyıldan itibaren çalışılmaya başlanmıştır. Bunlara örnek olarak Euler, Cauchy, d'Alembert, Hamilton, Jacobi, Lagrange, Laplace, Monge ve diğer birçok bilim insanının çalışmaları gösterilebilir. Kısmi diferansiyel denklemlerin açık çözümlerini bulmadaki en önemli sonuçlar ise 19. yüzyıl sonlarında Lie (1893) tarafından elde edilmiştir. Çoğu analitik metotlar Lie simetrisine (veya simetri sürekli dönüşüm gruplarına) dayanmaktadır. 20. yüzyıldan bu yana, bilgisayarların gelişimine paralel olarak, lineer (doğrusal) olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin incelenmesi farklı birçok araştırma yönüne açılan bağımsız bir alan olmuştur. Bu yönlerden biri de bu denklemlerin çözümlerinin sembolik ve sayısal (nümerik) hesaplanmasıdır. Günümüzde bu hesaplamalar Bilgisayar Cebiri Sistemleri (örneğin, *Maple* veya *Mathematica*) kullanılarak kolayca yapılabilmektedirler.

Bilindiği üzere bazı özel lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri için çeşitli metotlar mevcut olsa da genel durum için bir teori mevcut değildir. Yani, tüm tiplerdeki lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlere uygulanabilecek tek bir metot yoktur. Lineer olmama (non-lineerlik) durumu her bir denklemi kendine özgü yapmasına rağmen, en azından lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin bir sınıfı için yeni metotlar geliştirilmesine ihtiyaç duyulmaktadır.

Diferansiyel denklemlerin tam (kapalı-form) çözümleri doğa bilimlerinin çeşitli alanlarında birçok olay ve işlemin nitel özelliklerini doğru şekilde anlamada çok önemli rol oynamaktadır. Örneğin:

- Lineer olmayan denklemlerin tam çözümleri grafiksel olarak birçok karmaşık lineer olmayan olayın (transfer işleminin uzaysal lokalizasyonu, çeşitli şartlar altında kararlı durumların çok katlılığı veya yokluğu, pik rejiminin varlığı ve daha niceleri) mekanizmasını göstermemize ve çözmemize izin verir.

- Basit çözümler çeşitli dersleri öğretmede matematiksel formülasyonu mümkün olan bir teorinin temel ilkelerini göstermede özel örnekler olarak sıklıkla kullanılırlar.
- Fiziksel manada yeterince anlaşılamayan özel tam çözümler bile çeşitli sayısal (nümerik), asimtotik ve yaklaşık analitik metotların hata tahminlerini ve kararlılığını (tutarlılığını) doğrulamada "test problemler" olarak kullanılabilirler.
- Tam çözümler, diferansiyel denklemleri çözmek için geliştirilen bilgisayar cebiri yazılım paketlerinin testinde ve iyileştirmesinde bir dayanak olarak hizmet edebilirler.
- Fiziğin, kimyanın ve biyolojinin birçok denklemi ampirik parametreler veya ampirik fonksiyonlar içermektedir. Tam çözümler, araştırmacılar için uygun doğal koşullar oluşturarak bu parametreleri veya fonksiyonları tanımlamak için dizayn yapmaya ve deneysel çalışmaya olanak sağlarlar.

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin (evrim denklemlerinin) açık hareketli dalga çözümleri oldukça fazla merak uyandırmaktadır. Bu çözümleri elde etmek için doğrudan integral (eğer mümkünse), Hirota'nın bağımlı değişken dönüşümü, Bäcklund dönüşümü ve ters saçılım dönüşümü gibi standart teknikler mevcuttur (Drazin ve Johnson 1989). Fakat bu metotların çoğu lineer olmayan integrallenemez denklemler için yeni sonuçlar vermezler. Bu durumda araştırmacılar ansatz metotlar (tahmin yürüterek hesaplama metotları) kullanmaktadırlar. Bu alanda literatür oldukça geniş olduğundan biz bu çalışmada bu metotlardan sadece üçünü ele alacağız.

Çalışacağımız ansatz metotlardan ilki *tanh fonksiyonu metodu* dur (Parkes ve Duffy 1996). Elle uygulaması oldukça zahmetli olan bu metot için yazarlar bir *Mathematica* paket programı geliştirmişlerdir. Geliştirilen bu paket programı kullanarak bazı lineer olmayan evrim denklemlerinin bilinen açık hareketli soliter dalga çözümlerinin tekrar elde edilmesinin yanı sıra bazı durumlar için daha genel çözüm formları elde etmişlerdir. Fan (2000) bu metodu geliştirerek bir *geliştirilmiş tanh fonksiyonu metodu* öne sürmüş ve bu yeni metotla bazı (1+1)- ve (2+1)-boyutlu lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemleri çözmüştür. Tanh fonksiyonu metodunun tersine bu geliştirilmiş metodun bazı avantajları vardır. Bunlardan ilki lineer olmayan denklemlerin katlı hareketli dalga çözümlerini bileşik olarak inşa etmede kullanılabilir olmasıdır. Bu şekilde tanh fonksiyonu metoduyla elde edilen soliter dalga çözümleri elde edilmekte ve ekstra çaba harcamadan bazı denklemler için yeni ve daha genel tipte çözümler bulunabilmektedir. Diğer bir avantajı ise kolaylıkla bilgisayar ortamına aktarılabilmesi ve karmaşık ve zahmetli cebirsel işlemlerin bu ortamda yapılabilmesine olanak sağlamasıdır. Khater ve diğ. (2002) tanh metodunu kullanarak lineer olmayan reaksiyon-yayılma denklemlerinden tek ve akuple olanının hareketli dalga çözümlerini elde etmişlerdir. Evans ve Raslan (2005) tanh fonksiyonu metoduyla eşit-genişlikli dalga denklemini, değiştirilmiş Korteweg-de Vries (KdV) denklemini, düzenlenmiş uzun-dalga denklemini ve iki boyutlu akuple Burgers denklemini çözmüştür.

Ele alacağımız ikinci metot *deneme fonksiyonu metodu*dur (Liu 2006). Bu metoda göre verilen bir lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem dalga dönüşümüyle yine lineer olmayan bir adi diferansiyel denkleme indirgenir. Bir deneme denklemi alınarak elde edilen bu adi diferansiyel denklemde kullanılır. Buradan deneme denklemindeki katsayılar ve kullanılan diğer parametreler için bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sisteminin çözümünden elde edilen sonuçlar elementer integral formuna indirgenen adi diferansiyel denklemde kullanılarak ele alınan denklemin çözümüne ulaşılır. Du (2010) irrasyonel deneme denklemi metodunu önerdi ve bunu kullanarak Burgers-KdV ve sönümlü çift sine-Gordon denklemlerinin açık hareketli dalga çözümlerini elde etti. Rui ve Jian (2013), deneme fonksiyonu ve genelleştirilmiş hareketli dalga dönüşümü yardımıyla zamana bağlı katsayılı değiştirilmiş lineer olmayan Schrödinger denkleminin açık çözümlerini kısıtlı koşullar altında elde etmişlerdir.

Ele alacağımız son metot ise *en basit denklem metodu* dur (Kudryashov 2005). Daha sonra birçok yazar tarafından matematiksel fizikte karşımıza çıkan denklemlerin tam çözümlerini bulmak için başarıyla kullanılmıştır (bkz. Vitanov ve diğ. (2010), Taghizadeh ve diğ. (2012)). İki önemli avantajı vardır. Bunlardan ilki, daha önce geliştirilen metotlardan birkaçını (örneğin tanh-fonksiyonu metodu) genelleştirmektedir. İkinci önemli avantajı ise uygulanabilirliğinin kolay olmasıdır.

Bu tezin organizasyonu şu şekildedir. İkinci bölümünde bazı önemli tanımlar ve temel kavramlar verilecektir. Üçüncü bölümde yukarıda bahsi geçen metotların her biri detaylı olarak ele alınacaktır. Son bölümde ise yapılan çalışmalar özetlenecek ve bazı önerilerde bulunulacaktır.

2. TANIMLAR VE TEMEL KAVRAMLAR

Doğadaki her olay ve süreci düzenleyen kurallarla ilgili çeşitli parametreler vardır. Bu parametreler arasındaki ilişki matematik dilinde ifade edilirse genelde bir fonksiyonel denklem elde edilir. Bir fonksiyonun bir ya da daha fazla bağımsız değişkene göre türevlerini veya diferansiyellerini içeren denkleme diferansiyel denklem denir. Bağımsız değişken tek ise diferansiyel denklem ***adi diferansiyel denklem***, bağımsız değişken birden fazla ise diferansiyel denklem ***kısmi diferansiyel denklem*** olarak adlandırılır. Örneğin,

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n, \quad n \in \mathbb{R}$$
$$\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x),$$

denklemleri sırasıyla Bernoulli ve Riccati denklemleri olarak bilinen adi diferansiyel denklemlerdir. Yine,

$$u_t = ku_{xx},$$
$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy}),$$
$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy} + \mathrm{u}_{zz}),$$

denklemleri sırasıyla bir boyutlu, iki boyutlu ve üç boyutlu uzayda ısı akışını tanımlayan kısmi diferansiyel denklemlerdir. Benzer şekilde

$$u_{tt} = c^2 u_{xx},$$
$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}),$$
$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}),$$

denklemleri sırasıyla bir boyutlu, iki boyutlu ve üç boyutlu uzayda dalga yayılımını tanımlayan kısmi diferansiyel denklem örnekleridir.

Bir ***diferansiyel denklemin mertebesi*** o diferansiyel denklemde gözüken en yüksek mertebeden türevin mertebesidir. Buna göre,

$$
\begin{aligned}
&y'' + 2xy' + y = e^x \\
&u_t - u_x = 0, \\
&u_t - uu_{xx} = 0, \\
&u_t - u_{xxx} + u - u^2 = 0,
\end{aligned}
$$

denklemleri sırasıyla ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem ve birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklem örnekleridir.

Genel olarak, bir diferansiyel denklem bağımlı değişkenine göre lineer ise bu denkleme ***lineer*** aksi takdirde ***lineer olmayan (non-lineer) denklem*** denir. Bu durumları aşağıda genel bir kısmi diferansiyel denklem üzerinde daha detaylı açıklayalım.

Bir kısmi diferansiyel denklemi

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_n}, u_{x_1x_1}, \ldots, u_{x_nx_n}, \ldots\right) = 0,$$

formunda gösterebiliriz. Burada $u = u(x_1, ..., x_n)$, n bağımsız değişkenli bir fonksiyondur. Eğer F, u ve türevlerine göre lineer ise diferansiyel denklem lineer, aksi takdirde lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem olarak adlandırılır.

Biz bu tez de genelde lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözüm yöntemleriyle ilgileneceğiz. Bu esnada kullanacağımız bazı adi diferansiyel denklemleri, bunların çözümlerini ve aynı zamanda lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemleri çalışırken temel yapı taşlarından biri olan dalga yayılımı ile ilgili bazı bilgileri aşağıdaki alt bölümlerde ele alacağız.

2.1 Bernoulli Diferansiyel Denklemi

Yukarıda da örnek olarak verdiğimiz ve

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, \quad n \neq 0,1 \tag{2.1}$$

formunda olan denkleme Bernoulli diferansiyel denklemi denir. Eğer, $n=0$ veya 1 olursa, Bernoulli denklemi birinci mertebeden bir lineer diferansiyel denklem olur. Bernoulli denklemi akışkanlar mekaniğinde sürekli akışkanlarda akışkan davranışını açıklar. Bernoulli prensibi akışkanlarda enerji korunumu yasasının matematiksel şeklidir. Bernoulli denklemi bu ilkenin daha kesin bir ifadesidir. Bu ilke, havacılık ve uzay mühendisliğinde büyük öneme sahiptir ve uçağın uçuşunun temelidir. Bernoulli prensibinin bir başka örneği, karbüratörün birçok benzinli motorda nasıl kullanılacağıdır. İsmi İsviçreli matematikçi Daniel Bernoulli'nin isminden gelmiştir.

Bu denklemi çözmek için, $u=y^{1-n}$ değişken değiştirmesi yapılır. Bunun sonucunda aşağıdaki birinci mertebeden lineer denklem elde edilir,

$$u'+(1-n)P(x)u=(1-n)Q(x).$$

Bu denklem u için çözüldükten sonra Bernoulli denkleminin genel çözümü aşağıdaki gibi elde edilir,

$$y(x)=e^{-\int(1-n)P(x)dx}\left[\int(1-n)Q(x)e^{-\int(1-n)P(x)dx}dx+c\right]. \tag{2.2}$$

2.2 Riccati Diferansiyel Denklemi

Riccati diferansiyel denkleminin

$$y'=R(x)y^2+P(x)y+Q(x), \tag{2.3}$$

formunda olduğu yukarıdaki örnekte verilmişti. Açıkçası, eğer bu denklemde $R(x)=0$ ise, denklem lineer birinci mertebeden bir denklem, eğer $Q(x)=0$ ise, Bernoulli denkleminin $n=2$ durumu olur.

$y=y_1(x)$ Riccati denkleminin bir özel çözümü olsun. Genel çözümü $y=\dfrac{1}{u}+y_1$ değişken değiştirmesi yapılarak elde edilebilir. Bu yapıldığında (2.3) denklemi

$$u' + (2y_1 R + P)u = -R$$

şeklinde birinci mertebeden bir lineer denkleme indirgenir. Bu denklem u için çözüldükten sonra Riccati denkleminin genel çözümü aşağıdaki gibi elde edilir

$$y = \frac{e^{\int (2y_1 R + P)dx}}{\int e^{\int (2y_1 R + P)dx} (-R) dx + c} + y_1 \ . \tag{2.4}$$

2.3 Hareketli Dalgalar

Lineer ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemleri çalışırken temel yapı taşlarından biri de dalga yayılımıdır. Bir ortamın bir bölümünden diğer bir bölümüne belli bir yayılma hızıyla taşınan belli bir sinyale ***dalga*** denir. Dalga yayılımında temel öneme sahip birkaç alan aşağıdaki gibidir:

Akışkanlar mekaniği (su dalgaları, aerodinamik)
Akustik (hava ve sıvılarda ses dalgaları)
Elastisite (gerilim dalgaları, depremler)
Elektromanyetik Teori (optik, elektromanyetik dalgalar)
Biyoloji (epizotik dalgalar)
Kimya (ateş ve ateşleme dalgaları)

Belirli bir yönde şeklini koruyarak ilerleyen dalgalara ***hareketli dalga***lar denir. Aynı zamanda, hareketli bir dalga, yayılma boyunca sabit bir hıza sahiptir. Bu tür dalgalar birçok bilim dalında karşımıza çıkabilir (örneğin, bir kimyasal reaksiyonun sonucu olarak ortaya çıkabilecek yanma gibi) [Volpert 1994]. Matematiksel biyolojide sinir liflerinde belirgin olan dürtüler hareket dalgaları olarak temsil edilir [Murray 2013]. Ayrıca, akışkanlar dinamiği problemleriyle ilgili koruma yasalarında, şok profilleri hareketli dalgalar olarak karakterize edilirler [Smoller 2012].

