T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MİNKOWSKİ 3-UZAYINDA SPLİT KUATERNİYONLARIN GEOMETRİSİ: DÖNMELER VE ASLİ EĞRİLİKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞERİFE NAZ ELMAS

DENİZLİ, HAZİRAN - 2018

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MİNKOWSKİ 3-UZAYINDA SPLİT KUATERNİYONLARIN GEOMETRİSİ: DÖNMELER VE ASLİ EĞRİLİKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞERİFE NAZ ELMAS

DENİZLİ, HAZİRAN - 2018

KABUL VE ONAY SAYFASI

ŞERİFE NAZ ELMAS tarafından hazırlanan "**MİNKOWSKİ 3-UZAYINDA SPLİT KUATERNİYONLARIN GEOMETRİSİ: DÖNMELER VE ASLİ EĞRİLİKLER**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 22.06.2018 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Doç. Dr. Cansel YORMAZ	....
Üye Prof. Dr. İbrahim ÇELİK	....
Üye Dr. Öğretim Üyesi Sibel Paşalı ATMACA	....

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 25/07/2018 tarih ve ..31/12... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....

Prof. Dr. Uğur YÜCEL

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

ŞERİFE NAZ ELMAS

ÖZET

MİNKOWSKİ 3 UZAYINDA SPLİT KUATERNİYONLARIN GEOMETRİSİ: DÖNMELER VE ASLİ EĞRİLİKLER
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ŞERİFE NAZ ELMAS
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. CANSEL YORMAZ)

DENİZLİ, HAZİRAN – 2018

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde öncelikle Minkowski ve Hamiton'nın hayatı ve çalışmaları ile ilgili kısa bir tarihçe sunuldu. Daha sonra çalışmamızın sonraki bölümlerinde kullanılacak temel yapılar tanımlanmıştır.

İkinci bölümde, kuaterniyon cebiri ve split kuaterniyon cebiri tanımlandı. Aynı zamanda, kuaterniyonlara karşılık gelen matris formu verildi. Ayrıca, üçüncü bölüm için timelike, spacelike ve lightlike kuaterniyon tanımları verildi.

Üçüncü bölümde, split kuaterniyonlar ile dönme geometrisi verildi. Bu bölümde split kuaterniyonlar için dönme matrisi tanımlandı ve özellikleri incelendi.

Dördüncü bölümde, üçüncü bölümde oluşturulan dönme matrisinin özdeğer ve özvektörleri bulundu. Split kuaterniyonların türüne göre bulunan özdeğer ve özvektörler incelendi ve örnekler verildi.

Beşinci bölümde ise, kuaterniyonlar ile Minkowski uzayının özdeş olmasından yararlanılarak kuaterniyonlar için asli eğrilikler incelendi. Kuaterniyonlar ve split kuaterniyonlar için şekil operatörü bulundu ve bu şekil operatörüne karşılık gelen asli eğrilik ve asli doğrultmalar verildi. Aynı zamanda, saf kuaterniyonlar ve saf split kuaterniyonlar içinde asli eğrilik ve asli doğrultmanlar bulundu.

ANAHTAR KELİMELER: Kuaterniyon, Split Kuaterniyon, Dönme Matrisi, Asli Eğrilikler, Asli Doğrultular, Özdeğerler, Özvektörler

ABSTRACT

THE GEOMETRY OF SPLIT QUATERNIONS: ROTATIONS AND BASIC CURVATURES

MSC THESIS
ŞERİFE NAZ ELMAS
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATİCS

(SUPERVISOR: ASSOS. PROF. DR. CANSEL YORMAZ)

DENİZLİ, JUNE 2018

This study consists of five parts.

In the first part, firstly a brief history of Minkowski and Hamiton's life and work was presented. The basic structures, which used in the later sections to be defined.

In the second part, quaternary algebra and split quaternion algebra are defined. At the same time, the matrix form corresponding to the quaternions was given. In addition, timelike, spacelike and lightlike quaternion definitions were given for using in the third part.

In the third part, the rotation geometry is given by the split quaternions. In this section, the rotation matrix for split quaternions is defined and its properties are examined.

In the fourth part, eigenvalues and eigenvectors of the rotation matrix that created in the third part were found. The eigenvalues and eigenvectors calculated for the split quaternions type.

In the fifth part, the principal curvatures for quaternions were examined by using identically of Minkowski space and quaternions. For quaternions and split quaternions, the shape operator was found and the principal curvature and principal directions corresponding to this shape operator were given. Similarly, principal curvature and principal directions corresponding to pure quaternions and pure split quaternions were calculated.

KEYWORDS: Quaternions, Split Quaternions, Rotation Matrices, Principal Curvatures, Principal Directions, Eigenvectors, Eigenvalues

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

<u>Sayfa</u>

TABLO LİSTESİ

<u>Sayfa</u>

SEMBOL LİSTESİ

$\boldsymbol{E_1^3}$	:	3-Boyutlu Minkowski uzayı
$\boldsymbol{E_2^4}$	:	4-Boyutlu Minkowski uzayı
$\boldsymbol{\mathcal{X}(M)}$	:	M Manifoldu üzerindeki vektör alanları uzayı
$\boldsymbol{T_M(p)}$	:	Tanjant Vektörler Cümlesi
$\langle\ ,\ \rangle_L$	:	Lorentziyen İç Çarpım
$\times_L$	:	Lorentziyen Vektörel Çarpım
$\boldsymbol{H_0^2}$	:	Hiperbolik Küre
$\boldsymbol{S_1^2}$	:	Lorentziyen Küre
$\boldsymbol{S_2^3}$	:	Yarı-Öklidyen Küre
$\boldsymbol{D_X}$	:	X Vektör Alanına Göre Kovaryant Türev
$\mathbb{H}$	:	Kuaterniyon Kümesi
$\widehat{\mathbb{H}}$	:	Split Kuaterniyon Kümesi
$\boldsymbol{S_q}$	:	Kuaterniyonun skaler kısmı
$\boldsymbol{\vec{V}_q}$	:	Kuaterniyonun vektörel kısmı
$\boldsymbol{K_q}$	:	Kuaterniyonun Eşleniği
$\boldsymbol{T}\widehat{\mathbb{H}}$	:	Timelike Kuaterniyon Kümesi
$\boldsymbol{T}\widehat{\mathbb{H}}_{\boldsymbol{1}}$	:	Birim Timelike Kuaterniyon Kümesi
$\boldsymbol{SO(3)}$	:	3-Boyutlu Özel Ortogonal Matris
$\boldsymbol{SO(4,R)}$	:	4-Boyutlu Özel Ortogonal Matris
$\boldsymbol{S}$	:	Şekil Operatörü
$\boldsymbol{S_q}$	:	Kuaterniyonik şekil operatörü

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının, araştırılmasında, planlanmasında ve oluşturulmasında bana katkıda bulunan, bu çalışmanın her aşamasında yardımını, ilgi ve desteğini esirgemeyen, önerileri ve bilgilendirmesi ile beni yönlendiren, özenle tezimin bilimsel temeller ile şekillenmesini sağlayan, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım saygıdeğer ve çok değerli danışman hocam sayın Doç. Dr. Cansel YORMAZ'a, tezimin planlama ve oluşma aşamasında benden ilgi ve yardımını esirgemeyen bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım değerli hocam Dr. Simge ŞİMŞEK'e, çalışmalarım esnasında benden bir an olsun maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, her zaman yanımda olan değerli aileme ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

1 GİRİŞ

1.1 HERMANN MINKOWSKI VE MINKOWSKI UZAYININ TARİHÇESİ

Hermann Minkowski 1864-1909 yılları arasında yaşamış Litvan bir matematik bilginidir. 1864 yılında Aleksotas'da doğdu ve henüz 44 yaşındayken 1909 yılında Göttingen'de hayata veda etti. 1896 ile 1902 yılları arasında Zürih Federal Politeknik Okulunda ve ölünceye kadar da Göttingen Üniversitesinde profesörlük yaptı. Hermann Minkowski çalışmaları ile matematiğe önemli katkılar yapmıştır. 1881 yılında henüz lise öğrencisiyken hazırladığı yüz kırk sayfalık bir çalışmayla Paris Bilimler Akademisinin açtığı bir yarışmada birinciliği İrlandalı matematikçi M.J Smith ile paylaşarak adını duyurmayı başardı. 1882 yılında, tam katsayılı ikinci dereceden şekiller kuramının temelleri üstüne inceleme yazısıyla Fen Akademisinin büyük matematik ödülünü aldı. 1902 yılında en iyi dostları arasına katıldığı Hilbert'in, kendisi için bir profesörlük kadrosu açtırdığı Göttingen Üniversitesinde apandist ameliyatından hemen sonra ölünceye dek bu okulda ders vermeyi sürdürdü.

Minkowski sayı geometrisini yarattı ve geliştirdi. Geliştirdiği bu geometriyi sayı teorisi, matematiksel fizik ve özel görelilik teorisindeki problemleri çözmek için kullandı. Hermann Minkowski çalışmaları içerisinde en çok görelilik teorisi ile bilinir. Euclides olmayan geometriyle karıştırılmaması gereken bir sayılar geometrisi kurarak sayılar kuramına bazı geometrik kavramlar getirdi. Sonunda özel bir metrikle donatılmış dört boyutlu özel bir uzaya başvurarak, Einstein'in kısıtlı bağlılık kuramının, bugün klasik sayılan geometrik bir yorumunu verdi. Albert Einstein'ın fizikte ortaya attığı teoriler, "Minkowski uzay zamanı" denilen dört boyutlu uzayda daha kolay anlaşılır. Hermann Minkowski çalışmaları ile matematik ve fiziğe önemli katkılarda bulunmuştur. 1907 yılında Hermann Minkowski, 1905 yılında eski öğrencisi Albert Einstein tarafından yayımlanan rölativite teorisinin en iyi dört boyutlu uzayda anlaşılabileceğini fark etti. Teori

Lorentz ve Poincaré'nin önceki çalışmalarına dayanılarak ortaya atılmıştı. Minkowski uzay zamanında uzay ve zaman birlikte yer alır.

80. Alman Doğa Bilimleri ve Hekimleri Meclisi'nde (21 Eylül 1908) yayınlanan yazının başlangıcında şöyle diyordu: Deneysel fizik topraklarından fırlamadan önce yerleştirmek istediğim alan ve zamana ilişkin görüşlerin içerisinde önemli güçler vardır. Bunlar radikal gerçeklerdir. Bundan böyle, tek başına alan veya zaman sadece gölgeler halinde kaybolmaya mahkûmdur ve yalnızca bu türden bir birliktelik, bağımsız bir gerçeği muhafaza edecektir.

Einstein 1915 yılında genel görelilik teorisinin devamı niteliğindeki çalışmalarını tamamlamak için uzay-zaman geometrisi görünümünün gerekli olacağını fark etmeden önce Minkowski'nin çözümünü basit matematiksel bir numara olarak görmüştür.

Minkowski'nin "Sayılar geometrisi" isimli kitabı, 1896 yılında basıldı. 1907 yılında 'Diophantus Yaklaşımları' adlı eseri yayınladı. "Çalışmalar" adlı yapıtının da 1911 yılında çıktığı bilinmektedir.

Literatürde yukarıda sunulan çalışmaların devamı olarak Minkowski uzay zaman kavramı geliştirilmiş ve bulunan bu yeni metrik ile farklı vektörel yapıların tanımlanabileceği gösterilmiştir. (Catoni ve diğerleri 2011), (O'neill 1983), (Turgut 1995), (Dağlı 2012)

Ayrıca, Minkowski uzayı ile hareket geometrisi ve kuaterniyon teorisinin birleştirilebileceği 1900'lü yılların sonlarında Hacısalihoğlu tarafından çalışılmıştır. Minkowski uzayında metriğin değişimi neticesinde tanımlanan timelike, spacelike ve lightlike vektör ve eğri kavramları üzerine farklı çalışmaların olduğu da yine literatür taramasında görülmektedir. (Özdemir ve Ergin 2005),(Tozak 2010), (Turgut 1995).

Biz bu çalışmada literatürde kullanılan yöntemleri inceleyerek, Minkowski uzayında verilen kuaterniyonik yapı ile tanımlanan timelike ve spacelike vektörlerin oluşturduğu matrislerin kullanılmasıyla asli eğrilik ve asli doğrultuları hesapladık.

1.2 WILLIAM ROWAN HAMILTON VE KUATERNİYON TARİHÇESİ

Sir William Rowan Hamilton, optik, dinamik ve cebirin gelişmesinde önemli katkılarda bulunmuş İrlandalı matematikçi, fizikçi ve astronomdur. Keşfettiği kuaterniyon teorisi belki de onun en bilinen çalışmasıdır. Hamilton'un çalışmaları daha sonra kuantum mekaniğinin gelişmesinde de yararlı olmuştur.

William Rowan Hamilton 4 Ağustos 1805'te Dublin'de doğdu, 2 Eylül 1865'te aynı kentte öldü.Üç yaşında okuma, yazma ve aritmetik, beş yaşında Latince, Yunanca ve İbranice öğrendi. Dokuz yaşına geldiğinde Arapça, Farsça ve Sanskritçe de aralarında olmak üzere birçok Doğu dilini biliyordu. Hamilton 1824'te Dublin'deki Trinity College'a girdi. Ertesi yıl optikle ilgili önemli çalışmaların habercisi olan "On Caustics" adlı makalesini İrlanda Kraliyet Akademisi'ne sundu. İnceleyen kurul tarafından genel formüllere dayalı ve soyut bulunan bu araştırma üzerindeki çalışmalarını sürdürdü ve 1827'de, konuyu daha genel bir açıdan ve "karakteristik fonksiyon" yardımıyla çözümleyen "Theory of Systems of Rays" (Işın Dizgeleri Kuramı) başlıklı çalışmasını tamamladı.

Çalışmalarının bilim çevrelerinde uyandırdığı hayranlık, henüz 22 yaşında bir öğrenci olan Hamilton'ın, Brinkley'den boşalan gökbilimi profesörlüğüne ve Dunsink Gözlemevinin astronomluğuna seçilmesini sağladı. Hamilton, gökbilim alanında başarı gösterememesine karşın ölünceye değin Dunsink'te kaldı ve zamanının çoğunu kuramsal araştırmalarına ayırdı.

Hamilton' ın son yirmi iki yılını kapsayan çalışmalarının konusu dördeyler (kuaterniyonlar) kuramı olmuştur. 1829 yılında karmaşık sayıların, biri gerçek öbürü sanal olmak üzere iki eksen yardımıyla düzlemde gösterilebildiğini öğrenen Hamilton, karmaşık sayılara karşılık gelecek bütün işlemlerin yapılmasını olanaklı kılacak bir cebirsel gösterim bulmaya yöneldi. Bu konuda 1833 yılında yayınladığı ilk çalışmalarında, karmaşık sayıların tek bir sayı yerine sayı ikilileri ile anlatılabileceğini gösterdi. Ardından üç boyutlu uzaydaki noktaların, gelişi güzel seçilmiş yapay koordinatlara bağlı olmayan cebirsel gösterimlerini bulmak için çalıştı. Harcadığı yoğun çabalar ancak on yıl sonra ve son derece köktenci bir yaklaşımla, çarpma işleminin değişme özelliğinden vazgeçmesiyle sonuca ulaşabildi. Üç boyutlu uzaydaki noktaların üçlülerle değil ancak dörtlüler ile gösteriminin olanaklı olduğunu görmüştür.Matematikde kuaterniyon Kompleks sayılardan genişletilmiş bir sayı sistemidir. "Elements of Quaternions " kitabı Hamiltonun ölümünden kısa bir süre sonra basılmıştır.

Hamilton komplex sayıların düzlemde işaretlenemeyeceğini görmüş bunun üzerine aynı noktaları 3-boyutlu reel uzayda göstermeye çalışmıştır. 1843 de bir gün Royal Irish Akademi de bir toplantıya katılır. Ardından Royal kanalda yürüyüşe çıkar ve ilk defa Kuaterniyonlarla ilgili temel hususlar orada aklına gelir. Kanal da ilk notlarını kazıdığı bir taş bulunmaktadır. (Şekil-1)

Şekil-1

"Quaternion plaque on Brougham (Broom) Bridge, Dublin, which says: Here as he walked by on the 16th of October 1843 Sir William Rowan Hamilton in a flash of genius discovered the fundamental formula for quaternion multiplication $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ cut it on a stone of this bridge." (Şekil-1)

Sonraki yıllarda Kuaterniyonar vektör analizindeki gelişmelerle Josiah Willard Gibbs, Oliver Heaviside ve Hermann Von Helmholtz tarafından çalışılmaya devam edilmiştir. Quaternion Society adında bilimsel bir komite olduğu bilinmektedir. Bu komite, ünleri dünyaya yayılmış Kuaterniyonlar ve hiper-kompleks sayı sistemleri üzerine çalışan yaklaşık 60 matematikçiden oluşmaktaydı. İlk zamanlarında grubun sekreteri olan Alexander Macfarlane 1909 yılında bu komiteye başkan olmuştur.

Macfarlane, kuaterniyonların fizik bilimine adaptasyonu olan Fiziksel Cebiri yaratmıştır. Macfarlane'nin Uzay Analizi konusundaki ilk yayınları, Minkowski Uzayının sunumundan on yedi yıl önce olmuştur. Quaternion Society Bülteni, vektör analizi ve ekipollens teorisi gibi soyut cebir konularında dergi haline gelmiştir.

Kuaterniyonlar genel olarak a,b,c ve d reel sayılar i,j ve k temel birim kuaterniyonlar olmak üzere a+bi+cj+dk formunda tanımlanırlar. Kuaterniyonlar teorik ve uygulamalı matematik de kullanıldığı gibi, özellikle 3-boyutlu dönme hareketinde, 3-boyutlu bilgisayar grafiklerinde ve kristalografik doku analizinde yararlanılabilir.

Kuaterniyon çarpım tablosu:

	1	***i***	***j***	***k***
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Tablo-1

1853 yılında William Rowan Hamilton "Lectures on Quaternions" isimli bikuaternions üzerine olan çalışmasını yayınladı. Bu çalışmada kuaterniyonlar bir küre denkleminden hyperboloid elde etmek için kullanılmıştır.

Literatürde yukarıda sunulan çalışmaların devamı olarak kuaterniyon, split kuaterniyon, kompleks kuaterniyon ve Fibonnacci kuaterniyonları kavramlarının tanımlanarak detaylı olarak incelenmiş olduğu görülmektedir. (Altmann 2013), (Bekar ve Yaylı 2013), (Girard 2007), (Halici 2012, 2013)

Kuaterniyonların ve split kuaterniyonların üzerinde matrislerin oluşturulması, dönme matrislerinin tanımlanması ve Minkowski-Riemann uzaylarında kuaterniyonların incelenmesi ise son yıllarda çeşitli bilim insanları tarafından yapılmıştır. (Kula ve Yaylı 2007), (Meral 2009), (Özdemir ve Ergin 2005).

Diğer yandan, kuaterniyonların cebirin önemli yapılarından olan Clifford cebiri, Lorentz grupları, özdeğer ve özvektörler, Cayley sayıları üzerine; hatta bazı fiziksel uygulamaları da yine son yıllarda incelenmiştir. (Girard 2007), (Hacısalihoğlu 1983), (Morita 2007), (Ward 2012).

Biz bu çalışmada literatürde kullanılan yöntemleri inceleyerek yapılan bu çalışmaların diferensiyel geometride uygulanabileceği problemlerin oluşturmasını amaçladık. Bulunan sonuçları ve yöntemleri diferensiyel geometriye genişleterek, özellikle kuaterniyonlar ve split kuaterniyonlar ile asli eğriliklerin hesaplanmasında kullandık. Bulduğumuz bu asli eğriliklere karşılık gelen kuaterniyonik formdaki asli doğrultman vektörlerini hesapladık. Çalışmamızın uygulanabilirliğini çeşitli örnekler sunarak göstermiş olduk.

1.3 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan Lorentz - Minkowski uzayının temel yapıları, şekil operatörü, asli eğrilik ve asli doğrultmanlar tanımlanmıştır.

1.3.1 LORENTZ - MINKOWSKI UZAYI

Tanım 1.1: V sonlu boyutlu reel vektör uzayı olsun,

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \rightarrow R$$

bi-lineer fonksiyonu $\forall v, w \in V$ için $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$ özelliğini sağlayan $\langle\ ,\ \rangle$' ye V üzerinde bir simetrik bi-lineer form denir.

V, vektör uzayı üzerinde bir simetrik bi-lineer form $\langle\ ,\ \rangle$ olmak üzere

i)$\forall \overrightarrow{v} \in V$, $\overrightarrow{v} \neq 0$ için $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}\rangle > 0$ ise $\langle\ ,\ \rangle$ bi-lineer formu *pozitif tanımlı*,

ii)$\forall \overrightarrow{v} \in V$, $\overrightarrow{v} \neq 0$ için $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}\rangle < 0$ ise $\langle\ ,\ \rangle$ bi-lineer formu *negatif tanımlı*,

iii) $\forall \overrightarrow{v} \in V$, $\overrightarrow{v} \neq 0$ için $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}\rangle \geq 0$ ise $\langle\ ,\ \rangle$ bi-lineer formu *yarı-pozitif tanımlı*,

iv)$\forall \overrightarrow{v} \in V$, $\overrightarrow{v} \neq 0$ için $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}\rangle \leq 0$ ise $\langle\ ,\ \rangle$ bi-lineer formu *yarı-negatif tanımlı*,

v)$\forall \overrightarrow{v} \in V$, $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}\rangle = 0$ için $\overrightarrow{v} = 0$ oluyorsa $\langle\ ,\ \rangle$ bi-lineer formuna *non-dejenere*, aksi halde *dejenere* denir (Dağlı 2012).

