

**T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**CHEBYSHEV DALGACIK SIRALAMA YÖNTEMİYLE KİSMİ
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ASLI SULTAN KARATAŞ

DENİZLİ, OCAK - 2020

**T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**CHEBYSHEV DALGACIK SIRALAMA YÖNTEMİYLE KİSMİ
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ASLI SULTAN KARATAŞ

DENİZLİ, OCAK - 2020

KABUL VE ONAY SAYFASI

Aslı Sultan Karataş tarafından hazırlanan “Chebyshev Dalgacık Sıralama Yöntemiyle Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümleri” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 10.01.2020 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Danışman
Prof. Dr. İbrahim ÇELİK

Üye
Prof. Dr. Ayşegül DAŞCIOĞLU

Üye
Dr. Öğr. Üyesi Neşe İŞLER ACAR



Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
12/02/2020 tarih ve 07/13.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.



Prof. Dr. Uğur YÜCEL

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.


ASLI SULTAN KARATAş

ÖZET

**CHEBYSHEV DALGACIK SIRALAMA YÖNTEMİYLE KISMİ
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ASLI SULTAN KARATAŞ
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. İBRAHİM ÇELİK)

DENİZLİ, OCAK 2020

Bu tezde kısmi diferansiyel denklemlerin Chebyshev Dalgacık Sıralama Yöntemi ile yaklaşık çözümlerinin hesaplanması amaçlanmaktadır.

1. Bölümde dalgacıkların ne olduğuna kısaca değinilmiş, kullanıldığı yerler ve literatür taramasına yer verilmiştir.

2. Bölümde dalgacıkların tarihçesinden bahsedilmiştir. Dalgacık dönüşümü gösterilmiştir. Haar, Daubechies ve Legendre dalgacıkları ve özellikleri verilmiştir.

3. Bölümde Chebyshev dalgacıklarının tanımı verilmiştir. Chebyshev Dalgacık Yöntemi belirtilmiştir. Daha sonra sıralama noktalarının kullanıldığı Chebyshev Dalgacık Sıralama Yöntemi'ne değinilmiştir. Son olarak hata analizi için gereken lemma ve teoremler verilmiştir.

4. Bölümde Chebyshev Dalgacık Sıralama Yöntemi'nin uygulamalarından bahsedilmiştir. Bu bölümdeki yaklaşık yöntemin uygulanması kısmi literatürde ilk defa bu çalışmada yapılmıştır. İlk olarak ikinci mertebeden iki boyutlu kısmi diferansiyel denklemlerin genel olarak nasıl çözüleceğinden bahsedilmiştir. Özel olarak Magnetodinamik akı denkleminin yaklaşık çözümü bulunmuştur. Bulunan bu yaklaşık çözüm, tam çözümle kıyaslanmıştır. Daha sonra dördüncü mertebeden bir ve iki konum boyutlu kısmi diferansiyel denklemlerin genel olarak nasıl çözüleceğinden bahsedilmiştir. Bir ve iki konum boyutlu genelleştirilmiş Fisher Kolmogorov denkleminin yaklaşık çözümü anlatılmıştır. İkişer tane örnek çözülmüştür. Hata tabloları ve literatür karşılaştırmaları ilgili alanlarda verilmiştir. Bu tezdeki yaklaşık hesaplamalar Matlab programı kullanılarak yapılmıştır.

5. Bölümde tez çalışmasının sonucundan bahsedilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Chebyshev Dalgacık Sıralama Yöntemi, Magnetodinamik akı denklemi, Genelleştirilmiş Fisher Kolmogorov denklemi

ABSTRACT

NUMERICAL SOLUTIONS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY USING CHEBYSHEV WAVELETS COLLOCATION METHOD

MSC THESIS

ASLI SULTAN KARATAŞ

PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS

(SUPERVISOR:PROF. DR. İBRAHİM ÇELİK)

DENİZLİ, JANUARY 2020

In this thesis, our aim is solving partial differential equations by using Chebyshev Wavelets Collocation Method.

In 1st Chapter, some information is given about wavelets shortly. Their using areas are mentioned. General information about thesis is given.

In 2nd Chapter, there are history of wavelets, wavelet transform, definition and properties of Haar, Daubechies and Legendre wavelets.

In 3rd Chapter, definition of Chebyshev wavelets is given. Chebyshev Wavelets Method and Chebyshev Wavelets Collocation Method are mentioned. Finally, lemma and theorems are given for error analysis.

In 4th Chapter, there are applications about Chebyshev Wavelets Collocation Method. The application of the approximate method in this section was made for the first time in the literature. The method is applied for second order partial differential equations in two variables. We find Magnetohydrodynamic flow equations' solution approximately. After that, method are applied for fourth order partial differential equations in one and two space variable. We applied the method on extended Fisher Kolmogorov equations. Two examples for each are given. Tables are mentioned about error analysis. In this thesis we use Matlab program to obtain approximate solutions.

In 5th Chapter, results of the thesis are mentioned.

KEYWORDS: Chebyshev Wavelet Collocation Method, Magnetohydrodynamic flow equation, Extended Fisher Kolmogorov equation

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİL LİSTESİ	v
TABLO LİSTESİ	vi
SEMBOL LİSTESİ	vii
ÖNSÖZ	viii
1. GİRİŞ	1
2. DALGACIKLAR	4
2.1 Dalgacıkların tarihçesi.....	4
2.2 Dalgacık Dönüşümü	5
2.3 Dalgacıklar Ailesi.....	5
2.3.1 Haar Dalgacıkları ve Özellikleri	6
2.3.2 Daubechies Dalgacıkları ve Özellikleri	7
2.3.3 Legendre Dalgacıkları ve Özellikleri.....	8
3. CHEBYSHEV DALGACIK SIRALAMA YÖNTEMİ	9
3.1 Chebyshev Dalgacıkları ve Özellikleri.....	9
3.2 Chebyshev Dalgacık Yöntemi	9
3.3 Chebyshev Dalgacık Sıralama Yöntemi.....	15
3.4 Hata analizi	17
4. YAKLAŞIK YÖNTEMİN UYGULANMASI	21
4.1 İkinci Mertebeden İki Boyutlu Denklem İçin Chebyshev Dalgacık Sıralama Yöntemi	21
4.1.1 Chebyshev Dalgacık Sıralama Metodunun Magnetohidrodinamik akı denkleminde uygulanması	29
4.2 Dördüncü Mertebeden Bir Konum Boyutlu Denklem İçin Chebyshev Dalgacık Sıralama Yöntemi	41
4.2.1 Chebyshev Dalgacık Sıralama Yöntemi'nin Bir Boyutlu Genelleştirilmiş Fisher Kolmogorov Denkleminde Uygulanması	42
4.2.2 Örnekler	47
4.3 Dördüncü Mertebeden İki Konum Boyutlu Denklem İçin Chebyshev Dalgacık Sıralama Yöntemi	55
4.3.1 Chebyshev Dalgacık Sıralama Yöntemi'nin İki Konum Boyutlu Genelleştirilmiş Fisher Kolmogorov Denkleminde Uygulanması	83
4.3.2 Örnekler	86
5. SONUÇ	92
6. KAYNAKLAR	93
7. ÖZGEÇMİŞ	99

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 4.1: $Ha = 10, M = 10, k = 1, \alpha = \pi/2$ değerleri için hızın yaklaşık çözümü	32
Şekil 4.2: $Ha = 10, M = 10, k = 1, \alpha = \pi/2$ değerleri için manyetik alanın yaklaşık çözümü	32
Şekil 4.3: $Ha = 10, M = 10, k = 1, \alpha = \pi/2$ değerleri için hız	33
Şekil 4.4: $Ha = 10, M = 10, k = 1, \alpha = \pi/2$ değerleri için manyetik alan	33
Şekil 4.5: $Ha = 50, M = 15, k = 1, \alpha = \pi/2$ değerleri için hız	34
Şekil 4.6: $Ha = 50, M = 15, k = 1, \alpha = \pi/2$ değerleri için manyetik alan	34
Şekil 4.7: $Ha = 300, M = 30, k = 1, \alpha = \pi/2$ değerleri için hız	35
Şekil 4.8: $Ha = 300, M = 30, k = 1, \alpha = \pi/2$ değerleri için manyetik alan..	35
Şekil 4.9: $Ha = 700, M = 50, k = 1, \alpha = \pi/2$ değerleri için hız	36
Şekil 4.10: $Ha = 700, M = 50, k = 1, \alpha = \pi/2$ değerleri için manyetik alan	36
Şekil 4.11: $Ha = 1000, M = 90, k = 0, \alpha = \pi/2$ değerleri için hız	37
Şekil 4.12: $Ha = 1000, M = 90, k = 0, \alpha = \pi/2$ değerleri için manyetik alan	37
Şekil 4.13: $Ha = 300, M = 40, k = 1, \alpha = \pi/4$ değerleri için hız	38
Şekil 4.14: $Ha = 300, M = 40, k = 1, \alpha = \pi/4$ değerleri için manyetik alan	38
Şekil 4.15: $Ha = 700, M = 50, k = 1, \alpha = \pi/4$ değerleri için hız	39
Şekil 4.16: $Ha = 700, M = 50, k = 1, \alpha = \pi/4$ değerleri için manyetik alan	39
Şekil 4.17: $Ha = 1000, M = 90, k = 0, \alpha = \pi/4$ değerleri için hız	40
Şekil 4.18: $Ha = 1000, M = 90, k = 0, \alpha = \pi/4$ değerleri için manyetik alan	40
Şekil 4.19: $M = 50, k = 1$ için mutlak hatanın zamana göre değişimi	49
Şekil 4.20: $\Delta t = 0.01, M = 50, k = 1$ için $t = 1$ de mutlak hata	49
Şekil 4.21: $\Delta t = 0.0001, M = 50, k = 1$ için $t = 1$ de mutlak hata	50
Şekil 4.22: $M = 50, k = 1$ için yaklaşık çözümün zamana göre değişimi	53
Şekil 4.23: $\Delta t = 0.01, M = 50, k = 1$ için $t = 1$ anında yaklaşık çözüm	54
Şekil 4.24: $\Delta t = 0.0001, M = 50, k = 1$ için $t = 1$ anında yaklaşık çözüm..	54
Şekil 4.25: $M = 30, k = 1$ için tam çözüm	88
Şekil 4.26: $M = 30, k = 1$ için yaklaşık çözüm	88
Şekil 4.27: $M = 30, k = 1$ için hata	89
Şekil 4.28: $M = 30, k = 1$ için yaklaşık çözüm	91

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Tablo 4.1: $\gamma = 0.01$ için belirtilen değerlerdeki mutlak hata	50
Tablo 4.2: Yeni metodun Doss ve Nandini (2012) ile karşılaştırılması.....	51
Tablo 4.3: Yeni metodun Kadri ve Omrani (2018) ile karşılaştırılması	51
Tablo 4.4: Verilen M ve k değerleri için mutlak maksimum hata.....	87
Tablo 4.5: Yeni metodun belirtilen makalelerle karşılaştırılması.....	89

SEMBOL LİSTESİ

- ∇ : $\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$ (Nabla Operatörü)
- ∇^2 : $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ (Laplace Operatörü)
- Δ : $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ (Laplace Operatörü)
- Δ^2 : $\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$
- \dot{u} : $\frac{\partial}{\partial t}$
- $\dot{u}^{(4)}$: $\frac{\partial^5 u(x,t)}{\partial t \partial x^4}$
- \dot{u}''' : $\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t \partial x^3}$
- $u^{(p,q)}$: $\frac{\partial^{p+q} u(x,y)}{\partial x^p \partial y^q}$
- P_i : İntegrasyon matrisi
- Δt : Zamandaki artış miktarı
- H_a : Hartmann sayısı
- $P_m(x)$: m dereceli Legendre polinomları
- $T_m(x)$: m dereceli Chebyshev polinomları
- $C^m[0, 1]$: $[0,1]$ aralığında m -inci mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonlar sınıfı
- $L_w^2[0, 1]$: $[0,1]$ aralığında w ağırlık fonksiyonuna göre karesi integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim boyunca danışmanlığımı yürüten, bu tezin hazırlanmasında tecrübe ve bilgi birikimiyle beni yönlendiren, her şeyden önemlisi kıymetli zamanını bana ayıran sayın hocam Prof. Dr. İbrahim ÇELİK'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca öğrenmenin ve öğretmenin ne olduğu konusunda örnek olan hocam Harun KÜRKCÜ'ye ve lisans eğitimimde emeği geçen tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Emek ve desteklerinden dolayı anneme, babama, eşime ve kızıma teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

Dalgacıklar, verileri ve diğer fonksiyonları ifade etmek için kullanılan fonksiyonlardır. Joseph Fourier 1800'lerin ilk yıllarında fonksiyonları sinüs ve kosinüsle ifade edebileceğini keşfettikten sonra, bu fonksiyonlarla yaklaşım kullanılmıştır. Dalgacık analizinde verinin ölçeği önemli bir role sahiptir. Dalgacık algoritmasında veri farklı ölçek ve çözünürlüktedir. Dalgacık analizi bütünü ve ayrıntıları aynı anda görebilmemizi sağlar.