Matematiksel olarak en basit dalga

$$u(x,t) = f(x - ct) \tag{2.5}$$

formunda bir fonksiyondur. Burada $c > 0$ sabiti dalganın hızını temsil eder. $t = 0$ da, dalga başlangıç profili olan $f(x)$ biçimine sahiptir. $f(x-ct)$ ise herhangi bir t zamanındaki profili temsil eder. Bu da başlangıçtaki dalganın ct uzaysal birim kadar sağa doğru ötelenmiş hali demektir. Dolayısıyla (2.5) denklemi ile verilen ifade c hızıyla sağa doğru hareket eden bir dalgayı temsil eder. Benzer şekilde,

$$u(x,t) = f(x+ct) \tag{2.6}$$

c hızıyla sola doğru hareket eden bir dalgadır. $c = 0$ durumunda ortaya çıkan dalgaya ***hareketsiz dalga*** adı verilir ve bu tür dalgalar yayılmaz.

Matematiksel olarak (2.5) formundaki fonksiyonlarla ifade edilen dalgalar haraketli dalgalar olarak adlandırılır. Bir lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin hareketli dalga çözümlerini bulmak için ilk olarak (2.5) formuyla işe başlanır ve ardından diferansiyel denklemin çözümünü verecek f fonksiyonu ve c sabiti belirlenir. Bu f ve c yi belirleme (tanımlama) daha sonra göreceğimiz gibi f ye verilen sınır koşullarına bağlıdır.

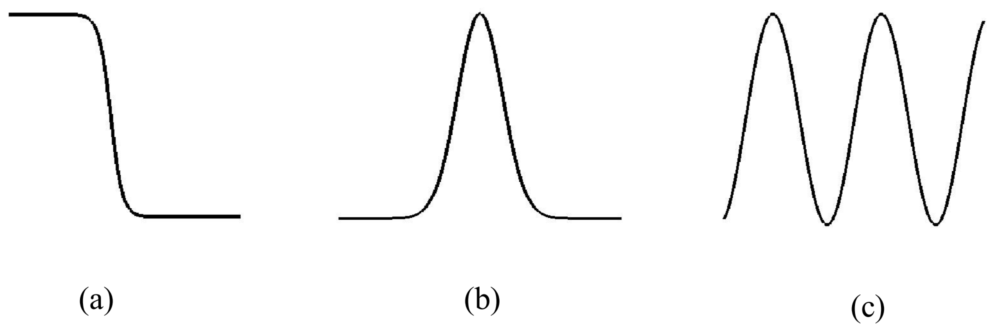
Verilen bir kısmi diferansiyel denklemle ilişkili hareketli dalga çözümler ailesini dört basit forma ayırabiliriz. Bunlar:

- ***Soliter Dalga Çözümü***: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\lim_{\xi \to \pm\infty} f^{(n)}(\xi) = 0$ şeklindeki sınır koşullarını sağladığında, hareketli dalga çözümüne verilen addır.
- ***Periyodik Hareketli Dalga Çözümü***: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $\xi \in \mathbb{R}$ için $f^{(n)}(\xi)$ mevcut olacak şekilde periyodu L olan periyodik bir fonksiyon ve $[0, L]$ aralığında $f^{(n)}(0) = f^{(n)}(L)$ şeklindeki sınır koşullarını sağladığında, hareketli dalga çözümüne verilen addır.
- ***Kink Hareketli Dalga Çözümü***: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $u_l = \lim_{\xi \to -\infty} f(\xi)$ ve $u_r = \lim_{\xi \to +\infty} f(\xi)$ şeklindeki sınır koşullarını sağladığında (u_l , u_r: sabit) ve $u_r \neq u_l$ ($\infty > u_l > u_r > -\infty$ veya $u_l < u_r$) olduğunda, hareketli dalga çözümüne verilen addır. f fonksiyonu bazen $\lim_{\xi \to \pm\infty} f^{(n)}(\xi) = 0$ şeklindeki ek

asimtotik koşulu da sağlar. Fiziksel çerçeveye bağlı olarak kink hareketli dalga çözümü ***dalga cephesi*** olarak ta adlandırılır.

- ***Pals (Sinyal) Dalga Çözümü***: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, $u_l=\lim_{\xi\to-\infty} f(\xi)$, $u_r=\lim_{\xi\to+\infty} f(\xi)$ şeklindeki sınır koşullarını sağladığında ve $u_r=u_l$ olduğunda, hareketli dalga çözümüne verilen addır. Eğer $u_r=u_l=0$ ise bu çözüm bir soliter dalga çözümü olur.

Şekil 2.1 de bazı hareketli dalga şekilleri gösterilmektedir.

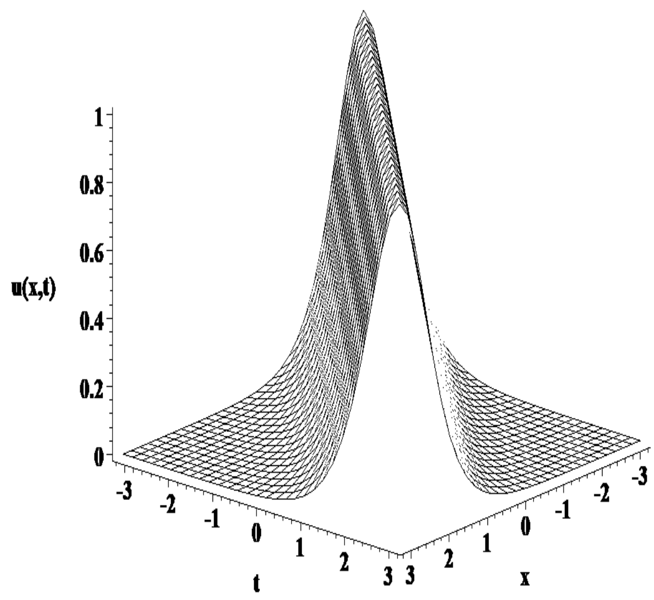


Şekil 2.1: Hareketli dalga şekilleri: (a) kink, (b) pals (sinyal), (c) periyodik

Soliter (tekil) ***dalga***, dalganın grup hızıyla (yani dalganın enerjisinin taşındığı hızla) hareket eden referans koordinat sisteminden bakıldığında büyüklüğünde veya şeklinde herhangi bir değişim olmadan yayılan dalgadır. ***Soliton*** ise verilen özelliklere ek olarak diğer solitonlarla etkileşime geçtiğinde değişmeden (patlamadan) kurtulabilen lineer olmayan soliter bir dalgadır. Örneğin, $u(x,t)=\sec h^2(x-t),\quad -\pi\le x,t\le\pi$, çözümü bir solitondur. Bu soliton çözümün grafiği Şekil 2.2 de gösterilmektedir.

Aşağıda hareketli dalga şekilleri için bazı örnekler verilmektedir.

Örnek 1 (Pals veya Soliter Çözüm): İlk olarak, pals (sinyal) dalgası şeklini alan bir çözümü elde etmek için benzer bir yaklaşımı çalışabiliriz. Bunun için Korteweg-de Vries (KdV) denklemi olarak bilinen ve



Şekil 2.2: Soliton çözümü $u(x,t) = \sec h^2(x-t), \quad -\pi \le x,t \le \pi$

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanan lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemi ele alalım. Bu denklem sığ su yüzeylerinde oluşan dalgaları modellemede kullanılan bir denklemdir [Evans, 1998]. $u(x,t) = U(\xi), \quad \xi = x - ct,$ şeklinde değişken değiştirmesi yaparak işe başlayalım. u nun kısmi türevlerini (2.7) denkleminde yerine yazarsak

$$-c\,U' + 6U\,U' + U''' = 0\,, \tag{2.8}$$

elde ederiz. Bu denklemin ξ ye göre integralini aldığımızda,

$$-c\,U + 3\,U^2 + U'' = c_1$$

ifadesini elde ederiz. Bu denklemin her iki yanını U' ile çarparsak aşağıdaki denklemini elde ederiz:

$$-cUU' + 3\,U^2\,U' + U''\,U' = c_1U' \tag{2.9}$$

Bu denklemin ξ ye göre integralini aldığımızda

$$\frac{(U')^2}{2}=\frac{cU^2}{2}-U^3+c_1U+c_2 \tag{2.10}$$

elde edilir. Biz burada puls (sinyal) dalga çözümü elde etmek istediğimizden dolayı $\xi \to \pm\infty$ iken U, U' ve $U'' \to 0$ olduğunu varsayacağız. Dolayısıyla $c_1=c_2=0$ olmalıdır. Bunu (2.10) denkleminde kullandıktan sonra elde edilen denklem U' göre değişkenlerine ayrılabilir bir adi diferansiyel denklemdir ve aşağıdaki formda yazabilir:

$$U'=\pm U\left(c-2U\right)^{1/2}. \tag{2.11}$$

Hesaplamaları basitleştirmek için burada sadece negatif işaretli olanı göz önüne alırsak (2.11) denklemini

$$\frac{-dU}{U\left(c-2U\right)^{1/2}}=d\xi \tag{2.12}$$

şeklinde yazabiliriz. Bunun integralini alırsak, c_3 bir integral sabiti olmak üzere,

$$\xi=-\int_{U_0}^{U}\frac{d\omega}{\omega(c-2\omega)}+c_3 \tag{2.13}$$

elde ederiz. Bu eşitliğin sağ tarafındaki integrali almak için $\omega=U_0\,\mathrm{sech}^2\,\theta,\ \left(\dfrac{d\omega}{d\theta}=-c\,\mathrm{sech}^2\,\omega\tanh\omega\right)$ değişken değiştirmesi yapılırsa ve $U_0=c/2$ (bir keyfi sabit) olarak seçilirse

$$\xi=\frac{2}{\sqrt{c}}\theta+c_3 \tag{2.14}$$

sonucu elde edilir. Burada θ kapalı fonksiyon olarak

$$\frac{c}{2}\mathrm{sech}^2\,\theta=U(\xi) \tag{2.15}$$

şeklindedir. Denklem (2.14) i θ için çözersek

$$\theta = \frac{\sqrt{c}}{2}\left(\xi - c_3\right) \tag{2.16}$$

bulunur. Bunu (2.15) yerine yazarsak,

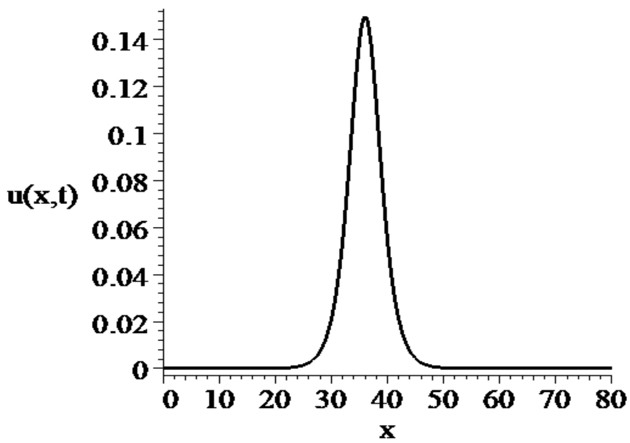
$$U(\xi) = \frac{c}{2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}\left(\xi - c_3\right)\right) \tag{2.17}$$

ifadesini elde ederiz. Sonuç olarak ele aldığımız KdV denkleminin hareketli dalga çözümü

$$u(x,t) = \frac{c}{2}\operatorname{sech}^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}\left(x - ct - c_3\right)\right], \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \tag{2.18}$$

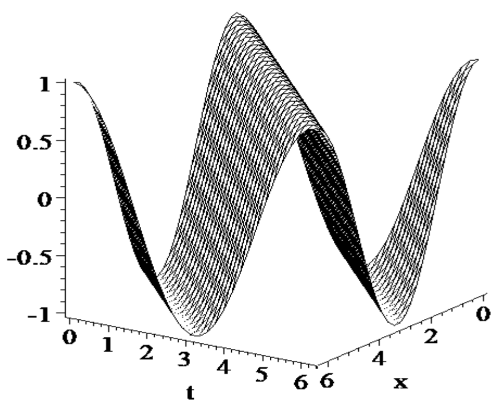
olarak bulunur. Bu sonuçta dalganın genliği ve hızı arasında bir ilişki olduğunu gözlemleyebiliriz.

Şekil 2.3 te $t = 120$ ve $c_3 = 0$ için KdV denkleminin puls (sinyal) dalga çözümü görülmektedir.



Şekil 2.3: KdV denkleminin $u_r = u_l = 0$, $c = 0.3$ için pals çözümü

Örnek 2 (Periyodik Dalga Çözümü): Periyodik hareketli dalga çözümleri $\sin(x-t)$ $\cos(x-t)$ formunda olan çözümlerdir. Standart dalga denklemi $u_{tt} = u_{xx}$ $\cos(x-t)$ gibi periyodik çözüme sahiptir ve bu çözümün grafiği $0 \le x,t \le 2\pi$ için Şekil 2.4 de gösterilmektedir.



Şekil 2.4: Dalga denkleminin bir periyodik çözümü, $u(x,t) = \cos(x-t)$

Örnek 3 (Kink veya Dalga Cephesi Çözümü): İlk olarak taşınım ve yayılım ile ilişkili aşağıdaki Burger denklemini ele alalım:

$$u_t + u\, u_x = \alpha\, u_{xx}\,. \tag{2.19}$$

Yukarıdaki örnekte yaptıklarımıza benzer olarak bu denklem için de $u(x,t) = U(\xi)$, $\xi = x - ct$, şeklinde tanımlanan hareketli dalga çözümünü bulmaya çalışacağız. Bu durumda sınır koşulları $U(-\infty) = u_l$, $\mathrm{U}(+\infty) = u_r$ şeklinde olur. u nun kısmi türevlerini (2.19) denkleminde yerine yazarsak

$$-c\,U' + U\,U' = \alpha\,U''\,, \tag{2.20}$$

elde ederiz. Bu denklemin her iki yanının ξ ye göre integralini aldığımızda, c_1 bir integral sabiti olmak üzere,

$$-c\,U = \alpha\,U' - \frac{U^2}{2} + c_1\,, \tag{2.21}$$

ifadesini elde ederiz. Buradaki integral sabitini sınır koşullarını ($U(\infty)=u_r$, $U'(\infty)=0$) kullanarak aşağıdaki gibi telde ederiz:

$$c_1=\frac{u_r^{\,2}}{2}-c\,u_r\,.$$

Bundan sonra (2.21) denkleminde $U(-\infty)=u_l$, $U'(-\infty)=0$ sınır koşullarını uyguladığımızda

$$-cu_l=\frac{-u_l^{\,2}}{2}+\frac{u_r^{\,2}}{2}-cu_r$$

elde edilir. Bunu da c dalga hızı için çözdüğümüzde

$$c=\frac{u_r+u_l}{2}, \tag{2.22}$$

şeklinde açık bir ifade elde ederiz. Gözlem üzerine, dalga hızının doğrudan uzak alan sınır değerlerine bağlı olduğu açıktır. Denklem (2.21) de bulduğumuz c_1 yerine yazılırsa

$$-c\,U=\alpha U'-\frac{U^2}{2}+\frac{u_r^{\,2}}{2}-cu_r \tag{2.23}$$

elde edilir. Bu denklemi tekrar düzenlediğimizde

$$\alpha U'=\frac{U^2}{2}-c\,U+\frac{u_r^{\,2}}{2}+cu_r,$$

olur. Bu denklem değişkenlerine ayrılabilir bir adi diferansiyel denklemdir ve aşağıdaki formda yazılabilir:

$$\frac{2\alpha dU}{U^2-2cU-u_r^{\,2}+2cu_r}=d\xi\,. \tag{2.24}$$

Denklem (2.24) ün integrali alınırsa

$$2\alpha\int_{U_0}^{U}\frac{d\theta}{\theta^2-2c\theta-u_r^{\,2}+2cu_r}=\xi \tag{2.25}$$

olur. Özel olarak $u_l=1$ ve $u_r=0$ alınırsa bir özel çözüm elde edilir. Bu durumda (2.22) denkleminden $c=1/2$ olur. Eğer $U_0=1/2$ olursa (2.25) denklemi

$$2\alpha\int_{1/2}^{U}\frac{d\theta}{\theta^2-\theta}=\xi \tag{2.26}$$

olur. Bu integrali alıp sonucu U için çözdüğümüzde

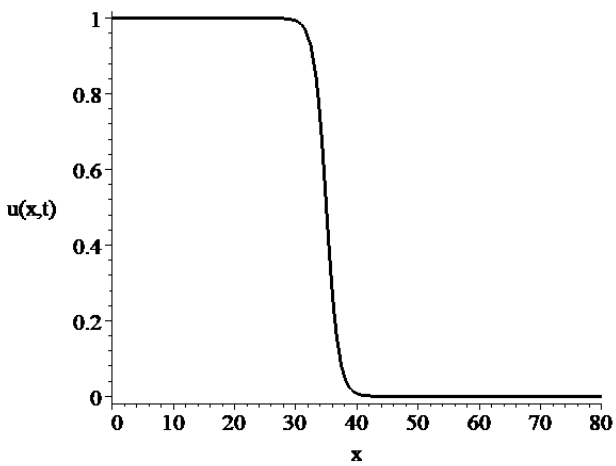
$$U(\xi)=\frac{1}{1+e^{\frac{\xi}{2\alpha}}} \tag{2.27}$$

Buradan da hareketli dalga çözümü

$$u(x,t)=\frac{1}{1+e^{\frac{x-ct}{2\alpha}}}, \tag{2.28}$$

şeklinde bulunmuş olur.