Tanım 1.2: $\langle\ ,\ \rangle$, V üzerinde simetrik bi-lineer form ve W da V' nin bir altuzayı olsun. $\langle\ ,\ \rangle$' nin W üzerinde kısıtlanışı $\langle\ ,\ \rangle_W$ olmak üzere

$$\langle\ ,\ \rangle_W : W \times W \rightarrow R$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna $\langle\ ,\ \rangle$ simetrik bi-lineer formun indeksi denir. Eğer $\langle\ ,\ \rangle$' nin indeksi v ise

$$0 \leq v \leq boyV$$

dir (Dağlı 2012).

Tanım 1.3: M, türevlenebilir (C^{∞}-sınıfından) manifold ve

$$\langle\ ,\ \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \to C^{\infty}(M, R)$$

$$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \to \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle$$

şeklinde tanımlanan simetrik, bi-lineer ve non-dejenere metrik fonksiyonuna M üzerinde bir *metrik tensör* denir. Bu metrik tensörün indeksi M manifoldunun indeksi olarak ifade edilir.

M bir C^{∞}-sınıfından manifold olmak üzere, $\chi(M)$' de tanımlı $\langle\ ,\ \rangle$ iç çarpım fonksiyonu, M nin her bir tanjant uzayına bir iç çarpım indirger, öyleki;

$\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y} \in \chi(M)$ ve $p \in M$ için, $\overrightarrow{X}_p, \overrightarrow{Y}_p \in T_M(p)$ dir. Böylece

$$\langle\ ,\ \rangle : T_M(p) \times T_M(p) \to R$$

simetrik bi-lineer, non-dejenere dönüşüm tanımlayan $\langle\ ,\ \rangle_p$ fonksiyonuna $T_M(p)$ üzerinde bir *metrik tensör* denir (Dağlı 2012).

Tanım 1.4: M bir C^{∞}-sınıfından manifold ve $\langle\ ,\ \rangle$ de M üzerinde sabit indeksli bir metrik tensör olmak üzere $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ ikilisine bir *yarı-Riemann manifoldu* denir.

M' nin indeksi v olmak üzere $0 \leq v \leq n = boyM$ için, $v = 0$ ise M' nin bir Riemann manifoldu, $v = 1$ ve n≥ 2 durumunda ise M' ye *Lorentz manifoldu* denir (Dağlı 2012).

Tanım 1.5: R^3, 3- boyutlu standart reel vektör uzayı üzerinde $\forall p \in R^3$ ve $V_p, W_p \in T_p(R^3)$ olmak üzere

$$\langle V_p, W_p \rangle = -v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 \tag{1.1}$$

eşitliğyle verilen v-indeksli metrik tensörle elde edilen uzaya yarı-Öklidyen uzay denir ve R^3_v ile gösterilir. Burada sırasıyla v_i ve w_i bileşenleri V_p ve W_p tanjant vektörlerinin bileşenleridir. Özel olarak $v = 1$ ve $n \geq 2$ durumunda ise E^3_1, *3- boyutlu Minkowski uzayı* adını alır. Metrik tensör ise *Lorentz metriği* olarak adlandırılır (Turgut 1995).

İndeksi 2 olan 4-boyutlu yarı-Öklidyen uzayını E^4_2 ile ifade edilir. E^4_2 yarı-Öklidyen uzayında $\forall u, v \in E^4_2$ için iç çarpım

$$\langle u, v \rangle_{E^4_2} = -u_1 v_1 - u_2 v_2 + u_3 v_3 + u_4 v_4 \tag{1.2}$$

olarak tanımlanır (Turgut 1995).

Tanım 1.6: $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3) \in E_1^3$ olsun. Eğer,

i) $\left\langle \overrightarrow{X}, \overrightarrow{X} \right\rangle < 0$ ise $\overrightarrow{X}$ timelike vektör

ii) $\left\langle \overrightarrow{X}, \overrightarrow{X} \right\rangle > 0$ ise veya $\overrightarrow{X} = 0$ ise $\overrightarrow{X}$ spacelike vektör

iii) $\left\langle \overrightarrow{X}, \overrightarrow{X} \right\rangle = 0$ ve $\overrightarrow{X} \neq 0$ ise $\overrightarrow{X}$ null(lightlike) vektör

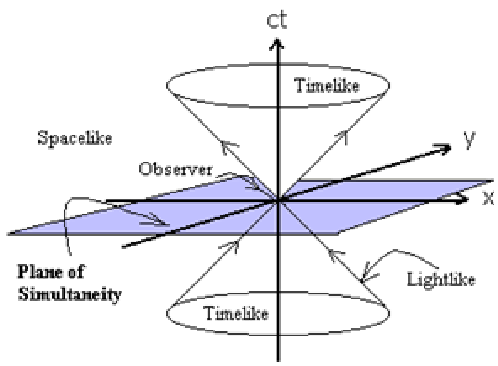
olarak ifade edilir (Catoni ve diğerleri 2011). Buradan aynı tanımları E_2^4 yarı-Öklidyen uzayı içinde verebiliriz. $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E_2^4$ için aşağıdaki tanımlar geçerlidir (Tozak 2010);

$$\left\langle \overrightarrow{X}, \overrightarrow{X} \right\rangle_{E_2^4} < 0 \qquad \text{ise timelike vektör}$$
$$\left\langle \overrightarrow{X}, \overrightarrow{X} \right\rangle_{E_2^4} > 0 \qquad \text{ise spacelike vektör}$$
$$\left\langle \overrightarrow{X}, \overrightarrow{X} \right\rangle_{E_2^4} = 0 \qquad \text{ise lightlike vektör}$$

Tanım 1.7: E_1^3 Minkowski 3-uzayının bütün timelike vektörlerin kümesi τ olsun. Böylece, $\forall u \in \tau$ için

$$C(\overrightarrow{u}) = \{\overrightarrow{x} \in \tau : \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{x} \rangle < 0\} = \left\{\overrightarrow{x} \in E_1^3 : g(x-u, x-u) < 0\right\}$$

biçiminde tanımlanan $C(\overrightarrow{u})$ kümesine u' yu içeren E_1^3 uzayının time-konisi denir (Şekil-2) (Tozak 2010).



Şekil-2

Teorem 1.1: E_1^3 Minkowski 3-uzayında $\overrightarrow{x}$ ve $\overrightarrow{y}$ timelike vektörleri aynı time konisinin elemanı olmak üzere

$$\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = -\left\| \overrightarrow{x} \right\| \left\| \overrightarrow{y} \right\| \cosh \theta$$

olacak şekilde bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Buradaki θ reel sayısına $\overrightarrow{x}$ ve $\overrightarrow{y}$ timelike vektörleri arasındaki Lorentz timelike (hiperbolik) açı denir (O'neill 1983).

Tanım 1.8: $v \in E_1^3$ vektörünün normu $\left\| \overrightarrow{v} \right\| = \sqrt{\left| \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle \right|}$ şeklinde tanımlanır. Normu bir olan vektöre de birim vektör denir. Eğer, $\overrightarrow{v}$ spacelike bir vektör ise normu $\left\| \overrightarrow{v} \right\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle}$ olur. Eğer, $\overrightarrow{v}$ timelike bir vektör ise normu, $\left\| \overrightarrow{v} \right\| = \sqrt{-\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle}$ olur (Tozak 2010).

Tanım 1.9: $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3) \in E_1^3$ vektörleri için $\overrightarrow{u}$ ve $\overrightarrow{v}$ vektörlerinin Lorentziyen vektörel çarpımı

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} &= \begin{bmatrix} -i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \\ &= \left(-\left(u_2 v_3 - u_3 v_2 \right), u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1 \right) \end{aligned} \tag{1.3}$$

biçiminde tanımlanır (Tozak 2010).

Teorem 1.2: $\overrightarrow{u}$ ve $\overrightarrow{v}$ iki timelike vektör olsun. Bu iki timelike vektör aynı timelike koni içindedir ancak ve ancak $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle < 0$ (Özdemir ve Ergin 2006).

Teorem 1.3: 3-boyutlu Minkowski uzayında $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}, \overrightarrow{w}$ vektörleri için aşağıdaki özellikler sağlanır,

1) $\overrightarrow{x} \times (\overrightarrow{y} \times \overrightarrow{z}) = \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle \overrightarrow{z} - \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{z} \rangle \overrightarrow{y}$

2) $\langle \overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z} \times \overrightarrow{w} \rangle = -\begin{vmatrix} \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{z} \rangle & \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{w} \rangle \\ \langle \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z} \rangle & \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{w} \rangle \end{vmatrix}$

3) $\overrightarrow{x}$ ve $\overrightarrow{y}$ timelike vektörleri için $\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}$ vektörü spacelike vektörüdür. Ayrıca $\overrightarrow{x}$ ve $\overrightarrow{y}$ vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere,

$$\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = -\left\| \overrightarrow{x} \right\| \left\| \overrightarrow{y} \right\| \cosh \theta$$

ve

$$\left\| \overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} \right\| = \left\| \overrightarrow{x} \right\| \left\| \overrightarrow{y} \right\| \sinh \theta$$

eşitlikleri sağlanır.

4) $\overrightarrow{x}$ ve $\overrightarrow{y}$ spacelike vektörleri

$$|\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle| < \|\overrightarrow{x}\| \, \|\overrightarrow{y}\|$$

eşitsizliğini sağlar ise $\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}$ vektörü timelike vektördür. Ayrıca $\overrightarrow{x}$ ve $\overrightarrow{y}$ vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere

$$\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = \|\overrightarrow{x}\| \, \|\overrightarrow{y}\| \cos\theta$$

ve

$$\|\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}\| = \|\overrightarrow{x}\| \, \|\overrightarrow{y}\| \sin\theta$$

eşitlikleri sağlanır.

5) $\overrightarrow{x}$ ve $\overrightarrow{y}$ spacelike vektörleri

$$|\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle| > \|\overrightarrow{x}\| \, \|\overrightarrow{y}\|$$

eşitsizliğini sağlar ise $\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}$ vektörü spacelike vektördür ve $\overrightarrow{x}$ ve $\overrightarrow{y}$ vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere

$$\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = \|\overrightarrow{x}\| \, \|\overrightarrow{y}\| \cosh\theta$$

ve

$$\|\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}\| = \|\overrightarrow{x}\| \, \|\overrightarrow{y}\| \sinh\theta$$

eşitlikleri sağlanır.

6) $\overrightarrow{x}$ ve $\overrightarrow{y}$ spacelike vektörleri

$$|\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle| = \|\overrightarrow{x}\| \, \|\overrightarrow{y}\|$$

eşitliğini sağlar ise $\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}$ vektörü lightlike vektördür (Özdemir ve Ergin 2006).

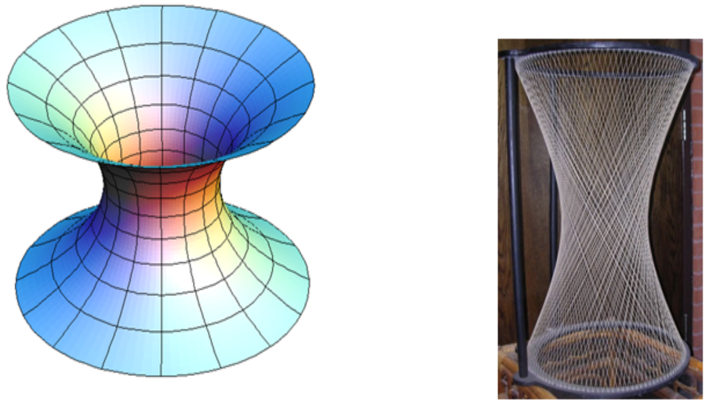
Tanım 1.10: E_1^3 üç boyutlu Minkowski uzayı olsun.

$$H_0^2 = \left\{ u \in E_1^3 : \langle u, u \rangle = 1 \right\}$$

kümesine Hiperbolik küre (Şekil-3) ve

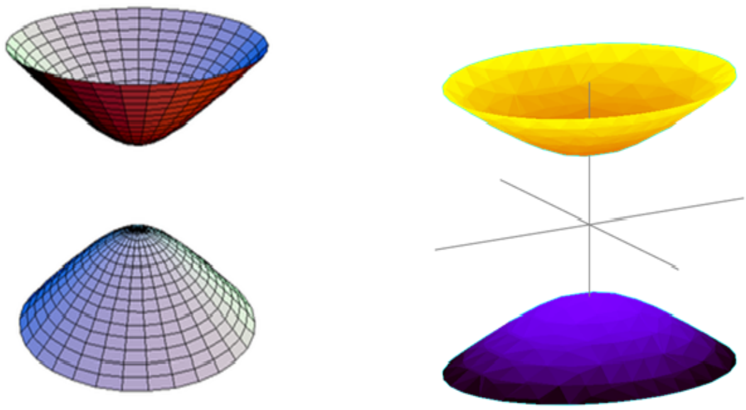
$$S_1^2 = \left\{ u \in E_1^3 : \langle u, u \rangle = -1 \right\}$$

kümesine Lorentziyen küre denir (Şekil-4). H_0^2'nin $(1, 0, 0)$ noktasından pozitif yarım küresi H_0^{2+} ve $(-1, 0, 0)$ noktasından geçen negatif yarım küresi H_0^{2-} ile gösterilir (Özdemir ve Ergin 2006).



Şekil-3

Hiperbolik küre $\left(x^2 + y^2 - z^2 = 1\right)$



Şekil-4

Lorentziyen küre $\left(-x^2 + y^2 + z^2 = -1\right)$

1.3.2 ŞEKİL OPERATÖRÜ VE ASLİ EĞRİLİK

Bu bölümde şekil operatörü ve asli eğrilikler ile ilgili temel kavramlar verilecektir.

Tanım 1.11: M bir yarı-Riemann manifoldu olsun ve D, M manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon olsun. D afin konneksiyonu için aşağıdaki özellikler vardır:

i) D, C^{∞} sınıfındandır.

ii) Sıfır Torsiyon Özelliği: M'nin bir A bölgesi üzerinde, C^{∞}olan her $X, Y \in \chi(M)$ ve

$$D_X Y - D_Y X = [X, Y]$$

şeklindedir.

iii) (Konneksiyonun metrikle bağdaşabilme özelliği): M' nin bir A bölgesi üzerinde, C^{∞} olan her $X, Y \in \chi(M)$ ve her $p \in A$ için

$$X_p \langle Y, Z \rangle = \langle D_x Y, Z \rangle_p + \langle Y, D_X Z \rangle_p$$

şeklindedir (Hacısalihoğlu 1994).

Tanım 1.12: E^n de bir hiperyüzey M olsun ve M' nin birim normal vektör alanı N olsun. E^n de Riemann konneksiyonu D olmak üzere, her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$S(X) = D_X N$$

şeklinde tanımlı S dönüşümüne M üzerinde şekil operatörü veya M' nin Weingarten dönüşümü denir (Hacısalihoğlu 1994).

Tanım 1.13: M yüzeyinin bir D noktasında,

$$S_p : T_p(M) \to T_p(M)$$

lineer dönüşümünün karakteristik değerlerine p noktasındaki asli eğrilikler denir.

$$S_p : T_p(M) \to T_p(M)$$

lineer dönüşümünün sıfırdan farklı karakteristik vektörlerine p noktasındaki asli vektörler denir. Bir eğrilik vektörünün gerdiği alt vektör uzayına, p noktasındaki asli eğrilik doğrultusu denir (Hacısalihoğlu 1994).

2 KUATERNİYON VE SPLİT KUATERNİYON CEBİRİ

Bu bölümde öncelikle kuaterniyon ve split kuaterniyon tanımları verilmiştir. Ayrıca kuaterniyonların matris formu incelenmiştir ve bu yapıların geometrik ve cebirsel özellikleri incelenmiştir.

2.1 KUATERNİYON CEBİRİ

Kuaterniyon cebiri,

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = ijk = -1 \\ ij &= -ji = k \\ kj &= -jk = i \\ ki &= -ik = j \end{aligned}$$

koşullarını taşıyan

$$q = q_1 1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k \qquad (q_i \in R)$$

şeklinde ifade edilen $\{1, i, j, k\}$ sayı dörtlülerinin oluşturduğu birleşimli fakat değişmeli ve bölmeli olmayan bir cebirdir. Bu sayı dörtlülerinin oluşturduğu cümle $\mathbb{H}$ ile gösterilir. $\mathbb{H}$ kuaterniyonun her kümesi, $q \in \mathbb{H}$ için

$$q = S_q + \overrightarrow{V_q}$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki

$$S_q = q_1$$

q kuaterniyonun skaler kısmı olarak adlandırılır.

$$V_q = q_2 i + q_3 j + q_4 k$$

q kuaterniyonunun vektörel kısmı olarak adlandırılır. q kuaterniyonu aynı zamanda

$$q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$$

şeklindede ifade edilebilir (Özdemir ve Ergin 2006).

Tanım 2.1: p, $q \in \mathbb{H}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} q &= q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k \\ & \text{ve} \\ p &= p_1 + p_2 i + p_3 j + p_4 k \end{aligned}$$

reel kuaterniyonlarının toplamı, q kuaterniyonunun skaler kısmı $S_q = q_1$, vektörel kısmı $V_q = q_2 i + q_3 j + q_4 k$ ve p kuaterniyonunun skaler kısmı $S_p = p_1$, vektörel kısmı $V_p = p_2 i + p_3 j + p_4 k$ olmak üzere

$$q + p = (S_q + S_p) + \left(\overrightarrow{V_q} + \overrightarrow{V_p}\right)$$

şeklinde tanımlıdır (Özdemir ve Ergin 2006).

Tanım 2.2: $\mathbb{H}$ kuaterniyon kümesi ve $p, q \in \mathbb{H}$ için $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ ve $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ kuaterniyonlarının, kuaterniyon çarpımı,

$$* : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$$

$$(q, p) \to q * p$$

olmak üzere

$$q * p = S_q S_p - \left\langle \overrightarrow{V}_q, \overrightarrow{V}_p \right\rangle + S_q \overrightarrow{V}_p + S_p \overrightarrow{V}_q + \overrightarrow{V}_q \times \overrightarrow{V}_p \tag{2.1}$$

şeklinde ifade edilir. Burada, $\langle , \rangle$ ve $\times$ sırasıyla iç çarpım ve vektörel çarpımı göstermektedir (Özdemir ve Ergin 2006).

Tanım 2.3: $\mathbb{H}$ kuaterniyon kümesi ve $q \in \mathbb{H}$ olmak üzere $q = S_q + \overrightarrow{V_q}$ için eğer $S_q = 0$ ise, q kuaterniyonu *saf(pure) kuaterniyon* olarak adlandırılır.

Tanım 2.4: $q = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k$ ve $p = p_1 + p_2 i + p_3 j + p_4 k$ iki saf kuaterniyonunun çarpımı

$$\begin{aligned} q * p &= -\left\langle \overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_p} \right\rangle + \overrightarrow{V_q} \times \overrightarrow{V_p} \\ &= -\left(q_2 p_2 + q_3 p_3 + q_4 p_4\right) + \begin{bmatrix} i & j & k \\ q_2 & q_3 & q_4 \\ p_2 & p_3 & p_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir (Ward 2012).

Tanım 2.5: $q = (q_1, q_2, q_3, q_4) = S_q + \overrightarrow{V_q}$ bir kuaterniyon olmak üzere, kuaterniyonun eşleneği

$$K_q = S_q - \overrightarrow{V_q}$$

şeklinde tanımlanır ve K_q ile gösterilir (Ward 2012).

Tanım 2.6: Bir q kuaterniyonu için norm

$$N_q = q * K_q = K_q * q = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanır ve N_q ile gösterilir. Eğer,

$$1q = \frac{q}{\sqrt{N_q}}, \quad (q \neq 0)$$

ise birim kuaterniyon olarak adlandırılır. Yani $N_q = 1$ olan kuaterniyona birim kuaterniyon denir. Birim kuaterniyonların kümeside $\mathbb{H}_1$ olarak gösterilir. Ayrıca, $N_q \neq 0$ olmak üzere,

$$q^{-1} = \frac{K_q}{N_q}$$

ifadesi bir kuaterniyonun tersini belirtir (Ölmez 2006).

Tanım 2.7: $q = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k$ ile verilen bir q kuaterniyonu

$$q = \sqrt{N_q}\,(\cos\theta + \overrightarrow{\varepsilon_0}\sin\theta) \tag{2.3}$$

şeklinde kutupsal formda ifade edilir. Burada,

$$\cos\theta = \frac{q_1}{\sqrt{N_q}}$$

ve

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}}{\sqrt{N_q}}$$

özelliklerini sağlayan bir θ açısı vardır ve buradan açıktır ki

$$\begin{aligned} -1 &\leq \cos\theta \leq 1 \\ -1 &\leq \sin\theta \leq 1 \end{aligned}$$

ve

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

eşitliklerini sağlar. Öyleyse her kuaterniyon

$$q = \sqrt{N_q}\,(\cos\theta + \overrightarrow{\varepsilon_0}\sin\theta)$$

kutupsal formunda yazılabilir (Ward 2012). Buradaki $\overrightarrow{\varepsilon_0}$ bir birim vektördür ve

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\varepsilon_0} &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \\ &= \left(\frac{q_2}{\sqrt{q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}}, \frac{q_3}{\sqrt{q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}}, \frac{q_4}{\sqrt{q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}} \right) \end{aligned} \tag{2.4}$$

şeklindedir. Gerçekten de

$$\begin{aligned}
q &= q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k \\
&= \sqrt{N_q}\left(\frac{q_1}{\sqrt{N_q}} + \frac{1}{\sqrt{N_q}}\left(q_2 i + q_3 j + q_4 k\right)\right) \\
&= \sqrt{N_q}\left(\frac{q_1}{\sqrt{N_q}} + \frac{\sqrt{q_2^2+q_3^2+q_4^2}}{\sqrt{N_q}}\left(\frac{q_2}{\sqrt{q_2^2+q_3^2+q_4^2}}i + \frac{q_3}{\sqrt{q_2^2+q_3^2+q_4^2}}j + \frac{q_4}{\sqrt{q_2^2+q_3^2+q_4^2}}k\right)\right) \\
&= \sqrt{N_q}\left(\cos\theta + \sin\theta\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\right)\right) \\
&= \sqrt{N_q}\left(\cos\theta + \overrightarrow{\varepsilon_0}\sin\theta\right)
\end{aligned}$$

olur. Burada $\overrightarrow{\varepsilon_0}$ vektörünün birim vektör olduğunu (2.4) denklemi yardımıyla kolayca aşağıdaki şekilde görebiliriz:

$$\begin{aligned}
N_{\overrightarrow{\varepsilon_0}} &= \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 \\
&= \frac{q_2^2}{q_2^2+q_3^2+q_4^2} + \frac{q_3^2}{q_2^2+q_3^2+q_4^2} + \frac{q_4^2}{q_2^2+q_3^2+q_4^2} \\
&= \frac{q_2^2+q_3^2+q_4^2}{q_2^2+q_3^2+q_4^2} = 1
\end{aligned}$$

Buradaki $\overrightarrow{\varepsilon_0}$ birim vektörü $\overrightarrow{\varepsilon_0} * \overrightarrow{\varepsilon_0} = -1$ eşitliğini sağlar ve kuaterniyonun ekseni olarak adlandırılır.