Bu durum dalgacıkları ilginç ve kullanışlı kılar. Uzun yıllar boyunca bilim insanları, dalgalı sinyallere yaklaşmak için Fourier analizinin temellerini oluşturan sinüs ve kosinüs fonksiyonlarından daha uygun fonksiyonlara ihtiyaç duymuşlardır (Crandall 2000). Sinüs ve kosinüs fonksiyonları lokal olmamakla beraber, keskin sivri uçlara yaklaşmak konusunda zayıf kalmaktadır. Fakat dalgacık analizinde sınırlı alanda daha uygun yaklaşım sağlayan fonksiyonlar kullanılabilir. Dalgacıklar keskin uçlara yaklaşım sağlamaya daha uygundur.

Dalgacık analizinde 'analiz dalgacığı (analyzing wavelet)' veya 'ana dalgacık (mother wavelet)' denilen dalgacık ele alınır. Dalgacık analizi bu ana dalgacığın sık frekanslarda kullanılması fikrine dayanır. Fonksiyon ya da sinyal dalgacık fonksiyonunun lineer kombinasyonu şeklinde yazılır. Veriye en uygun dalgacık seçilirse yaklaşım daha iyi olur.

Matematiksel fiziğin birçok problemi integral denklemler, adi diferansiyel denklemler, kısmi diferansiyel denklemler ve fark denklemler olarak ifade edilebilir. Ortogonal tabanlı dalgacıklar yardımıyla bu denklemlerin yaklaşık çözümü için problemi cebirsel denklem sistemi çözümüne indirgeyen basit ve etkili birçok metod kullanılmaktadır (Hvang ve Shih 1983, Chang ve Wang 1983, Horng ve Chou 1985, Razzaghi ve Razzaghi 1988, Guf ve Jiang 1996, Chen ve Hsiao 1997, Maleknejad ve diğ. 2003).

Lokal olarak tanımlanabilen dalgacıklar çeşitli fonksiyon ve operatörlerin doğru (hatasız) bir şekilde gösterilmesini sağlar. İntegral ve diferansiyel denklemlerin çözümlerinde dalgacık metodu kullanılmasının avantajı, elde edilen cebirsel denklem sistemlerinin katsayılar matrisinin seyrek olmasıdır. Bu nedenle hızlı algoritmalar kullanılabilir ve hesaplama için gereken zaman ve güç daha azdır.

Yani dalgacık yöntemi diferansiyel ve integral denklemlerin çözümü için kullanışlı bir yöntemdir (Kajani ve Vencheh 2004, Adibi ve Assari 2010, Barzkar ve diğ. 2012, Biazar ve Ebrahimi 2012, Zhu ve Fan 2012, Yang ve Hou 2013). Lepik (2005), Maleknejad ve Mirzaee (2005), Çelik (2012^a), Çelik (2013^a) de Haar dalgacıkları metodu sunulmuştur. Legendre ve Chebyshev dalgacıklarının operasyonel matrisleri ve bu matrislerin hesaplanması çeşitli kaynaklarda bulunmaktadır (Razzaghi ve Yousefi 2000, Kajania ve diğ. 2009, Razzaghi ve Yousefi 2001^b). Razzaghi ve Yousefi (2001^a) de lineer olmayan problemler için Legendre dalgacıkları metodunu sunmuştur. Maleknejad ve diğ. (2003) Fredholm ve Volterra integral denklemleri için Legendre dalgacıkları metodunu sunmuştur. Aynı zamanda Zheng ve Yang (2009) integral ve diferansiyel denklemleri Legendre dalgacıklarıyla çözmüşlerdir. Matematiksel modellere kolay uyarlanabilmesi ve bilgisayar programlamaya uygunluğu sebebiyle Chebyshev dalgacıkları integral ve diferansiyel denklemlerin nümerik çözümünde kullanışlıdır. Babolian ve Fattahzadeh (2007^{a,b}) de integral ve diferansiyel denklemlere Chebyshev dalgacıklarının integrasyonuyla oluşan matrisleri (operational matrix) uygulamışlardır. Sohrabi (2011) Abel integral denkleminin çözümünde Chebyshev Dalgacık Yöntemi'ni Block-pulse fonksiyonları yöntemiyle karşılaştırmıştır. Ali ve diğ. (2013) de Chebyshev Dalgacık Yöntemi'ni gecikmeli diferansiyel denklemlere uygulamıştır. Çelik (2013^b), Çelik (2016), Çelik (2018^a), Çelik (2018^b) ve Çelik (2018^c) çalışmalarında Chebyshev Dalgacık Sıralama Yöntemi geliştirilmiş ve diferansiyel denklemlere, genelleştirilmiş Burgers–Huxley denklemine ve düzensiz (non-uniform) Euler–Bernoulli kiriş denklemlerine uygulanmıştır. Dalgacık tekniği diğer algoritmalarla kıyaslandığında hızlı algoritmalar sağlar ve dalgacık analizi fizik, iletişim ve görüntü işlemedeki zor problemlerin çözülmesine olanak sağlar (Chen ve Hsiao 1997). Kesirli türevli denklemlerin çözülmesinde de dalgacık yöntemi kullanılmıştır (Wang ve Fan 2012, Heydari ve diğ. 2013^{a,b}, Saeed ve diğ. 2015). Yuanlu (2010) da Chebyshev Dalgacık Yöntemi lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanmıştır.

Kısmi diferansiyel denklemlerin çözülmesinde de dalgacıklar, verilen denklemleri cebirsel denklem sistemine dönüştürerek daha kullanışlı ve daha iyi sonuç veren sistem haline getirirler (Heydari ve diğ. 2014^a)

Bu çalışmada Chebyshev dalgacıklar yaklaşımı yardımıyla matematiksel modellerle ifade edilmiş diferansiyel denklemlerin nümerik çözümünde belirli bir hassaslığa sahip sonuçların elde edilmesi ve hata analizinin yapılması amaçlanmıştır. Chebyshev Dalgacık Sıralama Yöntemi'nin ikinci ve dördüncü mertebeden lineer ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılması anlatılmaktadır.

Lineer olmayan denklemler için yarı lineerleştirme (quasilinearization) (Baird 1970) aşağıdaki gibi uygulanır:

$$y^{(r)}(x) = F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(r-1)}(x))$$

şeklinde r -inci mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denklem verilmiş olsun. Bu denklemin yarı lineerleştirilmiş hali

$$y_{s+1}^{(r)}(x) = F(x, y_s(x), y_s'(x), \dots, y_s^{(r-1)}(x)) + \sum_{i=0}^{r-1} (y_{s+1}^{(i)}(x) - y_s^{(i)}(x)) F_{y_s^{(i)}}(x, y_s(x), y_s'(x), \dots, y_s^{(r-1)}(x))$$

şeklindedir. Burada

$$F_{y_s^{(i)}}(x, y_s(x), y_s'(x), \dots, y_s^{(r-1)}(x)) = \frac{\partial}{\partial y_s^{(i)}} \left(F(x, y_s(x), y_s'(x), \dots, y_s^{(r-1)}(x)) \right)$$

ve $y_0(x)$ verilen başlangıç ve sınır değerlerini sağlayan bir fonksiyon olarak alınır. Herhangi bir $a \leq x \leq b$ aralığı $t = (b - a)x + a$ eşitliğiyle $0 \leq x \leq 1$ aralığına dönüştürülebilir (Fox 1968).

İlk olarak, dalgacıklar hakkında genel bilgi verilecek, daha sonra Chebyshev Dalgacık Yöntemi ve Chebyshev Dalgacık Sıralama Yöntemi ifade edilecektir. Kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü Chebyshev Dalgacık Sıralama Yöntemi ile genel olarak anlatıldıktan sonra Magnetohidrodinamik akı (Magnetohydrodynamic flow) denkleminde uygulanması, bir ve iki konum boyutlu genelleştirilmiş Fisher Kolmogorov denklemlerinin çözümünde uygulanması anlatılacaktır. Çözümlerde Matlab programı kullanılmıştır.

2. DALGACIKLAR

2.1 Dalgacıkların tarihçesi

Dalgacık yönteminin ortaya çıkmasına önderlik eden fikir Joseph Fourier (1807)'in analiz teorisidir. Fourier herhangi bir 2π periyotlu $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serilerinin toplamı şeklinde yazılabileceğini söyler:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Burada

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

şeklindedir.

Fourier, fonksiyonlar hakkında yeni fikirlerin oluşmasına öncülük etmiştir. Ancak, Fourier analizinin temelini oluşturan sinüs ve kosinüs fonksiyonları ani değişiklikleri tespit etmeye uygun olmadığından bilim insanları daha kullanışlı fonksiyonlara ihtiyaç duymuşlardır.

Literatürde bahsedilen ilk dalgacık dönüşümüne 1910 yılında Alfred Haar'ın tezinde rastlanır (Haar 1910). Haar dalgacıkları sürekli olmadığından birçok alanda kullanımını sınırlıdır.

1930'larda araştırmacılar birbirlerinden bağımsız olarak ölçeğe dayalı temel fonksiyonlar (scale-varying basis functions) kullanarak bir fonksiyonun ifade edilmesi üzerinde çalıştılar. Bu zamanda yaşamış bir fizikçi olan Paul Levy, Haar temel fonksiyonlarını kullanarak gelişigüzel sinyal tipi olan Brown hareketini inceledi. Levy ve Loeve (1965), Brown hareketindeki küçük karmaşık ayrıntılarda Haar bazlı fonksiyonların Fourier bazlı fonksiyonlardan daha iyi olduğunu buldu.

1980 yılında fizikçi Grossman ve mühendis Morlet kuantum fiziği bağlamında dalgacıkları tanımladı. Bu iki araştırmacı önsezilerine dayanarak dalgacıklar için yeni bir kullanım alanı oluşturdular.

Bu çalışmalardan ilham alan matematikçi Yves Meyer 1985 yılında kendi adıyla anılan ikinci ortogonal dalgacıkları oluşturdu. 1985 yılından önce bilinen tek

ortogonal dalgacık Haar dalgacıklarıdır. Haar dalgacıklarının aksine Meyer dalgacıkları sürekli türevlenebilirdir, fakat kompakt değildir (Meyer 1990).

1987 yılında Fransa da düzenlenen uluslararası bir konferans, dalgacık teorisinin gelişmesinde önemli bir rol oynamıştır. 1988 yılında ise Ingrid Daubechies kompakt ortogonal dalgacıkları inşa etmek için kullanışlı bir yöntem ortaya koydu ve Mallat'ın çalışmalarını kullanarak ortonormal baz tabanlı bir dalgacık oluşturdu (Daubechies 1988). Bu çalışma dalgacık teorisinin köşe taşı niteliğindedir.