Şekil 2.5 te $u_l=1,\ u_r=0,\ c=0.5$ ve $\alpha=0.5$ için (2.19) denkleminin $t=70$ anında sağa doğru yayılan hareketli dalga çözümü görülmektedir. Bu çözüm dalga cephesine karşılık gelen bir çözümdür.



Şekil 2.5: Denklem (2.19) için kink çözümü

3. ÇÖZÜM METOTLARI

Bu bölümde lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için geliştirilen üç metottan bahsedeceğiz. Bunlar sırasıyla tanh-fonksiyonu metodu, deneme fonksiyonu metodu ve en basit denklem metodudur. Bu metotların temel prensipleri verildikten sonra her bir metot için fen ve mühendislik alanlarında karşımıza çıkan prototip denklemler uygulama olarak verilecektir.

3.1 Tanh-Fonksiyonu Metodu

Kısmi diferansiyel denklemlerin kesin çözümlerini elde etmenin etkili yollarından biri *tanh-fonksiyonu* yöntemidir. Bu yöntem, çözümlerin sonlu tanjant hiperbolik kuvvet serileri şeklinde yazılabilmesi temeline dayanır.

Tanh-fonksiyonu metodu ilk olarak Malfliet [Malfliet, 1992] tarafından sunuldu. Sistematik versiyonu ise Malfliet ve Hereman [Malfliet ve Hereman, 1996] tarafından özel evrim ve dalga denklemlerini çözmek için kullanıldı. Daha sonra, Fan [Fan, 2000] bir parametre içeren Riccati denkleminin avantajlarını kullanarak genişletilmiş tanh-fonksiyonu metodunu önerdi. İlerleyen yıllarda birçok araştırmacı bu alanda birçok araştırma yaptı. Wazwaz (2006), tanh ve genişletilmiş tanh yöntemini kullanarak Kuramoto-Sivashinsky ve Kawahara denklemlerinin yeni soliter dalga çözümlerini elde etti.

Bu yöntem, yaklaşık analitik yöntemlerin (Homotopi Pertürbasyon Metodu [He, 1999], Adomian Ayrıştırma Metodu [Adomian, 1994], vb.) aksine problemi çözmek için başlangıç veya sınır koşullarını gerektirmez. Aynı zamanda problem çözme süreci daha basittir ve karmaşık cebirsel sistemleri çözmekten uzaktır.

Lineer olmayan iki bağımsız değişkenli bir kısmi diferansiyel denklem genellikle

$$F(u, u_t, u_x, u_{xx}, \ldots) = 0 \tag{3.1}$$

şeklinde gösterilir. Burada, $u = u(x,t)$ bilinmeyen bir fonksiyon, F de u ve bunun kısmi türevlerini içeren bir fonksiyondur.

Denklem (3.1) in hareketli dalga çözümlerini bulmak için x ve t bağımsız değişkenleri tek bir $\xi = k(x - ct)$ değişkeni altında birleştirilir. Burada k ve c sırasıyla dalga sayısını ve hareketli dalga hızını temsil eder. $\xi = k(x - ct)$ değişken dönüşümü yapıldığında $u = u(x,t)$ fonksiyonu $u(x,t) = U(\xi)$ ifadesine dönüşür. Bu durumda Denklem (3.1) ile verilen kısmi diferansiyel denklem

$$Q(U, -kcU', kU', k^2U'', ...) = 0 \tag{3.2}$$

şeklinde bir adi diferansiyel denkleme dönüşür.

Şimdi tanh metodunun ana hatlarını adım adım inceleyelim:

1. Adım: Yeni bir bağımsız değişken

$$y = \tanh(\xi) \tag{3.3}$$

şeklinde seçilir. Buna göre,

$$\xi = \tanh^{-1}(y) \tag{3.4}$$

dir. Bu ifadenin her iki tarafının diferansiyeli alınırsa

$$d\xi = \frac{dy}{(1 - y^2)}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{dy}{d\xi} = 1 - y^2 \tag{3.5}$$

olur. Diğer yandan

$$\frac{d}{d\xi}=\frac{d}{dy}\frac{dy}{d\xi}$$

olduğundan, (3.5) ifadesi burada kullanılırsa

$$\frac{d}{d\xi}=\left(1-y^{2}\right)\frac{d}{dy} \tag{3.6}$$

bulunur. Bunu kullanarak daha yüksek mertebeden türevler

$$\begin{aligned}
\frac{d^{2}}{d\xi^{2}}&=\left(1-y^{2}\right)\left[-2y\frac{d}{dy}+\left(1-y^{2}\right)\frac{d^{2}}{dy^{2}}\right]\\
\frac{d^{3}}{d\xi^{3}}&=\left(1-y^{2}\right)\left[\left(6y^{2}-2\right)\frac{d}{dy}-6y\left(1-y^{2}\right)\frac{d^{2}}{dy^{2}}+\left(1-y^{2}\right)^{2}\frac{d^{3}}{dy^{3}}\right]
\end{aligned} \tag{3.7}$$

şeklinde elde edilirler.

2. Adım: Bu adımda (3.2) nin

$$U\left(\xi\right)=S(y)=\sum_{n=0}^{M}a_{n}y^{n} \tag{3.8}$$

formunda bir sonlu seri çözüme sahip olduğu düşünülür. Denklem (3.8) de M, çözüm için kullanılacak polinomun derecesini göstermekte olup çoğu durumda pozitiftir. Bu M değeri, Denklem (3.2) de lineer olmayan terim ile en yüksek mertebeden lineer terimlerin balans ayarıyla elde edilir. Eğer M pozitif bir tamsayı değilse uygun değişkenler ile pozitif bir tamsayı yapılabilir. Eğer denklemde sadece lineer olmayan kısım varsa iki doğrusal (lineer) olmayan kısım dengelenir.

3. Adım: İkinci adımda bulunan M değeri (3.8) de kullanılırsa y cinsinden bir polinom denklemi elde edilir. Polinomların eşitliği kullanılarak a_n $(n=0,\ldots,M)$ katsayılarıyla k ve c parametrelerini içeren bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sisteminin Maple veya Mathematica gibi yazılımlar yardımıyla çözülmesiyle bilinmeyen katsayılar ve parametreler bulunur. Daha sonra da lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin tam çözümü elde edilir.

Aşağıdaki alt bölümlerde bu metodun uygulaması olarak bazı prototip denklemlerin çözümlerini ele alacağız.

3.1.1 Burgers Denklemi için tanh Metodu

$$u_t + u\, u_x - a\, u_{xx} = 0, \quad \text{a: sabit} \tag{3.9}$$

şeklinde ifade edilen Burgers denklemi akışkanlar dinamiğindeki yayılan dalgalar için en basit lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem modelidir. İlk olarak Burgers (1948) tarafından bir boyutlu türbülansı tanımlamak için kullanılmıştır [Debnath 2005]. Öncelikle,

$$\begin{aligned} &u(x,t) = U(\xi)\ , \quad \xi = k(x-ct)\,, \quad y = \tanh(\xi) \\ &u_t = \frac{dU}{d\xi}\frac{d\xi}{dt} = U'\left(-k\, c\right) \\ &u_x = \frac{dU}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = k\, U'\,, \quad u_{xx} = k^2\, U'' \end{aligned}$$

değişken değiştirmesi yapılarak

$$-c\, k\, U' + k\, U\, U' - k^2 a U'' = 0\,, \tag{3.10}$$

şeklinde adi diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklemin

$$U\left(\xi\right) = S(y) = \sum_{n=0}^{M} a_n y^n \tag{3.11}$$

formunda çözümü olduğunu kabul edelim. Buradaki M sayısını tanımlamak için (3.10) denklemin her iki tarafının ξ ye göre integralini alırsak (integral sabiti kullanmadan)

$$-c\, U + \frac{1}{2}U^2 - a\, k\, U' = 0\,, \tag{3.12}$$

bulunur. Bu ifadenin son teriminde U' ve ikinci terimde U^2 balans yapıldığında (lineer olmayan kısım)

$$2M = 1 + M \quad \Rightarrow \quad M = 1$$

bulunur. Bulduğumuz M yi (3.11) ifadesinde yerine yazdığımızda

$$u(x,t) = U(\xi) = S(y) = \sum_{n=0}^{1} a_n y^n = a_0 + a_1 y \tag{3.13}$$

elde edilir. Şimdi burada $y = \tanh(\xi)$ değişken değiştirmesi yapılırsa ve $\frac{d}{d\xi} = (1-y^2)\frac{d}{dy}$ zincir kuralı kullanılırsa (3.12) denklemi

$$-c\,S(y) + \frac{1}{2}(S(y))^2 - a\,k\left[(1-y^2)\frac{dS(y)}{dy}\right] = 0,$$

formunda yazılır. Buradan da

$$-c(a_0 + a_1 y) + \frac{(a_0 + a_1 y)^2}{2} - a\,k\left[(1-y^2)a_1\right] = 0 \;,$$

ifadesine ulaşılır. Denklemdeki tüm y lerin katsayıları sıfıra eşitlendiğinde aşağıdaki cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{aligned}
y^0 &: \quad -ca_0 + \frac{1}{2}a_0^2 - a\,a_1 k = 0 \\
y^1 &: \quad -ca_1 + a_0 a_1 = 0 \\
y^2 &: \quad \frac{1}{2}a_1^2 + a\,a_1\,k = 0
\end{aligned}$$

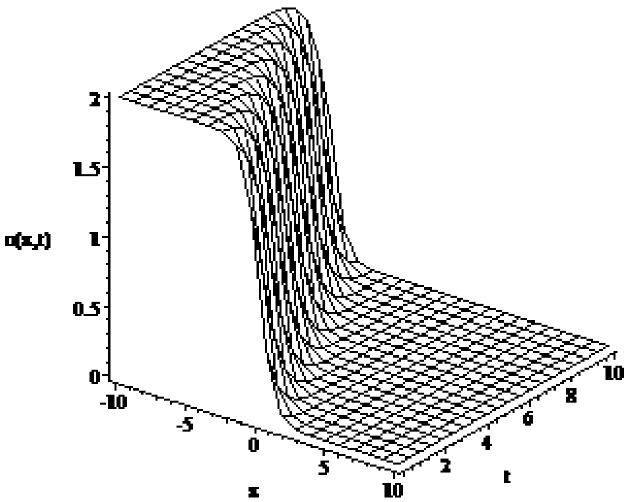
Bu lineer olmayan cebirsel denklem sisteminin Maple programı yardımıyla çözülmesiyle bilinmeyen k ve c parametreleri ve $a_n\ (n=0,1)$ katsayıları aşağıdaki şekilde bulunur:

$$a_0 = 2ak \;,\; a_1 = -2ak \;,\; c = 2ak \;,\; k = k$$

Buradan da lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin tam çözümü

$$u(x,t) = 2ak\left[1 - \tanh k\left(x - 2akt\right)\right], \tag{3.14}$$

olarak elde edilir. Bu çözüm de Burgers denklemi için bilinen kink (şok) dalgası çözümüdür. Şekil 3.1 da $a = \frac{1}{2}, k = 1$ ve $-10 < x < 10$, $0 < t < 10$ için bir kink çözümü görülmektedir.



Şekil 3.1: Burgers denkleminin $a = \frac{1}{2}, k = 1$ için çözümü

3.1.2 Korteweg-de Vries (KdV) Denklemi için tanh Metodu

KdV denklemi, sığ su yüzey dalgalarının matematiksel modelidir ve

$$u_t + u\,u_x + b\,u_{xxx} = 0, \qquad \text{b: sabit} \tag{3.15}$$

şeklinde lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklemdir. İlk olarak iki Hollandalı bilim adamı Korteweg ve de Vries (1895) tarafından birleşik yönlü sığ su dalgalarının yayılımını göstermek için kullanılmıştır [Debnath 1997].