Bir q birim kuaterniyonu kutupsal formda

$$q = \cos\theta + \overrightarrow{\varepsilon_0}\sin\theta$$

biçiminde ifade edilir. Burada θ açısı için

$$\cos\theta = q_1 \qquad \text{ve} \qquad \sin\theta = \sqrt{q_2^2+q_3^2+q_4^2}$$

sağlanır. Gerçekten de

$$\begin{aligned}
q &= q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k \\
&= q_1 + \sqrt{q_2^2+q_3^2+q_4^2}\frac{1}{\sqrt{q_2^2+q_3^2+q_4^2}}\left(q_2 i + q_3 j + q_4 k\right) \\
&= \cos\theta + \overrightarrow{\varepsilon_0}\sin\theta
\end{aligned}$$

yazılır. Burada $\overrightarrow{\varepsilon_0}$ birim vektörü için

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\varepsilon_0} &= \frac{1}{\sqrt{q_2^2+q_3^2+q_4^2}}\left(q_2 i+q_3 j+q_4 k\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-q_1^2}}\left(q_2 i+q_3 j+q_4 k\right)\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülebilir. (Ward 2012)

2.2 KUATERNİYONLARA KARŞILIK GELEN MATRİS FORMU

x, bir kuaterniyon olsun. Sol çarpım fonksiyonunu

$$\phi_L : \phi(x) \rightarrow qx$$

şeklinde tanımlayalım. $R^4 = span\{1, i, j, k\}$ olmak üzere ϕ_L dönüşümü R^4 den R^4 e lineer bir dönüşümdür.

$$\phi_L : R^4 \rightarrow R^4$$

$$\phi_L(x) \rightarrow qx$$

Bu dönüşüm bir dönmeye karşılık geldiğinden kolayca gösterilebilir ki açıyı ve normu korur. R^4 uzayını geren vektörler,

$$\begin{aligned}1 &= (1,0,0,0) \\ i &= (0,1,0,0) \\ j &= (0,0,1,0) \\ k &= (0,0,0,1)\end{aligned}$$

şeklindedir. Bir $q = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k$ kuaterniyonu birim kuaterniyon olsun. Yani $\sqrt{N_q} = 1$ olsun. O zaman, bu vektörlerin sol çarpım fonksiyonları,

$$\begin{aligned}\phi_L(1) &= q.1 \\ &= (q_1+q_2 i+q_3 j+q_4 k).1 \\ &= q_1+q_2 i+q_3 j+q_4 k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_L(i) &= q.i \\ &= \left(q_1+q_2 i+q_3 j+q_4 k\right).i \\ &= q_1.i+q_2 i.i+q_3 j.i+q_4 k.i \\ &= -q_2+q_1 i+q_4 j-q_3 k\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\phi_L(j) &= q.j \\
&= (q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k)\,.j \\
&= q_1.j + q_2 i.j + q_3 j.j + q_4 k.j \\
&= -q_3 - q_4 i + q_1 j + q_2 k \\
\phi_L(k) &= q.k \\
&= (q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k)\,.k \\
&= q_1.k + q_2 i.k + q_3 j.k + q_4 k.k \\
&= -q_4 + q_3 i - q_2 j + q_1 k
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Böylece, ϕ_L dönüşümünün matris temsili,

$$
A_{\phi_L} = \begin{bmatrix} q_1 & -q_2 & -q_3 & -q_4 \\ q_2 & q_1 & -q_4 & q_3 \\ q_3 & q_4 & q_1 & -q_2 \\ q_4 & -q_3 & q_2 & q_1 \end{bmatrix}
$$

olur. Açıkça gösterilebilir ki bu matris ortogonaldir. Yani, $A_{\phi_L}.A_{\phi_L}^T = I$ ve $\det\left(A_{\phi_L}\right) = 1$ dir. Böylece, $A_{\phi_L} \in SO(4,R)$ olup burada $q.x$, R^4 de x'in dönmesine karşılık gelir. Kuaterniyon cebiri birleşmeli olduğundan matrislerde de aynı özellik sağlanır. Böylece, ϕ dönüşümü reel kuaterniyon uzayı ile bileşenleri reel sayılar olan 4×4 tipindeki matrisler uzayı arasında aşağıdaki gibi ifade edilen bir tanımlama yapabiliriz.

$$
\phi : (\mathbb{H}, +, .) \to (M_{(4,R)}, \oplus, \otimes)
$$

$$
\phi\,(q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k) \to \begin{bmatrix} q_1 & -q_2 & -q_3 & -q_4 \\ q_2 & q_1 & -q_4 & q_3 \\ q_3 & q_4 & q_1 & -q_2 \\ q_4 & -q_3 & q_2 & q_1 \end{bmatrix}
$$

Burada, $\oplus$ matrislerde toplama işlemini, $\otimes$ matrislerde çarpma işlemini ifade eder (Meral 2009).

TEOREM 2.1 :

$$
\phi : (\mathbb{H}, +, .) \to \; (M_{(4,R)}, \oplus, \otimes)
$$

$$
\phi\,(q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k) \quad \to \begin{bmatrix} q_1 & -q_2 & -q_3 & -q_4 \\ q_2 & q_1 & -q_4 & q_3 \\ q_3 & q_4 & q_1 & -q_2 \\ q_4 & -q_3 & q_2 & q_1 \end{bmatrix}
$$

şeklinde tanımlanan ϕ dönüşümü bir izomorfizmdir. (Ward 2012)

İspat: ϕ dönüşümünün izomorfizm olduğunu göstermek için bire-bir, örten ve homomorfizma olduğunu göstermemiz gerekir. Öncelikle bu dönüşümün homomorfizma olduğunu gösterelim. Yani,

$$\begin{aligned}\phi(p+q) &= \phi(p)\oplus\phi(q)\\ \phi(p.q) &= \phi(p)\otimes\phi(q)\end{aligned}$$

eşitliklerinin sağlandığını gösterelim.

$p, q \in \mathbb{H}$ ve $p = p_1 + p_2 i + p_3 j + p_4 k$, $q = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k$ olsun.

$$\begin{aligned}\phi(p+q) &= \phi\left((p_1+p_2i+p_3j+p_4k)+(q_1+q_2i+q_3j+q_4k)\right)\\ &= \phi\left(p_1+q_1+(p_2+q_2)\,i+(p_3+q_3)\,j+(p_4+q_4)\,k\right)\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} p_1+q_1 & -(p_2+q_2) & -(p_3+q_3) & -(p_4+q_4)\\ p_2+q_2 & p_1+q_1 & -(p_4+q_4) & p_3+q_3\\ p_3+q_3 & p_4+q_4 & p_1+q_1 & -(p_2+q_2)\\ p_4+q_4 & -(p_3+q_3) & p_2+q_2 & p_1+q_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_1 & -p_2 & -p_3 & -p_4\\ p_2 & p_1 & -p_4 & p_3\\ p_3 & p_4 & p_1 & -p_2\\ p_4 & -p_3 & p_2 & p_1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} q_1 & -q_2 & -q_3 & -q_4\\ q_2 & q_1 & -q_4 & q_3\\ q_3 & q_4 & q_1 & -q_2\\ q_4 & -q_3 & q_2 & q_1 \end{bmatrix}$$

$$= \phi(p)\oplus\phi(q)$$

olduğu görülür.

$$\phi(p.q) = \phi\left((p_1+p_2i+p_3j+p_4k)\,.\,(q_1+q_2i+q_3j+q_4k)\right)$$

olup, burada kısalık adına

$$\begin{aligned}A &= p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 + p_4q_4\\ B &= p_1q_2 + p_3q_4 - p_4q_3 + p_2q_1\\ C &= p_1q_3 + p_4q_2 - p_2q_4 + p_3q_1\\ D &= p_1q_4 + p_2q_3 - p_3q_2 - p_4q_1\end{aligned}$$

şeklinde ifade edelim. O halde

$$\begin{aligned}
&= \phi\left(A+Bi+Cj+Dk\right) \\
&= \begin{bmatrix} A & -B & -C & -D \\ B & A & -D & C \\ C & D & A & -B \\ D & -C & B & A \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} p_1 & -p_2 & -p_3 & -p_4 \\ p_2 & p_1 & -p_4 & p_3 \\ p_3 & p_4 & p_1 & -p_2 \\ p_4 & -p_3 & p_2 & p_1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} q_1 & -q_2 & -q_3 & -q_4 \\ q_2 & q_1 & -q_4 & q_3 \\ q_3 & q_4 & q_1 & -q_2 \\ q_4 & -q_3 & q_2 & q_1 \end{bmatrix} \\
&= \phi(p)\otimes\phi(q)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. (Ward 2012)

Şimdi ϕ dönüşümünün bire bir olduğunu gösterelim;

$$\begin{aligned}
q_n &= q_{1_n}+q_{2_n}i+q_{3_n}j+q_{4_n}k \\
\phi\left(q_k\right) &= \phi\left(q_l\right), \quad 1\leq k,l\leq\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} q_{1_k} & -q_{2_k} & -q_{3_k} & -q_{4_k} \\ q_{2_k} & q_{1_k} & -q_{4_k} & q_{3_k} \\ q_{3_k} & q_{4_k} & q_{1_k} & q_{2_k} \\ q_{4_k} & -q_{3_k} & q_{2_k} & q_{1_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{1_l} & -q_{2_l} & -q_{3_l} & -q_{4_l} \\ q_{2_l} & q_{1_l} & -q_{4_l} & q_{3_l} \\ q_{3_l} & q_{4_l} & q_{1_l} & q_{2_l} \\ q_{4_l} & -q_{3_l} & q_{2_l} & q_{1_l} \end{bmatrix}$$

Öyleyse,

$$\begin{aligned}
q_{1_k} &= q_{1_l} \\
q_{2_k} &= q_{2_l} \\
q_{3_k} &= q_{3_l} \\
q_{4_k} &= q_{4_l}
\end{aligned}$$

dir. O halde, $q_k=q_l$ dir. Şimdi de örten olduğunu gösterelim;

$$\begin{aligned}
\mathbb{H} &= \{q_1,q_2,...q_n,...\} \\
M_{(4,R)} &= \left\{\phi_{q_1},\phi_{q_2},...,\phi_{q_n},...\right\}
\end{aligned}$$

olmak üzere her $\phi_{q_k}\in M_{(4,R)}$ için $\phi(q_k)=\phi_{q_k}$ olacak şekilde $q_k\in\mathbb{H}$ vardır. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Şimdi A_{ϕ_L}matrisini kutupsal formda ifade edelim; q birim kuaterniyonunu

$$\begin{aligned} q &= q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k \\ &= \cos\theta + \overrightarrow{\varepsilon_0}\sin\theta \\ &= \cos\theta + \varepsilon_1\sin\theta + \varepsilon_2\sin\theta + \varepsilon_3\sin\theta \\ &= (\cos\theta, \varepsilon_1\sin\theta, \varepsilon_2\sin\theta, \varepsilon_3\sin\theta) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Buradan,

$$\begin{bmatrix} q_1 & -q_2 & -q_3 & -q_4 \\ q_2 & q_1 & -q_4 & q_3 \\ q_3 & q_4 & q_1 & -q_2 \\ q_4 & -q_3 & q_2 & q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\varepsilon_1\sin\theta & -\varepsilon_2\sin\theta & -\varepsilon_3\sin\theta \\ \varepsilon_1\sin\theta & \cos\theta & -\varepsilon_3\sin\theta & \varepsilon_2\sin\theta \\ \varepsilon_2\sin\theta & \varepsilon_2\sin\theta & \cos\theta & -\varepsilon_1\sin\theta \\ \varepsilon_3\sin\theta & -\varepsilon_3\sin\theta & \varepsilon_1\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

eşitliği ile ϕ_L matrisinin kutupsal formdaki ifadesine ulaşabiliriz.

2.3 SPLİT KUATERNİYON CEBİRİ

Bu bölümde, split kuaterniyon tanımını ve özelliklerini vereceğiz. Split kuaterniyonları kullanarak timelike, spacelike ve lightlike kuaterniyon tanımlamalarını yapacağız.

Tanım 2.8: Split kuaterniyon cebiri,

$$\begin{aligned} i^2 &= -1 \\ j^2 &= k^2 = ijk = 1 \\ ij &= -ji = k \\ kj &= -jk = -i \\ ki &= -ik = j \end{aligned}$$

koşullarını taşıyan

$$q = q_1 1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k \qquad (q_i \in R)$$

şeklinde ifade edilen $\{1, i, j, k\}$ sayı dörtlülülerinin oluşturduğu birleşimli fakat değişmeli ve bölmeli olmayan bir cebirdir. Bu sayı dörtlülülerinin oluşturduğu cümle $\widehat{\mathbb{H}}$ ile gösterilir (Özdemir ve Ergin 2006).

Split kuaterniyonlar E_2^4 ile gösterilen iki indisli yarı-Öklidyen 4-uzayı ile split kuaterniyonların alt uzayı olan saf split kuaterniyonlar ise Mikowski 3-uzayı ile özdeştir. Böylece, Lorentzian iç ve vektör çarpımları kullanımıyla vektör analizinde yapılan işlemlerin çoğunu split kuaterniyonlarla yapmak mümkün olmaktadır.

Tanım 2.9: $\widehat{\mathbb{H}}$ split kuaterniyon kümesi ve $q \in \widehat{\mathbb{H}}$ olmak üzere q split kuaterniyonu

$$q = S_q + \overrightarrow{V_q}$$

şeklinde gösterilir. Buradaki, S_q ve $\overrightarrow{V_q}$ kuaterniyonlarda olduğu gibi q split kuaterniyonun sırasıyla skaler kısmı ve vektörel kısmı olarak adlandırılır. Aynı zamanda q split kuaterniyonu

$$q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$$

şeklinde ifade edilebilir (Ward 2012).

Tanım 2.10: $\widehat{\mathbb{H}}$ split kuaterniyon kümesi ve $p, q \in \widehat{\mathbb{H}}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} q &= q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k = (q_1, q_2, q_3, q_4) \\ p &= p_1 + p_2 i + p_3 j + p_4 k = (p_1, p_2, p_3, p_4) \end{aligned}$$

iki split kuaterniyonunun çarpımı

$$\begin{aligned} * &: \widehat{\mathbb{H}} \times \widehat{\mathbb{H}} \to \widehat{\mathbb{H}} \\ q * p &= S_q S_p + \left\langle \overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_p} \right\rangle + S_q \overrightarrow{V_p} + S_p \overrightarrow{V_q} + \overrightarrow{V_q} \times_L \overrightarrow{V_p} \end{aligned} \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\langle , \rangle$ ve $\times_L$ sırasıyla, Lorentzian iç çarpım ve Lorentzian vektörel çarpımı göstermektedir. Ayrıca split kuaterniyon çarpımı

$$q * p = \begin{bmatrix} q_1 & -q_2 & q_3 & q_4 \\ q_2 & q_1 & q_4 & -q_3 \\ q_3 & -q_4 & q_1 & -q_2 \\ q_4 & q_3 & q_2 & q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$$

şeklinde de yazılabilir (Erdoğdu ve Özdemir 2015).

Tanım 2.11: $q \in \widehat{\mathbb{H}}$ olmak üzere, bir $q = S_q + \overrightarrow{V_q}$ split kuaterniyonunun skaler kısmı sıfır, yani

$$S_q = 0$$

ise q split kuaterniyonu, saf(pure) split kuaterniyon olarak adlandırılır. Saf split kuaternyonlar kümesi $\widehat{\mathbb{H}}_0$ ile gösterilir (Erdoğdu ve Özdemir 2015).

Tanım 2.12: İki saf split kuaterniyon

$$\begin{aligned} q &= q_2 i + q_3 j + q_4 k = (q_1, q_2, q_3, q_4) \\ p &= p_2 i + p_3 j + p_4 k = (p_1, p_2, p_3, p_4) \end{aligned}$$

olmak üzere; bu iki saf split kuaterniyonunun çarpımı

$$\begin{aligned} q * p &= \left\langle \overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_p} \right\rangle + \overrightarrow{V_q} \times_L \overrightarrow{V_p} \\ &= -q_2 p_2 + q_3 p_3 + q_4 p_4 + \begin{vmatrix} -i & j & k \\ q_2 & q_3 & q_4 \\ p_2 & p_3 & p_4 \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{2.6}$$

şeklinde ifade edilir (Özdemir ve Ergin 2006).

Tanım 2.13: $q = (q_1, q_2, q_3, q_4) = S_q + \overrightarrow{V_q}$ bir split kuaterniyon olmak üzere, split kuaterniyonun eşleneği

$$K_q = S_q - \overrightarrow{V_q}$$

şeklinde tanımlanır ve K_q ile gösterilir. Ayrıca saf split kuaterniyonlar için (2.6) eşitliğindeki determinanttaki ikinci ve üçüncü satırların yer değiştirmesi ve işaret değişikliği ile

$$K\left(\overrightarrow{V_q} * \overrightarrow{V_p}\right) = \overrightarrow{V_p} * \overrightarrow{V_q}$$

elde edilir (Özdemir ve Ergin 2006).

Tanım 2.14: Bir q split kuaterniyonu ile eşleniğinin çarpımı

$$q * K_q = q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2 \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanır (Özdemir ve Ergin 2006).

Verdiğimiz tanımlardan çıkarılabilen bir sonuç olarak,

$$I_q \overset{def}{=} q * K_q = K_q * q \tag{2.8}$$

eşitliği yazılabilir.

$\widehat{\mathbb{H}}$ split kuaterniyon kümesi, E_2^4 yarı-Öklidyen uzayı ile özdeş olduğundan timelike, spacelike ve lightlike kuaterniyon tanımlarını 2.8 eşitliğini kullanarak verebiliriz.

Tanım 2.15: $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ bir split kuaterniyon olsun ve

$$I_q \overset{def}{=} q * K_q = K_q * q$$

eşitliği verilsin. Eğer,

1) $I_q < 0$ ise q kuaterniyonu spacelike kuaterniyon

2) $I_q > 0$ ise q kuaterniyonu timelike kuaterniyon

3) $I_q = 0$ ise q kuaterniyonu lightlike kuaterniyon

olarak tanımlanır. (Özdemir ve Ergin 2006).

Tanım 2.16: Bir $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ split kuaterniyonun normu

$$N_q = \sqrt{|q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2|}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $N_q = 1$ ise q split kuaterniyonu, birim split kuaterniyon olarak adlandırılır ve

$$1q = \frac{q}{N_q}, \quad (N_q \neq 0)$$

eşitliği sağlanır (Özdemir ve Ergin 2006).

Ayrıca spacelike ve timelike kuaterniyonların çarpmaya göre tersi vardır ve

$$q * q^{-1} = q^{-1} * q = 1$$

özelliğine sahiptir. Böylece, spacelike ve timelike kuaterniyonun tersi

$$q^{-1} = \frac{K_q}{I_q}$$

olarak elde edilir. Fakat lightlike kuaterniyonların tersi yoktur (Özdemir ve Ergin 2006).

TEOREM 2.2: Split kuaterniyonlar için aşağıdaki özellikler sağlanır

i) $q * (r * s) = (q * r) * s$

ii) $q * (r + s) = q * r + q * s$

iii) $K_{(q*r)} = K_r * K_q$

iv) $I_{(q*r)} = I_q * I_r$

v) $N_{(q*r)} = N_q * N_r$

vi) V_q, V_r 'ye paralel olması için gerek ve yeter şart $\forall q, r \in \widehat{\mathbb{H}}$ için $q{*}r = r{*}q$ (Özdemir ve Ergin 2005).

Bu teoremden ulaştığımız sonuca göre spacelike kuaterniyon cümlesi çarpma işlemine göre kapalılık özelliği olmadığı için grup değildir.

İki spacelike kuaterniyonun çarpımı timelike quaterniyondur. Diğer yandan,

$$T\widehat{\mathbb{H}} = \{q = (q_1, q_2, q_3, q_4) : q_1, q_2, q_3, q_4 \in R,\ I_q > 0\}$$

ile gösterilen timelike kuaterniyon kümesi, split kuaterniyonlarda tanımlanan çarpım altında gruptur. Ayrıca birim timelike kümesi $T\widehat{\mathbb{H}}_1$ ile gösterilir ve

$$S_2^3 = \left\{ u \in E_2^4 : \langle u, u \rangle_{E_2^4} = 1 \right\}$$

ile gösterilen yarı-öklidyen küresi $T\widehat{\mathbb{H}}$'nin altgrubudur.

$$q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2 < 0$$

ve

$$0 < q_1^2 < -q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = \langle V_q, V_q \rangle$$

olduğundan bir spacelike kuaterniyonun vektör kısmı spacelike vektördür. Fakat bir timelike kuaterniyonun vektör kısmı spacelike, timelike ve null olabilir. Bu yüzden E_1^3 uzayında timelike kuaterniyonların, vektör kısmının spacelike, timelike veya null olma durumlarını ayrı ayrı inceleriz. Bu özellikle kutupsal formlar ve dönmeler için önemlidir.