Stephane Mallat, çeyrek ayna süzgeçler (quadrature mirror filters), piramit algoritmalar ve ortonormal dalgacık bazları arasında bazı ilişkiler keşfetti ve hızlı dalgacık dönüşümünü geliştirdi. Bu hızlı dönüşüm yöntemi sinyal işleme alanında kullanılmaktadır (Mallat 1989).

Günümüzde dalgacıklar astronomi, akustik, nükleer enerji, kodlama, sinyal ve görüntü işleme, nöropsikoloji, müzik, manyetik direnç görüntüleme, konuşma ayrıştırılması, optik, fraktallar, türbülans, deprem araştırmaları, radar, insan görüntüleme gibi uygulama alanlarında, diferansiyel ve integral denklemlerin çözümü, kesirli türevli denklemlerin çözülmesi, kısmi diferansiyel denklemlerin çözülmesi gibi temel matematik uygulamaları alanlarında kullanılmaktadır.

2.2 Dalgacık Dönüşümü

a ölçekleme parametresi ve b öteleme parametresi olmak üzere sürekli dalgacık ailesi aşağıdaki gibi ifade edilir (Daubechies 1992):

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

a ölçekleme parametresindeki değişim dalgacıyı yatay eksen boyunca belli bir oranda uzatır veya büzer. Burada $|a| < 1$ iken dalgacık büzülür, $|a| > 1$ iken uzar. b öteleme parametresindeki değişim ise dalgacıyı yatay eksende sürükler.

2.3 Dalgacıklar Ailesi

$\varphi(x)$ ölçüm fonksiyonu ile birlikte $\psi(x)$ dalgacık fonksiyonu bir dalgacık sistemi oluşturur. Farklı özelliklere sahip bazı dalgacıklar mevcuttur. Bunlardan bazıları; Haar dalgacıkları, Daubechies dalgacıkları, Coiflet dalgacıkları, Chebyshev

dalgacıkları, Legendre dalgacıkları, Shannon dalgacıkları, Morlet dalgacıkları, Meyer dalgacıkları olarak sıralanabilir. Bu dalgacıklar bilinen en yaygın dalgacık tipleridir. Bu tez çalışmasında Chebyshev dalgacıkları ele alınacak, bunun yanında diğer dalgacıkların bazılarına da kısaca değinilecektir.

2.3.1 Haar Dalgacıkları ve Özellikleri

Haar dalgacıkları en eski dalgacık fonksiyonlarından olup bu metot 1910 yılında Alfred Haar tarafından oluşturulmuştur. Haar dalgacıklarının ölçüm fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$h_1(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve ana dalgacığı

$$h_2(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklindedir.

Haar dalgacıklar ailesi $x \in [0,1]$ için şu şekilde tanımlanır;

$$h_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\xi_1, \xi_2) \\ -1, & x \in [\xi_2, \xi_3) \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Burada $\xi_1 = \frac{k}{m}$, $\xi_2 = \frac{k+0.5}{m}$, $\xi_3 = \frac{k+1}{m}$ dir. $m = 2^j$, $j = 1, 2, \dots, J$ dalgacığın derecesi, $k = 0, 1, \dots, m - 1$ öteleme parametresidir. Çözünürlüđün maksimum seviyesi J için $M = 2^J$ olarak gösterilir. $h_i(x)$ ifadesindeki i indisinin formülü $i = m + k + 1$ şeklindedir.

Haar dalgacıklar ailesinin diğer tüm fonksiyonları $[0,1)$ aralığının alt aralıklarında tanımlıdır, genleşme ve öteleme işlemleri ile $h_2(x)$ den üretilirler.

Haar dalgacıklarının hepsi birbirine ortogondur. Yani

$$\int_0^1 h_i(x)h_l(x)dx = \begin{cases} 2^{-j}, & i = l = 2^j + k \\ 0, & i \neq l \end{cases}$$

olur.

Haar dalgacıkları iyi bir dönüşüm sağlar. Haar dalgacıkları simetriklik, ortogonallik, biortogonallik özelliklerini sağlarken süreklilik özelliğini sağlamaz. Sürekli olmadığından türevi mevcut değildir. Bu nedenle diferansiyel denklemlerin çözümünde Haar dalgacıklarının integralleri kullanılır (Chen ve Hsiao 1997).

2.3.2 Daubechies Dalgacıkları ve Özellikleri

Daubechies dalgacıkları, Haar dalgacıkları ile kıyaslandığında daha karmaşıktır ve daha uzun işlemler gerektirmektedir. Daubechies dalgacıkları iki önemli özelliğe sahiptir. Birincisi, sonlu sayıda sıfırdan farklı p_k ölçüm katsayıları vardır. Bunun anlamı, ölçüm fonksiyonlarının ve dalgacıklarının kompakt olmasıdır. N -mertebeli Daubechies ölçüm fonksiyonu $2N$ adet sıfırdan farklı ölçüm katsayısına sahiptir ve ölçüm fonksiyonu ile ana dalgacık fonksiyonunun desteği $[0, 2N - 1]$ aralığı üzerindedir.

N -mertebeli Daubechies dalgacığının ikinci önemli özelliği, dalgacıkların ilk $N - 1$ momentlerinin sıfır olmasıdır. $\varphi(x)$ ölçüm fonksiyonu ve $\psi(x)$ dalgacık fonksiyonu olmak üzere, ölçüm ve dalgacık fonksiyonlarının momentleri sırasıyla

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)x^m dx$$

ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)x^m dx$$

olarak tanımlanır. Kompakt destekli dalgacıklar için bu integraller dalgacığın desteği üzerinde alınan integrale denktirler. Daubechies dalgacıklarının momenti

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_N(x)x^m dx = 0, \quad m = 0, \dots, N - 1,$$

olur. ψ_N dalgacığının ilk N momentinin sıfırlanması genellikle, ψ_N , N tane sıfırlanan momente sahiptir biçiminde kısaltılır ki bu ifadeden ilk N tanesi anlaşılır. Sıfırlanan momentler, N -mertebeli her Daubechies dalgacık baz fonksiyonunun, derecesi N den küçük olan tüm polinomlara ortogonal olduğu anlamına gelir. Yukarıda bahsedilen konudan hareketle, Daubechies dalgacıkları sahip oldukları sıfırlanan moment sayısına göre sınıflandırılırlar. Ölçüm fonksiyonunun ve dalgacığın düzgünlüğü sıfırlanan momentlerin sayısı ile artar. $N = 1$ durumunda Haar dalgacıkları olur, hem ölçüm fonksiyonu hem de dalgacık fonksiyonu süreksizdir. $N = 2$ durumunda, Daubechies ölçüm fonksiyonu ve dalgacığı süreklidir, ancak kesinlikle düzgün türevlere sahip değildirler. $N = 3$ durumunda, her ikisi de sürekli olarak diferansiyellenebilir. N büyük olduğunda, φ_N ve ψ_N fonksiyonlarının sürekli türevlerinin sayısı kabaca $N/5$ kadardır (Gül 2008).

Daubechies dalgacıkları tanımlanırken, $\varphi(x)$ ölçüm fonksiyonu, $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1$ biçiminde normalize edilmek üzere,

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N-1} p_k \varphi(2x - k)$$

genişleme (dilation) denkleminin çözümü olarak ve $\psi(x)$ dalgacığı ölçüm fonksiyonu cinsinden

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N-1} r_k \varphi(2x - k)$$

olarak tanımlanır (Bujurke ve diğ. 2007).

2.3.3 Legendre Dalgacıkları ve Özellikleri

Legendre dalgacıkları $k \in \mathbb{N}$, $n = 1, 2, \dots, 2^{k-1}$ ve $\hat{n} = 2n - 1$ olmak üzere dört değişkenli $\psi_{n,m}(x) = \psi(k, \hat{n}, m, x)$ olarak ifade edilir. Bu durumda $[0, 1)$ aralığında tanımlı m dereceli Legendre polinomları $m = 0, 1, \dots, M - 1$ ve M sabit pozitif bir tam sayı olmak üzere,

$$\psi_{n,m}(x) = \begin{cases} \sqrt{m + \frac{1}{2}} 2^{\frac{k}{2}} P_m(2^k x - \hat{n}), & \frac{\hat{n} - 1}{2^k} \leq x < \frac{\hat{n} + 1}{2^k} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır (Venkatesh ve diğ. 2012). Burada x normalleştirilmiş zamandır.

$\psi_{n,m}(x)$ eşitliğindeki $\sqrt{m + \frac{1}{2}}$ katsayısı ortonormalliği, $a = 2^{-k}$ genişleme parametresini ve $b = \hat{n}2^{-k}$ ise öteleme parametresini ifade etmektedir. Bunun yanında $P_m(x)$, $[-1, 1]$ aralığında $w(t) = 1$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan ve iyi bilinen m dereceli Legendre polinomlarıdır. $m = 0, 1, 2, \dots$ ve

$$P_0(t) = 1, P_1(x) = x,$$

olmak üzere

$$P_{m+1}(x) = \left(\frac{2m+1}{m+1} \right) x P_m(x) - \left(\frac{m}{m+1} \right) P_{m-1}(x),$$

formülü ile tüm Legendre polinomları bulunabilir.

3. CHEBYSHEV DALGACIK SIRALAMA YÖNTEMİ

3.1 Chebyshev Dalgacıkları ve Özellikleri

Chebyshev dalgacıklar dört değişkene sahiptir.

$$\psi_{nm}(x) = \psi(k, n, m, x)$$

$k = 0, 1, 2, \dots$, $n = 1, 2, \dots, 2^k$, m birinci tip Chebyshev polinomunun derecesi ve x normalleştirilmiş zaman olmak üzere; Chebyshev dalgacıkları $[0, 1)$ aralığında şu şekilde tanımlanır:

$$\psi_{nm}(x) = \begin{cases} \frac{\alpha_m 2^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{\pi}} T_m(2^{k+1}x - 2n + 1), & \frac{n}{2^k} \leq x \leq \frac{n+1}{2^k} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Burada

$$\alpha_m = \begin{cases} \sqrt{2}, & m = 0 \\ 2, & m = 1, 2, \dots \end{cases}$$

ve

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_{m+1}(x) = 2xT_m(x) - T_{m-1}(x) \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Chebyshev polinomlarıdır. Chebyshev polinomları $[-1, 1]$ aralığında $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogondur. Chebyshev dalgacıkları da $w_n(x) = w(2^{k-1}x - n + 1)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogondur (Fox ve Parker 1968).

3.2 Chebyshev Dalgacık Yöntemi

Chebyshev dalgacıkları kullanılarak bir fonksiyonu ifade edelim. $f(x) \in L_w^2[0, 1]$ olan bir fonksiyon $f_{nm} = \langle f(x), \psi_{nm}(x) \rangle$ olmak üzere

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_{nm} \psi_{nm}(x)$$

şeklinde yazılabilir. Bu serinin kesilmiş hali

$$f(x) \cong \sum_{n=1}^{2^k} \sum_{m=0}^{M-1} f_{nm} \psi_{nm}(x) = \mathbf{C}^T \mathbf{\Psi}(x)$$

olur. Burada

$$\mathbf{\Psi}(x) = [\psi_{10}, \psi_{11}, \dots, \psi_{1M-1}, \psi_{20}, \dots, \psi_{2M-1}, \dots, \psi_{2^k 0}, \dots, \psi_{2^k M-1}]^T$$

ve

$$\mathbf{C}^T = [f_{10}, f_{11}, \dots, f_{1M-1}, f_{20}, \dots, f_{2M-1}, \dots, f_{2^k 0}, \dots, f_{2^k M-1}]$$

\mathbf{C} ve $\mathbf{\Psi}(x)$ $2^k M \times 1$ boyutlu vektörlerdir.