Bu denklemi tanh yöntemiyle çözelim. Öncelikle,

$$u(x,t) = U(\xi), \quad \xi = k\left(x - ct\right), y = \tanh(\xi)$$

değişken değiştirmesi yapılarak (3.15) denklemi

$$-c\,k\,U'+k\,U\,U'+b\,k^{3}\,U'''=0, \tag{3.16}$$

şeklinde adi diferansiyel denklem olarak yazılabilir. Bu denklemin

$$U(\xi)=S(y)=\sum_{n=0}^{M}a_n y^n \tag{3.17}$$

formunda çözümü olduğunu kabul edelim. Buradaki M sayısını tanımlamak için (3.16) denklemin her iki tarafının ξ ye göre integralini alırsak (integral sabiti kullanmadan)

$$-c\,U+\frac{1}{2}U^{2}+b\,k^{2}\,U''=0\,, \tag{3.18}$$

bulunur. Bu ifadenin son teriminde U'' ve ikinci terimde U^2 balans yapıldığında (lineer olmayan kısım)

$$2M=2+M \quad\Rightarrow\quad M=2$$

bulunur. Bulduğumuz M yi (3.17) ifadesinde yerine yazdığımızda

$$U(\xi)=S(y)=\sum_{n=0}^{2}a_n y^{n}=a_0+a_1 y+a_2 y^{2}$$

elde edilir. Şimdi burada $y=\tanh(\xi)$ değişken değiştirmesi yapılırsa ve

$$\frac{d}{d\xi}=\left(1-y^{2}\right)\frac{d}{dy} \quad , \quad \frac{d^{2}}{d\xi^{2}}=\left(1-y^{2}\right)\left(-2y\,\frac{du}{dy}+\left(1-y^{2}\right)\frac{d^{2}u}{dy^{2}}\right)$$

şeklindeki zincir kuralı kullanılırsa (3.18) denklemi

$$-c\,S(y)+\frac{1}{2}\left(S(y)\right)^{2}+bk^{2}\left(1-y^{2}\right)\left(-2y\,\frac{dS(y)}{dy}+\left(1-y^{2}\right)\frac{d^{2}S(y)}{dy^{2}}\right)=0\,,$$

formunda yazılır. Buradan da

$$-c\left(a_0+a_1y+a_2y^2\right)+\frac{\left(a_0+a_1y+a_2y^2\right)^2}{2}+b\,k^2\left(1-y^2\right)\left[-2y\left(a_1+2a_2y\right)+\left(1-y^2\right)\left(2a_2\right)\right]=0\ ,$$

ifadesine ulaşılır. Denklemdeki tüm y lerin katsayıları sıfıra eşitlendiğinde aşağıdaki cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{aligned}
y^0 &: \quad -ca_0+\frac{1}{2}a_0^2+2ba_2k^2=0\\
y^1 &: \quad -ca_1+a_0a_1-2a_1bk^2=0\\
y^2 &: \quad a_0a_2+\frac{1}{2}a_1^2-ca_2-8ba_2k^2=0\\
y^3 &: \quad a_1a_2+2ba_1k^2=0\\
y^4 &: \quad 6a_2bk^2+\frac{1}{2}a_2^2=0
\end{aligned}$$

Bu lineer olmayan cebirsel denklem sisteminin Maple programı yardımıyla çözülmesiyle bilinmeyen k ve c parametreleri ve $a_n\ \left(n=0,1,2\right)$ katsayıları aşağıdaki şekilde bulunur:

$$a_0=12bk^2,\ a_1=0\ ,\ a_2=-12bk^2,\ c=4bk^2,\ k=k$$

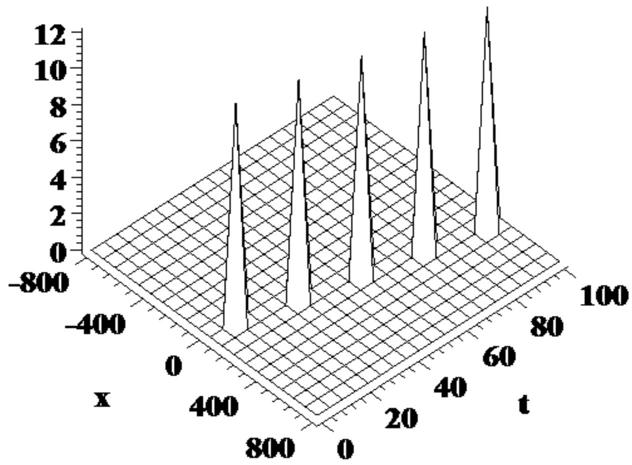
Bu durumda, KdV lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin soliton çözümü

$$u(x,t)=12bk^2\left(1-\tanh^2\left[k\left(x-4bk^2t\right)\right]\right)$$

şeklindedir. Bunu da

$$u(x,t)=12bk^2\,\mathrm{sech}^2\left[k\left(x-4bk^2t\right)\right] \tag{3.19}$$

formunda yazabiliriz. $u(x,t)$ çözümünün grafiği $b=k=1$ için Şekil 3.2 de gösterilmektedir.



Şekil 3.2: $u(x,t)$ denkleminin $b = k = 1$ için grafiği

3.1.3 Fisher Denklemi için tanh Metodu

Fisher denklemi

$$u_t = u_{xx} + u\left(1-u\right) \tag{3.20}$$

şeklinde lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklem olup çok sayıda biyolojik ve kimyasal sistemlerdeki dalga yayılımını çalışmak için kullanılmaktadır [Debnath 2005]. İlk olarak Fisher (1936) tarafından bir popülasyondaki bir genin dalga yayılımını incelemek için kullanılmıştır.

Öncelikle

$$u(x,t) = U(\xi)\ , \quad \xi = k(x-ct)\, , y = \tanh(\xi)$$

değişken değiştirmesi yapılarak (3.20) kısmi diferansiyel denklemi,

$$-c\,k\,U' = k^2 U'' + U\left(1-U\right), \tag{3.21}$$

şeklinde adi diferansiyel denkleme indirgenir. Bu denklemin

$$U(\xi)=S(y)=\sum_{n=0}^{M}a_n y^n \tag{3.22}$$

formunda çözümü olduğunu kabul edelim. Denklem (3.21) de U'' ve $U(1-U)$ terimleri balans yapıldığında $M=2$ bulunur. Bulduğumuz M yi (3.22) ifadesinde yerine yazdığımızda

$$u(x,t)=U(\xi)=S(y)=\sum_{n=0}^{2}a_n y^n=a_0+a_1y+a_2y^2$$

elde edilir. Şimdi burada $y=\tanh(\xi)$ değişken değiştirmesi yapılırsa ve

$$\frac{d}{d\xi}=\left(1-y^2\right)\frac{d}{dy} \quad , \quad \frac{d^2}{d\xi^2}=\left(1-y^2\right)\left(-2y\frac{du}{dy}+\left(1-y^2\right)\frac{d^2u}{dy^2}\right)$$

şeklindeki zincir kuralı kullanılırsa (3.21) denklemi

$$-c\,k\left(1-y^2\right)\frac{dS(y)}{dy}=k^2\left(1-y^2\right)\left(-2y\frac{dS(y)}{dy}+\left(1-y^2\right)\frac{d^2S(y)}{dy^2}\right)+S(y)\left(1-S(y)\right),$$

formunda yazılır. Buradan da

$$-c\,k\left[\left(1-y^2\right)\left(a_1+2a_2y\right)\right]-k^2\left(1-y^2\right)\left[-2y\left(a_1+2a_2y\right)+\left(1-y^2\right)\left(2a_2\right)\right]$$
$$-\left(a_0+a_1y+a_2y^2\right)\left(1-a_0-a_1y-a_2y^2\right)=0$$

ifadesini elde ederiz. Denklemdeki tüm y lerin katsayıları sıfıra eşitlendiğinde cebirsel denklem sistemi elde edilir ve bu sistem Maple yazılımı ile çözüldükten sonra

$$a_0=\frac{1}{4},\ a_1=\pm\frac{1}{2},\ a_2=\frac{1}{4},\ k=\frac{\sqrt{6}}{12},\ c=\mp\frac{5}{\sqrt{6}}$$

$$a_0=\frac{3}{4},\ a_1=\pm\frac{1}{2},\ a_2=-\frac{1}{4},\ k=\frac{\sqrt{-6}}{12},\ c=\pm\frac{5}{\sqrt{6}}$$

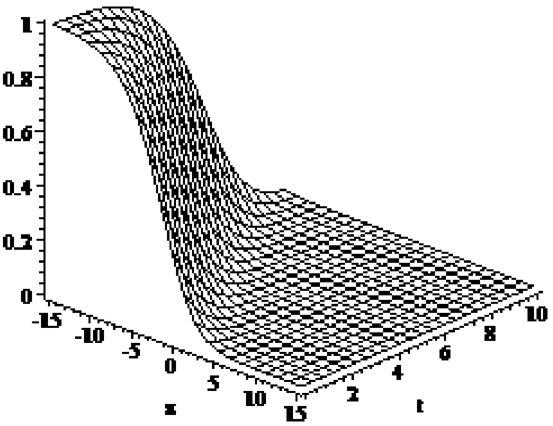
elde edilir. Buradan da tam çözümü

$$
\begin{aligned}
u_{1,2}(x,t) &= \frac{1}{4}\left[1 \pm \tanh\frac{\sqrt{6}}{12}(x \pm \frac{5}{\sqrt{6}}t)\right]^2 \\
u_{3,4}(x,t) &= \mp\frac{1}{4}\left[1 \pm \tanh\frac{\sqrt{-6}}{12}(x \pm \frac{5}{\sqrt{-6}}t)\right]\left[\tanh\frac{\sqrt{-6}}{12}(x \pm \frac{5}{\sqrt{-6}}t) \mp 3\right]
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

şeklinde bulunmuş olur. Bunlardan ilk çözüm

$$
u(x,t) = \frac{1}{4}\left[1 - \tanh\frac{\sqrt{6}}{12}(x - \frac{5}{\sqrt{6}}t)\right]^2 \tag{3.24}
$$

şeklinde olup sağa doğru hareket eden bir kink (şok) dalgasını temsil eder. $u(x,t)$ çözümünün grafiği Şekil 3.3 de gösterilmektedir.



Şekil 3.3: $u(x,t)$ Fisher denkleminin şok çözümü

3.2 Deneme Fonksiyonu Metodu

Literatürde lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini bulmak için bazı seriye açma metotları kullanılmıştır. Bunlardaki temel fikir, verilen diferansiyel denklemlerin çözümlerini çözülebilir diferansiyel denklemlerin çözümlerinin fonksiyonu olarak seriye açmaktır. Bunlardan en önemlisi Ma ve Fuchssteiner (1996) in yaptığı çalışmadır. Bu çalışmada doğrusal olmayan Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov kısmi diferansiyel denkleminin bazı hareketli dalga çözümleri bulunmuştur. Bundan sonra, Liu (2005, 2010) deneme denklemi yöntemini önerdi ve bu yöntemi bazı doğrusal olmayan evolüsyon denklemlerine uyguladı. Du (2010) irrasyonel deneme denklemi metodunu önerdi ve bunu kullanarak Burgers-KdV denkleminin, sönümleyen çift Sine-Gordon denkleminin ve Fujimoto-Watanabe denkleminin birçok hareketli dalga çözümlerini buldu. Ayrıca, Liu (2011), değişken katsayılı doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler için uygun olan deneme denklemi yönteminin yeni bir versiyonunu önerdi.

Şimdi bu deneme denklemi (fonksiyonu) yönteminin adımlarını verelim.

1. Adım: Uzay x ve zaman t şeklinde iki gerçek değişkende bir u fonksiyonu için doğrusal olmayan bir kısmi diferansiyel denklem

$$F(t,x,u,u_t,u_x,u_{xx},...)=0 \tag{3.25}$$

şeklinde gösterilebilir. Burada, $u=u(x,t)$ bilinmeyen bir fonksiyon, F de u ve bunun kısmi türevlerini içeren bir fonksiyondur. Eğer burada $\xi = x-ct$, $u(x,t)=u(\xi)$ hareketli dalga değişken dönüşümü yapılırsa (3.25) denklemi

$$N(\xi,u,u',u'',...)=0 \tag{3.26}$$

şeklinde bir adi diferansiyel denkleme dönüşür.

2. Adım: Bu adımda, (3.26) denkleminin çözümünün aşağıdaki deneme denklemini sağladığı kabul edilir:

$$\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 = G(u) = \sum_{i=0}^{M} a_i u^i(\xi)\,. \tag{3.27}$$

Burada M ve a_i katsayısı daha sonra tanımlanacak sabitlerdir.

3. Adım: Denklem (3.27) yı (3.26) denkleminde yerine yazarsak, u ya göre bir polinom denklemi elde edilir. Balans ilkesini kullanarak M değerini belirleyebiliriz. Elde edilen polinomunun katsayılarını sıfıra eşitleyerek, bir cebirsel denklem sistemi elde ederiz. Bu cebirsel denklem sisteminin Maple veya Mathematica gibi yazılımlar yardımıyla çözülmesiyle bilinmeyen katsayılar ve parametreler bulunur.

4. Adım: Bu adımda, (3.27) denklemini aşağıdaki şekilde integral formunda yazalım.

$$\pm(\xi-\xi_0)=\int\frac{1}{\sqrt{G(u)}}du \tag{3.28}$$

Polinomun tam ayırma sistemine göre $G(u)$ nun kökleri sınıflandırılır. Böylece (3.25) lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin tam çözümü elde edilir.

Aşağıdaki alt bölümlerde bu metodun uygulaması olarak bazı prototip denklemlerin çözümlerini ele alacağız.

3.2.1 İkili Kuvvet Yasalı Non-lineerliğe Sahip KdV Denklemi

Bu denklem, α,β ve δ keyfi parametreler ve p pozitif bir tamsayı olmak üzere,

$$u_t+\alpha\, u^p u_x+\beta\, u^{2p}u_x+\delta\, u_{xxx}=0 \tag{3.29}$$

şeklinde lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklem olup çeşitli fiziksel içeriklerde karşımıza çıkmaktadır. Aynı zamanda, "Herhangi mertebeden lineer olmayan terime sahip değiştirilmiş bileşik KdV tipinde denklem" olarak ta adlandırılmaktadır. Bu denklem deneme fonksiyonu metodunun yanında farklı teknikler kullanılarak ta çözülmüştür (bkz. Zhang ve diğ. (2002) ve Li ve diğ. (2003)). Gurefe ve diğ. (2011) ise deneme denklemi yöntemini kullanarak bu denklemin soliton çözümlerini de içeren bazı tam çözümlerini elde etmişlerdir.

Şimdi (3.29) denklemini deneme fonksiyonu (denklemi) metodunu kullanarak çözelim. İlk olarak

$$\begin{aligned}
&u(x,t)=u(\xi)\,,\ \xi=x-ct\\
&u_t=\frac{du}{d\xi}\frac{d\xi}{dt}=-c\,u'\\
&u_x=\frac{du}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}=u'\,,\quad u_{xx}=u''
\end{aligned}$$

şeklinde değişken değiştirmesi yaparak (3.29) denklemini

$$-cu' + \alpha\, u^{p} u' + \beta\, u^{2p} u' + \delta\, u''' = 0$$

formunda adi diferansiyel denklem olarak yazabiliriz. Sonra bu denklemin her iki yanının ξ ye göre iki kez integralini aldığımızda (integral sabiti kullanmadan)

$$-c\,u + \frac{\alpha}{p+1} u^{p+1} + \frac{\beta}{2p+1} u^{2p+1} + \delta\, u'' = 0 \tag{3.30}$$

elde ederiz. Şimdi burada

$$u = \omega^{1/p}$$

değişken değiştirmesi yapılırsa ve aşağıdaki terimler kullanılırsa,

$$\begin{aligned} &m = \delta p(p+1)(2p+1) \ , \ n = \delta(1-p^2)(2p+1) \\ &r = p^2(p+1)(2p+1) \quad , \quad \mathrm{s} = \alpha p^2(2p+1) \quad , \quad t = \beta p^2(p+1) \end{aligned} \tag{3.31}$$

denklem

$$m\, \omega\omega'' + n\left(\omega'\right)^2 - c\, r\, \omega^2 + s\, \omega^3 + t\, \omega^4 = 0 \tag{3.32}$$

formuna indirgenir. Bu denklemde homojen balans prensibi kullanıldığında ve (3.27) deneme denklemi göz önüne alındığında

$$[\omega']^2 = G(\omega) = \sum_{i=0}^{M} a_i \omega^i \ \sim \omega^4 \Rightarrow \ M = 4 \tag{3.33}$$

bulunur. O halde

$$[\omega']^2 = \sum_{i=0}^{4} a_i\, \omega^i$$

yazabiliriz. Bu ifadenin her iki yanının türevini aldığımızda

$$2\,\omega''\,\omega' = \sum_{i=0}^{4} i\, a_i\, \omega'\, \omega^{i-1} \ \Rightarrow \omega'' = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{4} i\, a_i\, \omega^{i-1} \Rightarrow \omega'' = \frac{a_1}{2} + a_2\, \omega + \frac{3}{2} a_3\, \omega^2 + 2\, a_4\, \omega^3$$

elde edilir. Bulduğumuz bu ifadeleri (3.32) denkleminde yerine yazdığımızda

$$m\,\omega\left(\frac{a_1}{2}+a_2\omega+\frac{3}{2}a_3\omega^2+2\,a_4\omega^3\right)+n\left(a_0+a_1\omega+a_2\omega^2+a_3\omega^3+a_4\omega^4\right)-cr\,\omega^2+s\,\omega^3+t\,\omega^4=0$$

ifadesini elde ederiz. Burada ω ya göre olan polinom eşitliği kullanıldığında

$$\begin{aligned}
\omega^0 &: \; a_0 n = 0\\
\omega^1 &: \; a_1 m + 2a_1 n = 0\\
\omega^2 &: \; a_2 m + a_2 n - cr = 0\\
\omega^3 &: \; 3a_3 m + 2\,a_3 n + 2s = 0\\
\omega^4 &: \; 2\,a_4 m + a_4 n + t = 0
\end{aligned}$$