Kompleks sayılarda ve kuaterniyonlarda olduğu gibi split kuaterniyonlar da kutupsal formda ifade edilebilir. Fakat split kuaterniyonlarda, split kuaterniyonun spacelike ya da timelike olması, hatta timelike kuaterniyonlarda vektörel kısmın timelike ya da spacelike olması bu kutupsal formu değiştirir. Yani split kuaterniyonlar için ayrı ayrı kutupsal formlar belirtilecektir.

1) Bir $q = (q_1, q_2, q_3, q_4) \in \widehat{\mathbb{H}}$ birim spacelike kuaterniyonu için

$$\begin{aligned} \sinh\theta &= \frac{q_1}{N_q} \\ \cosh\theta &= \frac{\sqrt{-q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}}{N_q} \\ \overrightarrow{\varepsilon_0} &= \frac{q_2 i + q_3 j + q_4 k}{\sqrt{-q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$q = N_q \left(\sinh\theta + \overrightarrow{\varepsilon_0} \cosh\theta\right)$$

formunda yazılabilir. Burada, $\overrightarrow{\varepsilon_0}$ vektörü E_1^3 uzayında spacelike birim vektördür.

2) Vektörel kısmı spacelike olan bir $q = (q_1, q_2, q_3, q_4) \in \widehat{\mathbb{H}}$ birim timelike kuaterniyon,

$$\begin{aligned} \cosh\theta &= \frac{|q_1|}{N_q} \\ \sinh\theta &= \frac{\sqrt{-q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}}{N_q} \\ \overrightarrow{\varepsilon_0} &= \frac{q_2 i + q_3 j + q_4 k}{\sqrt{-q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$q = N_q \left(\cosh\theta + \overrightarrow{\varepsilon_0} \sinh\theta\right)$$

formunda yazılabilir. Burada, $\overrightarrow{\varepsilon_0}$ vektörü E_1^3 uzayında spacelike birim vektördür ve

$$\overrightarrow{\varepsilon_0} * \overrightarrow{\varepsilon_0} = 1$$

eşitliğini sağlar.

3) Vektörel kısmı timelike olan bir $q = (q_1, q_2, q_3, q_4) \in \widehat{\mathbb{H}}$ birim timelike kuaterniyon,

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{q_1}{N_q} \\ \sin\theta &= \frac{\sqrt{q_2^2 - q_3^2 - q_4^2}}{N_q} \\ \overrightarrow{\varepsilon_0} &= \frac{q_2 i + q_3 j + q_4 k}{\sqrt{q_2^2 - q_3^2 - q_4^2}} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$q = N_q \left(\cos\theta + \overrightarrow{\varepsilon_0}\sin\theta\right)$$

formunda yazılabilir. Burada, $\overrightarrow{\varepsilon_0}$ vektörü E_1^3 uzayında timelike birim vektördür ve

$$\overrightarrow{\varepsilon_0} * \overrightarrow{\varepsilon_0} = -1$$

eşitliğini sağlar (Özdemir ve Ergin 2006).

Örnek 2.1: $q = (2, 1, 0, 2)$ timelike kuaterniyonu için kutupsal formu ifade edelim.

$q = (2, 1, 0, 2)$ kuaterniyonun normu $N_q = 1$ bulunur. $q = (2, 1, 0, 2)$ kuaterniyonun vektör kısmı spacelike vektör olduğu için

$$\begin{aligned} \cosh\theta &= \frac{|q_1|}{N_q} = 2 \\ \sinh\theta &= \frac{\sqrt{-q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}}{N_q} = \sqrt{3} \\ \overrightarrow{\varepsilon_0} &= \frac{(1, 0, 2)}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur. Buradan $q = (2, 1, 0, 2)$ kuaterniyonun kutupsal formu

$$\begin{aligned} q &= N_q \left(\cosh\theta + \overrightarrow{\varepsilon_0}\sinh\theta\right) \\ &= 2 + \frac{(1, 0, 2)}{\sqrt{3}}\sqrt{3} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir.

Örnek 2.2: $q = (1, 2, 1, 1)$ timelike kuaterniyonu için kutupsal formu ifade edelim.

$q = (1, 2, 1, 1)$ timelike kuaterniyonun normu

$$N_q = \sqrt{3}$$

bulunur. $q=(1,2,1,1)$ timelike kuaterniyonun vektör kısmı timelike vektör olduğu için

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{q_1}{N_q}=1 \\
\sinh\theta &= \frac{\sqrt{-q_2^2+q_3^2+q_4^2}}{N_q}=\sqrt{2} \\
\overrightarrow{\varepsilon_0} &= \frac{q_2 i+q_3 j+q_4 k}{\sqrt{q_2^2-q_3^2-q_4^2}}=\frac{(2,1,1)}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur. Buradan $q=(1,2,1,1)$ timelike kuaterniyonun kutupsal formu

$$\begin{aligned}
q &= N_q\left(\cos\theta+\overrightarrow{\varepsilon_0}\sin\theta\right) \\
&= \sqrt{3}\left(1+\frac{(2,1,1)}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\right)
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir.

TEOREM 2.3: Vektör kısmı spacelike olan bir $q=\cosh\theta+\overrightarrow{\varepsilon_0}\sinh\theta$ birim timelike kuaterniyonu, u ve v Lorentzian vektörleri arasındaki hiperbolik açı θ olmak üzere

i) $\overrightarrow{\varepsilon_0}$ birim spacelike vektörü u ve v birim timelike vektörlerine diktir,

ii) u ve v birim spacelike vektörleri $|\langle u,v\rangle|>1$ eşitsizliğini sağlar ve $\overrightarrow{\varepsilon_0}$ birim spacelike vektörüne diktir,

durumlarından biri sağlanırsa, $v*u^{-1}$ şeklinde ifade edilebilir (Özdemir ve Ergin 2006).

Örnek 2.3: Vektör kısmı spacelike olan birim timelike $q=(3,-8,-6,-6)$ kuaterniyonunu $u=(9,8,4)$ ve $v=(3,1,3)$ birim timelike vektörleri ile $v*u^{-1}$ şeklinde ifade edelim.

$$\begin{aligned}
\cosh\theta &= -\langle u,v\rangle=3 \\
\overrightarrow{\varepsilon_0} &= \frac{u\times v}{\|u\times v\|}=\frac{1}{\sqrt{8}}(-8,-6,-6) \\
\sinh\theta &= \sqrt{8}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Bulunan değerler $q=\cosh\theta+\overrightarrow{\varepsilon_0}\sinh\theta$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$q=(3,-8,-6,-6)$$

kuaterniyonu elde edilir.

Örnek 2.4: Vektör kısmı spacelike olan $q = (-9, 0, -4, 8)$ kuaterniyonunu $u = (2, 2, 1)$ ve $v = (-2, 2, 1)$ birim spacelike vektörleri ile $v * u^{-1}$ şeklinde ifade edelim.

$u = (2, 2, 1)$ ve $v = (-2, 2, 1)$ vektörleri

$$|\langle u, v \rangle| > 1$$

eşitsizliğini ve

$$\overrightarrow{\varepsilon_0} = \frac{u \times v}{\|u \times v\|} = \frac{1}{\sqrt{80}}(0, -4, 8)$$

eşitliğini sağlar ve

$$\cosh \theta = \langle u, v \rangle = 9$$

olarak hesaplanır.

TEOREM 2.4: Vektör kısmı timelike olan her $q = \cosh \theta + \overrightarrow{\varepsilon_0} \sinh \theta$ birim timelike kuaterniyon $u * v$ şeklinde yazılabilir.Burada u ve v birim spacelike vektörleri $\overrightarrow{\varepsilon_0}$ birim timelike vektörüne diktir ve θ , u ve v arasındaki açıdır (Ward 2012)

Örnek 2.5: Vektör kısmı timelike olan $q = (0, -3, -2, -2)$ birim timelike kuaterniyonu $u = (2, 2, 1)$ ve $v = (2, 1, 2)$ birim spacelike vektörleri ile $u * v$ şeklinde yazılabilir öyle ki $|\langle u, v \rangle| < 1$ eşitsizliğini ve

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\varepsilon_0} &= u \times v = (-3, -2, -2) \\ \cos \theta &= \langle u, v \rangle = 0 \end{aligned}$$

eşitliğini sağlar.

Bu teoremlerdeki vektör kısmı spacelike olan timelike kuaterniyon bağıntılarının her biri H_0^2 birim hiperboloidinin büyük hiperbol yayı ile benzerdir, ve bu bağıntılar kullanılarak H_0^{2+} üzerindeki hiperbolik üçgenler için sinüs ve kosinüs formülleri ispatlanabilir (Özdemir ve Ergin 2006).

3 LORENTZİYEN UZAYDA SPLİT KUATERNİYONLAR İLE DÖNME

Dönmeler için ortonormal matrisler, Eular açıları ve kuaterniyonlar gibi çeşitli metodlar kullanılabilir. Bunların içinde kuaterniyonlar en kullanışlı olanıdır. Birim kuaterniyonları kullanarak bir dönmeyi ortonormal matris ile ifade etmek kolaydır. Her birim kuaterniyon Öklid uzayında bir dönmeyi temsil eder. $\theta = 0^{\circ}$ derecelik dönme $q = (1, 0, 0, 0)$ birim kuaterniyonu ile gösterilir ve yine bir u birim vektörü etrafındaki $\theta = 180^{\circ}$ derecelik bir dönme ise $q = (0, u)$ kuaterniyonu tarafından temsil edilir. Bir $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ kuaterniyonu kullanılarak 3-boyutlu Öklid uzayında dönmeyi ifade etmek için aşağıdaki matris verilebilir.

$$R = \begin{bmatrix} q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2 & -2q_1q_4 + 2q_2q_3 & 2q_1q_3 + 2q_2q_4 \\ 2q_2q_3 + 2q_4q_1 & q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 - q_4^2 & 2q_3q_4 - 2q_2q_1 \\ 2q_2q_4 - 2q_3q_1 & 2q_2q_1 + 2q_3q_4 & q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

Standart koordinat eksenleri x, y, z etrafında θ açısı kadar dönme, ortonormal matrisin terimleri ile

$$\begin{aligned} R_{q_x} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\ R_{q_y} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \\ R_{q_z} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

matrisleri ile ifade edilir. Bu dönmeleri standart koordinat ekseninde sırasıyla

$$\begin{aligned} q_x &= \left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}, 0, 0\right) \\ q_y &= \left(\cos\frac{\theta}{2}, 0, \sin\frac{\theta}{2}, 0\right) \\ q_z &= \left(\cos\frac{\theta}{2}, 0, 0, \sin\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

birim kuaterniyonları ile temsil edebiliriz. 3-boyutlu Öklid uzayında her dönme standart bazla verilen ortonormal dönme matrisleri tarafından temsil edilir. Bu matrisler 3 boyutlu özel ortogonal grup olan $SO(3)$ ü oluştururlar. Ayrıca

$$f : S_3 \simeq \mathbb{H}_1 \to SO(3)$$

fonksiyonu $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ kuaterniyonunu (3.1) matrisine götüren bir homeomorfizmdir. Böylece f fonksiyonunun çekirdeği $\{\pm 1\}$ olduğundan dönme matrisi $\{\pm q\}$ birim kuaterniyon çiftine karşılık gelir. Özellikle $SO(3)$ birinci izomorfizm teoremi tarafından $\mathbb{H}_1 / \{\pm 1\}$ bölüm grubuna izomorfiktir (Özdemir ve Ergin 2006).

TEOREM 3.1: q ve r timelike kuaterniyonlar olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} R &: T\widehat{\mathbb{H}} \to T\widehat{\mathbb{H}} \\ R_q(r) &= q * r * q^{-1} \end{aligned}$$

şeklinde R dönüşümü tanımlanabilir ve bu R dönüşümü normu ve r timelike kuaterniyonunun skaler kısmını koruyan lineer bir dönüşümdür (Özdemir ve Ergin 2006).

İspat: $R_q(r)$ dönüşümünün skaler kısmı

$$S_{R_q(r)} = S_{(q*r*q^{-1})} = S_{(q*q^{-1}*r)} = S_r$$

olduğundan R dönüşümü r kuaterniyonunun skaler kısmını değiştirmez. Aynı şekilde $R_q(r)$ dönüşümünün normu

$$N_{R_q(r)} = N_q * N_r * N_{q^{-1}} = N_q * N_{q^{-1}} * N_r = N_r$$

olduğundan R dönüşümü normu koruyan bir dönüşümdür.

Şimdi R dönüşümünün lineer olduğunu gösterelim;

$r_1, r_2 \in T\widehat{\mathbb{H}}$ olsun,

$$\begin{aligned} R(ar_1 + r_2) &= q * (ar_1 + r_2) * q^{-1} = \left(q * ar_1 * q^{-1}\right) + \left(q * r_2 * q^{-1}\right) \\ &= a\left(q * r_1 * q^{-1}\right) + \left(q * r_2 * q^{-1}\right) = aR_q(r_1) + R_q(r_2) \end{aligned}$$

eşitliği sağlandığından R dönüşümü lineer bir dönüşümdür.

Bu teoreme göre, R dönüşümü altında r timelike kuaterniyonun skaler kısmı değişmediği açıkça görülmüştür. Buna göre $r = (S_q, V_q)$ timelike kuaterniyonun vektör kısmının R dönüşümü altında nasıl değiştiğini incelemeliyiz. O zaman 3-boyutlu Minkowski uzayında dönmeleri, $q * V_r * q^{-1}$ split kuaterniyon çarpımı kullanarak ele almalıyız. $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ bir timelike kuaterniyonu için i.bileşini ifade edilmek üzere

$$\left(q * V_r * q^{-1}\right)_i = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} (V_r)_j$$

eşitliği kullanarak R dönüşümüne karşılık gelen matris

$$R_q = \begin{bmatrix} q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2 & 2q_1q_4-2q_2q_3 & -2q_1q_3+2q_2q_4 \\ 2q_2q_3+2q_4q_1 & q_1^2-q_2^2-q_3^2+q_4^2 & -2q_3q_4-2q_2q_1 \\ 2q_2q_4-2q_3q_1 & 2q_2q_1-2q_3q_4 & q_1^2-q_2^2+q_3^2-q_4^2 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

şeklinde bulunur. Bu matrisin tüm sıralarının Lorentziyen anlamda ortogonal olduğu görülmektedir. Ayrıca bir $q \in T\widehat{\mathbb{H}}_1$ birim kuaterniyonunu alırsak, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir ortogonal dönme matrisini elde ederiz. 3-boyutlu Minkowski uzayında her dönme standart baza göre bir dönme matrisi tarafından temsil edilir. 3-boyutlu özel ortogonal grup matris formu

$$SO(1,2) = \left\{ R \in M_3(R) : R^t = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } \det R = 1 \right\}$$

şeklindedir. Üstelik $\varphi : S_2^3 \simeq T\widehat{\mathbb{H}}_1 \to SO(1,2)$ şeklinde tanımlanan fonksiyonu $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ kuaterniyonunu (3.1) eşitliğide verilen R matrisine götüren bir homeomorfizmdir. φ fonksiyonunun çekirdeği $\{\pm 1\}$ dir, böylece dönme matrisi birim kuaterniyonun $\pm q$ çiftine karşılık gelir. Özellikle $SO(1,2)$ birinci izomorfizm teoremi ile $T\widehat{\mathbb{H}}_1/\{\pm 1\}$ bölüm grubuna izomorfiktir. Yani E_1^3 Minskowski 3-uzayında her dönme için, bu dönmeyi belirleyen iki tane birim timelike kuaterniyon vardır. Bu timelike kuaterniyonlar q ve $-q$ kuaterniyonlarıdır. Böylece $\widehat{\mathbb{H}}$ split kuaterniyonların otomorfizm grubu, $SO(1,2)$ ile izomorfiktir. Bu nedenle bir $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ timelike kuaterniyonu bir 3x3 tipinde R_q ortogonal dönme matrisine eşdeğerdir. Bu matris $\det R_q = 1$ şartı altında Minkowski 3-uzayında bir dönmeyi temsil eder. Bu birim timelike kuaterniyonlar ile mümkündür. Böylece, q timelike kuaterniyonunun vektör kısmının causal karakteri için önemlidir. Eğer q kuaterniyonunun vektör kısmı timelike veya spacelike ise dönme açısı sırasıyla küresel veya hiperboliktir.

Örnek 3.1: Vektör kısmı timelike olan $q = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$ birim timelike kuaterniyonu için dönme matrisini bulalım.

$q = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$ kuaterniyonunun bileşenleri (3.2) matrisinde yerine yazıldığında $q=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0,0\right)$ kuaterniyonu için dönme matrisi

$$R_q=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Burada $q=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0,0\right)$ timelike kuaterniyonu $i=(1,0,0)$ timelike ekseni etrafında 120° ' lik bir açı boyunca dönmeyi temsil eder.

Örnek 3.2: Vektör kısmı spacelike olan $p=(2,1,0,2)$ birim timelike kuaterniyonu için dönme matrisini bulalım.

(3.2) eşitliğinde p kuaterniyonunun bileşenleri yerine yazılırsa $p=(2,1,0,2)$ birim timelike kuaterniyonunun dönme matrisi

$$R_p=\begin{bmatrix}9 & 8 & -4\\ 8 & 7 & -4\\ 4 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada $p=(2,1,0,2)$ birim timelike kuaterniyonu

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{q_2 i+q_3 j+q_4 k}{\sqrt{-q_2^2+q_3^2+q_4^2}}\\ \varepsilon &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}},0,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

spacelike ekseni etrafında hiperbolik 2θ açısıyla bir dönmeyi temsil eder öyle ki

$$\begin{aligned}\cosh\theta &= 2\\ \sinh\theta &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

şeklindedir.

Tersine, Minkowski 3-uzayında verilen bir 3x3 tipinde ortonormal dönme matrisi için, aşağıdaki formülleri kullanarak ilgili birim timelike kuaterniyonları bulabiliriz;

$q_1\neq 0$ için

$$\begin{aligned}q_1^2 &= \frac{1}{4}\left(1+R_{q_{11}}+R_{q_{22}}+R_{q_{33}}\right)\\ q_2 &= \frac{1}{4q_1}\left(R_{q_{32}}-R_{q_{23}}\right)\\ q_3 &= -\frac{1}{4q_1}\left(R_{q_{13}}+R_{q_{31}}\right)\\ q_4 &= \frac{1}{4q_1}\left(R_{q_{21}}-R_{q_{12}}\right)\end{aligned}$$

olur.

$q_1 = 0$ için

$$\begin{aligned} q_3 &= -\frac{1}{2q_2} R_{q_{12}} \\ q_4 &= -\frac{1}{2q_2} R_{q_{12}} \\ q_2^2 &= 1 + q_3^2 + q_4^2 \end{aligned}$$

şeklindedir. $0 < q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2$ olduğunda timelike kuaterniyonu belirlemek yeterlidir. $q_1 = 0$ olduğu zaman ise $0 < q_2^2 - q_3^2 - q_4^2$ veya $q_2 \neq 0$ alınabilir. Sonuç olarak, $R_q \in SO(1,2)$ dönme matrisi için, R_q dönme matrisini tanımlayan bir ε birim vektörü bulunabilir, öyle ki bu vektör $+1$ özdeğerine karşılık gelen birim özvektördür. O zaman, R_q ve

$$\cosh^2 \frac{\theta}{2} - \sinh^2 \frac{\theta}{2} = 1$$

veya

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1$$

denklemlerini kullanarak θ açısını buluruz öyle ki, R_q dönüşümü bu açı boyunca ε etrafında döner. Böylece ε dönme ekseninin timelike veya spacelike olmasına göre R_q dönme matrisine karşılık gelen birim timelike kuaterniyonların çifti

$$\pm \left(\cos \frac{\theta}{2} + \varepsilon \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

veya

$$\pm \left(\cosh \frac{\theta}{2} + \varepsilon \sinh \frac{\theta}{2} \right)$$

şeklindedir.

Örnek 3.3:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{9}{4} & -2 & \frac{1}{4} \\ -1 & 1 & -1 \\ -\frac{7}{4} & 2 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \in SO(1,2)$$

dönme matrisine karşılık gelen kuaterniyonu bulalım.

$+1$ özdeğerine karşılık gelen özvektör yani dönme ekseni $\varepsilon = (2, 1, -2)$ olarak bulunabilir. ε vektörü bir spacelike vektördür. Dolayısıyla A dönme matrisine karşılık gelen birim timelike kuaternion çifti $\pm \left(\cosh \frac{\theta}{2} + \sinh \frac{\theta}{2} \right)$ formundadır. Böylece, bu matrisin birinci satır ve birinci sütun elemanı olan,

$$A_{11} = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = \frac{9}{4}$$

ve

$$q=\pm\left(\cosh\frac{\theta}{2}+(2,1,-2)\sinh\frac{\theta}{2}\right)$$

denklemlerini kullanarak

$$q=\pm\left(\frac{3}{\sqrt{8}},\frac{2}{\sqrt{8}},\frac{1}{\sqrt{8}},-\frac{2}{\sqrt{8}}\right)$$

birim timelike kuaterniyonunu buluruz.

Örnek 3.4:

$$B=\begin{bmatrix} 2 & \frac{\sqrt{2}}{2}-1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}-1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}+1 & -\frac{1}{2} & -\sqrt{2}-\frac{1}{2} \\ 1-\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\in SO(1,2)$$

dönme matrisine karşılık gelen kuaterniyonu bulalım.