$\psi_{nm}(x)$ in integrali şu şekilde gösterilebilir:

$$p_{nm}(x) = \int_0^x \psi_{nm}(s) ds$$

$m = 0$ için $p_{nm}(x)$,

$$p_{n0}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{n-1}{2^k} \\ \int_{\frac{n-1}{2^k}}^x \frac{\alpha_0 2^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{\pi}} ds, & \frac{n-1}{2^k} \leq x < \frac{n}{2^k} \\ \int_{\frac{n-1}{2^k}}^{\frac{n}{2^k}} \frac{\alpha_0 2^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{\pi}} ds, & \frac{n}{2^k} \leq x < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{n-1}{2^k} \\ \frac{\alpha_0 2^{\frac{k}{2}-1}}{\sqrt{\pi}} (2^{k+1}x - 2n + 2), & \frac{n-1}{2^k} \leq x < \frac{n}{2^k} \\ \frac{\alpha_0 2^{-\frac{k}{2}}}{\sqrt{\pi}}, & \frac{n}{2^k} \leq x < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{n-1}{2^k} \\ \frac{\alpha_0 2^{\frac{k}{2}-1}}{\sqrt{\pi}} [T_1(2^{k+1}x - 2n + 1) + T_0(2^{k+1}x - 2n + 1)], & \frac{n-1}{2^k} \leq x < \frac{n}{2^k} \\ \frac{\alpha_0 2^{-\frac{k}{2}}}{\sqrt{\pi}} \cdot T_0(2^{k+1}x - 2n + 1), & \frac{n}{2^k} \leq x < 1 \end{cases}$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde $m = 1$ için

$$p_{n1}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{n-1}{2^k} \\ \frac{\alpha_1 2^{\frac{k}{2}-3}}{\sqrt{\pi}} [T_2(2^{k+1}x - 2n + 1) - T_0(2^{k+1}x - 2n + 1)], & \frac{n-1}{2^k} \leq x < \frac{n}{2^k} \\ 0, & \frac{n}{2^k} \leq x < 1 \end{cases}$$

şeklindedir. $m > 1$ için $u = 2^{k+1}x - 2n + 1$ olmak üzere

$$p_{nm}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{n-1}{2^k} \\ \frac{\alpha_m 2^{\frac{k}{2}-2}}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{T_{m+1}(u) - (-1)^{m+1}}{m+1} - \frac{T_{m-1}(u) - (-1)^{m-1}}{m-1} \right], & \frac{n-1}{2^k} \leq x < \frac{n}{2^k} \\ \frac{\alpha_m 2^{\frac{k}{2}-2}}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{1 - (-1)^{m+1}}{m+1} - \frac{1 - (-1)^{m-1}}{m-1} \right], & \frac{n}{2^k} \leq x < 1 \end{cases}$$

şeklindedir.

$$\mathbf{P}(x) = \int_0^x \boldsymbol{\Psi}(s) ds = [p_{10}, p_{11}, \dots, p_{1M-1}, p_{20}, \dots, p_{2M-1}, \dots, p_{2^k0}, \dots, p_{2^kM-1}]^T$$

olur. İkinci integral

$$q_{nm} = \int_0^x p_{nm}(s) ds$$

olarak gösterilir. $m = 0, m = 1, m = 2$ ve $m > 2$ için $u = 2^{k+1}x - 2n + 1$ olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$q_{n0}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{n-1}{2^k} \\ \frac{\alpha_0 2^{\frac{3k}{2}-4}}{\sqrt{\pi}} [T_2(u) + 4T_1(u) + 3T_0(u)], & \frac{n-1}{2^k} \leq x < \frac{n}{2^k} \\ \frac{\alpha_0 2^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{2^{k+1}} + x - \frac{n}{2^k} \right], & \frac{n}{2^k} \leq x < 1 \end{cases}$$

$$q_{n1}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{n-1}{2^k} \\ \frac{\alpha_1 2^{\frac{3k}{2}-4}}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{T_3(u)}{6} - \frac{3T_1(u)}{2} - \frac{4T_0(u)}{3} \right], & \frac{n-1}{2^k} \leq x < \frac{n}{2^k} \\ \frac{\alpha_1 2^{\frac{3k}{2}-4}}{\sqrt{\pi}} \left[-\frac{8}{3} \right], & \frac{n}{2^k} \leq x < 1 \end{cases}$$

$$q_{n2}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{n-1}{2^k} \\ \frac{\alpha_2 2^{-\frac{3k}{2}-3}}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{T_4(u) - 1}{24} - \frac{T_2(u) - 1}{3} - \frac{2}{3}T_1(u) - \frac{2}{3}T_0(u) \right], & \frac{n-1}{2^k} \leq x < \frac{n}{2^k} \\ -\frac{\alpha_2 2^{-\frac{k}{2}}}{3\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{2^{k+1}} + x - \frac{n}{2^k} \right], & \frac{n}{2^k} \leq x < 1 \end{cases}$$

$q_{nm}(t)$

$$= \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{n-1}{2^k} \\ \frac{\alpha_m 2^{-\frac{3k}{2}-3}}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{T_{m+2}(u) - (-1)^{m+2}}{2(m+1)(m+2)} - \frac{T_m(u) - (-1)^m}{2(m+1)m} - \frac{T_m(u) - (-1)^m}{2m(m-1)} \right. \\ \left. + \frac{T_{m-2}(u) - (-1)^{m-2}}{2(m-1)(m-2)} + (1 + T_1(u)) \left[\frac{(-1)^{m-1}}{m-1} - \frac{(-1)^{m+1}}{m+1} \right] \right], & \frac{n-1}{2^k} \leq x < \frac{n}{2^k} \\ -\frac{\alpha_m 2^{-\frac{3k}{2}-3}}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{1 - (-1)^{m+2}}{2(m+1)(m+2)} - \frac{1 - (-1)^m}{2(m+1)m} - \frac{1 - (-1)^m}{2m(m-1)} \right. \\ \left. + \frac{1 - (-1)^{m-2}}{2(m-1)(m-2)} + 2 \left[\frac{(-1)^{m-1}}{m-1} - \frac{(-1)^{m+1}}{m+1} \right] \right. \\ \left. + 2^{k+1} \left(x - \frac{n}{2^k} \right) \left[\frac{(-1)^{m-1}}{m-1} - \frac{(-1)^{m+1}}{m+1} \right] \right], & \frac{n}{2^k} \leq x < 1 \end{cases}$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(x) &= \int_0^x \int_0^s \mathbf{\Psi}(w) dw ds = \int_0^x \mathbf{P}(s) ds \\ &= [q_{10}, q_{11}, \dots, q_{1M-1}, q_{20}, \dots, q_{2M-1}, \dots, q_{2^k 0}, \dots, q_{2^k M-1}]^T \end{aligned}$$

olur (Çelik 2013^b).

Heydari ve diğ. (2012), Heydari ve diğ. (2013^a), Heydari ve diğ. (2014^b) integrasyonun \mathbf{P} operasyonel matrisini

$$\begin{aligned} \int_0^x \mathbf{\Psi}(s) ds &\cong \mathbf{P}\mathbf{\Psi}(x) \\ \int_0^x \int_0^s \mathbf{\Psi}(w) dw ds &\cong \mathbf{P}^2\mathbf{\Psi}(x) \end{aligned}$$

olarak kullanmıştır. Burada $\mathbf{\Psi}(x)$ $2^k M \times 1$ vektör ve \mathbf{P} $2^k M \times 2^k M$ matristir. Bu metodun dezavantajlarından biri \mathbf{P} matrisinin hesaplanmasında bazı veriler gözden kaçırılmış olmasıdır. $\mathbf{\Psi}(x)$ 'in birinci ve ikinci integrasyonunda ortaya çıkan T_M ve T_{M+1} , \mathbf{P} ve \mathbf{P}^2 'nin oluşturulmasında kullanılmamıştır. İkinci integrasyonun

operasyonel matrisinin \mathbf{P}^2 olarak kullanıldığı, fakat direk integral hesapla bunun \mathbf{P}^2 'ye eşit olmadığı Çelik (2013^b) tarafından gösterilmiştir. Ayrıca Çelik (2013^b) $M = 2$ ve $k = 1$ için

$$\int_0^x \Psi(s) ds \cong \mathbf{P}\Psi(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{8} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{16} & 0 \end{bmatrix} \Psi(x)$$

$$\int_0^x \int_0^s \Psi(w) dw ds \cong \begin{bmatrix} \frac{3}{64} & \frac{\sqrt{2}}{32} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{16} \\ \frac{\sqrt{2}}{48} & -\frac{3}{128} & -\frac{\sqrt{2}}{96} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{64} & \frac{\sqrt{2}}{32} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{48} & -\frac{3}{128} \end{bmatrix} \Psi(x) \neq \mathbf{P}^2\Psi(x)$$

olduğunu göstermiştir.

Daha sonra Çelik (2018^b) integrasyonun operasyonel matrislerinin geliştirilmiş halini vermiştir. Bu tezde Çelik (2018^b) makalesindeki integrasyon matrisleri kullanılmıştır. $\Psi(x)$ 'in integrali

$$\int_0^x \Psi(s) ds = [p_{10}, p_{11}, \dots, p_{1M-1}, p_{20}, \dots, p_{2M-1}, \dots, p_{2^{k_0}}, \dots, p_{2^{k_M-1}}]^T = \mathbf{P}_1 \Psi_1(x)$$

olarak gösterilsin. Burada

$$\Psi_1(x) = [\psi_{10}, \psi_{11}, \dots, \psi_{1M}, \psi_{20}, \dots, \psi_{2M}, \dots, \psi_{2^{k_0}}, \dots, \psi_{2^{k_M}}]^T$$

ve

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{2^{k+1}} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{F}_1 & \mathbf{F}_1 & \dots & \mathbf{F}_1 & \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_1 & \mathbf{F}_1 & \dots & \mathbf{F}_1 & \mathbf{F}_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{F}_1 & \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{L}_1 & \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{L}_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{(-1)^{M-3}}{M-3} - \frac{(-1)^{M-1}}{M-1} \right) & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{2(M-3)} & 0 & \frac{1}{2(M-1)} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{(-1)^{M-3}}{M-3} - \frac{(-1)^{M-1}}{M-1} \right) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2(M-2)} & 0 & \frac{1}{2M} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1 - (-1)^{M-1}}{M-1} - \frac{1 - (-1)^{M-3}}{M-3} \right) & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1 - (-1)^M}{M} - \frac{1 - (-1)^{M-2}}{M-2} \right) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

$\Psi(x)$ 'in ikinci integrali

$$\int_0^x \int_0^{x_1} \Psi(s) ds dx_1 = \int_0^x \mathbf{P}_1 \Psi_1(x_1) dx_1 = \mathbf{P}_1 \int_0^x \Psi_1(x_1) dx_1 = \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(x)$$

olur.