şeklinde cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistemi çözdükten sonra a_i katsayıları ve c dalga hızı aşağıdaki şekilde bulunur:

$$a_0=0\,,\,a_1=0\,,\,a_2=a_2\,,\,a_3=-\frac{2s}{3m+2n}\,,\,a_4=-\frac{t}{2m+n}\,,\,c=\frac{(m+n)a_2}{r}. \qquad (3.34)$$

Bunlar deneme fonksiyonunda yerine yazılırsa ve (3.28) integral formu kullanılırsa

$$\pm\left(\xi-\xi_0\right)=\int\frac{1}{\sqrt{a_2\,\omega^2+a_3\,\omega^3+a_4\,\omega^4}}d\,\omega \qquad (3.35)$$

elde edelir. Sağ taraftaki integrali

$$\int\frac{1}{\sqrt{a_2\omega^2+a_3\,\omega^3+a_4\,\omega^4}}d\omega=\int\frac{1}{|\omega|\sqrt{\omega(a_4\,\omega+a_3)+a_2}}d\omega$$

şeklinde yazabiliriz. Bu integral Maple yardımıyla çözülürse (veya bir integral tablosu kullanılırsa): $a_2>0$ için

$$\int\frac{1}{|\omega|\sqrt{\omega(a_4\,\omega+a_3)+a_2}}d\omega=\begin{cases}-\dfrac{1}{\sqrt{a_2}}\ln\left(\dfrac{2a_2+a_3\,\omega+2\sqrt{a_2}\sqrt{a_4\omega^2+a_3\,\omega+a_2}}{\omega}\right),\omega>0\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{a_2}}\ln\left(\dfrac{2a_2+a_3\,\omega+2\sqrt{a_2}\sqrt{a_4\omega^2+a_3\,\omega+a_2}}{\omega}\right),\,\omega<0\end{cases}$$

ve $a_2<0$ için

$$\int \frac{1}{|\omega|\sqrt{\omega(a_4\,\omega+a_3)+a_2}}\,d\omega=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{-a_2}}\sin^{-1}\left(\dfrac{a_3\omega+2a_2}{\omega\sqrt{a_3^{\,2}-4a_2a_4}}\right), \omega>0\\ \dfrac{1}{\sqrt{-a_2}}\sin^{-1}\left(\dfrac{a_3\omega+2a_2}{-\omega\sqrt{a_3^{\,2}-4a_2a_4}}\right), \omega<0\end{cases}$$

elde ederiz. O halde (3.35) denklemi $\omega>0$ ve $a_2>0$ için

$$(\xi-\xi_0)=-\frac{1}{\sqrt{a_2}}\ln\left(\frac{2a_2+a_3\,\omega+2\sqrt{a_2}\,\sqrt{a_4\omega^2+a_3\,\omega+a_2}}{\omega}\right)$$

olur. Bu denklem ω için çözülürse

$$\omega=\left[-\frac{a_3}{2a_2}+\frac{(a_3^{\,2}-4a_2a_4)\exp\left(\sqrt{a_2}\,(\xi-\xi_0)\right)+\exp\left(-\sqrt{a_2}\,(\xi-\xi_0)\right)}{4a_2}\right]^{-1} \qquad (3.36)$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.35) denklemi $\omega<0$ ve $a_2>0$ için

$$(\xi-\xi_0)=\frac{1}{\sqrt{a_2}}\ln\left(\frac{2a_2+a_3\,\omega+2\sqrt{a_2}\,\sqrt{a_4\omega^2+a_3\,\omega+a_2}}{\omega}\right)$$

olur. Bu denklem yine ω için çözülürse

$$\omega=\left[-\frac{a_3}{2a_2}+\frac{(a_3^{\,2}-4a_2a_4)\exp\left(-\sqrt{a_2}\,(\xi-\xi_0)\right)+\exp\left(+\sqrt{a_2}\,(\xi-\xi_0)\right)}{4a_2}\right]^{-1} \qquad (3.37)$$

elde edilir.

Eğer $\omega>0$ ve $a_2<0$ ise (3.35) denklemi

$$(\xi-\xi_0)=\frac{1}{\sqrt{-a_2}}\sin^{-1}\left(\frac{a_3\omega+2a_2}{\omega\sqrt{a_3^{\,2}-4a_2a_4}}\right)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem yine ω için çözülürse

$$\omega = \left[\frac{2a_2}{-a_3 + \sqrt{a_3^2 - 4a_4a_2}\,\sin\sqrt{-a_2}\,(\xi - \xi_0)} \right] \tag{3.38}$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.35) denklemi $\omega < 0$ ve $a_2 < 0$ için

$$(\xi - \xi_0) = \frac{1}{\sqrt{-a_2}} \sin^{-1}\left(\frac{a_3\omega + 2a_2}{-\omega\sqrt{a_3^2 - 4a_2a_4}} \right)$$

olur. Bu denklem yine ω için çözülürse

$$\omega = \left[-\frac{2a_2}{a_3 + \sqrt{a_3^2 - 4a_4a_2}\,\sin\sqrt{-a_2}\,(\xi - \xi_0)} \right] \tag{3.39}$$

elde edilir. Denklem (3.36) ve (3.37) de, eğer $a_3^2 - 4a_2a_4 = \pm 1$ alınırsa, $u = \omega^{1/p}$ ve

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad , \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

özellikleri kullanılırsa

$$\omega = \left[-\frac{1}{2a_2}\left[a_3 + \cosh\sqrt{a_2}\,(\xi - \xi_0) \right] \right]^{-1}$$

$$\omega = \left[-\frac{1}{2a_2}\left[a_3 - \sinh\sqrt{a_2}\,(\xi - \xi_0) \right] \right]^{-1}$$

$$\omega = \left[-\frac{1}{2a_2}\left[a_3 - \cosh\sqrt{a_2}\,(\xi - \xi_0) \right] \right]^{-1}$$

elde edilir. Buradan da (3.29) denkleminin tam çözümü

$$u_1(\xi) = -\frac{(2a_2)^{1/p}}{\left[a_3 + \cosh\sqrt{a_2}\,(\xi - \xi_0) \right]^{1/p}} \tag{3.40}$$

$$u_2(\xi) = -\frac{(2a_2)^{1/p}}{\left[a_3 - \sinh\sqrt{a_2}\,(\xi - \xi_0) \right]^{1/p}} \tag{3.41}$$

$$u_3(\xi) = -\frac{\left(2a_2\right)^{1/p}}{\left[a_3 - \cosh\sqrt{a_2}\,(\xi - \xi_0)\right]^{1/p}} \tag{3.42}$$

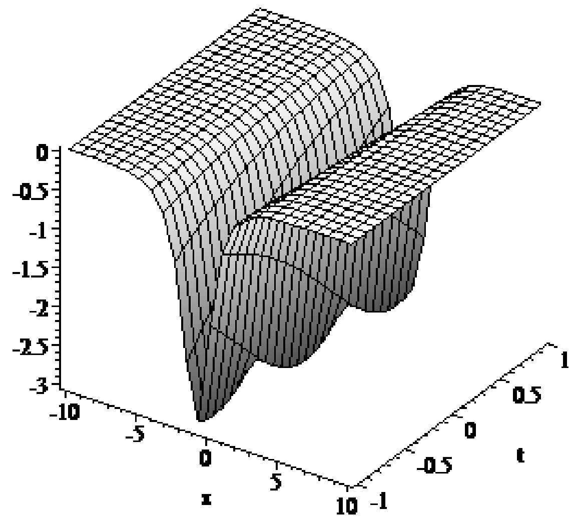
şeklinde bulunmuş olur. Benzer şekilde denklem (3.38) ve (3.39) da $u = \omega^{1/p}$ değişkeni kullanılırsa, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin diğer tam çözümleri

$$u_4(\xi) = \left[\frac{2a_2}{-a_3 + \sqrt{a_3^{\,2} - 4a_4a_2}\,\sin\sqrt{-a_2}\,(\xi - \xi_0)}\right]^{1/p} \tag{3.43}$$

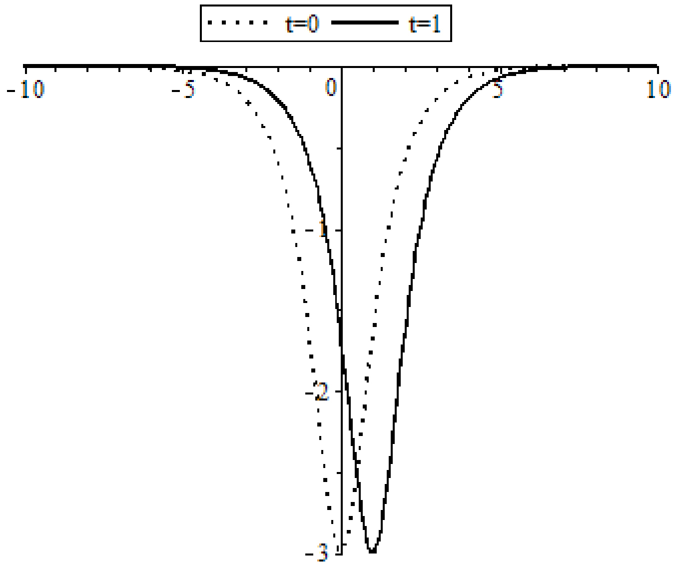
$$u_5(\xi) = \left[-\frac{2a_2}{a_3 + \sqrt{a_3^{\,2} - 4a_4a_2}\,\sin\sqrt{-a_2}\,(\xi - \xi_0)}\right]^{1/p} \tag{3.44}$$

olarak elde edilir.

Şekil 3.4 ve Şekil 3.5 da $\alpha = \beta = \delta = p = a_2 = 1$, $c = 1$ ve $a_3 = -\frac{1}{3}$ için sırasıyla 3-boyutlu ve 2-boyutlu $u_1(\xi)$ çözümünün grafiği verilmiştir.



Şekil 3.4: $u_1(\xi)$ çözümünün 3-boyutlu grafiği



Şekil 3.5: $u_1(\xi)$ çözümünün 2-boyutlu grafiği

3.2.2 Katsayıları Zamana Bağlı Değiştirilmiş Schrödinger Denklemi

Katsayıları zamana bağlı değiştirilmiş lineer olmayan Schrödinger denklemi boyutsuz formda

$$i\,\psi_t + \gamma\,\psi_{xx} + \alpha(t)\,\psi\,|\psi|^2 + \beta\,x^2\,\psi = 0 \tag{3.45}$$

şeklinde bir kısmi diferansiyel denklemdir. Burada $\psi = \psi(x,t)$ birlikte hareket eden kompleks dalga zarfı, $\alpha(t)$ doğrusal olmayan katsayı ve γ, β sabittir. Bu denklem fiziğin çeşitli alanlarında (lineer olmayan optik, plazma fiziği, süper iletkenlik ve kuantum mekaniği, vb. gibi) önemli bir model denklemdir. Rui ve Jian (2013), deneme fonksiyonu metodunu kullanarak bu denklemin yan şartlı tam çözümlerini elde etmişlerdir.

Şimdi bu denklemi deneme fonksiyonu (denklemi) metoduyla çözelim. Öncelikle,

$$\psi(x,t)=u(\xi)\,e^{i\theta}$$
$$\xi=k(t)\,x+w(t) \tag{3.46}$$
$$\theta=p(t)\,x^{2}+r(t)\,x+s(t)$$

şeklinde değişken değiştirmesi yaparak işe başlayalım. Burada $k(t)$, $w(t)$, $p(t)$, $r(t)$ ve $s(t)$ daha sonra tanımlanacak fonksiyonlardır. Şimdi, ψ nin kısmi türevlerini

$$\psi_t=\frac{du}{d\xi}\frac{d\xi}{dt}+\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\left(\mathrm{k}'(t)x+w'(t)\right)u'\,e^{i\theta}+i\,e^{i\theta}\left(p'(t)x^{2}+r'(t)x+s'(t)\right)u$$
$$\psi_x=\frac{du}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}+\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dx}=k(t)\,u'\,e^{i\theta}+i\,e^{i\theta}\left(2p(t)x+r(t)\right)u$$
$$\psi_{xx}=\frac{du_x}{dx}=u''\,k^{2}(t)\,e^{i\theta}-e^{i\theta}\left(2p(t)x+r(t)\right)^{2}u+i\,2e^{i\theta}u'\,k(t)\left(2p(t)x+r(t)\right)$$

şeklinde bulup (3.45) denkleminde yerine yazarsak ve elde edilen denklemin reel ve sanal kısımlarını ayırırsak sırasıyla:

$$\gamma k^{2}(t)\,u''-\left[p'(t)x^{2}+r'(t)x+s'(t)+\gamma\left(2p(t)x+r(t)\right)^{2}-\beta x^{2}\right]u+\alpha(t)u^{3}=0 \tag{3.47}$$

$$\left(k'(t)\,x+w'(t)\right)u'+2\,\gamma\,k(t)\left(2p(t)\,x+r(t)\right)u'=0$$

denklemlerini elde ederiz. Denklem (3.47) ta homojen balans prensibi kullanıldığında ve (3.27) deneme denklemi göz önüne alındığında

$$[u']^{2}=G(u)=\sum_{i=0}^{M}a_i u^{i}\Rightarrow 2\,u''\,u'=\sum_{i=0}^{M}ia_i\,u'u^{i-1}\;\Rightarrow u''=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{M}i\,a_i\,u^{i-1}\sim u^{3}$$

olur. Buradan da $M=4$ bulunur. O halde

$$u''=\frac{a_1}{2}+a_2u+\frac{3}{2}a_3u^{2}+2\,a_4u^{3}$$

yazabiliriz. Bulduğumuz bu ifadeleri (3.47) denkleminde yerine yazdığımızda

$$\gamma k^{2}(t)\left(\frac{a_1}{2}+a_2\,u+\frac{3}{2}a_3\,u^{2}+2\,a_4\,u^{3}\right)-\begin{bmatrix}p'(t)x^{2}+r'(t)x+s'(t)\\+\gamma\left(2\,p(t)x+r(t)\right)^{2}-\beta x^{2}\end{bmatrix}u+\alpha(t)u^{3}=0$$

elde edilir. Bu denklemde $x^j u^i$, ($i = 0,1,2,3$, $j = 0,1,2$) ye göre olan polinom eşitliği kullanıldığında

$$
\begin{aligned}
&\gamma k^2(t)\frac{a_1}{2} = 0 \\
&\gamma\, a_2(t)\, k^2(t) - s'(t) - \gamma r^2(t) = 0 \\
&\gamma k^2(t)\frac{3}{2} a_3 = 0 \\
&2\,\gamma k^2(t)\, a_4 + \alpha(t) = 0 \\
&4\,\gamma p(t)\, r(t) - r'(t) = 0 \\
&-4\,\gamma p^2(t) - p'(t) + \beta = 0 \\
&4\,\gamma k(t)\, p(t) + k'(t) = 0 \\
&2\,\gamma k(t)\, r(t) + w'(t) = 0
\end{aligned}
$$