Bu durumda dönme ekseni $\varepsilon=\left(\frac{2}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ bir timelike vektör, sonra da B dönme matrisine karşılık gelen birim timelike kuaternion çifti

$$q=\pm\left(\cos\frac{\theta}{2}+\varepsilon\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

formunda yazılır. Bu yüzden $B_{11}=2$ ve $q=\pm\left(\cos\frac{\theta}{2}+\varepsilon\sin\frac{\theta}{2}\right)$ kullanılarak

$$\begin{aligned}\sin\frac{\theta}{2} &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \cos\frac{\theta}{2} &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

eşitliklerini buluruz. Yani B dönme matrisi ε timelike ekseni etrafında 90° lik dönmeyi ifade etmektedir.

TEOREM 3.2: ε bir Lorentz vektör olsun ve $q=\cosh\theta+\varepsilon_0\sinh\theta$ kuaterniyonu vektör kısmı spacelike olan bir birim timelike kuaterniyon olsun. $R_q(\varepsilon)=q*\varepsilon*q^{-1}$ dönüşümü ε_0 spacelike ekseni etrafında hiperbolik 2θ açısı kadar dönmedir (Özdemir ve Ergin 2006).

İspat: Öncelikle

$$\begin{aligned}\varepsilon_0\times_L\varepsilon_1 &= \varepsilon_2\\ \varepsilon_2\times_L\varepsilon_0 &= \varepsilon_1\\ \varepsilon_1\times_L\varepsilon_2 &= \varepsilon_0\end{aligned}$$

denklemlerini sağlayacak şekilde doğruya ait $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ kümesini seçelim. Burada ε_1, ε_0 düzleminde bir timelike vektördür ve $\langle\varepsilon_1, \varepsilon_0\rangle_L = 0$ eşitliğini sağlar. Bu yüzden ε vektörünün sırasıyla spacelike veya timelike olmasına göre

$$\varepsilon = \cosh\tau\varepsilon_0 + \sinh\tau\varepsilon_1$$

veya

$$\varepsilon = \sinh\tau\varepsilon_0 + \cosh\tau\varepsilon_1$$

yazabiliriz. Şimdi $R_q(\varepsilon) = q*\varepsilon*q^{-1}$ eşitliği ile ε_0 ve ε_1 vektörlerinin R_q dönüşümü altında nasıl değiştiğini hesaplayalım. V_q, ε_0 vektörüne paralel olduğundan

$$\begin{aligned} q*\varepsilon_0 &= \varepsilon_0 * q \\ R_q(\varepsilon_0) &= q*\varepsilon_0*q^{-1} = \varepsilon_0*q*q^{-1} = \varepsilon_0 \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece,

$$\begin{aligned} R_q(\varepsilon_1) &= q*\varepsilon_1*q^{-1} = (\cosh\theta + \varepsilon_0\sinh\theta)*\varepsilon_1*(\cosh\theta - \varepsilon_0\sinh\theta) \\ &= \varepsilon_1\cosh^2\theta - \cosh\theta\sinh\theta\,(\varepsilon_1*\varepsilon_0) + \cosh\theta\sinh\theta\,(\varepsilon_0*\varepsilon_1) \\ &\quad -(\varepsilon_0*\varepsilon_1)*\varepsilon_0\sinh^2\theta \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca biliyoruz ki, $\varepsilon_0*\varepsilon_1 = \varepsilon_1\times_L\varepsilon_0$ saf kuaterniyonlar için ortogonaldir ve u, v, w Lorentziyen vektörleri için

$$u\times_L(v\times_L w) = \langle u, v\rangle_L w - \langle u, w\rangle_L v$$

denklemi sağlanır. O zaman

$$(\varepsilon_0*\varepsilon_1)*\varepsilon_0 = (\varepsilon_0\times_L\varepsilon_1)\times_L\varepsilon_0$$

olduğundan

$$R_q(\varepsilon_1) = \varepsilon_1\cosh 2\theta + \varepsilon_2\sinh 2\theta$$

denklemini buluruz. Bunun anlamı ise ε'nun $R_q(\varepsilon)$ dönüşümü ile ε_0 etrafında hiperbolik 2θ açısı kadar dönmesini ifade eder. Bu nedenle, vektör kısmı spacelike olan bir q birim timelike kuaterniyonu, 3-boyutlu lightlike olmayan Lorentziyen vektörünün, q ekseni etrafında hiperbolik 2θ açı ile dönmesini temsil eder. Bu teorem için bir örnek verelim:

Örnek 3.5: Vektör kısmı spacelike olan $q = \cosh\theta + k\sinh\theta$ birim timelike kuaterniyonunu alalım ve ε, i ve k düzleminde spacelike vektör olsun. τ, ε ve k arasındaki hiperbolik açı olmak üzere

$$\varepsilon = \cosh\tau k + \sinh\tau i$$

eşitliği yazılır. V_q, k' ya paralel olduğu için $R_q(k) = q * k * q^{-1} = k$ olur. Ayrıca,

$$R_q(i) = q * i * q^{-1} = (\cosh\theta + k\sinh\theta) * i * (\cosh\theta - k\sinh\theta)$$

olur ve split kuaterniyon çarpımını kullanarak

$$R_q(i) = i\cosh 2\theta + j\sinh 2\theta$$

denklemini elde ederiz. Bu da i nin k etrafında pozitif yönde hiperbolik 2θ açısı kadar döndürülmesiyle $R_q(i)$ timelike vektörünü elde ettiğimiz anlamına gelir. Bundan dolayı, $\varepsilon = \cosh\tau k + \sinh\tau i$ spacelike vektörü R_q dönüşümü altında $R_q(\varepsilon) = \cosh\tau k + \sinh\tau R_q(i)$ spacelike vektörüne dönüşür.

Minkowski 3-uzayında hiperbolik θ açısı kadar, $j = (0,1,0)$ ve $k = (0,0,1)$ standart spacelike koordinatları boyunca dönmeler

$$\begin{aligned} R_{q_j} &= \begin{bmatrix} \cosh\theta & 0 & \sinh\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh\theta & 0 & \cosh\theta \end{bmatrix} \\ R_{q_k} &= \begin{bmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta & 0 \\ \sinh\theta & \cosh\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ortonormal matrisleri ile ifade edilir veya

$$\begin{aligned} q_j &= \left(\cosh\frac{\theta}{2}, 0, -\sinh\frac{\theta}{2}, 0\right) \\ q_k &= \left(\cosh\frac{\theta}{2}, 0, 0, \sinh\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

birim timelike kuaterniyonları ile ifade edilir.

TEOREM 3.3: Vektör kısmı timelike olan $q = \cos\theta + \varepsilon_0 \sin\theta$ timelike kuaterniyonu olsun ve ε bir Lorentziyen vektör olsun. O zaman

$$R_q(\varepsilon) = q * \varepsilon * q^{-1}$$

dönüşümü, ε_0 timelike ekseni etrafında 2θ açı kadar dönmeyi belirtir (Özdemir ve Ergin 2006).

İspat:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \times_L \varepsilon_1 &= \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 \times_L \varepsilon_0 &= \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 \times_L \varepsilon_2 &= -\varepsilon_0 \end{aligned}$$

denklemlerini sağlayan bir sağ yanlı küme seçelim. ε_1 vektörü, ε_0 timelike vektör düzleminde bir spacelike vektördür ve $\langle \varepsilon_0, \varepsilon_1 \rangle_L = 0$ dır. Böylece, ε nun sırasıyla timelike ve ya spacelike olmasına göre

$$\varepsilon = \cosh \tau \varepsilon_0 + \sinh \tau \varepsilon_1$$

ve

$$\varepsilon = \sinh \tau \varepsilon_0 + \cosh \tau \varepsilon_1$$

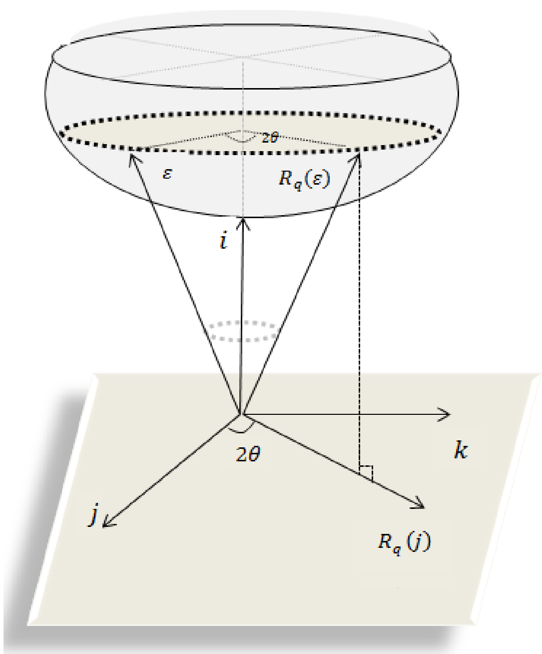
eşitliklerini yazabiliriz. Şimdi, $R_q(\varepsilon) = q * \varepsilon * q^{-1}$ eşitliği ile ε_0 ve ε_1 vektörlerinin R_q dönüşümü altında nasıl değiştiğini hesaplayalım. V_q, ε_0 vektörüne paralel olduğundan

$$\begin{aligned} q * \varepsilon_0 &= \varepsilon_0 * q \\ R_q(\varepsilon_0) &= q * \varepsilon_0 * q^{-1} = \varepsilon_0 * q * q^{-1} = \varepsilon_0 \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece

$$R_q(\varepsilon_0) = \varepsilon_1 \cos 2\theta + \varepsilon_2 \sin 2\theta$$

denklemini buluruz. Bu da ε nun $R_q(\varepsilon)$ dönüşümü tarafından ε_0 etrafında 2θ açısı kadar döndürüldüğü anlamına gelir. Böylece, timelike vektör kısmına sahip q birim timelike kuaterniyonunun, q'nun ekseni etrafında 2θ açısı kadar dönmesine karşılık gelen 3-boyutlu lightlike olmayan Lorentziyen vektörü temsili (Şekil-5)' deki gibidir.



Şekil-5

Örnek 3.6: Vektör kısmı timelike olan $q = \cos\theta + i\sin\theta$ birim timelike kuaterniyonunu alalım ve ε, i ve j düzleminde birim timelike vektör olsun. τ , ε ve i arasında hiperbolik açı olmak üzere

$$\varepsilon = \cosh\tau i + \sinh\tau j$$

eşitliği yazılır. V_q, i' ye paralel olduğu için $R_q(i) = q * i * q^{-1} = i$ olur. Ayrıca,

$$R_q(j) = q * j * q^{-1} = (\cos\theta + i\sin\theta) * j * (\cos\theta - i\sin\theta)$$

olur ve split kuaterniyon çarpımını kullanarak

$$R_q(j) = j\cos 2\theta + k\sin 2\theta$$

denklemini elde ederiz. Bunun anlamı, $R_q(j)$'nin, j nin i etrafında pozitif yönde 2θ açısı kadar döndürülmesiyle elde edilen vektör olduğudur. Bu yüzden

$$\varepsilon = \cosh\tau i + \sinh\tau j$$

birim timelike vektörü R_q dönüşümü altında

$$R_q(\varepsilon) = \cosh\tau i + \sinh\tau R_q(j)$$

timelike vektörüne dönüşür. Standart timelike koordinat ekseni $i = (1, 0, 0)$ etrafında θ açısı kadar dönme

$$R_{q_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

ortonormal matrisi ile ifade edilir veya

$$q = \left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}, 0, 0\right)$$

birim timelike kuaterniyonu ile ifade edilir.

4 SPLİT KUATERNİYONLAR İLE VERİLEN LORENTZİYEN DÖNME MATRİSİNİN ÖZDEĞER VE ÖZVEKTÖRLERİ

Bu bölümde split kuaterniyonu kullanarak Minkowski 3- uzayında bir dönme matrisinin özdeğerlerini inceledik. Bir dönme matrisinin özdeğerlerinin ve özvektörlerinin, birim timelike kuaterniyonun katsayıları ile ilişkisini açıkladık.

4.1 $\mathbf{E}_1^3$ UZAYINDA DÖNME MATRİSİNİN ÖZDEĞER VE ÖZVEKTÖRLERİ

Bu kısımda E_1^3 uzayındaki Lorentziyen dönme matrisinin özdeğer ve özvektörlerini inceleyeceğiz. A Lorentziyen dönme matrisinin özdeğerleri λ_1, λ_2 ve λ_3 olsun.O zaman A' nın karakteristik polinomu,

$$\Delta_A = \det(xI - A) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3)$$

şeklindedir. Eğer $x = 0$ ise $\det A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$ olur. Bunun anlamı, dönme matrisinin özdeğerlerinin çarpımının bu matrisin determinantına eşit olmasıdır.

TEOREM 4.1: Minkowski 3-uzayında 3x3 tipinde bir dönme matrisinin özdeğerlerinden biri 1'dir ve bu özdeğere karşılık gelen özvektör, dönme eksenidir (Özdemir ve Erdoğdu 2013).

İspat: A, E_1^3 uzayında bir Lorentziyen dönme matrisi olsun. A matrisinin karakteristik polinomu,

$$\Delta_A = \det(xI - A)$$

şeklindedir. $\det A = 1$ olduğundan

$$\det(I - A) = \det A \det(I - A)$$

yazabiliriz. Transpozun ve determinantın özelliklerini kullanarak,

$$\begin{aligned} \det(I - A) &= \det\left(IA^TI\right)\det(I - A) \\ &= \det\left(IA^TI - I\right) \\ &= \det\left(IA^TI - I\right) \\ &= \det(A - I) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Ayrıca A matrisi, 3x3 tipinde bir matris olduğundan

$$\det(A - I) = -\det(I - A)$$

eşitliğini yazabiliriz. Yani,

$$\det(A - I) = -\det(A - I)$$

olarak bulunur. Böylece, $\det(A - I) = 0$ olması A' nın karakteristik denkleminin köklerinden birinin 1 olduğu anlamına gelir. (3.2) eşitliğinde verilen matris kullanılarak, $\lambda = 1$ özdeğerine karşılık gelen R_q dönme matrisinin özvektörünü

$$\overrightarrow{c}(q_1, q_2, q_3, q_4) = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

sütun matrisi ile ifade edebiliriz. Diğer taraftan, Teorem 3.2 ve Teorem 3.3' den dolayı bu vektör R_q dönme matrisinin dönme eksenidir. Böylece bu teoremin ispatı tamamlanmış olur.

TEOREM 4.2: A, E_1^3 uzayında bir Lorentziyen dönme matrisi olsun. O zaman A matrisi aşağıdaki özellikleri sağlar;

i) Eğer A matrisinin dönme ekseni timelike vektör ise, A matrisinin özdeğerleri

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \\ \lambda_3 &= e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \end{aligned}$$

şeklindedir.

ii) Eğer A matrisinin dönme ekseni spacelike vektör ise A matrisinin özdeğerleri

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= e^{\theta} = \cosh\theta + i\sinh\theta \\ \lambda_3 &= e^{-\theta} = \cosh\theta - i\sinh\theta \end{aligned}$$

şeklindedir (Özdemir ve Erdoğdu 2013).

İspat: A, E_1^3 uzayında bir Lorentziyen dönme matrisi olsun. A matrisinin timelike özvektörünü ve spacelike özvektörünü ayrı ayrı inceleyeceğiz.

i) $\overrightarrow{u_1}$ bir birim timelike vektör olsun. Bu durumda, $A\overrightarrow{u}_1 = \overrightarrow{u}_1$ olur. Böylece, $\overrightarrow{u}_1$ birim timelike vektörü Teorem 4.1 'den dolayı A matrisinin dönme eksenidir.

$\overrightarrow{u}_1$ vektörüne dik bir birim spacelike $\overrightarrow{u}_2$ vektörü alalım, o zaman $\overrightarrow{u}_3 = \overrightarrow{u}_1 \times_L \overrightarrow{u}_2$ vektörü birim spacelike vektör olur. Bu durumda $\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3\}$ bazı E_1^3 için sağ yönlü bir bazdır. E_1^3 uzayında standart ortogonal matris $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ ve B, $B\overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{u}_i$ eşitliğini sağlayan bir matris olsun. O zaman B matrisi pseudo ortoganal matristir çünkü bu matrisin sütunları E_1^3 uzayının ortonormal bazlarıdır. Şimdi $B^{-1}AB$ matrisini hesaplayalım. Biliyoruz ki iki pseudo ortogonal matrisin çarpımı yine pseudo ortogonal matristir ve pseudo ortogonal matrisin tersi de pseudo ortogonal matristir. Öyleyse, $B^{-1}AB$ matrisi pseudo ortogonal matristir ve

$$B^{-1}AB\overrightarrow{e}_1 = B^{-1}A\overrightarrow{u}_1 = B^{-1}\overrightarrow{u}_1 = \overrightarrow{e}_1$$

eşitliği sağlanır. Bu nedenle, $B^{-1}AB$ matrisinin ilk sütunu $\overrightarrow{e_1}$ ' dir. İlk sütun diğer iki sütunla ortogonal olmalıdır. Öyleyse, $B^{-1}AB$ matrisi

$$B^{-1}AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{bmatrix}$$

şeklinde olur. Ayrıca, $B^{-1}AB$ matrisinin ikinci ve üçüncü sütunları kendi aralarında ortogonaldir. Yani, $ac + bd = 0$ 'dır. Diğer taraftan $B^{-1}AB$ matrisinin determinantı 1' dir. Bundan dolayı

$$\det B^{-1}AB = \det A = ad - bd = 1$$

olur. Burada,

$$\begin{aligned} a &= d = \cos\theta \\ b &= \sin\theta \\ c &= -\sin\theta \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Yani, $B^{-1}AB$ matrisi $\overrightarrow{e_2}$ ve $\overrightarrow{e_3}$ spacelike vektörleri ile gerilen düzlemde bir Lorentziyen dönme matrisi olur. Öyleyse bu matris

$$B^{-1}AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Buradan görürüz ki $B^{-1}AB$ matrisi $\overrightarrow{e_2}$ ve $\overrightarrow{e_3}$ spacelike vektörleri tarafından gerilen düzlemde, $\overrightarrow{e_2}$ ekseni etrafında θ açısı kadar dönen bir Lorentziyen dönme matrisidir. Böylelikle $B^{-1}AB$ matrisinin özdeğerlerini

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \\ \lambda_3 &= e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \end{aligned}$$

olarak bulabiliriz. Ayrıca, bu özdeğerler A Lorentziyen dönme matrisinin de özdeğerleridir.

ii) $\overrightarrow{u}_2$ vektörü, $A\overrightarrow{u}_2 = \overrightarrow{u}_2$ eşitliğini sağlayan birim spacelike vektör olsun. Böylece, $\overrightarrow{u}_1$ birim spacelike vektörü Teorem 4.1 ' den dolayı A matrisinin dönme eksenidir. $\overrightarrow{u}_3$ vektörü $\overrightarrow{u}_2$ vekörüne dik olacak şekilde birim spacelike vektörü olsun. O zaman, $\overrightarrow{u}_1 = \overrightarrow{u}_2 \times_L \overrightarrow{u}_3$ vektörü birim timelike vektör olur. O zaman, $\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3\}$ bazı E_1^3 için sağ yönlü bir bazdır. E_1^3 uzayında standart ortogonal baz $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ olsun ve B matrisi $B\overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{u}_i$ eşitliğini sağlayan bir matris olsun. B matrisinin sütunları E_1^3 uzayında bir ortonormal baz olduğundan dolayı B matrisi pseudo ortogonal matristir. Öyleyse, $B^{-1}AB$ matrisi pseudo ortogonal matristir ve

$$B^{-1}AB\overrightarrow{e}_2 = B^{-1}A\overrightarrow{u}_2 = B^{-1}\overrightarrow{u}_2 = \overrightarrow{e}_2$$

eşitliği sağlanır. Bu nedenle, $B^{-1}AB$ matrisinin ikinci sütunu $\overrightarrow{e}_2$'dir. İkinci sütun diğer iki sütunla ortogonal olmalıdır. O zaman, $B^{-1}AB$ matrisinin formu

$$B^{-1}AB = \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & d \end{bmatrix}$$

şeklinde olacaktır. $B^{-1}AB$ matrisi pseudo ortogonal matris olduğu için,

$$-ac + bd = 0$$

ve

$$\det B^{-1}AB = ad - bd = 1$$

olur. Burada,

$$\begin{aligned} a &= d = \cosh\theta \\ b &= c = \sinh\theta \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Yani, $B^{-1}AB$ matrisi $\overrightarrow{e_1}$ timelike vektörü ve $\overrightarrow{e_3}$ spacelike vektörünün gerdiği düzlemin Lorentziyen dönme matrisidir. Öyleyse bu matris,

$$B^{-1}AB = \begin{bmatrix} \cosh\theta & 0 & \sinh\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh\theta & 0 & \cosh\theta \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Buradan görülür ki, $B^{-1}AB$ matrisi $\overrightarrow{e_1}$ timelike vektörü ve $\overrightarrow{e_3}$ spacelike vektörünün gerdiği düzlemde, $\overrightarrow{e_2}$ ekseni etrafında θ açısı kadar dönen

Lorentziyen dönme matrisidir. Böylelikle, $B^{-1}AB$ matrisinin özdeğerlerini

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1\\ \lambda_2 &= e^{\theta} = \cosh\theta + i\sinh\theta\\ \lambda_3 &= e^{-\theta} = \cosh\theta - i\sinh\theta\end{aligned}$$

olarak hesaplayabiliriz. Ayrıca, bu değerler A Lorentziyen dönme matrisinin de özdeğerleridir.

TEOREM 4.3: A, E_1^3 uzayında bir Lorentziyen dönme matrisi olsun. O zaman, A matrisinin karakteristik polinomu

$$x^3 - tr(A)x^2 + tr(A)x - 1$$

şeklindedir. Ayrıca,

i) A matrisinin özdeğerleri komplekstir ve A matrisinin dönme ekseni timelike vektördür ancak ve ancak $-1 \leq tr(A) \leq 3$,

ii) A matrisinin özdeğerleri reeldir ve A matrisinin dönme ekseni spacelike vektördür ancak ve ancak $-1 \geq tr(A)$ veya $tr(A) \geq 3$.