$\Psi(x)$ 'in r -inci integrali

$$\int_0^x \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_{r-1}} \Psi(s) ds dx_{r-1} dx_{r-2} \dots dx_1 = \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \dots \mathbf{P}_r \Psi_r(x)$$

olur. Burada

$$\mathbf{P}_r = \frac{1}{2^{k+1}} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_r & \mathbf{F}_r & \mathbf{F}_r & \dots & \mathbf{F}_r & \mathbf{F}_r \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_r & \mathbf{F}_r & \dots & \mathbf{F}_r & \mathbf{F}_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{F}_r & \mathbf{F}_r \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{L}_r & \mathbf{F}_r \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{L}_r \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_r = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\sqrt{2}}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\sqrt{2}}{3} & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{6} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{(-1)^{M-3}}{M-3} - \frac{(-1)^{M-1}}{M-1} \right) & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{-1}{2(M-3)} & 0 & \frac{1}{2(M-1)} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{(-1)^{M-2}}{M-2} - \frac{(-1)^M}{M} \right) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{-1}{2(M-2)} & 0 & \frac{1}{2M} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{(-1)^{M-1}}{M-1} - \frac{(-1)^{M+1}}{M+1} \right) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{-1}{2(M-1)} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{(-1)^{M+r-3}}{M+r-3} - \frac{(-1)^{M+r-1}}{M+r-1} \right) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{-1}{2(M-3+r)} & 0 & \frac{1}{2(M-1+r)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_r = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1 - (-1)^{M-1}}{M-1} - \frac{1 - (-1)^{M-3}}{M-3} \right) & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1 - (-1)^M}{M} - \frac{1 - (-1)^{M-2}}{M-2} \right) & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1 - (-1)^{M+1}}{M+1} - \frac{1 - (-1)^{M-1}}{M-1} \right) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1 - (-1)^{M+r-1}}{M+r-1} - \frac{1 - (-1)^{M+r-3}}{M+r-3} \right) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$\mathbf{\Psi}_r(x) = [\psi_{10}, \psi_{11}, \dots, \psi_{1M+r-1}, \psi_{20}, \dots, \psi_{2M+r-1}, \dots, \psi_{2^k 0}, \dots, \psi_{2^k M+r-1}]^T$$

olur. \mathbf{L}_r ve \mathbf{F}_r 'nin boyutları $(M+r-1) \times (M+r)$ ve \mathbf{P}_r 'nin boyutu $2^k(M+r-1) \times 2^k(M+r)$ 'dir Çelik (2018^b).

3.3 Chebyshev Dalgacık Sıralama Yöntemi

Bir boyutlu lineer veya lineer olmayan diferansiyel denklem verilmiş olsun. Eğer diferansiyel denklem lineer değilse yarı lineerleştirme kullanılarak lineer hale getirilir. Diferansiyel denklemdeki en yüksek mertebeli ifade Chebyshev dalgacıkları cinsinden

$$y^{(r)}(x) = \sum_{n=1}^{2^k} \sum_{m=0}^{M-1} f_{nm} \psi_{nm}(x) = \mathbf{C}^T \mathbf{\Psi}(x)$$

şeklinde ifade edilir. Bu ifadenin 0'dan x 'e kadar ardışık integralleri alınarak

$$y^{(r-1)}(x) = \int_0^x \mathbf{C}^T \boldsymbol{\Psi}(s) ds + y^{(r-1)}(0) = \mathbf{C}^T \mathbf{P}_1 \boldsymbol{\Psi}_1(x) + y^{(r-1)}(0)$$

$$\begin{aligned} y^{(r-2)}(x) &= \int_0^x \mathbf{C}^T \mathbf{P}_1 \boldsymbol{\Psi}_1(s) ds + xy^{(r-1)}(0) + y^{(r-2)}(0) \\ &= \mathbf{C}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(x) + xy^{(r-1)}(0) + y^{(r-2)}(0) \end{aligned}$$

$$y^{(r-3)}(x) = \mathbf{C}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \boldsymbol{\Psi}_3(x) + \frac{x^2}{2} y^{(r-1)}(0) + xy^{(r-2)}(0) + y^{(r-2)}(0)$$

Böyle devam edilirse

$$\begin{aligned} y(x) &= \mathbf{C}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \dots \mathbf{P}_r \boldsymbol{\Psi}_r(x) + \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} y^{(r-1)}(0) + \frac{x^{r-2}}{(r-2)!} y^{(r-2)}(0) + \dots \\ &\quad + xy'(0) + y(0) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradaki $y(0), y'(0), \dots, y^{(r-1)}(0)$ ifadeler diferansiyel denklemlerle verilen koşullarla bulunur. Elde edilen bu denklemler diferansiyel denklemde yerine koyularak denklem düzenlenir.

Sıralama noktaları $T_{M+1}(2^{k+1}x - 2n + 1)$, Chebyshev polinomunun dönme noktaları olarak alınır ve

$$2^{k+1}x_{ni} - 2n + 1 = \cos \frac{((M+1) - i)\pi}{(M+1)}$$

veya

$$x_{ni} = \frac{1}{2^{k+1}} \left(2n - 1 + \cos \frac{((M+1) - i)\pi}{(M+1)} \right), i = 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, 2^k \quad (3.1)$$

şeklinde ifade edilir. Bu noktalar diferansiyel denklemin düzenlenmiş halinde $\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\Psi}_1, \boldsymbol{\Psi}_2, \dots, \boldsymbol{\Psi}_r$ ifadelerinde yerine yazılarak diferansiyel denklem

$$\mathbf{C}^T \mathbf{U} = \mathbf{B}$$

denklem sistemi halini alır. Burada \mathbf{U} , $2^k M \times 2^k M$ boyutunda bir matris, \mathbf{C} ve \mathbf{B} $2^k M \times 1$ boyutunda vektörlerdir. Denklem sistemi çözülerek Chebyshev dalgacıklar serisinin katsayılar matrisi olan \mathbf{C} matrisi bulunur. Böylelikle verilen koşullar altında denklemin yaklaşık çözümü elde edilmiş olur (Çelik 2018^b).

İki boyutlu diferansiyel denklemdeki en yüksek mertebeli ifadeden yola çıkarız.

$$u^{(p,q)}(x, y) = \sum_{n=1}^{2^k} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{r=1}^{2^k} \sum_{s=0}^{M-1} c_{nm}^{rs} \psi_{nm}(x) \psi_{rs}(y) = \boldsymbol{\Psi}^T(x) \mathbf{C} \boldsymbol{\Psi}(y)$$

şeklinde Chebyshev dalgacıkları cinsinden ifade edilir. Bu ifadenin 0'dan x 'e ve 0'dan y 'ye integralleri alınarak bir boyutludakine benzer şekilde denklemler elde edilir. Diferansiyel denklemlerle verilen sınır ve başlangıç koşulları yardımıyla denklemin çözümünde gereken ifadeler elde edilir. Bu ifadeler, diferansiyel denklemlerde yerine yazılır. Sıralama noktaları $\Psi, \Psi_1, \Psi_2, \dots$ ifadelerinde yerine yazılarak diferansiyel denklemler, denklemler sistemi haline alır. Bu denklemler sistemi çözülmesiyle \mathbf{C} matrisi bulunur. Yaklaşık çözüm hesaplanır.

3.4 Hata analizi

Lemma 3.4.1 Sürekli bir $f(x)$ fonksiyonun Chebyshev dalgacıklar açılımı düzgün yakınsaksa, bu açılım $f(x)$ fonksiyonuna yakınsar (Adibi ve Assari 2010).

İspat 3.4.1 $c_{nm} = \langle f_{nm}, \psi_{nm}(x) \rangle_{w_k}$ olmak üzere,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} \psi_{nm}(x)$$

olsun. Her iki tarafı $\psi_{pq}(x)w_k(x)$ ile çarpıp, 0'dan 1'e integralini alır ve daha sonra da düzgün yakınsaklığı kullanırsak

$$\begin{aligned} & \int_0^1 g(x) \psi_{pq}(x) w_k(x) dx \\ &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} \psi_{nm}(x) \psi_{pq}(x) w_k(x) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} \int_0^1 \psi_{nm}(x) \psi_{pq}(x) w_k(x) dx = c_{pq} \end{aligned}$$

elde ederiz.

Buradan $n = 1, 2, \dots$ ve $m = 0, 1, \dots$ için $\langle g(x), \psi_{nm}(x) \rangle_{w_k} = c_{nm}$ olduğu görülür. Sonuç olarak f ve g aynı Chebyshev dalgacıklar bazlarına göre Fourier açılımına sahiptir. Yani $0 \leq x \leq 1$ aralığında $f(x) = g(x)$ olur (Adibi ve Assari 2010).

Teorem 3.4.2 $f(x) \in L_w^2[0,1]$ ve ikinci türevi sınırlı $|f''(x)| \leq N$ olan bir fonksiyon Chebyshev dalgacıkların sonsuz toplamı şeklinde yazılırsa yazılan bu seri $f(x)$ e düzgün yakınsar (Adibi ve Assari 2010). Yani

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_{nm} \psi_{nm}(x)$$

olur.

İspat 3.4.2 $c_{nm} = \langle f_{nm}, \psi_{nm}(x) \rangle_{w_k}$ eşitliğinden,

$$\begin{aligned} c_{nm} &= \int_0^1 f(x) \psi_{nm}(x) w_k(x) dx \\ &= \int_{\frac{n-1}{2^{k-1}}}^{\frac{n}{2^{k-1}}} 2^{\frac{k}{2}} f(x) T_m(2^k x - 2n + 1) w(2^k x - 2n + 1) dx \end{aligned}$$

$m > 0$ ise $2^k x - 2n + 1 = \cos \theta$ yerine koyularak

$$\begin{aligned} c_{nm} &= \frac{1}{2^{k/2}} \int_0^\pi f\left(\frac{\cos \theta + 2n - 1}{2^k}\right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos m\theta d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2^{\frac{k}{2}} \sqrt{\pi}} f\left(\frac{\cos \theta + 2n - 1}{2^k}\right) \left(\frac{\sin m\theta}{m}\right) \Big|_0^\pi \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{2^{3k/2} m \sqrt{\pi}} \int_0^\pi f'\left(\frac{\cos \theta + 2n - 1}{2^k}\right) \sin m\theta \sin \theta d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2^{3k/2} m \sqrt{\pi}} f'\left(\frac{\cos \theta + 2n - 1}{2^k}\right) \left(\frac{\sin(m-1)\theta}{m-1} - \frac{\sin(m+1)\theta}{m+1}\right) \Big|_0^\pi \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{2^{5k/2} m \sqrt{2\pi}} \int_0^\pi f''\left(\frac{\cos \theta + 2n - 1}{2^k}\right) h_m(\theta) d\theta \end{aligned}$$

Burada

$$h_m(\theta) = \frac{\sin(m-1)\theta}{m-1} - \frac{\sin(m+1)\theta}{m+1}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} |c_{nm}| &= \left| \frac{\sqrt{2}}{2^{\frac{5k}{2}} m \sqrt{2\pi}} \int_0^\pi f''\left(\frac{\cos \theta + 2n - 1}{2^k}\right) h_m(\theta) d\theta \right| \\ &\leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2^{\frac{5k}{2}} m \sqrt{2\pi}} \right) \int_0^\pi \left| f''\left(\frac{\cos \theta + 2n - 1}{2^k}\right) h_m(\theta) \right| d\theta \\ &\leq \left(\frac{N}{2^{\frac{5k}{2}} m \sqrt{2\pi}} \right) \int_0^\pi |h_m(\theta)| d\theta \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi |h_m(\theta)| d\theta &= \int_0^\pi \left| \frac{\sin(m-1)\theta}{m-1} - \frac{\sin(m+1)\theta}{m+1} \right| d\theta \\
&\leq \int_0^\pi \left| \frac{\sin(m-1)\theta}{m-1} \right| + \left| \frac{\sin(m+1)\theta}{m+1} \right| d\theta \\
&\leq \frac{2m\pi}{(m^2-1)}
\end{aligned}$$

olur. $n \leq 2^{k-1}$ iken,

$$|c_{nm}| < \frac{\sqrt{2\pi}N}{(2n)^{\frac{5}{2}}(m^2-1)}$$

elde ederiz. Eğer $m = 1$ ise

$$\begin{aligned}
c_{nm} &= \frac{\sqrt{2}}{2^{3k/2}m\sqrt{\pi}} f' \left(\frac{\cos \theta + 2n - 1}{2^k} \right) \left(\frac{\sin(m-1)\theta}{m-1} - \frac{\sin(m+1)\theta}{m+1} \right) \Bigg|_0^\pi \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}}{2^{5k/2}m\sqrt{2\pi}} \int_0^\pi f'' \left(\frac{\cos \theta + 2n - 1}{2^k} \right) h_m(\theta) d\theta
\end{aligned}$$

denklemini kullanarak

$$|c_{n1}| < \frac{\sqrt{2\pi}}{(2n)^{\frac{3}{2}}} \max_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)|$$

olur. $\sum_{n=1}^\infty \sum_{m=1}^\infty c_{nm}$ yakınsaktır. $m = 0$ için $\{\psi_{n0}\}_{n=1}^\infty$ $w(t)$ ağırlık fonksiyonuna dayanan Haar ölçek fonksiyonuyla oluşturulmuş ortogonal sistem olduğundan, yani $\sum_{n=1}^\infty c_{n0}\psi_{n0}$ yakınsaktır (Daubechies 1992). Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=1}^\infty \sum_{m=0}^\infty c_{nm}\psi_{nm}(x) \right| &\leq \left| \sum_{n=1}^\infty c_{n0}\psi_{n0} \right| + \sum_{n=1}^\infty \sum_{m=1}^\infty |c_{nm}||\psi_{nm}(x)| \\
&\leq \left| \sum_{n=1}^\infty c_{n0}\psi_{n0} \right| + \sum_{n=1}^\infty \sum_{m=1}^\infty |c_{nm}| < \infty
\end{aligned}$$

olur. “Lemma 3.4.1” kullanılarak $\sum_{n=1}^\infty \sum_{m=0}^\infty c_{nm}\psi_{nm}(x)$ serisinin $f(x)$ 'e düzgün yakınsak olduğu görülür (Adibi ve Assari 2010).