şeklinde cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistemi çözdükten sonra bilinmeyenler aşağıdaki şekilde bulunur.

$$
\begin{aligned}
&p(t) = p \;\; , \;\; \beta = 4\gamma p^2 \, , a_1 = 0 \, , a_3 = 0 \, , \\
&k(t) = r(t) = e^{-4\gamma pt} , \; w(t) = \frac{1}{4p} e^{-8\gamma pt} , \\
&s(t) = \frac{a_2 - 1}{8p} e^{-8\gamma pt} \;, \alpha(t) = -2\gamma c_2\, e^{-8\gamma pt} , \\
&c_1 = a_2 - 1 \, , c_2 = a_4 \; , \; a_0 = a_0
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir. Bunlar deneme fonksiyonunda yerine yazılırsa ve (3.28) integral formu kullanılırsa

$$
\pm\left(\xi - \xi_0\right) = \int \frac{1}{\sqrt{a_0 + (c_1 + 1)u^2 + c_2 u^4}} du \tag{3.49}
$$

elde edelir. Eğer

$$
\omega = c_2^{\,1/3} u^2 \tag{3.50}
$$

şeklinde değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\pm(8c_2)^{1/3}\left(\xi-\xi_0\right)=\int\frac{1}{\sqrt{\omega\left(\omega^2+(c_1+1)c_2^{-2/3}\omega+a_0c_2^{-1/3}\right)}}d\omega \tag{3.51}$$

bulunur. Eğer, $b_0=a_0c_2^{-1/3}$ ve $b_1=\left(c_1+1\right)c_2^{-2/3}$ dersek (3.51) denklemi

$$\pm(8c_2)^{1/3}\left(\xi-\xi_0\right)=\int\frac{1}{\sqrt{\omega\left(\omega^2+b_1\omega+b_0\right)}}d\omega \tag{3.52}$$

formuna indirgenir. Sağ taraftaki integrali almada "Polinomlar için tam ayırma sistemini" kullanırsak (Xie ve diğ. (2018)):

I. Durum: $\Delta=b_1^2-4b_0=0$ olsun. Bu durumda (3.52) denklemi $\omega>0$ için,

$$\pm(8c_2)^{1/3}\left(\xi-\xi_0\right)=\int\frac{1}{\sqrt{\omega}\left(\omega+\frac{b_1}{2}\right)}d\omega$$

olur.

(i) Eğer $b_1>0$ ise

$$\omega=\frac{b_1}{2}\tan^2\left(\frac{\sqrt{2b_1}}{2}c_2^{1/3}(\xi-\xi_0)\right)$$

bulunur. Sırasıyla (3.50) ve (3.46) denklemleri kullanırsa,

$$\psi_1(\xi)=\pm\sqrt{\frac{c_1+1}{2c_2}}\tan\left(\sqrt{\frac{c_1+1}{2}}\left(\xi-\xi_0\right)\right)e^{i\theta}\ . \tag{3.53}$$

olur.

(ii) Eğer $b_1<0$ ise

$$\omega=\frac{b_1}{2}\tanh\left(\frac{\sqrt{2b_1}}{2}c_2^{1/3}(\xi-\xi_0)\right)$$

bulunur. Sırasıyla (3.50) ve (3.46) denklemleri kullanırsa,

$$\psi_2(\xi) = \pm\sqrt{\frac{c_1+1}{2c_2}}\tanh\left(\sqrt{\frac{c_1+1}{2}}\left(\xi-\xi_0\right)\right)e^{i\theta}, \qquad (3.54)$$

$$\psi_3(\xi) = \pm\sqrt{\frac{c_1+1}{2c_2}}\coth\left(\sqrt{\frac{c_1+1}{2}}\left(\xi-\xi_0\right)\right)e^{i\theta}, \qquad (3.55)$$

elde edilir.

(iii) Eğer $b_1 = 0$ ise yukarıdakilere benzer olarak sırasıyla

$$\pm(8c_2)^{1/3}\left(\xi-\xi_0\right) = \int \frac{1}{\sqrt{\omega^3}}d\omega$$

$$\omega = \frac{1}{c_2\left(\xi-\xi_0\right)^2}$$

$$\psi_4(\xi) = \pm\frac{e^{i\theta}}{c_2^{2/3}\left(\xi-\xi_0\right)} \qquad (3.56)$$

bulunur.

II. Durum: $\Delta = b_1^2 - 4b_0 > 0$ ve $b_0 = 0$ olsun. Bu durumda (3.52) denklemi

$$\pm(8c_2)^{1/3}\left(\xi-\xi_0\right) = \int \frac{1}{\omega\sqrt{\omega+b_1}}d\,\omega$$

olur.

(i) Eğer $b_1 > 0$ ise

$$\omega = b_1\left[\tanh^2\left(c_2^{1/3}\sqrt{b_1}\left(\xi-\xi_0\right)\right)-1\right]$$

bulunur. Sırasıyla (3.50) ve (3.46) denklemleri kullanırsa,

$$\psi_5(\xi) = \pm\sqrt{\frac{c_1+1}{c_2}}\left[\tanh^2\left(\sqrt{c_1+1}\left(\xi-\xi_0\right)\right)-1\right]^{1/2}e^{i\theta} \qquad (3.57)$$

$$\psi_6(\xi) = \pm\sqrt{\frac{c_1+1}{c_2}}\left[\coth^2\left(\sqrt{c_1+1}\left(\xi-\xi_0\right)\right)-1\right]^{1/2}e^{i\theta} \qquad (3.58)$$

elde edilir.

(ii) Eğer $b_1 < 0$ ise

$$\omega = b_1\left[\tan^2\left(c_2^{1/3}\sqrt{b_1}\left(\xi-\xi_0\right)\right)-1\right]$$

bulunur. Sırasıyla (3.50) ve (3.46) denklemleri kullanırsa, buradan da (3.45) denkleminin başka bir tam çözümü

$$\psi_7(\xi) = \pm\sqrt{\frac{c_1+1}{c_2}}\left[\tan^2\left(\sqrt{c_1+1}\left(\xi-\xi_0\right)\right)-1\right]^{1/2} e^{i\theta} \tag{3.59}$$

elde edilir.

III. Durum: $\Delta = b_1^2 - 4b_0 > 0$, $b_0 \neq 0$ ve $G(\omega) = (\omega-\lambda_1)(\omega-\lambda_2)(\omega-\lambda_3)$ olsun.

$$\pm(8c_2)^{1/3}\left(\xi-\xi_0\right) = \int \frac{1}{\sqrt{(\omega-\lambda_1)(\omega-\lambda_2)(\omega-\lambda_3)}}d\omega \tag{3.60}$$

(i) λ_1, λ_2 ve λ_3 ten birinin sıfır olduğunu ve geri kalanının $G(\omega)=0$ denkleminin $\lambda_1 < \omega < \lambda_2 < \lambda_3$ koşulunu sağlayan iki farklı gerçek kökü olduğunu varsayalım. Bu durumda (3.60) ile verilen integral

$$\omega = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)\sin^2\varphi \tag{3.61}$$

dönüşümü yardımıyla çözülürse, $m_1^2 = \dfrac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_3-\lambda_1}$ olmak üzere

$$\int \frac{1}{\sqrt{(\omega-\lambda_1)(\omega-\lambda_2)(\omega-\lambda_3)}}d\omega = \frac{2}{\sqrt{\lambda_3-\lambda_1}}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-m_1^2\sin^2\varphi}}$$

elde edilir. Bu da (3.60) teki integralde yerine konursa

$$\pm(8c_2)^{1/3}\left(\xi-\xi_0\right) = \frac{2}{\sqrt{\lambda_3-\lambda_1}}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-m_1^2\sin^2\varphi}}$$

ifadesini elde ederiz. Bu denklem Maple yardımıyla çözülürse

$$\varphi = \arcsin\ \mathrm{sn}\left(\sqrt{\lambda_3-\lambda_1}\ \mathrm{c}_2^{1/3}\left(\xi-\xi_0\right), m_1\right)$$

bulunur. Burada $sn(u,m)$ Jacobi eliptik fonksiyonudur. Bulduğumuz bu ifadeleri (3.60) denkleminde yerine yazdığımızda

$$\omega = \lambda_1 + (\lambda_2-\lambda_1)sn^2\left(\sqrt{\lambda_3-\lambda_1}c_2^{1/3}(\xi-\xi_0), m_1\right)$$

elde edilir. Sırasıyla (3.50) ve (3.46) denklemleri kullanılırsa, (3.45) denkleminin tam çözümü

$$\psi_8(\xi) = \pm\left(c_2\right)^{-1/6}\left[\lambda_1+(\lambda_2-\lambda_1)\,\mathrm{sn}^2\left(\sqrt{\lambda_3-\lambda_1}\ \mathrm{c}_2^{1/3}\left(\xi-\xi_0\right), m_1\right)\right]^{1/2} e^{i\theta} \qquad (3.62)$$

şeklinde bulunmuş olur.

(ii) Eğer $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \omega$ ise ve integral (3.60) aşağıdaki dönüşümle çözülürse

$$\omega = \frac{-\lambda_2 \sin^2\varphi + \lambda_3}{\cos^2\varphi}$$

yukarıdakilere benzer olarak, $m_1^2 = \dfrac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_3-\lambda_1}$ olmak üzere, sırasıyla

$$\pm(8c_2)^{1/3}\left(\xi-\xi_0\right) = \frac{2}{\sqrt{\lambda_3-\lambda_1}}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-m_1^2\sin^2\varphi}}$$

$$\varphi = \arcsin\ \mathrm{sn}\left(\sqrt{\lambda_3-\lambda_1}\ \mathrm{c}_2^{1/3}\left(\xi-\xi_0\right), m_1\right)$$

$$\omega = \frac{-\lambda_2\,\mathrm{sn}^2\left(\sqrt{\lambda_3-\lambda_1}\ \mathrm{c}_2^{1/3}\left(\xi-\xi_0\right), m_1\right)+\lambda_3}{1-\mathrm{sn}^2\left(\sqrt{\lambda_3-\lambda_1}\ \mathrm{c}_2^{1/3}\left(\xi-\xi_0\right), m_1\right)}$$

$$\psi_9(\xi) = \pm\left(c_2\right)^{-1/6}\frac{\left[\lambda_3-\lambda_2\,\mathrm{sn}^2\left(\sqrt{\lambda_3-\lambda_1}\ \mathrm{c}_2^{1/3}\left(\xi-\xi_0\right), m_1\right)\right]^{1/2}}{cn\left(\sqrt{\lambda_3-\lambda_1}\ \mathrm{c}_2^{1/3}\left(\xi-\xi_0\right), m_1\right)} e^{i\theta} \qquad (3.63)$$

bulunur. Bu son denklemde $cn(u,m)$ Jacobi eliptik fonksiyonudur.

IV. Durum: $\Delta = b_1^2 - 4b_0 < 0$ ve $\omega > 0$ olsun. Bu durumda (3.52) denkleminin sağ tarafındaki integrali

$$\omega = \sqrt{b_0}\tan^2\left(\varphi/2\right)$$

dönüşümü yardımıyla çözersek, $m_2^2 = \dfrac{2\sqrt{b_0} - b_1}{4\sqrt{b_0}}$ olmak üzere,

$$\pm(8c_2)^{1/3}\left(\xi - \xi_0\right) = (b_0)^{-1/4}\int \frac{1}{\sqrt{1 - m_2^{\,2}\sin^2\varphi}}\,d\varphi$$

elde edilir. Buradan da

$$\omega = \sqrt{b_0}\left[\frac{1 - cn\left(2b_0^{\,1/4}\,\mathrm{c}_2^{\,1/3}\left(\xi - \xi_0\right), m_2\right)}{1 + cn\left(2b_0^{\,1/4}\,\mathrm{c}_2^{\,1/3}\left(\xi - \xi_0\right), m_2\right)}\right]$$

bulunur. O halde bu durum için (3.45) denkleminin başka bir tam çözümü

$$\psi_{10}(\xi) = \pm\left(a_0\right)^{1/4}\left[\frac{1 - cn\left(2(a_0c_2)^{1/4}\left(\xi - \xi_0\right), m_2\right)}{1 + cn\left(2(a_0c_2)^{1/4}\left(\xi - \xi_0\right), m_2\right)}\right]^{1/2} e^{i\theta} \tag{3.64}$$

formunda elde edilmiş olur.

Jacobi eliptik fonksiyonlarının $m = 0$ ya da $m = 1$ koşulu altında trigonometrik fonksiyonlara dönüşeceğini belirtmek gerekir. Dolayısıyla, denklem (3.29) in ekstra çözümlerini aşağıdaki gibi türetiriz

$$\psi_{11}(\xi) = \pm\left(a_0\right)^{1/4}\left[\frac{2}{1 + \cos\left(2(a_0c_2)^{1/4}\left(\xi - \xi_0\right)\right)} - 1\right]^{1/2} e^{i\theta} \tag{3.65}$$

$$\psi_{12}(\xi) = \pm\left(a_0\right)^{1/4}\left[\frac{2}{1 + \sec h\left(2(a_0c_2)^{1/4}\left(\xi - \xi_0\right)\right)} - 1\right]^{1/2} e^{i\theta} \tag{3.66}$$

bulunur.

3.3 En Basit Denklem Metodu

En basit denklem yöntemi Kısmi diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini bulmak için çok güçlü bir matematiksel tekniktir. Kudryashov (2005) tarafından geliştirilmiştir ve birçok yazar tarafından matematiksel fizikte karşımıza çıkan denklemlerin tam çözümlerini bulmak için başarıyla kullanılmıştır (bkz. Vitanov ve diğ. (2010), Taghizadeh ve diğ. (2012)).

En basit denklem metodundaki temel düşünce, üzerinde çalışılan denkleme göre daha küçük mertebeye sahip lineer olmayan diferansiyel denklemlerin (Riccati denklemi, Jacobi eliptik fonksiyonu için denklem, Weierstrass elipik fonksiyonu için denklem, vb.) tam çözümlerini kullanmaktır.

Şimdi bu en basit denklem yönteminin adımlarını verelim.

1.Adım: Genel bir kısmi diferansiyel denklem

$$F(t,x,u,u_t,u_x,u_{xx},...)=0 \tag{3.67}$$

şeklinde gösterilebilir. Burada, $u=u(x,t)$ bilinmeyen bir fonksiyon, F de u ve bunun kısmi türevlerini içeren bir fonksiyondur. Eğer burada $\xi = x - ct$, $u(x,t) = y(\xi)$ hareketli dalga değişken dönüşümü yapılırsa (3.67) denklemi

$$Q(\xi, y, y', y'',...)=0 \tag{3.68}$$

şeklinde bir adi diferansiyel denkleme dönüşür. Buradaki $y = y(\xi)$ bilinmeyen bir fonksiyon ve Q da y değişkeninde ve türevlerinde bir polinomdur.

2. Adım: Kabul edelim ki

$$y(\xi) = \sum_{i=0}^{M} A_i Y^i + \sum_{i=1}^{M} B_i \left(\frac{Y_\xi}{Y}\right)^i \tag{3.69}$$

ifadesi (3.68) denkleminin çözümü olsun. Burada $Y(\xi)$ Riccati denkleminin $\left(Y'+Y^2-aY-b=0\right)$ genel çözümüdür. M değeri ve $A_i\,(i=0,\ldots,M)$ ve $B_i\,(i=1,\ldots,M)$ katsayıları daha sonra tanımlanacaktır.