Burada $tr(A)$, A matrisinin izini ifade etmektedir (Özdemir ve Erdoğdu 2013).

İspat: Biliyoruz ki E_1^3 uzayında dönme matrisinin karakteristiği

$$P(x) = \det(xI - A) = x^3 - tr(A)x^2 + Cx - 1$$

şeklindedir. Burada, $C \in R$ dir. Karakteristik polinomunun köklerinden biri 1 olduğundan $P(1) = 0$ eşitliğini sağlamalıdır. Böylece, $C = tr(A)$ elde edilir. Yani A matrisinin karakteristik polinomu

$$x^3 - tr(A)x^2 + tr(A)x - 1$$

şeklindedir. Bu polinomu çarpanlara ayırırsak

$$P(x) = (x-1)\left(x^2 + (1 - tr(A))\,x + 1\right)$$

olur. Bu nedenle, A matrisinin diğer özdeğerleri

$$\left(x^2 + (1 - tr(A))\,x + 1\right) = 0$$

denkleminin kökleridir. Bu denklemin diskriminantı

$$\Delta = (1 - tr(A))^2 - 4 = (tr(A) + 1)\,(tr(A) - 3)$$

olarak hesaplanır. $\Delta < 0$ ancak ve ancak $-1 \leq tr(A) \leq 3$ olur. Yani, A matrisinin özdeğerleri komplekstir ve A matrisinin dönme ekseni timelike vektördür ancak ve ancak $-1 \leq tr(A) \leq 3$ dır. $\Delta \geq 0$ dır ancak ve ancak $-1 \geq tr(A)$ veya $tr(A) \geq 3$ dır. Böylece, A matrisinin özdeğerleri reeldir ve A matrisinin dönme ekseni spacelike vektördür ancak ve ancak $-1 \geq tr(A)$ veya $tr(A) \geq 3$ dır.

SONUÇ 4.1: A, E_1^3 uzayında bir Lorentziyen dönme matrisi olmak üzere,

i) Eğer A matrisinin dönme ekseni timelike vektör ise A matrisinin dönme açısı θ olur ve

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(tr(A) - 1\right)$$

şeklinde ifade edilir.

ii) Eğer A matrisinin dönme ekseni spacelike vektör ise A matrisinin dönme açısı hiperbolik θ olur ve

$$\cosh\theta = \frac{1}{2}\left(tr(A) - 1\right)$$

şeklinde ifade edilir.

İspat: Eğer dönme ekseni bir timelike vektör ise E_1^3 uzayındaki A matrisinin karakteristik polinomu

$$\begin{aligned} P_A &= (\lambda - 1)\left(\lambda - e^{i\theta}\right)\left(\lambda - e^{-i\theta}\right) \\ &= \lambda^3 - (1 + 2\cos\theta)\lambda^2 + (1 + 2\cos\theta)\lambda - 1 \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Benzer şekilde, E_1^3 uzayındaki A matrisinin, dönme ekseninin spacelike vektör olma durumu için de karakteristik polinomu

$$P_A = \lambda^3 - (1 + 2\cosh\theta)\lambda^2 + (1 + 2\cosh\theta)\lambda - 1$$

şeklinde bulabiliriz. Böylece teorem 4.2 kullanılarak dönme ekseninin causal karakterine göre aşağıdaki sonuçlara ulaşabiliriz;

- Dönme ekseni timelike vektör ise

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(tr(A) - 1\right)$$

olur.

- Dönme ekseni spacelike vektör ise

$$\cosh\theta = \frac{1}{2}\left(tr(A) - 1\right)$$

olur.

Örnek 4.1:

$$\begin{bmatrix} \frac{9}{4} & -2 & \frac{1}{4} \\ -1 & 1 & -1 \\ -\frac{7}{4} & 2 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

matrisi E_1^3 uzayında bir Lorentziyen dönme matrisi olsun. Bu matrisin özdeğerlerini bulalım.

İlk olarak bu matrisin izini inceleyelim. Matrisin izi

$$\frac{9}{4} + 1 + \frac{1}{4} = \frac{7}{2}$$

şeklinde bulunur. Matrisin izi $\frac{7}{2} > 3$ dir. Yani bu matrisin dönme ekseni spacelike vektördür. Dönme ekseni spacelike vektör olduğu için

$$\begin{aligned} 2\cosh\theta + 1 &= \frac{7}{2} \\ \cosh\theta &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada $\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$ olduğundan dolayı

$$\sinh\theta = \frac{3}{4}$$

bulunabilir. Böylece bu matrisin özdeğerleri

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= \cosh\theta + \sinh\theta = 2 \\ \lambda_3 &= \cosh\theta - \sinh\theta = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Örnek 4.2:

$$\begin{bmatrix} \frac{15}{2} & -\frac{5}{2} & -7 \\ \frac{11}{2} & -\frac{5}{2} & -5 \\ 5 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

matrisi E_1^3 uzayında bir Lorentziyen dönme matrisi olsun. Bu matrisin özdeğerlerini bulalım.

İlk olarak bu matrisin izini inceleyelim. Matrisin izi

$$\frac{15}{2}-\frac{5}{2}-5=0$$

şeklinde bulunur. Matrisin izi $0<3$ olduğundan dolayı matrisin döme ekseni timelike vektördür. Bundan dolayı

$$\begin{aligned} 2\cos\theta+1 &= 0 \\ \cos\theta &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ olduğundan dolayı

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

bulunabilir. Bulunan değerlere göre dönme açısı $\frac{2\pi}{3}$ olur. Yani özdeğerler,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= \cos\theta+i\sin\theta=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \lambda_3 &= \cos\theta-i\sin\theta=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Verilen örneklerden görülür ki 3-boyutlu Öklid uzayında bir dönme matrisinin 1 dışındaki özdeğerleri reel veya kompleks olabilir.

Teorem 4.4: $q=(q_1,q_2,q_3,q_4)$ kuaterniyonu bir birim timelike split kuaterniyon olsun. O zaman dönme matrisinin q tarafından üretilen özdeğerleri;

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= \left(|q_1|-\sqrt{q_1^2-1}\right)^2 \\ \lambda_3 &= \left(|q_1|+\sqrt{q_1^2-1}\right)^2 \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Yani, q 'nun özdeğerleri sadece ilk bileşene bağlıdır (Özdemir ve Erdoğdu 2013).

İspat: $q=(q_1,q_2,q_3,q_4)$ birim timelike split kuaterniyonu tarafından üretilen bir dönme matrisi R olsun. Denklem 3.2 'yi dikkate alarak R matrisinin özdeğerlerini;

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= q_1^2+q_2^2-q_3^2-q_4^2 \\
\lambda_2 &= q_1^2-q_2^2+q_3^2+q_4^2-2\sqrt{q_1^2q_3^2-q_1^2q_2^2+q_1^2q_4^2} \\
\lambda_3 &= q_1^2-q_2^2+q_3^2+q_4^2+2\sqrt{q_1^2q_3^2-q_1^2q_2^2+q_1^2q_4^2}
\end{aligned}$$

şeklinde buluruz. q birim timelike split kuaterniyon olduğundan

$$q_1^2+q_2^2-q_3^2-q_4^2=1$$

dir. Bu eşitliği kullanarak özdeğerleri,

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 1 \\
\lambda_2 &= \left(|q_1|-\sqrt{q_1^2-1}\right)^2 \\
\lambda_3 &= \left(|q_1|+\sqrt{q_1^2-1}\right)^2
\end{aligned}$$

olarak hesaplarız.

Sonuç 4.2 : Denklem 3.2 deki R matrisinin izini veren eşitlik

$$4q_1^2-1$$

şeklinde ifade edilir. Diğer taraftan, R matrisinin karakteristik polinomu, Teorem 4.3 kullanılarak

$$P(\lambda)=\lambda^3-\left(4q_1^2-1\right)\lambda^2+\left(4q_1^2-1\right)\lambda-1$$

şeklinde bulunabilir.

- Dönme ekseni timelike vektördür ancak ve ancak

$$\Delta=\left(4q_1^2-2\right)^2-4=16q_1^2\left(q_1^2-1\right)<0$$

- Dönme ekseni spacelike vektördür ancak ve ancak

$$\Delta=\left(4q_1^2-2\right)^2-4=16q_1^2\left(q_1^2-1\right)\geq 0$$

Yani, dönme ekseni timelike vektördür ancak ve ancak $q_1\in(-1,0)\cup(0,1)$'dir ve aksi takdirde dönme ekseni spacelike vektördür. Dolayısıyla R dönme matrisinin, dönme ekseninin causal karakteri, R matrisine karşılık gelen birim timelike split quaterniyonun sadece birinci bileşenine bağlıdır. Bu durumda $q_1=0$ olduğunda R matrisinin özdeğerleri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 1 \\
\lambda_2 &= \lambda_3=-1
\end{aligned}$$

olur ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler ise sırasıyla

$$\overrightarrow{u_1}\,(0,q_2,q_3,q_4)=\begin{bmatrix} q_2\\ q_3\\ q_4\end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{c_2}\,(0,q_2,q_3,q_4)=\begin{bmatrix} q_3\\ q_2\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{c_3}\,(0,q_2,q_3,q_4)=\begin{bmatrix} q_4\\ 0\\ q_2\end{bmatrix}$$

olur. Burada,

$$\langle\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_1}\rangle_L=-q_2^2+q_3^2+q_4^2=-1<0$$

olduğundan dönme ekseni bir timelike vektördür. Böylece, dönme ekseni timelike vektördür ancak ve ancak $q_1\in(-1,1)$ dir ve dönme ekseni spacelike vektördür ancak ve ancak $q_1\in R-\{(-1,1)\}$ dir.

Teorem 4.5: Denklem 3.2 deki R dönme matrisi için, aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) Eğer $q_1\neq 0$ ise o zaman dönme ekseni dışındaki R matrisinin özvektörleri null vektörleridir.

ii) Eğer $q_1=0$ ise o zaman dönme ekseni dışındaki R matrisinin özvektörleri spacelike vektörleridir (Özdemir ve Erdoğdu 2013).

İspat: 3.2 denklemini sağlayan bir dönme matrisi R olsun.

i) $q_1\neq 0$ olduğunu kabul edelim. R matrisinin özvektörlerini gerekli hesaplamalar sonucunda

$e^{-i\theta}$ (veya $e^{-\theta}$) özdeğeri için özvektör,

$$\overrightarrow{c_2}\,(q_1,q_2,q_3,q_4)=\begin{bmatrix} q_1^2q_2q_4+q_3q_1\left(q_1^2-1\right)-\left(q_1q_3+q_2q_4\right)\sqrt{q_1^4-q_1^2}\\ q_1^2q_3q_4+q_2q_1\left(q_1^2-1\right)-\left(q_1q_2+q_3q_4\right)\sqrt{q_1^4-q_1^2}\\ \left(q_1^2-\sqrt{q_1^4-q_1^2}\right)\left(q_2^2-q_3^2\right)\end{bmatrix}\tag{4.1}$$

olarak elde ederiz. Benzer şekilde

$e^{i\theta}$ (veya e^{θ}) özdeğeri için özvektör,

$$\overrightarrow{c_3}\,(q_1,q_2,q_3,q_4)=\begin{bmatrix} -q_1^2q_2q_4-q_3q_1\left(q_1^2-1\right)-\left(q_1q_3+q_2q_4\right)\sqrt{q_1^4-q_1^2}\\ -q_1^2q_3q_4-q_2q_1\left(q_1^2-1\right)-\left(q_1q_2+q_3q_4\right)\sqrt{q_1^4-q_1^2}\\ \left(-q_1^2-\sqrt{q_1^4-q_1^2}\right)\left(q_2^2-q_3^2\right)\end{bmatrix}\tag{4.2}$$

olarak hesaplanır. Böylelikle, $q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2 = 1$ eşitliğini kullanarak $\overrightarrow{c_2}$ ve $\overrightarrow{c_3}$ vektörlerinin null vektör olduğunu ispatlamış olduk.

ii) $q_1 = 0$ olduğunu kabul edelim. Dönme ekseni dışındaki R matrisinin özvektörleri

$$\overrightarrow{c_2}\left(0, q_2, q_3, q_4\right) = \begin{bmatrix} q_3 \\ q_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{c_3}\left(q_1, q_2, q_3, q_4\right) = \begin{bmatrix} q_4 \\ 0 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

şeklindeydi. Böylece,

$$\langle \overrightarrow{c_2}, \overrightarrow{c_2} \rangle_L = q_2^2 - q_3^2 = 1 + q_4^2 > 0$$

ve

$$\langle \overrightarrow{c_3}, \overrightarrow{c_3} \rangle_L = q_2^2 - q_4^2 = 1 + q_3^2 > 0$$

olduğundan, dönme ekseni dışındaki R matrisinin özvektörleri spacelike vektör olur.

Örnek 4.3:

$$R\left(3, 0, 2, 2\right) = \begin{bmatrix} 17 & 12 & -12 \\ 12 & 9 & -8 \\ -12 & -8 & 9 \end{bmatrix}$$

matrisinin özvektörlerini bulalım.

$17 - 12\sqrt{2}$ ve $12\sqrt{2} + 17$ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörler sırasıyla

$$\overrightarrow{c_2}\left(3, 0, 2, 2\right) = \begin{bmatrix} -36\sqrt{2} + 48 \\ -24\sqrt{2} + 36 \\ 24\sqrt{2} - 36 \end{bmatrix}$$

ve

$$\overrightarrow{c_3}\left(3, 0, 2, 2\right) = \begin{bmatrix} -36\sqrt{2} - 48 \\ -24\sqrt{2} - 36 \\ 24\sqrt{2} + 36 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. $\overrightarrow{c_2}$ ve $\overrightarrow{c_3}$ vektörlerini eğer diğer üçüncü bileşen ile bölersek

$$\overrightarrow{v_2} = \left(\sqrt{2}, -1, 1\right)$$

ve

$$\overrightarrow{v_3} = \left(-\sqrt{2}, -1, 1\right)$$

vektörlerini buluruz. Burada dikkat edersek $\overrightarrow{v_2}$ ve $\overrightarrow{v_3}$ vektörleri null vektörlerdir.

Sonuç 4.3 : $q_1 \neq 0$ durumu için dönme ekseni dışındaki özvektörler null vektörler olduğundan, dönme matrisinin özvektörleri üç boyutlu Minkowski 3-uzayı için bir baz formu değildir. Fakat bu özvektörleri kullanarak E_1^3 uzayı için bir ortogonal baz bulabiliriz. Diğer taraftan, $q_1 = 0$ durumunda dönme ekseni dışındaki özvektörler spacelike vektörlerdir. Yani, $q_1 = 0$ durumu içindeki özvektörleri kullanarak E_1^3 uzayı için bir ortogonal matris bulabiliriz.

Teorem 4.6: Bir R Lorentziyen dönme matrisinin özvektörleri $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{c_2}$ ve $\overrightarrow{c_3}$ olsun ve $\overrightarrow{u_1}$ dönme ekseni bir timelike vektör olsun. O halde aşağıdaki koşullar sağlanır;

i) Eğer $q_1 \neq 0$ ise,

$$\overrightarrow{u_2} = \frac{i}{2}\left(\overrightarrow{c_2} + \overrightarrow{c_3}\right)$$

ve

$$\overrightarrow{u_3} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{c_2} - \overrightarrow{c_3}\right)$$

reel vektörleri spacelike vektördür. Ayrıca, $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ ve $\overrightarrow{u_3}$ vektörleri aralarında ortogonaldir. Yani, bu vektörler E_1^3 uzayı için bir ortogonal bazdır.

ii) Eğer $q_1 = 0$ ise,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u_2} &= \overrightarrow{c_2} \\ \overrightarrow{u_3} &= \overrightarrow{c_1} \times_L \overrightarrow{c_2} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v_2} &= \overrightarrow{c_3} \\ \overrightarrow{v_3} &= \overrightarrow{c_1} \wedge_L \overrightarrow{c_3} \end{aligned}$$

reel vektörleri spacelike vektörlerdir. $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ ve $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ kümeleri E_1^3 uzayı için iki farklı ortogonal bazdır (Özdemir ve Erdoğdu 2013).

İspat: Kabul edelim ki, bir R Lorentziyen dönme matrisinin özvektörleri $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{c_2}$ ve $\overrightarrow{c_3}$ olsun. $\overrightarrow{u_1}$ dönme ekseni timelike vektör olsun.

i) $q_1 \neq 0$ olsun. 4.1 ve 4.2 eşitliklerine göre

$$\overrightarrow{u_2} = \begin{bmatrix} -i\left(q_1 q_3 + q_2 q_4\right)\sqrt{-q_1^4 + q_1^2} \\ -i\left(q_1 q_2 + q_3 q_4\right)\sqrt{-q_1^4 + q_1^2} \\ i\left(q_3^2 - q_2^2\right)\sqrt{q_1^4 - q_1^2} \end{bmatrix}$$

ve

$$\overrightarrow{u_3}=\begin{bmatrix} q_1^2q_2q_4+q_1q_3\left(q_1^2-1\right) \\ q_1^2q_3q_4+q_1q_2\left(q_1^2-1\right) \\ q_1^2\left(q_2^2-q_3^2\right) \end{bmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz. Buradaki $\langle \overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}\rangle_L = 0$'dır. Diğer taraftan dönme ekseni timelike ise o zaman $q_1\in(-1,0)\cup(0,1)$ olur. Bu nedenle,

$$\langle \overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_2}\rangle_L = q_1^2\left(q_1^2-1-q_4^2\right)\left(q_1^2-1\right)$$

eşitliğinden dolayı $\langle \overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_2}\rangle_L > 0$ şeklinde alırız. Bu da $\overrightarrow{u_2}$ vektörünün spacelike vektör olduğu anlamına gelir. Benzer şekilde,

$$\langle \overrightarrow{u_3},\overrightarrow{u_3}\rangle_L = q_1^2\left(q_1^2-1-q_4^2\right)\left(q_1^2-1\right)$$

eşitliğini buluruz. Bu da $\overrightarrow{u_3}$ vektörünün spacelike vektör olduğu anlamına gelir.

ii) Sonuç 4.1 ve Teorem 4.5 ile doğrudan sonuç görülür.

Örnek 4.4: $\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},0\right)$ ile oluşturulan dönme matrisini bulalım. R dönme matrisi

$$R\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},0\right)=\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. $q_1=\frac{1}{2}$ olduğu için, dönme ekseni $\overrightarrow{u_1}=\left(1,\frac{1}{2},0\right)$ timelike vektördür. Bu matrisin diğer özvektörleri

$$\overrightarrow{c_2}\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},0\right)=\begin{bmatrix} -\frac{3}{16}-i\frac{\sqrt{3}}{16} \\ -\frac{3}{8}-i\frac{\sqrt{3}}{8} \\ \frac{3}{16}-i\frac{3\sqrt{3}}{16} \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{c_3}\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},0\right)=\begin{bmatrix} \frac{3}{16}-i\frac{\sqrt{3}}{16} \\ \frac{3}{8}-i\frac{\sqrt{3}}{8} \\ -\frac{3}{16}-i\frac{3\sqrt{3}}{16} \end{bmatrix}$$

olur. Bu vektörler null vektörlerdir. Bu nedenle

$$\overrightarrow{u_2} = \frac{i}{2}\left(\overrightarrow{c_2} + \overrightarrow{c_3}\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{16} \\ \\ \dfrac{\sqrt{3}}{8} \\ \\ \dfrac{3\sqrt{3}}{16} \end{bmatrix}$$

ve

$$\overrightarrow{u_3} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{c_2} - \overrightarrow{c_3}\right) = \begin{bmatrix} -\dfrac{3}{16} \\ \\ -\dfrac{3}{8} \\ \\ \dfrac{3}{16} \end{bmatrix}$$

spacelike vektörlerini elde ederiz. Buradan, Minkowski 3-uzayı için

$$\left\{ \left(1, \frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{16}, \frac{\sqrt{3}}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{16}\right), \left(-\frac{3}{16}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{16}\right) \right\}$$

ortogonal bazını oluştururuz.

Teorem 4.7: Bir A Lorentziyen dönme matrisinin özvektörleri $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{c_2}$ ve $\overrightarrow{c_3}$ ve $\overrightarrow{u_2}$ dönme ekseni bir spacelike vektör olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar sağlanır.

i) Eğer $q_1^4 - q_1^2 > 1$ ise, o zaman $\overrightarrow{u_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{c_2} + \overrightarrow{c_3}\right)$ bir timelike vektördür ve $\overrightarrow{u_3} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{c_2} - \overrightarrow{c_3}\right)$ bir spacelike vektördür.

ii) Eğer $q_1^4 - q_1^2 < 1$ ise, o zaman $\overrightarrow{u_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{c_2} + \overrightarrow{c_3}\right)$ bir spacelike vektördür ve $\overrightarrow{u_3} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{c_2} - \overrightarrow{c_3}\right)$ bir timelike vektördür.

$\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ ve $\overrightarrow{u_3}$ vektörleri her bir durum için birbirine ortogonaldir. Yani, bu vektörler E_1^3 uzayı için bir ortogonal bazdır (Özdemir ve Erdoğdu 2013).