Kesilmiş Chebyshev dalgacıkları serisinin çözüme yaklaştığı

$$E(x) = |y(x) - \mathbf{C}^T \mathbf{\Psi}(x)|$$

hata fonksiyonu incelenerek bulunur. Aşağıdaki teorem hata fonksiyonunun sınırlı olduğunu yani kesilmiş Chebyshev dalgacıkları serisinin çözüme yaklaştığını ifade eder.

Teorem 3.4.3 $y(x) \in C^m[0,1]$ ve $\mathbf{C}^T \Psi(x)$ Chebyshev Dalgacık Sıralama Metodu kullanılan problemin yaklaşık çözümü olsun. Hata fonksiyonu şu şekilde sınırlıdır (Yang ve Hou 2013):

$$E(x) \leq \left\| \frac{2}{m! 4^m 2^{m(k-1)}} \max_{x \in [0,1]} |y^{(m)}(x)| \right\|^2.$$

İspat 3.4.3 İç çarpım uzayında norm tanımını kullanarak

$$\|E(x)\|^2 = \int_0^1 [u(x) - \mathbf{C}^T \Psi(x)]^2 dx$$

elde ederiz. $[0,1]$ aralığı $I_n = \left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right]$, $n = 1, 2, \dots, 2^{k-1}$ olmak üzere 2^{k-1} alt aralığa bölünsün.

$$\begin{aligned} \|E(x)\|^2 &= \int_0^1 [y(x) - \mathbf{C}^T \Psi(x)]^2 dx \\ &= \sum_{k=1}^{2^{k-1}} \int_{(n-1)/2^{k-1}}^{n/2^{k-1}} [y(x) - \mathbf{C}^T \Psi(x)]^2 dt \\ &\leq \sum_{k=1}^{2^{k-1}} \int_{(n-1)/2^{k-1}}^{n/2^{k-1}} [y(x) - P_m(x)]^2 dt \end{aligned}$$

Burada $P_m(x)$ m -inci dereceden

$$|y(x) - P_m(x)| \leq \frac{2}{m! 4^m 2^{m(k-1)}} \max_{x \in I_n} |y^{(m)}(x)|$$

ifadesini I_n aralıklarında sağlayan herhangi bir polinomdur.

$$\begin{aligned} \|E(x)\|^2 &\leq \sum_{k=1}^{2^{k-1}} \int_{(n-1)/2^{k-1}}^{n/2^{k-1}} [y(x) - P_m(x)]^2 dt \\ &\leq \sum_{k=1}^{2^{k-1}} \int_{(n-1)/2^{k-1}}^{n/2^{k-1}} \left[\frac{2}{m! 4^m 2^{m(k-1)}} \max_{x \in I_n} |y^{(m)}(x)| \right]^2 dt \\ &\leq \sum_{k=1}^{2^{k-1}} \int_{(n-1)/2^{k-1}}^{n/2^{k-1}} \left[\frac{2}{m! 4^m 2^{m(k-1)}} \max_{x \in [0,1]} |y^{(m)}(x)| \right]^2 dt \\ &= \int_0^1 \left[\frac{2}{m! 4^m 2^{m(k-1)}} \max_{x \in [0,1]} |y^{(m)}(x)| \right]^2 dt \\ &= \left[\frac{2}{m! 4^m 2^{m(k-1)}} \max_{x \in [0,1]} |y^{(m)}(x)| \right]^2. \end{aligned}$$

4. YAKLAŞIK YÖNTEMİN UYGULANMASI

4.1 İkinci Mertebeden İki Boyutlu Denklem İçin Chebyshev Dalgacık Sıralama Yöntemi

Aşağıdaki ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemi göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} A_1(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_2(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_3(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_4(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \\ + A_5(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + A_6(x, y) u = G(x, y) \end{aligned} \quad (4.1)$$

denkleminde $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ ve G ; $a \leq x, y \leq b$ aralığındaki x ve y 'ye bağlı fonksiyonlardır. Herhangi bir $a \leq z, t \leq b$ aralığı $z = (b - a)x + a$ ve $t = (b - a)y + a$ ifadeleri yardımıyla $0 \leq x, y \leq 1$ aralığına dönüştürülebilir.

(4.1) denklemi ve

$$u(x, 0) = f_0(x), u(x, 1) = f_1(x), u(0, y) = g_0(y), u(1, y) = g_1(y)$$

sınır koşulları verilmiş olsun.

$u^{(2,2)}(x, y)$; c_{nm}^{rs} katsayılar, $\psi_{nm}(x)$ ve $\psi_{rs}(y)$ Chebyshev dalgacıklar olmak üzere

$$u^{(2,2)}(x, y) = \sum_{n=1}^{2^k} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{r=1}^{2^k} \sum_{s=0}^{M-1} c_{nm}^{rs} \psi_{nm}(x) \psi_{rs}(y)$$

biçiminde yazılabilir. Bu ifadenin matris gösterimi

$$u^{(2,2)}(x, y) = \mathbf{\Psi}^T(x) \mathbf{C} \mathbf{\Psi}(y) \quad (4.2)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} \mathbf{\Psi}^T(x) &= [\psi_{10}(x), \psi_{11}(x), \dots, \psi_{1M-1}(x), \psi_{20}(x), \dots, \psi_{2M-1}(x), \dots, \psi_{2^k 0}(x), \dots, \psi_{2^k M-1}(x)] \\ \mathbf{\Psi}(y) &= [\psi_{10}(y), \psi_{11}(y), \dots, \psi_{1M-1}(y), \psi_{20}(y), \dots, \psi_{2M-1}(y), \dots, \psi_{2^k 0}(y), \dots, \psi_{2^k M-1}(y)]^T \end{aligned}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{10}^{10} & c_{10}^{11} & \dots & c_{10}^{1(M-1)} & c_{10}^{20} & \dots & c_{10}^{2(M-1)} & \dots & c_{10}^{2k_0} & \dots & c_{10}^{2k(M-1)} \\ c_{11}^{10} & c_{11}^{11} & \dots & c_{11}^{1(M-1)} & c_{11}^{20} & \dots & c_{11}^{2(M-1)} & \dots & c_{11}^{2k_0} & \dots & c_{11}^{2k(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1(M-1)}^{10} & c_{1(M-1)}^{11} & \dots & c_{1(M-1)}^{1(M-1)} & c_{1(M-1)}^{20} & \dots & c_{1(M-1)}^{2(M-1)} & \dots & c_{1(M-1)}^{2k_0} & \dots & c_{1(M-1)}^{2k(M-1)} \\ c_{20}^{10} & c_{20}^{11} & \dots & c_{20}^{1(M-1)} & c_{20}^{20} & \dots & c_{20}^{2(M-1)} & \dots & c_{20}^{2k_0} & \dots & c_{20}^{2k(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{2(M-1)}^{10} & c_{2(M-1)}^{11} & \dots & c_{2(M-1)}^{1(M-1)} & c_{2(M-1)}^{20} & \dots & c_{2(M-1)}^{2(M-1)} & \dots & c_{2(M-1)}^{2k_0} & \dots & c_{2(M-1)}^{2k(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{2^{k_0}}^{10} & c_{2^{k_0}}^{11} & \dots & c_{2^{k_0}}^{1(M-1)} & c_{2^{k_0}}^{20} & \dots & c_{2^{k_0}}^{2(M-1)} & \dots & c_{2^{k_0}}^{2k_0} & \dots & c_{2^{k_0}}^{2k(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{2^k(M-1)}^{10} & c_{2^k(M-1)}^{11} & \dots & c_{2^k(M-1)}^{1(M-1)} & c_{2^k(M-1)}^{20} & \dots & c_{2^k(M-1)}^{2(M-1)} & \dots & c_{2^k(M-1)}^{2k_0} & \dots & c_{2^k(M-1)}^{2k(M-1)} \end{bmatrix}$$

dir. $k = 1$ ve $M = 2$ için doğruluğunu gösterecek olursak;

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^2 \sum_{m=0}^1 \sum_{r=1}^2 \sum_{s=0}^1 c_{nm}^{rs} \psi_{nm}(x) \psi_{rs}(y) \\ &= \sum_{n=1}^2 \sum_{m=0}^1 \sum_{r=1}^2 [c_{nm}^{r0} \psi_{nm}(x) \psi_{r0}(y) + c_{nm}^{r1} \psi_{nm}(x) \psi_{r1}(y)] \\ &= \sum_{n=1}^2 \sum_{m=0}^1 [c_{nm}^{10} \psi_{nm}(x) \psi_{10}(y) + c_{nm}^{11} \psi_{nm}(x) \psi_{11}(y) + c_{nm}^{20} \psi_{nm}(x) \psi_{20}(y) \\ &+ c_{nm}^{21} \psi_{nm}(x) \psi_{21}(y)] \\ &= \sum_{n=1}^2 [c_{n0}^{10} \psi_{n0}(x) \psi_{10}(y) + c_{n0}^{11} \psi_{n0}(x) \psi_{11}(y) + c_{n0}^{20} \psi_{n0}(x) \psi_{20}(y) \\ &+ c_{n0}^{21} \psi_{n0}(x) \psi_{21}(y) + c_{n1}^{10} \psi_{n1}(x) \psi_{10}(y) + c_{n1}^{11} \psi_{n1}(x) \psi_{11}(y) + c_{n1}^{20} \psi_{n1}(x) \psi_{20}(y) \\ &+ c_{n1}^{21} \psi_{n1}(x) \psi_{21}(y)] \\ &= c_{10}^{10} \psi_{10}(x) \psi_{10}(y) + c_{10}^{11} \psi_{10}(x) \psi_{11}(y) + c_{10}^{20} \psi_{10}(x) \psi_{20}(y) + c_{10}^{21} \psi_{10}(x) \psi_{21}(y) \\ &+ c_{11}^{10} \psi_{11}(x) \psi_{10}(y) + c_{11}^{11} \psi_{11}(x) \psi_{11}(y) + c_{11}^{20} \psi_{11}(x) \psi_{20}(y) + c_{11}^{21} \psi_{11}(x) \psi_{21}(y) \\ &+ c_{20}^{10} \psi_{20}(x) \psi_{10}(y) + c_{20}^{11} \psi_{20}(x) \psi_{11}(y) + c_{20}^{20} \psi_{20}(x) \psi_{20}(y) + c_{20}^{21} \psi_{20}(x) \psi_{21}(y) \\ &+ c_{21}^{10} \psi_{21}(x) \psi_{10}(y) + c_{21}^{11} \psi_{21}(x) \psi_{11}(y) + c_{21}^{20} \psi_{21}(x) \psi_{20}(y) + c_{21}^{21} \psi_{21}(x) \psi_{21}(y) \\ &= [\psi_{10}(x) \quad \psi_{11}(x) \quad \psi_{20}(x) \quad \psi_{21}(x)] \begin{bmatrix} c_{10}^{10} & c_{10}^{11} & c_{10}^{20} & c_{10}^{21} \\ c_{11}^{10} & c_{11}^{11} & c_{11}^{20} & c_{11}^{21} \\ c_{20}^{10} & c_{20}^{11} & c_{20}^{20} & c_{20}^{21} \\ c_{21}^{10} & c_{21}^{11} & c_{21}^{20} & c_{21}^{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{10}(y) \\ \psi_{11}(y) \\ \psi_{20}(y) \\ \psi_{21}(y) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{\Psi}^T(x) \mathbf{C} \mathbf{\Psi}(y) \end{aligned}$$