Denklem (3.69) de $B_i=0\,(i=1,\ldots,M)$ alınırsa, en basit denklem metodu (3.67) ile verilen lineer olmayan diferansiyel denklemin tam çözümünü aramak için tanh yöntemine indirgenir.

3. Adım: Denklem (3.69) ki pozitif M değeri, (3.68) denkleminde balans prensibinden elde edilir.

4. Adım: (3.69) denklemi ve ilgili türevleri (3.68) de yerine yazılır. Bunun sonucunda Y ye göre bir polinom elde edilir. Polinom eşitliğinden faydalanılarak bilinmeyenler için bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sisteminin Maple veya Mathematica gibi yazılımlar yardımıyla çözülmesiyle bilinmeyen katsayılar ve parametreler bulunur. Böylece (3.67) lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin tam çözümü elde edilir.

Aşağıdaki alt bölümlerde bu metodun uygulaması olarak bazı prototip denklemlerin çözümlerini ele alacağız.

3.3.1 Kuramoto–Sivashinsky Denklemi

Kuramoto–Sivashinsky denklemi

$$u_t+uu_x+\alpha u_{xx}+\beta u_{xxx}+\gamma u_{xxxx}=0 \tag{3.70}$$

şeklinde lineer olmayan dördüncü mertebeden bir kısmi diferansiyel denklem olup mühendislikte yanma teorisinde alev cephesini modellemede kullanılmaktadır (Kuramoto 1984). Eğer (3.70) denkleminde $\alpha=\gamma=0$ ve $\beta\neq 0$ ise denklem ünlü KdV denklemine, $\beta=\gamma=0$ ve $\alpha\neq 0$ ise denklem Burgers denklemine indirgenir.

Şimdi bu denklemi en basit denklem metoduyla çözelim. Öncelikle,

$$u = u'\alpha\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}, \quad x = x'\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}, \quad t = t'\sqrt{\frac{\gamma^2}{\alpha^4}}, \quad \sigma = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\gamma}}$$

şeklinde değişken değiştirmesi yaparak işe başlayalım. Bu durumda denklemdeki türevli terimler

$$u_t = u_{t'}\sqrt{\frac{\alpha^4}{\gamma^2}}, \quad u_x = u_{x'}\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}, \quad u_{xx} = u_{x'x'}\frac{\alpha}{\gamma}, \quad u_{xxx} = u_{x'x'x'}\frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{\gamma\sqrt{\gamma}}, u_{xxxx} = u_{x'x'x'x'}\frac{\alpha^2}{\gamma^2}$$

şeklinde yazılabilirler. Bunları (3.70) denkleminde yerine yazdığımızda

$$u_{t'}\sqrt{\frac{\alpha^4}{\gamma^2}} + u\,u_{x'}\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} + \frac{\alpha^2}{\gamma}u_{x'x'} + \delta\sqrt{\alpha\gamma}\,\frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{\gamma\sqrt{\gamma}}u_{x'x'x'} + \gamma\frac{\alpha^2}{\gamma^2}u_{x'x'x'x'} = 0 \qquad (3.71)$$

ifadesini elde ederiz. Bunu da

$$\frac{\alpha^2}{\gamma}\left(u_{t'} + u'u_{x'} + u_{x'x'} + \delta u_{x'x'x'} + u_{x'x'x'x'}\right) = 0$$

formunda yazabiliriz. Buradan da (işlemlerde basitlik açısından üssüleri göz ardı ederek)

$$u_t + uu_x + u_{xx} + \delta u_{xxx} + u_{xxxx} = 0 \qquad (3.72)$$

denklemini elde ederiz. Şimdi burada $u(x,t) = U(\xi), \xi = x - c_0 t$ değişken değiştirmesi yapılırsa denklemdeki türevler

$$u_t = \frac{dU}{d\xi}\frac{d\xi}{dt} = U'(-c_0)$$
$$u_x = \frac{dU}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = U', \quad u_{xx} = U'', \quad u_{xxx} = U''', \quad u_{xxxx} = U^{(4)}$$

şeklinde bulunurlar. Bu durumda (3.72) denklemi

$$-c_0U' + UU' + U'' + \delta U''' + U^{(4)} = 0$$

formunda yazılır. Bu denklemin her iki tarafının ξ ye göre integralini alırsak

$$C_1 - c_0 U + \frac{U^2}{2} + U' + \delta U'' + U''' = 0 \tag{3.73}$$

bulunur. Bu denklemde homojen balans prensibi kullanıldığında

$$3 + M = 2M \Rightarrow \quad M = 3$$

elde edilir. En basit denklem metoduna göre (3.73) denkleminin

$$\begin{aligned} U(\xi) &= \sum_{i=0}^{3} A_i Y^i + \sum_{i=1}^{3} B_i \left(\frac{Y_\xi}{Y}\right)^i \\ &= A_0 + A_1 Y + A_2 Y^2 + A_3 Y^3 + B_1 \left(\frac{Y_\xi}{Y}\right) + B_2 \left(\frac{Y_\xi}{Y}\right)^2 + B_3 \left(\frac{Y_\xi}{Y}\right)^3 \end{aligned} \tag{3.74}$$

formunda çözümü olduğunu kabul edelim. Burada $Y(\xi)$ Riccati denkleminin $\left(Y' + Y^2 - aY - b = 0\right)$ genel çözümüdür. Şimdi Riccati denkleminde $a = 0$ olduğunu kabul edersek

$$Y_\xi = -Y^2 + b$$

olur. Bu ifadeyi (3.74) denkleminde yerine yazdığımızda

$$\begin{aligned} U(\xi) = & \left(A_3 - B_3\right)Y^3 + \left(B_2 + A_2\right)Y^2 + \left(A_1 - B_1 + 3bB_3\right)Y + \left(A_0 - 2bB_2\right) + \\ & \frac{\left(bB_1 - 3b^2 B_3\right)}{Y} + \frac{\left(3ab^2 B_3 + b^2 B_2\right)}{Y^2} + \frac{\left(b^3 B_3\right)}{Y^3} \end{aligned} \tag{3.75}$$

elde edilir. Bu denklemin ilgili türevlerini aldığımızda

$$\begin{aligned} U_\xi = \frac{dU}{dY}\frac{dY}{d\xi} = & \begin{pmatrix} A_1 - B_1 + 3bB_3 + \left(2A_2 + 2B_2\right)Y + \left(3A_3 - 3B_3\right)Y^2 + \\ \frac{\left(-bB_1 + 3b^2 B_3\right)}{Y^2} - \frac{2B_2 b^2}{Y^3} - \frac{3b^3 B_3}{Y^4} \end{pmatrix} \left(-Y^2 + b\right) = \\ & \left(-3A_3 + 3B_3\right)Y^4 + \left(-2A_2 - 2B_2\right)Y^3 + \left(B_1 - A_1 - 3bB_3 + \left(3A_3 - 3B_3\right)b\right)Y^2 + \\ & \left(2A_2 + 2B_2\right)bY + bB_1 - 3b^2 B_3 + \left(A_1 - B_1 + 3bB_3\right)b + \frac{2B_2 b^2}{Y} + \\ & \frac{3b^3 B_3 + \left(-bB_1 + 3b^2 B_3\right)b}{Y^2} - \frac{2B_2 b^3}{Y^3} - \frac{3b^4 B_3}{Y^4} \end{aligned}$$

$$U_{\xi\xi} = \frac{12B_3b^5}{Y^5} + \frac{6B_2b^4}{Y^4} + \frac{-12b^4B_3 + \left(-6b^3B_3 + \left(2bB_1 - 6b^2B_3\right)b\right)b}{Y^3} -$$
$$\frac{8b^3B_2}{Y^2} + \frac{6b^3B_3 - \left(2bB_1 - 6b^2B_3\right)b}{Y} + 2B_2b^2 + \left(2A_2 + 2B_2\right)b^2 +$$
$$\left(2B_1 - 2A_1 - 6B_3b + \left(6A_3 - 6B_3\right)b\right)bY +$$
$$\left(-\left(2A_2 + 2B_2\right)b + \left(-6A_2 + -6B_2\right)b\right)Y^2 +$$
$$\left(-2B_1 + 2A_1 + 6bB_3 - \left(6A_3 - 6B_3\right)b + \left(-12A_3 + 12B_3\right)b\right)Y^3 +$$
$$\left(6A_2 + 6B_2\right)Y^4 + \left(12A_3 - 12B_3\right)Y^5$$

$$U_{\xi\xi\xi} = -\frac{1}{Y^6}\left(2\left(\begin{array}{l} 8b^3B_2Y^5 - 20b^4B_2Y^3 + 12b^5B_2Y + 66b\,B_3Y^{10} - 42b^2B_3Y^8 - \\ 57b\,A_3Y^{10} + 30b^2A_3Y^8 - 20b\,A_2Y^9 + 8b^2A_2Y^7 - 20b\,B_2Y^9 + \\ 8b^2B_2Y^7 + 4b\,B_1Y^8 - 4b\,A_1Y^8 + b^2A_1Y^6 - 3b^3A_3Y^6 + \\ 42b^4B_3Y^4 - 4b^3B_1Y^4 - 66b^5B_3Y^2 + 3b^4B_1Y^2 - 30Y^{12}B_3 + \\ 30Y^{12}A_3 + 12Y^{11}A_2 + 12B_2Y^{11} - 3Y^{10}B_1 + 3Y^{10}A_1 + 30B_3b^6 \end{array}\right)\right)$$

elde dilir. Bu türevleri (3.73) denkleminde yerine yazdığımızda ve Y ye göre olan polinom eşitliği kullanıldığında bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi Maple yardımıyla çözülürse:

Durum I: $B_3^{(1)} = 120$ ve $A_3^{(1)} = 240$ için

$$\begin{aligned} &B_2 = -15\delta, B_1 = -\frac{15}{76}\delta^2 + \frac{60}{19} + 240b, A_0 = c_0 + \frac{7}{76}\delta + \frac{13}{608}\delta^3 - 20b\delta \\ &A_2 = 0, A_1 = -\frac{15}{38}\delta^2 + \frac{120}{19} - 240b, \end{aligned} \qquad (3.76)$$

I-1: Eğer $b_1^{(1)} = -\frac{5}{4864}\delta^2 + \frac{5}{304} + \frac{1}{4864}\sqrt{549\delta^4 - 3584\delta^2 + 9216}$ ve $\delta_1^{(1)} = 0$ alınırsa ve (3.76) ile verilen değerler (3.75) denkleminde yerine yazılırsa

$$U_1^{(1)} = c_0 - \frac{45}{38}Y + 120Y^3 - \frac{495}{11552Y} + \frac{19965}{3511808Y^3} \qquad (3.77)$$

elde edilir. Biliyoruz ki, Y Riccati denkleminin genel çözümüdür. Bu durumda

$$Y_\xi + Y^2 - b = 0 \quad \Rightarrow \quad Y = \sqrt{b}\tanh\sqrt{b}\left(\xi - C_2\right) \quad \Rightarrow \quad Y = \sqrt{\frac{11}{304}}\tanh\sqrt{\frac{11}{304}}\left(\xi - C_2\right)$$

olur. Kabul edelim ki

$$\omega = \tanh\sqrt{\frac{11}{304}}\left(\xi - C_2\right) \quad \Rightarrow \quad Y = \sqrt{\frac{11}{304}}\,\omega$$

olsun. Bu Y değerini (3.77) da yerine yazarsak

$$U_1^{(1)}(\xi) = c_0 - \frac{45\sqrt{11}}{152\sqrt{19}}\left(\omega + \omega^{-1}\right) + \frac{165\sqrt{11}}{152\sqrt{19}}\left(\omega^3 + \omega^{-3}\right), \quad \omega = \tanh\frac{\sqrt{11}}{4\sqrt{19}}\left(\xi - C_2\right)$$

elde edilir ve bu da Kuramoto–Sivashinsky denklemi için bir çözümdür.

I-2: Eğer $b_{2,3}^{(1)} = -\frac{5}{4864}\delta^2 + \frac{5}{304} + \frac{1}{4864}\sqrt{549\delta^4 - 3584\delta^2 + 9216}$ ve $\delta_{2,3}^{(1)} = \pm 4$ alınırsa, yukarıdakilere benzer olarak

$$U_{2,3}^{(1)}(\xi) = c_0 \pm \frac{3}{2} - \frac{15}{8}\left(\omega + \omega^{-1}\right) \mp \frac{15}{4}\left(\omega^2 + \omega^{-2}\right) + \frac{15}{8}\left(\omega^3 + \omega^{-3}\right), \quad \omega = \tanh\frac{1}{4}\left(\xi - C_2\right)$$

bulunur.

I-3: Eğer $b_1^{(2)} = -\frac{5}{4864}\delta^2 + \frac{5}{304} - \frac{1}{4864}\sqrt{549\delta^4 - 3584\delta^2 + 9216}$ ve $\delta_1^{(2)} = 0$ alınırsa

$$U_1^{(2)}(\xi) = c_0 - \frac{135}{152\sqrt{19}}\left(\omega - \omega^{-1}\right) - \frac{15}{152\sqrt{19}}\left(\omega^3 - \omega^{-3}\right), \omega = \tan\frac{1}{4\sqrt{19}}\left(\xi - C_2\right)$$

bulunur.

I-4: Eğer $b_{2,3}^{(2)} = -\frac{5}{4864}\delta^2 + \frac{5}{304} - \frac{1}{4864}\sqrt{549\delta^4 - 3584\delta^2 + 9216}$ ve $\delta_{2,3}^{(2)} = \pm 4$ alınırsa

$$U_{2,3}^{(2)}(\xi)=c_0\mp\frac{7}{2}-\frac{15}{8}\left(\omega-\omega^{-1}\right)\mp\frac{15}{4}\left(\omega^2+\omega^{-2}\right)-\frac{15}{8}\left(\omega^3-\omega^{-3}\right), \omega=\tan\frac{1}{4}\left(\xi-C_2\right)$$

bulunur.

I-5: Eğer $b_{4,5}^{(2)}=-\frac{5}{4864}\delta^2+\frac{5}{304}-\frac{1}{4864}\sqrt{549\delta^4-3584\delta^2+9216}$ ve

$\delta_{4,5}^{(2)}=\pm\frac{12}{\sqrt{47}}$ alınırsa

$$U_{4,5}^{(2)}(\xi)=c_0\pm\frac{45}{94\sqrt{47}}+\frac{225}{376\sqrt{47}}\left(\omega+\omega^{-1}\right)\mp\frac{45}{188\sqrt{47}}\left(\omega^2+\omega^{-2}\right)+\frac{15}{376\sqrt{47}}\left(\omega^3+\omega^{-3}\right),$$
$$\omega=\tanh\frac{1}{4\sqrt{47}}\left(\xi-C_2\right)$$

bulunur.

I-6: Eğer $b_{6,7}^{(2)}=-\frac{5}{4864}\delta^2+\frac{5}{304}-\frac{1}{4864}\sqrt{549\delta^4-3584\delta^2+9216}$ ve

$\delta_{6,7}^{(2)}=\pm\frac{16}{\sqrt{73}}$ alınırsa

$$U_{6,7}^{(2)}(\xi)=c_0\mp\frac{30}{\sqrt{73}}+\frac{345}{584\sqrt{73}}\left(\omega+\omega^{-1}\right)\mp\frac{15}{\sqrt{73}}\left(\omega^2+\omega^{-2}\right)+\frac{15}{584\sqrt{73}}\left(\omega^3+\omega^{-3}\right),$$
$$\omega=\tanh\frac{1}{4\sqrt{73}}\left(\xi-C_2\right)$$

bulunur.