İspat: 4.1 ve 4.2 bağıntılarına göre $\overrightarrow{u_1}$ ve $\overrightarrow{u_3}$ vektörlerini

$$\overrightarrow{u_1} = \begin{bmatrix} -(q_1q_3 + q_2q_4)\sqrt{q_1^2\left(q_1^2 - 1\right)} \\ -\left(q_1q_2 + q_3q_4\right)\sqrt{q_1^2\left(q_1^2 - 1\right)} \\ -\left(q_2^2 - q_3^2\right)\sqrt{q_1^2\left(q_1^2 - 1\right)} \end{bmatrix}$$

ve

$$\overrightarrow{u_3} = \begin{bmatrix} q_1^2q_2q_4 + q_1q_3\left(q_1^2 - 1\right) \\ q_1^2q_3q_4 + q_1q_2\left(q_1^2 - 1\right) \\ q_1^2\left(q_2^2 - q_3^2\right) \end{bmatrix}$$

şeklinde alabiliriz. Burada $\langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_3} \rangle_L = 0$ 'dır ve

$$\langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1} \rangle_L = -q_1^2 \left(q_1^2 - 1 - q_4^2 \right) \left(q_1^2 - 1 \right)$$

$$\langle \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_3} \rangle_L = q_1^2 \left(q_1^2 - 1 - q_4^2 \right) \left(q_1^2 - 1 \right)$$

yazılabilir. $q_1 \in R - \{[-1,1]\}$ olduğundan aşağıdaki durumları söyleyebiliriz;

i) Eğer $q_1^4 - q_1^2 > 1$ ise, o zaman $\langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1} \rangle_L < 0$ ve $\langle \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_3} \rangle_L > 0$ olur. Böylece, $\overrightarrow{u_1}$ bir timelike vektördür ve $\overrightarrow{u_3}$ bir spacelike vektördür.

ii) Eğer $q_1^4 - q_1^2 < 1$ ise, o zaman $\langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1} \rangle_L > 0$ ve $\langle \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_3} \rangle_L < 0$ olur. Böylece, $\overrightarrow{u_1}$ bir spacelike vektör ve $\overrightarrow{u_3}$ bir timelike vektördür.

Sonuç olarak, $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ kümesi E_1^3 uzayı için bir ortogonal bazdır.

Örnek 4.5:

$$R(5,1,4,3) = \begin{bmatrix} 51 & 22 & -46 \\ 38 & 17 & -34 \\ -34 & -14 & 31 \end{bmatrix}$$

Lorentziyen dönme matrisinin özvektörlerini kullanarak E_1^3 uzayı için ortogonal baz bulalım.

$q_1 = 5 \in R - \{[-1,1]\}$ olduğundan, dönme ekseni

$$\overrightarrow{u_2}(5,1,4,3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

spacelike vektördür. Teorem 4.7'nin ispatını kullanarak diğer vektörleri de

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u_1}(5,1,4,3) &= \begin{bmatrix} -190\sqrt{3} \\ -170\sqrt{3} \\ 80\sqrt{6} \end{bmatrix} \\ \overrightarrow{u_3} &= \begin{bmatrix} 460 \\ 420 \\ -200 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde bulabiliriz. Buradan da görebiliriz ki bu üç vektör birbirine ortogonaldir.

$$\langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1} \rangle_L = -4800 < 0$$

ve

$$\langle \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_3} \rangle_L = 4800 > 0$$

olduğundan $\overrightarrow{u_1}$ bir timelike vektördür ve $\overrightarrow{u_3}$ bir spacelike vektördür. Bu, Teorem 4.7'nin bir sonucudur, çünkü

$$q_1^2 - q_4^2 = 25 - 9 > 1$$

şeklindedir. $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ kümesi E_1^3 uzayı için bir ortogonal bazdır.

Örnek 4.6: $q = (5,5,0,7)$ birim timelike split kuaterniyonu ile elde edilen Lorentziyen dönme matrisinin özvektörlerini kullanarak E_1^3 uzayı için bir ortogonal baz bulalım.

$q_1 = 5 \in R - \{[-1,1]\}$ olduğundan

$$\overrightarrow{u_2}(5,5,0,7) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

dönme ekseni spacelike vektördür. Teorem 4.7 'nin ispatınını kullanarak

$$\overrightarrow{u_1}(5,5,0,7) = \begin{bmatrix} -350\sqrt{6} \\ -250\sqrt{6} \\ -250\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

ve

$$\overrightarrow{u_3}(5,5,0,7) = \begin{bmatrix} 875 \\ 600 \\ 625 \end{bmatrix}$$

şeklinde buluruz. Buradan da görebiliriz ki bu üç vektör birbirine ortogonaldir.

$$\langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1} \rangle_L = 15000 > 0$$

ve

$$\langle \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_3} \rangle_L = -15000 < 0$$

olduğundan $\overrightarrow{u_1}$ bir spacelike vektör ve $\overrightarrow{u_3}$ bir timelike vektördür. Bu, ayrıca Teorem 4.7 nin bir sonucudur, çünkü

$$q_1^2 - q_4^2 = 25 - 49 < 1$$

şeklindedir ve $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ kümesi E_1^3 uzayı için bir ortogonal bazdır.

5 KUATERNİYONLAR İÇİN ASLİ EĞRİLİKLER VE ASLİ DOĞRULTMANLAR

Bu bölümde split kuaterniyonlar için şekil operatörünü tanımladık ve split kuaterniyonların asli eğriliklerini ve asli doğrultmanlarını bulduk.

5.1 KUATERNİYONLAR İÇİN ASLİ EĞRİLİKLER

$q = (q_1, q_2, q_3, q_4) \in \mathbb{H}$ kuaterniyonu bir birim kuaterniyon olsun. q birim kuaterniyon olduğundan dolayı

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca, asli eğrilikleri hesaplayabilmek için aşağıda vereceğimiz bir f lineer fonksiyonunu tanımlayabiliriz.

$$(q_1, q_2, q_3, q_4) \to f\,(q_1, q_2, q_3, q_4) = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1$$

Bu fonksiyonun türevini alarak, grad f normal vektörünü hesaplamış oluruz.

$$\nabla f = (2q_1, 2q_2, 2q_3, 2q_4)$$

Bu vektörün normu ise,

$$\|\nabla f\| = \sqrt{(2q_1)^2 + (2q_2)^2 + (2q_3)^2 + (2q_4)^2} = 2\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}$$

şeklindedir. q kuaterniyonu birim kuaterniyon olduğundan dolayı

$$\|\nabla f\| = 2$$

olmalıdır. Buna göre, birim normal vektörümüz,

$$N = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{2\,(q_1, q_2, q_3, q_4)}{2} = (q_1, q_2, q_3, q_4)$$

şeklinde hesaplanır. Elde ettiğimiz kuaterniyonun normaline dik olacak şekilde, birbirlerine ortogonal iki kuaterniyon X ve Y

$$X = (q_2, q_1, 0, 0) \tag{5.1}$$

$$Y = (0, 0, -q_4, q_3) \tag{5.2}$$

olarak kabul edilebilir. Buradan, N birim normalin X 'e göre kovaryant türevi,

$$D_X N = (q_2, q_1, 0, 0) \tag{5.3}$$

ve Y 'ye göre kovaryant türevi ise

$$D_Y N = (0, 0, -q_4, q_3) \tag{5.4}$$

olarak hesaplanır. O zaman, şekil operatörümüzü yukarıdaki eşitliklere göre oluşturabiliriz öyle ki şekil operatörü,

$$S = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

alınırsa buradaki a, b, c ve d sayıları

$$aX + bY = D_X N \tag{5.5}$$

$$cX + dY = D_Y N \tag{5.6}$$

eşitliklerinde yerine yazılarak bulunur. Yani $\{X, Y\}$ ortogonal bazının bir lineer birleşimi olarak $D_X N$ ve $D_Y N$ vektör alanları hesaplanarak bulunur. Böylece (5.1) ve (5.2) eşitliklerini (5.5) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} a\,(q_2, q_1, 0, 0) + b\,(0, 0, -q_4, q_3) &= (q_2, q_1, 0, 0) \\ (aq_2 + 0, aq_1 + 0, 0 - bq_4, 0 + bq_3) &= (q_2, q_1, 0, 0) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} aq_2 + b.0 &= q_2 \\ aq_1 + b.0 &= q_1 \\ a.0 - bq_4 &= 0 \\ a.0 + bq_3 &= 0 \end{aligned}$$

denklemleri bulunur öyle ki bu denklemler çözüldüğünde açıkça görülür ki,

$$a = 1$$

$$b = 0$$

olur. Benzer şekilde (5.3) ve (5.4) eşitliklerini (5.6)denkleminde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} c\,(q_2, q_1, 0, 0) + d\,(0, 0, -q_4, q_3) &= (0, 0, -q_4, q_3) \\ (cq_2 + d.0, cq_1 + d.0, c.0 - dq_4, c.0 + dq_3) &= (0, 0, -q_4, q_3) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} cq_2 + d.0 &= 0 \\ cq_1 + d.0 &= 0 \\ c.0 - dq_4 &= -q_4 \\ c.0 + dq_3 &= q_3 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözüldüğünde açıkça görülür ki

$$c = 0$$

$$d = 1$$

şeklinde bulunur. Böylelikle bulduğumuz a, b, c ve d sayılarını S matrisinde yerine yazarsak, kuaterniyonlar ile oluşturulan şekil operatörün matrisini elde ederiz. Bu matris S_q şeklinde ifade edilir. O zaman, S_q matrisi

$$S_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi, S_q şekil operatörünün matrisini kullanarak asli eğrilik doğrultularını bulalım. Bunun için önce S_q matrisinin karakteristik değerlerini bulmalıyız. Karakteristik değerlerleri bulabilmek için

$$\det\left(S_q - \lambda I\right) = 0$$

karakteristik polinomunun köklerini hesaplamalıyız. O zaman gerekli hesaplamalar ile,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} &= 0 \\ (1-\lambda)\,.\,(1-\lambda) &= 0 \\ \lambda &= 1 \end{aligned}$$

λ karakteristik değeri bulunur. S_q matrisinin karakteristik değerlerine karşılık gelen karakteristik vektörler asli doğrultular olduğuna göre, $\lambda = 1$ karakteristik değerine karşılık gelen asli doğrultu;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} x &= x \\ y &= y \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bunun anlamı, S_q matrisinin karakteristik değerine karşılık gelen asli doğrultuları $\forall x, y \in R$ için sağlanır. Yani, $\lambda = 1$ karakteristik değerine karşılık gelen asli doğrultu

$$\begin{aligned} Z &= x.X + y.Y \\ &= x\,(q_2, q_1, 0, 0) + y\,(0, 0, -q_4, q_3) \\ &= (xq_2, xq_1, -yq_4, yq_3)\ ,\ x, y \in R \end{aligned}$$

şeklindeki vektör olur. Burada, lineer bağımlılıktan dolayı, özel olarak
$x = y = 1$ olarak seçilirse asli doğrultu

$$Z = (q_2, q_1, -q_4, q_3)$$

vektörü olur.

5.2 SAF KUATERNİYONLAR İÇİN ASLİ EĞRİLİKLER

Bu bölümde, saf kuaterniyonlar için şekil operatörünü oluşturalım ve asli eğrilikleri bulalım.

$q = (q_1, q_2, q_3, q_4) \in \mathbb{H}$ kuaterniyonu birim saf kuaterniyon olsun. q kuaterniyonu saf kuaterniyon olduğu için $q_1 = 0$ dır. q birim saf kuaterniyonun normunu ise

$$N_q = \sqrt{q_2^2 + q_3^2 + q_4^2} = 1$$

şeklinde tanımlamıştık. Bölüm 2' de saf kuaterniyonların Minkowski 3-uzayı ile özdeş olduğunu açıklamıştık. Bu izomorfizm yardımıyla q saf kuaterniyonunu parametrize yazabiliriz. O zaman

$$q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1$$

eşitliğini parametrik denklem şeklinde ifade edelim. Kabul edelim ki, u ve v reel parametreler olmak üzere,

$$\begin{aligned} q_2 &= u \\ q_3 &= v \end{aligned}$$

olsun. q_2 ve q_3 değerlerini N_q' de yerine yazarsak

$$q_4 = \sqrt{1 - u^2 - v^2}$$

bulunur. O zaman saf birim kuaterniyonun parametrizasyonu

$$\phi : E^2 \to E^3$$

$$(u,v) \to \phi(u,v) = \left(u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}\right) \tag{5.7}$$

şeklindedir. O halde yukarıdaki parametrelendirmeden yararlanarak ϕ fonksiyonunun kısmi türevlerini alabiliriz. ϕ fonksiyonunun u' ya göre türevi

$$\phi_u = \left(1, 0, \frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right)$$

ve ϕ fonksiyonunun v' ye göre türevi

$$\phi_v = \left(0, 1, \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right)$$

şeklinde olur. Birim normal vektörü

$$N = \frac{\phi_u \wedge \phi_v}{\|\phi_u \wedge \phi_v\|}$$

olarak hesaplayabiliriz (Hacısalihoğlu 1994). O halde,

$$\phi_u \wedge \phi_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \dfrac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \\ 0 & 1 & \dfrac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \end{vmatrix} = \left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, 1\right)$$

ve

$$\|\phi_u \wedge \phi_v\| = \frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}$$

şeklindedir. Buradan bulunan ifadeleri birim normal vektöründe yerine yazarsak

$$N = \frac{\phi_u \wedge \phi_v}{\|\phi_u \wedge \phi_v\|} = \frac{\left(\dfrac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, \dfrac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, 1\right)}{\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}} = \left(u, -v, \sqrt{1-u^2-v^2}\right) \tag{5.8}$$

vektörünü elde ederiz. Şekil operatörünü elde etmek için Bölüm 5.1 deki işlemler yapılabilir. Buna göre $\{\phi_u, \phi_v\}$ bazı için,

$$S(\phi_u) = a\phi_u + b\phi_v \tag{5.9}$$

$$S(\phi_v) = c\phi_u + d\phi_v \tag{5.10}$$

eşitliklerinden yararlanarak S şekil operatörünün matris temsili

$$S = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

olur. O zaman, parametrize ettiğimiz kuaterniyon için (5.8) eşitliğinden $S(\phi_u)$ ve $S(\phi_v)$ yi hesaplayalım. N birim normalin u' ya göre türevi kullanılarak

$$S(\phi_u) = \frac{dN}{du} = \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right)$$

ve N birim normalin v' ye göre türevi

$$S(\phi_v) = \frac{dN}{dv} = \left(0, -1, \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right)$$

hesaplanır. Buradan, ϕ_u ve ϕ_v vektörlerini (5.9) ve (5.10) eşitliklerinde yerine yazarsak

$$S(\phi_u) = \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right) = a\left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right) + b\left(0, -1, \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right)$$

$$S(\phi_v) = \left(0, -1, \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right) = c\left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right) + d\left(0, -1, \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerden,

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 0 \\ c &= 0 \\ d &= -1 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan q saf kuaterniyonu için şekil opeatörünün matrisi,

$$S_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

şeklinde olur. Şimdi S_q matrisinin karakteristik değerlerini bulalım. Bunun için, karakteristik polinomun köklerini hesaplamalıyız.

$$\begin{aligned} \det(S_q - \lambda I) &= 0 \\ \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} &= 0 \\ (1-\lambda)(-1-\lambda) &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan karakteristik değerler;

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= -1 \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu karakteristik değerlere karşılık gelen asli eğrilikler ise,

- $\lambda_1 = 1$ değeri için

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1. \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= x \\ -y &= y \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu demektir ki $\forall x \in R$, fakat ancak $y = 0$ için asli doğrultular hesaplanır. Yani, $\lambda_1 = 1$ değerine karşılık gelen asli doğrultu

$$\begin{aligned} Z_1 &= x\phi_u + y\phi_v \\ &= x.\left(1, 0, \frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right) + 0 \ , \ x \in R \end{aligned}$$

olur. Burada, u ve v değerleri yerine yazılırsa asli doğrultu

$$Z_1 = x.\left(1, 0, \frac{-q_2}{q_4}\right)$$

vektörüdür.

- $\lambda_2 = -1$ değeri için

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -1. \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= -x \\ y &= y \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu ise $\forall y \in R$ için fakat, ancak $x = 0$ için asli doğrultular bulunabilir demektir. O halde $\lambda_2 = -1$ değerine karşılık gelen asli doğrultu

$$\begin{aligned} Z_2 &= x\phi_u + y\phi_v \\ &= 0 + y.\left(0, 1, \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right) \ , \ y \in R \end{aligned}$$

olur. Burada, u ve v değerleri yerine yazılırsa asli doğrultu

$$Z_2 = y.\left(0, 1, \frac{-q_3}{q_4}\right)$$

şeklindeki vektör olur. Lineer bağımlılıktan dolayı, özel olarak $x = y = 1$ olarak seçilirse asli doğrultular

$$\begin{aligned} Z_1 &= \left(1, 0, \frac{-q_2}{q_4}\right) \\ Z_2 &= \left(0, 1, \frac{-q_3}{q_4}\right) \end{aligned}$$

vektörleri olur.

Örnek 5.1: $q = \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ birim kuaterniyonunun asli eğriliklerini ve asli doğrultmanlarını bulalım.

$q_1 = 0$ olduğu için kuaterniyon, saf birim kuaterniyondur. Dolayısıyla asli eğrilikler ± 1 değerleridir. Bu değerlere karşılık gelen asli doğrultular ise sırasıyla aşağıdaki gibi olur;

$$Z_1 = \left(1, 0, -\frac{q_2}{q_4}\right) = (1, 0, 1)$$
$$Z_2 = \left(0, 1, -\frac{q_3}{q_4}\right) = (0, 1, 1)$$

5.3 SPLİT KUATERNİYONLAR İÇİN ASLİ EĞRİLİKLER

Bu bölümde split kuaterniyonlar için şekil operatörünü tanımladık ve asli eğrilikleri ile asli doğrultuları hesapladık.

$q = (q_1, q_2, q_3, q_4) \in \widehat{\mathbb{H}}$ kuaterniyonu birim split kuaterniyon olsun. Buna göre,

$$N_q = q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2 = 1$$

olmalıdır. Ayrıca, split kuaterniyonlar için asli eğrilikleri hesaplayabilmek üzere aşağıdaki f fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyon $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ split kuaterniyonunu kullanarak

$$(q_1, q_2, q_3, q_4) \to f(q_1, q_2, q_3, q_4) = q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2 = 1$$

şeklinde tanımlanırsa türevi de

$$\nabla f = (2q_1, 2q_2, -2q_3, -2q_4) = 2(q_1, q_2, -q_3, -q_4)$$

olur. ∇f ' in normu

$$\|\nabla f\| = \sqrt{(2q_1)^2 + (2q_2)^2 + (-2q_3)^2 + (-2q_4)^2} = 2\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}$$

hesaplanabilir. Buna göre birim normal vektörü,

$$N = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}} (q_1, q_2, -q_3, -q_4)$$

şeklinde yazabiliriz. Birim normale ortogonal olacak şekilde bir ortogonal baz tanımlamalıyız. Bu bazı,

$$X = (q_2, q_1, 0, 0) \tag{5.11}$$

$$Y = (0, 0, -q_4, q_3) \tag{5.12}$$

olmak üzere $\phi = \{X, Y\}$ olarak seçelim. Buna göre X ve Y vektörlerine göre N birim normalinin kovaryant türevleri aşağıdaki gibi hesaplanır;

$$D_X N = \left(\frac{q_1^2 q_2 + q_3^2 q_2 + q_4^2 q_2 + q_2^3}{(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)^{3/2}}, -\frac{q_2^2 q_1 + q_3^2 q_1 + q_4^2 q_1 + q_1^3}{(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)^{3/2}}, 0, 0 \right)$$

gerekli düzenleme ile

$$\begin{aligned} D_X N &= \left(\frac{q_2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}}, \frac{q_1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}}, 0, 0 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}} (q_2, q_1, 0, 0) \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} D_Y N &= \left(0, 0, \frac{q_4}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}}, \frac{-q_3}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}} \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}} (0, 0, -q_4, q_3) \end{aligned}$$

hesaplanır. Bölüm 5.1 ve 5.2 de yaptığımız işlemlere benzer olarak ϕ bazına göre $D_X N$ ve $D_Y N$ vektörlerini ifade ederek S şekil operatörünün matris temsilini elde edebiliriz. Bu bölümde de gerekli işlemler yapıldığında,

$$S_q = \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisini elde ederiz. Asli eğrilikler için bu matris ile oluşturduğumuz karakteristik polinomun köklerini hesaplamalıyız. Böylece,

$$\begin{aligned}\det\left(S_q-\lambda I_2\right) &= 0\\ &= \det\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2}}-\lambda & 0\\ 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2}}-\lambda\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2}}-\lambda\right).\left(-\frac{1}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2}}-\lambda\right)=0$$

bulunur.Buradan karakteristik değerler,

$$\lambda_1=\frac{1}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2}}$$

$$\lambda_2=-\frac{1}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2}}$$

olur.

- $\lambda_1=\dfrac{1}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2}}$ asli eğriliğine karşılık gelen asli doğrultu:

$$\frac{1}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2}}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2}}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

eşitliğinin çözümünden

$$\begin{aligned}x &= x\\ y &= -y\end{aligned}$$

olmalıdır. $x=x$ eşitliği $\forall x\in R$ için geçerlidir. $y=-y$ eşitliği ise sadece $y=0$ için geçerli olur. Yani $\forall x\in R$ fakat $y=0$ için bulunur. O halde λ_1 'e karşılık gelen asli doğrultu

$$\begin{aligned}Z_1 &= x.X+y.Y\\ &= x.\left(q_2,q_1,0,0\right)\ ,\ x\in R\end{aligned}$$

şeklindeki vektördür.

- $\lambda_2=-\dfrac{1}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2}}$ asli eğriliğine karşılık gelen asli doğrultu

ise,

$$\frac{1}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2}}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

olur. Bu eşitliğin çözümünden

$$\begin{aligned} x &= -x \\ y &= y \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. $y = y$ eşitliği $\forall y \in R$ için geçerlidir fakat $x = -x$ eşitliği ise $x = 0$ için geçerli olur. O halde, λ_2 değerine karşılık gelen asli doğrultu

$$\begin{aligned} Z_2 &= x.X + y.Y \\ &= y.(0,0,-q_4,q_3) \ \ , y \in R \end{aligned}$$

vektörüdür. Özel olarak, lineer bağımlılıktan $x = y = 1$ alınabilir. O zaman,

$$\begin{aligned} Z_1 &= X = (q_2, q_1, 0, 0) \\ Z_2 &= Y = (0, 0, -q_4, q_3) \end{aligned}$$

asli doğrultuları bazın aynısı olur.