(4.2) denklemini x 'e göre 0'dan x 'e, y 'ye göre 0'dan y 'e integralleyerek aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$$u^{(2,2)}(x, y) = \mathbf{\Psi}^T(x) \mathbf{C} \mathbf{\Psi}(y)$$

$$u^{(1,2)}(x, y) = (\mathbf{P}_1 \mathbf{\Psi}_1)^T(x) \mathbf{C} \mathbf{\Psi}(y) + u^{(1,2)}(0, y) \quad (4.3)$$

$$u^{(0,2)}(x, y) = (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2)^T(x) \mathbf{C} \mathbf{\Psi}(y) + xu^{(1,2)}(0, y) + u^{(0,2)}(0, y) \quad (4.4)$$

$$u^{(2,1)}(x, y) = \mathbf{\Psi}^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{\Psi}_1(y) + u^{(2,1)}(x, 0) \quad (4.5)$$

$$u^{(2,0)}(x, y) = \mathbf{\Psi}^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2(y) + yu^{(2,1)}(x, 0) + u^{(2,0)}(x, 0) \quad (4.6)$$

$$u^{(1,1)}(x, y) = (\mathbf{P}_1 \mathbf{\Psi}_1)^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{\Psi}_1(y) + u^{(1,1)}(x, 0) - u^{(1,1)}(0,0) + u^{(1,1)}(0, y) \quad (4.7)$$

$$u^{(1,0)}(x, y) = (\mathbf{P}_1 \mathbf{\Psi}_1)^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2(y) + y[u^{(1,1)}(x, 0) - u^{(1,1)}(0,0)] + u^{(1,0)}(x, 0) - u^{(1,0)}(0,0) + u^{(1,0)}(0, y) \quad (4.8)$$

$$u^{(0,1)}(x, y) = (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2)^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{\Psi}_1(y) + u^{(0,1)}(x, 0) - u^{(0,1)}(0,0) + x[u^{(1,1)}(0, y) - u^{(1,1)}(0,0)] + u^{(0,1)}(0, y) \quad (4.9)$$

$$u^{(0,0)}(x, y) = (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2)^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2(y) + y[u^{(0,1)}(x, 0) - u^{(0,1)}(0,0)] - xyu^{(1,1)}(0,0) + x[u^{(1,0)}(0, y) - u^{(1,0)}(0,0)] + u^{(0,0)}(0, y) - u^{(0,0)}(0,0) + u^{(0,0)}(x, 0) \quad (4.10)$$

Verilen sınır koşullarından;

$$u^{(0,0)}(x, 0) = f_0(x)$$

$$u^{(0,0)}(x, 1) = f_1(x)$$

$$u^{(0,0)}(0, y) = g_0(y)$$

$$u^{(0,0)}(1, y) = g_1(y)$$

$$u^{(1,0)}(x, 0) = f_0'(x)$$

$$u^{(1,0)}(x, 1) = f_1'(x)$$

$$u^{(0,1)}(0, y) = g_0'(y)$$

$$u^{(0,1)}(1, y) = g_1'(y)$$

$$u^{(2,0)}(x, 0) = f_0''(x)$$

$$u^{(2,0)}(x, 1) = f_1''(x)$$

$$u^{(0,2)}(0, y) = g_0''(y)$$

$$u^{(0,2)}(1, y) = g_1''(y)$$

$$u^{(0,0)}(1,1) = f_1(1) = g_1(1)$$

$$u^{(0,1)}(1,0) = g_1'(0)$$

$$u^{(0,1)}(0,1) = g_0'(0)$$

$$u^{(1,0)}(0,1) = f_1'(0)$$

$$u^{(1,0)}(0,0) = f_0'(0)$$

$$u^{(0,0)}(0,1) = f_1(0) = g_0(1)$$

$$u^{(0,0)}(1,0) = f_0(1) = g_1(0)$$

$$u^{(0,0)}(0,0) = f_0(0) = g_0(0)$$

elde edilir. Sınır değerleri göz önünde bulundurularak (4.10) denklemini yeniden yazarsak

$$\begin{aligned} u^{(0,0)}(x,y) &= (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{\Psi}_2)^T(x)\mathbf{C}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{\Psi}_2(y) + y \cdot [u^{(0,1)}(x,0) - u^{(0,1)}(0,0)] \\ &\quad - x \cdot y \cdot u^{(1,1)}(0,0) + x \cdot [u^{(1,0)}(0,y) - u^{(1,0)}(0,0)] + g_0(y) - f_0(0) \\ &\quad + f_0(x) \end{aligned}$$

olur. $x = 1, y = 1$ yazarak

$$\begin{aligned} u^{(0,0)}(1,1) &= (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{\Psi}_2)^T(1)\mathbf{C}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{\Psi}_2(1) + [u^{(0,1)}(1,0) - u^{(0,1)}(0,0)] - u^{(1,1)}(0,0) \\ &\quad + [u^{(1,0)}(0,1) - u^{(1,0)}(0,0)] + u^{(0,0)}(0,1) - u^{(0,0)}(0,0) + u^{(0,0)}(1,0) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} u^{(1,1)}(0,0) &= (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{\Psi}_2)^T(1)\mathbf{C}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{\Psi}_2(1) + g_1'(0) - g_0'(0) \\ &\quad + f_1'(0) - f_0'(0) + f_1(0) - f_0(0) + f_0(1) \quad (4.11) \\ &\quad - f_1(1) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.10) denkleminde $y = 1$ yazarak

$$\begin{aligned} u^{(0,0)}(x,1) &= f_1(x) \\ &= (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{\Psi}_2)^T(x)\mathbf{C}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{\Psi}_2(1) + [u^{(0,1)}(x,0) - u^{(0,1)}(0,0)] \\ &\quad - xu^{(1,1)}(0,0) + x[u^{(1,0)}(0,1) - u^{(1,0)}(0,0)] + u^{(0,0)}(0,1) \\ &\quad - u^{(0,0)}(0,0) + u^{(0,0)}(x,0) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} u^{(0,1)}(x,0) &= -(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{\Psi}_2)^T(x)\mathbf{C}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{\Psi}_2(1) + g_0'(0) + xu^{(1,1)}(0,0) \\ &\quad - x[f_1'(0) - f_0'(0)] - f_1(0) + f_0(0) - f_0(x) + f_1(x) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.11) denklemini yerine yazarsak

$$\begin{aligned} u^{(0,1)}(x,0) &= -(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{\Psi}_2)^T(x)\mathbf{C}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{\Psi}_2(1) + g_0'(0) \\ &\quad + x[(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{\Psi}_2)^T(1)\mathbf{C}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{\Psi}_2(1) + g_1'(0) - g_0'(0) \\ &\quad + f_1(0) - f_0(0) + f_0(1) - f_1(1)] - f_1(0) \quad (4.12) \\ &\quad + f_0(0) - f_0(x) + f_1(x) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.10) denkleminde $x = 1$ yazarak

$$\begin{aligned}
u^{(0,0)}(1, y) &= (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(1) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(y) + y[u^{(0,1)}(1,0) - u^{(0,1)}(0,0)] \\
&\quad - yu^{(1,1)}(0,0) + [u^{(1,0)}(0, y) - u^{(1,0)}(0,0)] + u^{(0,0)}(0, y) \\
&\quad - u^{(0,0)}(0,0) + u^{(0,0)}(1,0)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned}
g_1(y) &= (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(1) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(y) + y[g_1'(0) - g_0'(0)] - yu^{(1,1)}(0,0) \\
&\quad + u^{(1,0)}(0, y) - f_0'(0) + g_0(y) - f_0(0) + f_0(1)
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
u^{(1,0)}(0, y) &= -(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(1) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(y) + y[u^{(1,1)}(0,0) - g_1'(0) + g_0'(0)] \\
&\quad + f_0'(0) - g_0(y) + f_0(0) - f_0(1) + g_1(y)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.11) denklemini yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
u^{(1,0)}(0, y) &= -(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(1) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(y) \\
&\quad + y[(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(1) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(1) + f_1'(0) - f_0'(0) \\
&\quad + f_1(0) - f_0(0) + f_0(1) - f_1(1)] + f_0'(0) \quad (4.13) \\
&\quad - g_0(y) + f_0(0) - f_0(1) + g_1(y)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.9) denkleminde $x = 1$ yazarak

$$\begin{aligned}
u^{(0,1)}(1, y) &= (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(1) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \boldsymbol{\Psi}_1(y) + u^{(0,1)}(1,0) - u^{(0,1)}(0,0) \\
&\quad + [u^{(1,1)}(0, y) - u^{(1,1)}(0,0)] + u^{(0,1)}(0, y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned}
g_1'(y) &= (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(1) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \boldsymbol{\Psi}_1(y) + g_1'(0) - g_0'(0) - u^{(1,1)}(0,0) + u^{(1,1)}(0, y) \\
&\quad + g_0'(y)
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
u^{(1,1)}(0, y) &= -(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(1) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \boldsymbol{\Psi}_1(y) - g_1'(0) + g_0'(0) + g_1'(y) \\
&\quad - g_0'(y) + u^{(1,1)}(0,0)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.11) denklemini yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
u^{(1,1)}(0, y) &= -(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(1) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \boldsymbol{\Psi}_1(y) \\
&\quad + (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(1) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(1) + g_1'(y) - g_0'(y) \\
&\quad + f_1'(0) - f_0'(0) + f_1(0) - f_0(0) + f_0(1) - f_1(1) \quad (4.14)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.8) denkleminde $y = 1$ yazarak

$$\begin{aligned}
u^{(1,0)}(x, 1) &= (\mathbf{P}_1 \boldsymbol{\Psi}_1)^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(1) + [u^{(1,1)}(x, 0) - u^{(1,1)}(0,0)] + u^{(1,0)}(x, 0) \\
&\quad - u^{(1,0)}(0,0) + u^{(1,0)}(0,1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse

$$f_1'(x) = (\mathbf{P}_1 \boldsymbol{\Psi}_1)^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(1) + u^{(1,1)}(x, 0) - u^{(1,1)}(0, 0) + f_0'(x) - f_0'(0) + f_1'(0)$$

olur. Buradan

$$u^{(1,1)}(x, 0) = -(\mathbf{P}_1 \boldsymbol{\Psi}_1)^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(1) + u^{(1,1)}(0, 0) + f_1'(x) - f_0'(x) + f_0'(0) - f_1'(0)$$

elde edilir. (4.11) denklemini yerine yazarsak

$$\begin{aligned} u^{(1,1)}(x, 0) &= -(\mathbf{P}_1 \boldsymbol{\Psi}_1)^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(1) \\ &\quad + (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(1) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(1) + f_1'(x) - f_0'(x) \\ &\quad + g_1'(0) - g_0'(0) + f_1(0) - f_0(0) + f_0(1) - f_1(1) \end{aligned} \quad (4.15)$$