Durum I-1 ve I-2 için (3.73) denklemindeki integral sabiti C_1,

$$C_1^{(1)}=\frac{1}{2}c_0^2-\frac{4950}{6859}\ ,\ C_{2,3}^{(1)}=\frac{1}{2}c_0^2-18 \tag{3.78}$$

formülleriyle belirlenir. I-3, I-4, I-5 ve I-6 için ise

$$C_1^{(2)}=\frac{1}{2}c_0^2+\frac{450}{6859}\ ,\ C_{2,3}^{(2)}=\frac{1}{2}c_0^2-\frac{4050}{389017}\ ,$$
$$C_{4,5}^{(2)}=\frac{1}{2}c_0^2-\frac{1800}{103823},\quad C_{6,7}^{(2)}=\frac{1}{2}c_0^2-8 \tag{3.79}$$

şeklindedir.

Durum II: $B_3^{(1)} = 120$ ve $A_3^{(2)} = 120$ için

$$B_2 = -15\delta, B_1 = -\frac{15}{76}\delta^2 + \frac{60}{19} + 240b, A_0 = c_0 + \frac{7}{76}\delta + \frac{13}{608}\delta^3 - 20b\delta$$
$$A_2 = 15\delta, A_1 = -\frac{15}{76}\delta^2 + \frac{60}{19} - 120b$$

II-1: Eğer $b_1 = \frac{7}{380} - \frac{13}{3040}\delta^2$ ve $\delta_{1,2} = \pm\frac{16}{\sqrt{73}}$ alınırsa, denklem (3.73) ye göre

$$C_{1,2} = \frac{1}{2}c_0^{\ 2} - \frac{4050}{389017}$$

şeklinde elde edilir ve

$$U_{1,2}(\xi) = c_0 + \frac{15}{\sqrt{73}}\left(5\omega^{-1} \mp 4\omega^{-2} + \omega^{-3} \pm 4\right), \quad \omega = \tanh\frac{1}{2\sqrt{73}}\left(\xi - C_2\right)$$

bulunur.

II-2: Eğer $b_1 = \frac{7}{380} - \frac{13}{3040}\delta^2$ ve $\delta_{3,4} = \pm\frac{12}{\sqrt{47}}$ alınırsa, (3.73) denklemindeki integral sabiti C_1,

$$C_{3,4} = \frac{1}{2}c_0^{\ 2} - \frac{1800}{103823}$$

şeklindedir ve

$$U_{3,4}(\xi) = c_0 + \frac{15}{47\sqrt{47}}\left(3\omega^{-1} \mp 3\omega^{-2} + \omega^{-3} \pm 3\right), \quad \omega = \tanh\frac{1}{2\sqrt{47}}\left(\xi - C_2\right)$$

bulunur.

II-3: Eğer $b_1 = \frac{7}{380} - \frac{13}{3040}\delta^2$ ve $\delta_{5,6} = \pm\frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{13}}$ alınırsa, (3.73)

denklemindeki integral sabiti C_1,

$$C_{5,6} = \frac{1}{2}c_0{}^2$$

şeklinde elde edilir ve $U_{5,6}\left(\xi\right)$ aşikar çözümdür.

Durum III: $B_3^{(2)} = 0$ ve $A_3{}^{(1)} = 120$ için

$$B_2 = 0,\quad B_1 = 0,\quad A_2 = -15\delta$$
$$A_0 = c_0 + \frac{7}{76}\delta + 10\delta b - \frac{13}{608}\delta^3, A_1 = -\frac{15}{76}\delta^2 + \frac{60}{19} - 120b$$

III-1: Eğer $b_1 = \frac{5}{76} - \frac{5}{1216}\delta^2 + \frac{1}{1216}\sqrt{9216 - 3584\delta^2 + 549\delta^4}$ ve $\delta_1^{(1)} = 0$

alınırsa

$$U_1{}^{(1)}(\xi) = c_0 - \frac{15\sqrt{11}}{19\sqrt{19}}\left(9\omega - 11\omega^3\right), \omega = \tanh\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{19}}\left(\xi - C_2\right)$$

bulunur.

III-2: Eğer $b_1 = \frac{5}{76} - \frac{5}{1216}\delta^2 + \frac{1}{1216}\sqrt{9216 - 3584\delta^2 + 549\delta^4}$ ve

$\delta_{2,3}{}^{(1)} = \pm 4$ alınırsa

$$U_{2,3}{}^{(1)}(\xi) = c_0 \pm 9 - 15\left(\omega \pm \omega^2 - \omega^3\right), \quad \omega = \tanh\frac{1}{2}\left(\xi - C_2\right)$$

şeklinde elde edilir.

III-3: Eğer $b_2 = \frac{5}{76} - \frac{5}{1216}\delta^2 - \frac{1}{1216}\sqrt{9216 - 3584\delta^2 + 549\delta^4}$ ve $\delta_1^{(2)} = 0$

alınırsa

$$U_1^{(2)}(\xi) = c_0 - \frac{15}{19\sqrt{19}}\left(3\omega + \omega^3\right), \omega = \tan\frac{1}{2\sqrt{19}}\left(\xi - C_2\right)$$

bulunur.

III-4: Eğer $b_2 = \frac{5}{76} - \frac{5}{1216}\delta^2 - \frac{1}{1216}\sqrt{9216 - 3584\delta^2 + 549\delta^4}$ ve $\delta_{2,3}{}^{(2)} = \pm\frac{16}{\sqrt{73}}$ alınırsa

$$U_{2,3}{}^{(2)}(\xi) = c_0 + \frac{15}{73\sqrt{73}}\left(\pm 4 + 5\omega \mp 4\omega^2 + \omega^3\right), \quad \omega = \tanh\frac{1}{2\sqrt{73}}\left(\xi - C_2\right)$$

bulunur.

III-5: Eğer $b_2 = \frac{5}{76} - \frac{5}{1216}\delta^2 - \frac{1}{1216}\sqrt{9216 - 3584\delta^2 + 549\delta^4}$ ve $\delta_{4,5}{}^{(2)} = \pm\frac{12}{\sqrt{47}}$ alınırsa

$$U_{4,5}{}^{(2)}(\xi) = c_0 + \frac{15}{47\sqrt{47}}\left(\pm 3 + 3\omega \mp 3\omega^2 + \omega^3\right), \quad \omega = \tanh\frac{1}{2\sqrt{47}}\left(\xi - C_2\right)$$

bulunur.

III-6: Eğer $b_2 = \frac{5}{76} - \frac{5}{1216}\delta^2 - \frac{1}{1216}\sqrt{9216 - 3584\delta^2 + 549\delta^4}$ ve $\delta_{6,7}{}^{(2)} = \pm 4$ alınırsa

$$U_{6,7}{}^{(2)}(\xi) = c_0 \mp 11 - 15\left(\omega \pm \omega^2 + \omega^3\right), \quad \omega = \tan\frac{1}{2}\left(\xi - C_2\right)$$

şeklinde elde edilir.

Durum III için (3.73) denklemindeki integral sabiti C_1, (3.78) ve (3.79) tarafından verilmektedir.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde bazı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin kesin çözümlerini elde etmek için üç farklı metot incelenmiştir. Bu metotlar birçok kısmi diferansiyel denklemi, integrallenebilir olsun veya olmasın, çözmek için uygundur. Ayrıca bu metotların uygulamasında lineer olmayan denklemlerin lineerleştirilmesine de gerek duyulmamaktadır.

İncelediğimiz bu metotlardan tanh-metodu, diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini elde etmek için en etkili ve kesin cebirsel yöntemlerden biridir. Bu tam çözümler, bilinmeyen fonksiyonu iyi bilinen Riccati denklemine uygulanabilir olan sonlu seriler türünden ifade edilebilir olmalıdır. Dolayısıyla bu yöntemle denklemlerin soliton, periyodik ve rasyonel çözümleri elde edilebilir.

İncelediğimiz diğer bir metot olan en basit denklem metodu, Riccati denklemini kullanan genişletilmiş tanh yönteminin bir modelidir ve hatta bu yöntemde Bernoulli ve eliptik Jacobi fonksiyonları gibi diğer denklemler de kullanılabilir. Bu tezde görüldüğü gibi, eğer Riccati denklemini kullanılırsak soliton çözümlerini buluruz. Eğer Jacobi eliptik fonksiyonları bu kuvvet serisini genişletmek için kullanılırsa, bu durumda periyodik çözümler de bulunabilir.

İncelediğimiz son metot olan deneme fonksiyonu metodunun uygulamasıyla elde edilen integrali çözmek için “Polinomlar için tam ayırma sistemi” kullanıldığında, birçok doğrusal olmayan diferansiyel denklem için birçok yeni çözüm elde edilebileceği gösterilmiştir.

İncelediğimiz bu metotların kayda değer ortak özelliklerinden biri: bir denklemin balans sayısı sıfır olduğunda denklemin bu metotların hiçbiriyle çözülemez olmasıdır (Mortazavi 2015). Sonuç olarak, fen ve mühendisliğin çeşitli alanlarında karşımıza çıkan olayların genellikle doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerle modellendiği artık iyi bilinmektedir. Bu denklemlerin tam çözümleri onların fiziksel özelliklerini anlamak için oldukça kullanışlı olmaktadırlar. Bu nedenle, bu olayları daha iyi anlamak için denklerin tam çözümlerini elde etmek oldukça fazla önem arz etmektedir.

5. KAYNAKLAR

Adomian, G., *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*, Boston, Kluwer, (1994).

Burgers, J. M., “A mathematical model illustrating the theory of turbulence”, *Adv. Appl. Mech.*, 1, 171–199, (1948).

Debnath, L., *Nonlinear partial differential equations for scientists and engineers*, Boston, Birkhäuser, (2005).

Drazin, P.G. and Johnson, R.S., *Solitons: An Introduction*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, (1989).

Du, X-H, “An irrational trial equation method and its applications”, *Pramana Journal of Physics*, 75 (3), 415–422, (2010).

Evans, L., Partial Differential Equations. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, (1998).

Evans, D. J. and Raslan, K. R., “The tanh function method for solving some important non-linear partial differential equations”, *Int. J. Comput. Math.*, 82 (7), 897–905, (2005).

Fan, E., “Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations”, *Phys. Lett. A*, 277, 212–218, (2000).

Fisher, R. A., The wave of advance of advantageous genes, *Ann. Eugenics*, 7, 335–369, (1936).

Gurefe, Y., Sonmezoğlu, A. and Mısırlı, E., “Application of the trial equation method for solving some nonlinear evolution equations arising in mathematical physics”, *Pramana - J. Phys.*, 77 (6), 1023–1029, (2011).

He, J. H., “Homotopy perturbation technique”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 178, 257–262, (1999).

Khater, A. H., Malfliet, W., Callebaut, D. K. and Kamel, D. S., “The tanh method, a simple transformation and exact analytical solutions for nonlinear reaction–diffusion equations”, *Chaos Solitons & Fractals*, 14 (3), 513–522, (2002).

Korteweg, D. J. and de Vries, G., “On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves”, *Phil. Mag.*, 39 (5), 422–443, (1895).

Kudryashov, N. A., “Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations”, *Chaos Solitons & Fractals*, 24 (5), 1217–1231, (2005).

Kuramoto, Y., *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence,* New York, Springer-Verlag, (1984).

Li, B., Chen, B. and Zhang, H., “Explicit exact solutions for compound KdV-type and compound KdV–Burgers-type equations with nonlinear terms of any order”, *Chaos Solitons & Fractals*, 15, 647–654, (2003).

Lie, S., *Theorie der Transformationsgruppen, Vol. III*, Leipzig: Teubner, (1893).

Liu, C. S., “Trial equation method and its applications to nonlinear evolution equations”, *Acta Phys. Sin.*, 54 (6), 2505, (2005^{a}).

Liu, C. S., “Using trial equation method to solve the exact solutions for two kinds of KdV equations with variable coefficients”, *Acta Phys. Sin.*, 54 (10), 4506–4510, (2005^{b}).

Liu, C. S., “A new trial equation method and its applications”, *Commun. Theor. Phys.*, 45 (3), 395–397, (2006^{a}).

Liu, C. S., “Trial equation method to nonlinear evolution equations with rank inhomogeneous: Mathematical discussions and its applications”, *Commun. Theor. Phys.*, 45 (2), 219–223, (2006^{b}).

Liu, C. S., “Applications of complete discrimination system for polynomial for classifications of traveling wave solutions to nonlinear differential equations” *Comput. Phys. Commun.* , 181, 317–324 (2010).

Liu, Y., “Exact solutions to nonlinear Schrodinger equation with variable coefficients”, *Appl. Math. Comput.* , 217, 5866–5869, (2011).

Ma, W. X. and Fuchssteiner, B., “Explicit and Exact Solutions to a Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov Equation”, *Int. J. Nonlin. Mech.*, 31 (3), 329–338, (1996).

Malfliet, W. “Solitary Wave Solutions of Nonlinear Wave Equation”, *American Journal of Physics*, 60, 650–654, (1992).

Malfliet, W. and Hereman, W., “The Tanh Method: I. Exact Solutions of Nonlinear Evolution and Wave Equations”, *Physica Scripta*, 54, 563–568, (1996).

Mortazavi, M., “Class of exact solutions of nonlinear partial differential equations”, *Master of Science Thesis, Ferdowsi University of Mashhad*, Mashhad, (2015).

Murray, J., *Mathematical Biology,* Berlin, Springer-Verlag, (1993).

Parkes, E.J. and Duffy, B.R., “An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to non-linear evolution equations”, *Computer Physics Communications*, 98 (3), 288–300, (1996).

Rui, C. and Jian, Z., “Trial function method and exact solutions to the generalized nonlinear Schrödinger equation with time-dependent coefficient”, *Chin. Phys. B*, 22 (10), 100507, (2013).

Smoller, J., *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, New York, Springer-Verlag, (1983).

Taghizadeh, N., Mirzazade, M., Paghaleh, A., Vahidi, J., “Exact solutions of nonlinear evolution equations by using the modified simple equation method”, *Ain Shams Engineering Journal*, 3, 321–325, (2012).

Volpert, A., *Travelling wave solutions of parabolic systems*, Providence, American Mathematical Society, (1994).

Wazwaz, A-M, “New solitary wave solutions to the Kuramoto-Sivashinsky and the Kawahara equations”, *Applied Mathematics and Computation*, 182 (2), 1642–1650, (2006).

Xie, Y., Yang, Z. and Li, L., “New exact solutions to the high dispersive cubic–quintic nonlinear Schrödinger equation”, *Phys.*, 382 (36), 2506–2514, (2018).

Zhang, W. G., Chang, Q. S. and Jiang, B. G., “Explicit exact solitary-wave solutions for compound KdV-type and compound KdV-Burgers-type equations with nonlinear terms of any order”, *Chaos Solitons & Fractals*, 13 (2), 311–319, (2002).

6. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Sara MAGHSOUDI KHOUZANI
Doğum Yeri ve Tarihi	: İran - 18/09/1984
Lisans Üniversite	: Payame Noor Üniversitesi-İran
Elektronik posta	: sara_maghsoudi84@yahoo.com
İletişim Adresi	:Hacıkaplanlar Mah. 1068 Sok. 12/8 Daire, DENİZLİ
Yayın Listesi	**:**