Diğer yandan birim olmayan split kuaterniyonlar için de bu çalışmayı genelleyebiliriz.

$$(q_1,q_2,q_3,q_4) \to f(q_1,q_2,q_3,q_4) = q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2 = k^2 \ , \quad (k \in R)$$

dönüşümü alındığında birim normal vektör alanı benzer şekilde elde edilecektir. Böylece (5.11) ve (5.12) de verilen baz seçimide aynı olacaktır. Sonuç olarak λ_1 ve λ_2 karakteristik değerleri ile bunlara karşılık gelen Z_1 ve Z_2 karakteristik vektörleri de yukarıda bulunduğu şekilde aynı biçimde elde edilecektir.

Örnek 5.2 : $q = \left(2, -1, \sqrt{3}, 1\right)$ birim timelike split kuaterniyonunun asli eğrilik ve asli doğrultmanlarını bulalım.

$q = \left(2, -1, \sqrt{3}, 1\right)$ birim split kuaterniyonu için asli eğrilikler

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2}} = \frac{1}{3}$$

ve

$$\lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2}} = -\frac{1}{3}$$

olur. Bu değerlere karşılık gelen asli doğrultular ise

$$\begin{aligned} Z_1 &= (-1, 2, 0, 0) \\ Z_2 &= \left(0, 0, -1, \sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Örnek 5.3 : $q = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ spacelike split kuaterniyonunun asli eğrilik ve asli doğrultmanlarını bulalım.

$q = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ split kuaterniyonu için asli eğrilikler

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}} = 1$$

ve

$$\lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}} = -1$$

olur. Bu değerlere karşılık gelen asli doğrultular ise,

$$\begin{aligned} Z_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0, 0\right) \\ Z_2 &= \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.

5.4 SAF SPLİT KUATERNİYONLAR İÇİN ASLİ EĞRİLİKLER

Bu bölümde saf split kuaterniyonlar için şekil operatörünü oluşturalım ve asli eğrilikler ile asli doğrultmanları bulalım.

Şimdi, saf split kuaterniyonlar için asli eğrilikleri inceleyelim:

$q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ kuaterniyonu bir birim saf split kuaterniyon olsun. q kuaterniyonu saf split kuaterniyon olduğu için $q_1 = 0$ 'dır. $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ birim saf split kuaterniyonu için normu Bölüm 2 'den,

$$N_q = \sqrt{|q_2^2 - q_3^2 - q_4^2|}$$

şeklindedir. Yani,

$$q_2^2 - q_3^2 - q_4^2 = 1$$

dir. Buradaki eşitlikten, saf split kuaterniyonlar Bölüm 2 'de sunulduğu üzere Minkowski 3-uzayı ile özdeş olduğundan dolayı

$$\phi : E^2 \rightarrow E^3$$
$$(u,v) \rightarrow \phi(u,v) = \left(u, v, \sqrt{|u^2 - v^2 - 1|}\right)$$

şeklinde parametrilendirme yapabiliriz. Bu parametrelendirme ise u ve v reel parametreler olmak üzere,

$$\begin{aligned} u &= q_2 \\ v &= q_3 \\ \sqrt{|u^2 - v^2 - 1|} &= q_4 \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu parametrizasyon kullanılarak ϕ' nin u' ya göre kısmi türevi

$$\phi_u = \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{|u^2 - v^2 - 1|}}\right)$$

ve ϕ' nin v' ye göre kısmi türevi

$$\phi_v = \left(0, 1, \frac{-v}{\sqrt{|u^2 - v^2 - 1|}}\right)$$

olarak hesaplanır. $\phi = \{\phi_u, \phi_v\}$ bir baz oluşturacaktır. Bu baza göre, birim normali

$$N = \frac{\phi_u \wedge \phi_v}{\|\phi_u \wedge \phi_v\|}$$

şeklinde ifade edebilirdik. Buradan,

$$\phi_u \wedge \phi_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{u}{\sqrt{|u^2 - v^2 - 1|}} \\ 0 & 1 & \frac{-v}{\sqrt{|u^2 - v^2 - 1|}} \end{vmatrix} = \left(\frac{u}{\sqrt{|u^2 - v^2 - 1|}}, \frac{-v}{\sqrt{|u^2 - v^2 - 1|}}, 1\right)$$

ve

$$\|\phi_u \wedge \phi_v\| = \frac{\sqrt{2u^2 - 1}}{\sqrt{|u^2 - v^2 - 1|}}$$

elde edilir. O halde birim normal vektör,

$$N = \frac{\phi_u \wedge \phi_v}{\|\phi_u \wedge \phi_v\|} = \left(\frac{-u}{\sqrt{2u^2 - 1}}, \frac{v}{\sqrt{2u^2 - 1}}, \frac{\sqrt{|u^2 - v^2 - 1|}}{\sqrt{2u^2 - 1}}\right)$$

olur. Buradan şekil operatör matrisimizi oluşturabilmek için yine ϕ bazı kullanılarak oluşturulan lineer bağıntıları çözmemiz gerekir.

$$S(\phi_u) = a\phi_u + b\phi_v \tag{5.13}$$
$$S(\phi_v) = c\phi_u + d\phi_v \tag{5.14}$$

Buradaki $S(\phi_u)$, birim normalin u' ya göre türevi

$$S(\phi_u)=\frac{dN}{du}=\left(\frac{-1}{(2u^2-1)^{3/2}},\frac{-2uv}{(2u^2-1)^{3/2}},\frac{-2uv^2+u}{(2u^2-1)^{3/2}\sqrt{|u^2-v^2-1|}}\right)$$

ve $S(\phi_v)$, birim normalin v' ya göre türevi

$$S(\phi_v)=\frac{dN}{dv}=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2u^2-1}},\frac{-v}{\sqrt{(2u^2-1)(u^2-v^2-1)}}\right)$$

şeklindedir. $S(\phi_u)$' yu (5.13) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}S(\phi_u) &= a.\left(1,0,\frac{u}{\sqrt{|u^2-v^2-1|}}\right)+b.\left(0,1,\frac{-v}{\sqrt{|u^2-v^2-1|}}\right)\\ &= \left(\frac{-1}{(2u^2-1)^{3/2}},\frac{-2uv}{(2u^2-1)^{3/2}},\frac{-2uv^2+u}{(2u^2-1)^{3/2}\sqrt{|u^2-v^2-1|}}\right)\end{aligned}$$

buradan $S(\phi_u)=a\phi_u+b\phi_v$ eşitliğine göre,

$$a=\frac{1}{(2u^2-1)^{3/2}}$$

$$b=\frac{-2uv}{(2u^2-1)^{3/2}}$$

bulunur. $S(\phi_v)$' yi (5.14) eşitliğinde yerine yazarsak, $S(\phi_v)=c\phi_u+d\phi_v$ eşitliğine göre,

$$\begin{aligned}S(\phi_v) &= c.\left(1,0,\frac{u}{\sqrt{|u^2-v^2-1|}}\right)+d.\left(0,1,\frac{-v}{\sqrt{|u^2-v^2-1|}}\right)\\ &= \left(0,\frac{1}{\sqrt{2u^2-1}},\frac{-v}{\sqrt{(2u^2-1)(u^2-v^2-1)}}\right)\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}c &= 0\\ d &= \frac{1}{\sqrt{2u^2-1}}\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Böylelikle, şekil operatörünün matris temsili,

$$S_q=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{(2u^2-1)^{3/2}} & \frac{-2uv}{(2u^2-1)^{3/2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2u^2-1}}\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Şimdi karakteristik polinomu oluşturarak asli değerleri bulalım.

$$\begin{aligned}
\det\left(S_q - \lambda I_2\right) &= 0 \\
\det\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\left(2u^2-1\right)^{3/2}} - \lambda & \dfrac{-2uv}{\left(2u^2-1\right)^{3/2}} \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2u^2-1}} - \lambda \end{bmatrix} &= 0 \\
\left(\frac{1}{\left(2u^2-1\right)^{3/2}} - \lambda\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2u^2-1}} - \lambda\right) &= 0
\end{aligned}$$

eşitliğinden karakteristik değerler,

$$\lambda_1 = \frac{1}{\left(2u^2-1\right)^{3/2}}$$

ve

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2u^2-1}}$$

şeklinde hesaplanır. Bu karakteristik değerlere karşılık gelen asli doğrultmanlar ise önceki bölümlere benzer şekilde elde edilecektir. Asli eğriliklere karşılık gelen asli doğrultmanlar aşağıdaki gibi elde edilirler;

- $\lambda_1 = \dfrac{1}{\left(2u^2-1\right)^{3/2}}$ için

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\left(2u^2-1\right)^{3/2}} & \dfrac{-2uv}{\left(2u^2-1\right)^{3/2}} \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2u^2-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\left(2u^2-1\right)^{3/2}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$-2uvy = 0 \tag{5.15}$$

ve

$$y.\sqrt{2u^2-1}.\left(2u^2-2\right) = 0 \tag{5.16}$$

eşitlikleri elde edilir. (5.15) eşitliğinin, u ve v reel parametreleri sıfırdan farklı olduğunda (yani $q_2 \neq 0$ ve $q_3 \neq 0$ olmak üzere) çözüm vardır. Aksi halde

$q_4 = \sqrt{-1} = i$ kompleks sayısı istenilen reel çözümü vermez. (5.16) eşitliği çözüldüğünde,

$$\begin{aligned} y &= 0, \\ u &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

veya

$$u = \pm 1$$

değerleri bulunur. Fakat, $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ değerleri, λ_1 değerini tanımsız yapar. O zaman, $u = \pm 1$ değerlerini yerine yazdığımızda

$$\begin{bmatrix} 1 & \pm 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1. \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\pm 2vy = 0$$

eşitliği elde edilir. Böylece $v \neq 0$ olmak üzere ancak $y = 0$ bu eşitliği sağlar. Buradan, $\forall x \in R$ için $y = 0$ olup, λ_1 değerine karşılık gelen asli doğrultu

$$\begin{aligned} Z_1 &= x\phi_u + y\phi_v \\ &= x.\left(1, 0, \frac{i}{v}\right), \ x \in R \end{aligned}$$

vektörü olarak elde edilir. Fakat, bu asli doğrultu kompleks olduğundan dolayı, reel kuaterniyonlarda tanımlı olmaz.

- $\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2u^2 - 1}}$ için

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{(2u^2-1)^{3/2}} & \frac{-2uv}{(2u^2-1)^{3/2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2u^2-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2u^2-1}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$y = \frac{x\left(1 - u^2\right)}{uv}$$

eşitliği elde edilir. O halde, sıfırdan farklı u ve v reel parametreleri için $\forall x, y \in R$

için asli eğrilik

$$\begin{aligned} Z_2 &= x\phi_u + y\phi_v \\ &= x\left(1,0,\frac{u}{\sqrt{|u^2-v^2-1|}}\right)+\frac{x\left(1-u^2\right)}{uv}\left(0,1,\frac{-v}{\sqrt{|u^2-v^2-1|}}\right) \\ &= x\left(1,\frac{1-u^2}{uv},\frac{2u^2-1}{u\sqrt{|u^2-v^2-1|}}\right)\ ,\ x\in R \end{aligned}$$

vektörü olarak elde edilir. Burada, lineer bağımlılıktan dolayı, özel olarak $x=1$ seçilip, u ve v değerleri yerine yazıldığında asli doğrultu

$$Z_2=\left(1,\frac{1-q_2^2}{q_2q_3},\frac{2q_2^2-1}{q_2q_4}\right)$$

olur. Burada, $q_2\neq 0$, $q_3\neq 0$ ve $q_4\neq 0$ olmalıdır.

Sonuç olarak, reel saf split kuaterniyonlar için asli doğrultu

$$\left(1,\frac{1-q_2^2}{q_2q_3},\frac{q_2-q_3+q_2^2q_3}{q_4}\right)$$

vektörüdür.

Diğer yandan birim olmayan saf split kuaterniyonlar için bu çalışmayı genelleyebiliriz. Eğer norm birden farklı olursa, yani,

$$q_2^2-q_3^2-q_4^2=k^2\ ,\ \ (k\in R)$$

alınırsa baz vektörleri

$$\phi_u=\left(1,0,\frac{u}{\sqrt{|u^2-v^2-k^2|}}\right)$$

$$\phi_v=\left(0,1,\frac{-v}{\sqrt{|u^2-v^2-k^2|}}\right)$$

şeklinde elde edilir. Buradan birim normal vektör alanı gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$N=\left(\frac{-u}{\sqrt{2u^2-k^2}},\frac{v}{\sqrt{2u^2-k^2}},\frac{\sqrt{|u^2-v^2-k^2|}}{\sqrt{2u^2-k^2}}\right)$$

olarak bulunur. Böylelikle birim olmayan saf split kuaterniyonlar için şekil operatörünün matris temsili,

$$S_q=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\left(2u^2-k^2\right)^{3/2}} & \dfrac{-2uv}{\left(2u^2-k^2\right)^{3/2}} \\ & \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2u^2-k^2}} \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. Sonuç olarak, birim olmayan saf split kuaterniyonlar için asli eğrilik değerleri

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{(2u^2-k^2)^{3/2}}\\ \lambda_2 &= \frac{1}{\sqrt{2u^2-k^2}}\end{aligned}$$

ve bu karakteristik değerlere karşılık gelen asli doğrultular sırasıyla aşağıdaki şekilde elde edilirler;

$$\begin{aligned}y &= 0\\ u &= \pm\frac{k}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

veya

$$u = \pm 1$$

için

$$Z_1 = \left(1, 0, \frac{i}{v}\right)$$

olur. Ayrıca,

$$y = \frac{1-2u^2+k^2}{2uv}$$

için

$$Z_2 = \left(1, \frac{1-2u^2+k^2}{2uv}, \frac{4u^2-1-k^2}{2u\sqrt{|u^2-v^2-k^2|}}\right)$$

olarak hesaplanır.

Örnek 5.4 : $q = \left(0, \sqrt{3}, 1, 1\right)$ birim timelike split kuaterniyonunun asli eğrilik ve asli doğrultularını bulalım.

$q_1 = 0$ olduğundan $q = \left(0, \sqrt{3}, 1, 1\right)$ kuaterniyonu, birim saf split kuaterniyondur. O halde asli eğrilik,

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

olur ve bu değere karşılık gelen asli doğrultu vektörü

$$\begin{aligned}Z &= \left(1, \frac{1-q_2^2}{q_2q_3}, \frac{2q_2^2-1}{q_2q_4}\right)\\ &= \left(1, -\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{5}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

hesaplanır.

Örnek 5.5 : $q=\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ spacelike split kuaterniyonunun asli eğrilik ve asli doğrultularını bulalım.

$q_1=0$ olduğundan $q=\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ kuaterniyonu, saf split kuaterniyondur. O halde asli eğrilik,

$$\lambda=\sqrt{3}$$

olur ve bu değere karşılık gelen asli doğrultu vektörü

$$\begin{aligned} Z &= \left(1,\frac{1-q_2^2}{q_2q_3},\frac{2q_2^2-1}{q_2q_4}\right) \\ &= (1,1,0) \end{aligned}$$

hesaplanır.

6 SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu çalışmadan çıkarılan sonuçlar aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

1-) Bir timelike (veya spacelike) eksene dayalı tüm dönmeler vektör kısmı timelike olan birim timelike kuaterniyonlar (veya vektör kısmı spacelike olan birim timelike kuaterniyonlar) ile ifade edilebilir.

2-) Bir birim timelike kuaterniyon ancak bir lightlike olmayan vektör ekseni etrafında dönme gerçekler.

3-) Timelike vektör ancak bir timelike vektör eksen etrafında, spacelike vektör ise bir spacelike vektör eksen etrafında dönme gerçekler.

4-) Kuaterniyonlat ve split kuaterniyonlar için elde edilen dönme matrisleri ortogonal hatta ortonormal matrislerdir. Yine Bölüm 4 'de yapılan çalışmalar bu dönme matrisleri için özdeğer ve özvektörlerin hesaplanabileceğini gösterir. Ancak bu hesaplamalarda vektörün timelike ya da spacelike olmasına (yani causel karakterine) bağlı olarak karakteristik polinomun çözümü gerçeklenir.

5-) Bu çalışmanın beşinci bölümü tamamı ile orijinal bir çalışmadır. Bu bölümde kuaterniyonlar ve split kuaterniyonlar için şekil operatörü ve onun matris temsili tanımlanmıştır. Bu matris ile dönme matrisi arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Ayrıca elde edilen şekil operatörü matrisleri üzerinden asli eğriliklerin hesaplanması gösterilmiştir. Buna bağlı olarak, bulunan asli eğriliklere karşılık gelen asli dağrultular elde edilmiş ve bu doğrultu vektörlerinin özellikleri yorumlanmıştır.

7. KAYNAKLAR

Altmann, L., *Rotations, Quaternions and Double Groups*, Dover Pub., New York, (2013).

Bekar, M., Yaylı, Y., "Involutions of Complexified Quaternions and Split Quaternions", *Advances in Applied Clifford Algebras*, *23*(2), 283-299, (2013).

Catoni, F., Boccaletti, D., Cannata, R., Catoni, V., Nichelatti, E., Zampetti, P., *The Mathematics of Minkowski Space-Time*, Germany: Birkhauser, (2011).

Dağlı, S., "Minkowski 4- Uzayında Jet Yapılar ve Mekanik Sistemler", Yüksek Lisans Tezi, *Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı*, Denizli, (2012).

Girard, P. R., *Quaternions, Clifford Algebras and Relativistic Physics* , Birkhauser Verlag AG, Basel, (2007).

Hacısalihoğlu, H. H., *Diferensiyel Geometri*, 2. Cilt, Ankara: İnönü Üniversitesi Yayınları, (1994).

Hacısalihoğlu, H., *Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi*, Ankara: Gazi Üniversitesi Yayınları, (1983)

Halici, S., "On Fibonacci Quaternions", *Advances in Applied Clifford Algebras*, *22*(2), 321-327, (2012).

Halici, S., "On Complex Fibonacci Quaternions", *Advances in Applied Clifford Algebras*, *23*(1), 105-112, (2013).

Kula, L., Yayli, Y. "Split Quaternions and Rotations in Semi Euclidean Space E_2^4", *Journal of the Korean Mathematical Society*, *44*(6), 1313-1327, (2007).

Meral, M., "Kuaterniyonlara Ait Matrisler İçin De'Moivre ve Euler Formülleri", Yüksek Lisans Tezi, *Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,* Ankara, (2009).

Morita, K. "Quaternions, Lorentz Group and The Dirac Theory" *Progress of Theoretical Physics*, *117*(3), 501-532, (2007).

O'neill, B., *Semi-Riemann Geometry With Applications to Relativity*, Academic Press, New York (1983).

Ölmez, O., "Genelleştirilmiş Kuaterniyon ve Uygulamaları", Yüksek Lisans Tezi, *Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı*, Ankara, (2006).

Özdemir, M., Erdoğdu, M., Şimşek, H., "On the Eigenvalues and Eigenvectors of a Lorentzian Rotation Matrix by Using Split Quaternions", *Advances in Applied Clifford Algebras*, *24*(1), 179-192, (2014).

Özdemir, M., and Abdullah A. Ergin. "Rotations With Unit Timelike Quaternions in Minkowski 3-Space." *Journal of Geometry and Physics* 56.2 322-336 (2006).

Özdemir, M., Ergin, A. A., "Some Geometric Applications Of Timelike Quaternions", In *Proc. 16th Int. Conf. Jangjeon Math. Soc*, (Vol. 16, pp. 108-115) , (2005).

Tozak, H., "Mikowski 4- Uzayında Eğriliklerin ve Hareketlerin Geometrisi", Yüksek Lisans Tezi, *Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı*, Denizli, (2010).

Turgut, A. "3-Boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler", Doktora tezi, *Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, (1995).

Ward, J. P. *Quaternions and Cayley Numbers: Algebra and Applications* (Vol. 403), Springer Science & Business Media: (2012).

8. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : ŞERİFE NAZ ELMAS

Doğum Yeri ve Tarihi : DENİZLİ - 1993

Lisans Üniversite : Pamukkale Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Elektronik posta : serifenaz.elmas@gmail.com

İletişim Adresi : Mehmetçik Mahallesi, Muammer Aksoy Caddesi No:51

Yayın Listesi :

• Yormaz, C., Elmas, S. N., and Simsek, S., "Hamiltonian Mechanical System with Split Quaternions", Universal Journal of Applied Mathematics, *6*(1), 17-25, (2018).

• Yormaz, C., Simsek, S., and Elmas, S. N., "Quaternionic Serret Frenet Frames For Fuzzy Split Quaternion Numbers", Advences in Fuzzy Systems (2018).

Konferans listesi :

• Cansel Yormaz, Şerife Naz Elmas, "Quaternionic Approach Of The Minkowski 4-Space" 14. Uluslararası Geometri Sempozyumu, 25-28 Mayıs 2016 (Pamukkale Üniversitesi)

• Cansel Yormaz, Şerife Naz Elmas, "Split Quaternionic Version Of Hamiltonian Mechanics" 1. International Conference Of Applied Sciences, Engineering And Mathematics, Icasem 2017, 5-7 Mayıs 2017 (International Balkan University)

• Cansel Yormaz, Şerife Naz Elmas, Simge Şimşek, “New Frenet Frame For Fuzzy Split Quaternion Numbers” 15. Uluslararası Geometri Sempozyumu, 3-6 Temmuz 2017 (Amasya Üniversitesi)