elde edilir. (4.4) denklemde $x = 1$ yazarak

$$u^{(0,2)}(1, y) = (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(1) \mathbf{C} \boldsymbol{\Psi}(y) + u^{(1,2)}(0, y) + u^{(0,2)}(0, y)$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse

$$g_1''(y) = (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(1) \mathbf{C} \boldsymbol{\Psi}(y) + u^{(1,2)}(0, y) + g_0''(y)$$

olur. Buradan

$$u^{(1,2)}(0, y) = -(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(1) \mathbf{C} \boldsymbol{\Psi}(y) + g_1''(y) - g_0''(y) \quad (4.16)$$

elde edilir. (4.6) denklemde $y = 1$ yazarak

$$u^{(2,0)}(x, 1) = \boldsymbol{\Psi}^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(1) + u^{(2,1)}(x, 0) + u^{(2,0)}(x, 0)$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse

$$f_1''(x) = \boldsymbol{\Psi}^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(1) + u^{(2,1)}(x, 0) + f_0''(x)$$

olur. Buradan

$$u^{(2,1)}(x, 0) = -\boldsymbol{\Psi}^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(1) + f_1''(x) - f_0''(x) \quad (4.17)$$

elde edilir. (4.3) denklemde (4.16) denklemi yerine yazılırsa

$$u^{(1,2)}(x, y) = (\mathbf{P}_1 \boldsymbol{\Psi}_1)^T(x) \mathbf{C} \boldsymbol{\Psi}(y) - (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(1) \mathbf{C} \boldsymbol{\Psi}(y) + g_1''(y) - g_0''(y)$$

elde edilir. (4.4) denklemde (4.16) denklemi yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} u^{(0,2)}(x, y) &= (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(x) \mathbf{C} \boldsymbol{\Psi}(y) + x[-(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(1) \mathbf{C} \boldsymbol{\Psi}(y) + g_1''(y) - g_0''(y)] \\ &\quad + g_0''(y) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.5) denklemde (4.17) denklemi yerine yazılırsa

$$u^{(2,1)}(x, y) = \boldsymbol{\Psi}^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \boldsymbol{\Psi}_1(y) - \boldsymbol{\Psi}^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(1) + f_1''(x) - f_0''(x)$$

elde edilir. (4.6) denklemde (4.17) denklemi yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} u^{(2,0)}(x, y) &= \boldsymbol{\Psi}^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(y) + y[-\boldsymbol{\Psi}^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(1) + f_1''(x) - f_0''(x)] \\ &\quad + f_0''(x) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.7) denklemde (4.15), (4.11) ve (4.14) denklemleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
u^{(1,1)}(x, y) &= (\mathbf{P}_1 \boldsymbol{\Psi}_1)^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \boldsymbol{\Psi}_1(y) - (\mathbf{P}_1 \boldsymbol{\Psi}_1)^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(1) \\
&\quad - (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(1) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \boldsymbol{\Psi}_1(y) + (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(1) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(1) + f_1'(x) \\
&\quad - f_0'(x) + g_1'(y) - g_0'(y) + f_1(0) - f_0(0) + f_0(1) - f_1(1)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.8) denkleminde (4.15), (4.11) ve (4.13) denklemleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
u^{(1,0)}(x, y) &= (\mathbf{P}_1 \boldsymbol{\Psi}_1)^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(y) - (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(1) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(y) \\
&\quad + y[-(\mathbf{P}_1 \boldsymbol{\Psi}_1)^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(1) + (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(1) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(1) \\
&\quad + f_1(0) - f_0(0) + f_0(1) - f_1(1) + f_1'(x) - f_0'(x)] + f_0'(x) + g_1(y) \\
&\quad - g_0(y) + f_0(0) - f_0(1)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.9) denkleminde (4.12), (4.14) ve (4.11) denklemleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
u^{(0,1)}(x, y) &= (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \boldsymbol{\Psi}_1(y) - (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(1) \\
&\quad + x[(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(1) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(1) - (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(1) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \boldsymbol{\Psi}_1(y) + f_0(1) \\
&\quad - f_1(1) + g_1'(y) - g_0'(y) + f_1(0) - f_0(0)] - f_1(0) + f_0(0) - f_0(x) \\
&\quad + f_1(x) + g_0'(y)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.12), (4.11) ve (4.13) denklemleri, (4.10) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
u^{(0,0)}(x, y) &= (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(y) + xy[(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(1) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(1) + f_1(0) \\
&\quad - f_0(0) + f_0(1) - f_1(1)] \\
&\quad + y[-(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(1) - f_1(0) + f_0(0) - f_0(x) + f_1(x)] \\
&\quad + x[-(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(1) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(y) - g_0(y) + f_0(0) - f_0(1) + g_1(y)] \\
&\quad + g_0(y) + f_0(0) - f_0(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen bu ifadeler;

$$u^{(2,2)}(x, y) = \boldsymbol{\Psi}^T(x) \mathbf{C} \boldsymbol{\Psi}(y)$$

$$u^{(1,2)}(x, y) = (\mathbf{P}_1 \boldsymbol{\Psi}_1)^T(x) \mathbf{C} \boldsymbol{\Psi}(y) - (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(1) \mathbf{C} \boldsymbol{\Psi}(y) + g_1''(y) - g_0''(y)$$

$$\begin{aligned}
u^{(0,2)}(x, y) &= (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(x) \mathbf{C} \boldsymbol{\Psi}(y) + x[-(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(1) \mathbf{C} \boldsymbol{\Psi}(y) + g_1''(y) - g_0''(y)] \\
&\quad + g_0''(y)
\end{aligned}$$

$$u^{(2,1)}(x, y) = \boldsymbol{\Psi}^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \boldsymbol{\Psi}_1(y) - \boldsymbol{\Psi}^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(1) + f_1''(x) - f_0''(x)$$

$$\begin{aligned}
u^{(2,0)}(x, y) &= \boldsymbol{\Psi}^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(y) + y[-\boldsymbol{\Psi}^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(1) + f_1''(x) - f_0''(x)] \\
&\quad + f_0''(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^{(1,1)}(x, y) &= (\mathbf{P}_1 \Psi_1)^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \Psi_1(y) - (\mathbf{P}_1 \Psi_1)^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1) \\
&\quad - (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2)^T(1) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \Psi_1(y) + (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2)^T(1) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1) + f_1'(x) \\
&\quad - f_0'(x) + g_1'(y) - g_0'(y) + f_1(0) - f_0(0) + f_0(1) - f_1(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^{(1,0)}(x, y) &= (\mathbf{P}_1 \Psi_1)^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(y) - (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2)^T(1) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(y) \\
&\quad + y [-(\mathbf{P}_1 \Psi_1)^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1) + (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2)^T(1) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1) \\
&\quad + f_1(0) - f_0(0) + f_0(1) - f_1(1) + f_1'(x) - f_0'(x)] + f_0'(x) + g_1(y) \\
&\quad - g_0(y) + f_0(0) - f_0(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^{(0,1)}(x, y) &= (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2)^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \Psi_1(y) - (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2)^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1) \\
&\quad + x [(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2)^T(1) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1) - (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2)^T(1) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \Psi_1(y) + f_0(1) \\
&\quad - f_1(1) + g_1'(y) - g_0'(y) + f_1(0) - f_0(0)] - f_1(0) + f_0(0) - f_0(x) \\
&\quad + f_1(x) + g_0'(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^{(0,0)}(x, y) &= (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2)^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(y) + xy [(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2)^T(1) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1) + f_1(0) \\
&\quad - f_0(0) + f_0(1) - f_1(1)] \\
&\quad + y [-(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2)^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1) - f_1(0) + f_0(0) - f_0(x) + f_1(x)] \\
&\quad + x [-(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2)^T(1) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(y) - g_0(y) + f_0(0) - f_0(1) + g_1(y)] \\
&\quad + g_0(y) + f_0(0) - f_0(x)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu ifadeler (4.1) ikinci mertebeden lineer kısmi diferansiyel denkleminde yerine koyularak **ACB** formunda matrislerin toplamı elde edilir. **ACB** formundaki bu ifadeler $a_{1,j} \in \mathbf{A}$ ve $b_{k,1} \in \mathbf{B}$ olmak üzere

$$x_{1,(j-1)N+k} = a_{1,j} b_{k,1}, \quad j, k = 1, 2, \dots, 2^k M$$

(Keşan 2003) ve

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= [c_{10}^{10} c_{10}^{11} \dots c_{10}^{1(M-1)} \dots c_{10}^{2^k 0} c_{10}^{2^k 1} \dots c_{10}^{2^k(M-1)} c_{11}^{10} c_{11}^{11} \dots c_{11}^{1(M-1)} \dots c_{11}^{2^k 0} c_{11}^{2^k 1} \dots c_{11}^{2^k(M-1)} \\
&\quad \dots c_{1(M-1)}^{10} c_{1(M-1)}^{11} \dots c_{1(M-1)}^{1(M-1)} \dots c_{1(M-1)}^{2^k 0} \dots c_{1(M-1)}^{2^k(M-1)} c_{20}^{10} \dots c_{2(M-1)}^{2^k(M-1)} \dots c_{20}^{10} \dots c_{2(M-1)}^{2^k(M-1)}]^T \\
\mathbf{X} &= [x_{1,q}], \quad q = 1, 2, \dots, (2^k M)^2
\end{aligned}$$

olmak üzere **XD** formuna dönüştürülebilir. Bu **XD** formundaki matrisler toplanarak (4.1) denklemi

$$\tilde{\mathbf{W}}(x, y) \mathbf{D} = \tilde{\mathbf{G}}(x, y)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\tilde{\mathbf{W}} = [\tilde{w}_{1,q}], q = 1, 2, \dots, (2^k M)^2$ şeklindedir, ayrıca $\tilde{w}_{1,q}$ ler x ve y ye bağlı fonksiyonlardır.

$$\left. \begin{aligned} x_{ni} &= \frac{1}{2^{k+1}} \left(2n - 1 + \cos \frac{((M+1)-i)\pi}{(M+1)} \right) \\ y_{nj} &= \frac{1}{2^{k+1}} \left(2n - 1 + \cos \frac{((M+1)-j)\pi}{(M+1)} \right) \end{aligned} \right\}, i, j = 1, 2, \dots, M, n = 1, 2, \dots, 2^k$$

Chebyshev sıralama noktalarının $\tilde{\mathbf{W}}(x, y)\mathbf{D} = \tilde{\mathbf{G}}(x, y)$ denkleminde yerine yazılmasıyla $\mathbf{UD} = \mathbf{G}$ denklem sistemi elde edilir. Burada \mathbf{U} $(2^k M)^2 \times (2^k M)^2$ boyutlu matris, \mathbf{D} ve \mathbf{G} $(2^k M)^2 \times 1$ boyutlu vektörlerdir. Bu denklem sistemi çözülerek \mathbf{D} vektörü ve böylece Chebyshev dalgacık serisinin katsayıları bulunur.

4.1.1 Chebyshev Dalgacık Sıralama Metodunun Magnetohidrodinamik akı denkleminde uygulanması

Magnetohidrodinamik akı (Magnetohydrodynamic flow) denkleminin sınır değer koşullarıyla; sınırlarda $V = B = 0$ ve bölgede

$$\begin{cases} \nabla^2 V + H_{ax^*} \frac{\partial B}{\partial x^*} + H_{ay^*} \frac{\partial B}{\partial y^*} = -1 \\ \nabla^2 B - H_{ax^*} \frac{\partial V}{\partial x^*} - H_{ay^*} \frac{\partial V}{\partial y^*} = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

şeklindedir (Dragos 1975). (4.18) denklemindeki $V(x^*, y^*)$ ve $B(x^*, y^*)$ sırasıyla hız ve manyetik alandır. H_a Hartmann sayısı $H_a = (H_{ax^*}, H_{ay^*})$ vektörünün normuna eşittir. Yani y eksenine yaptığı açı α olmak üzere

$$H_{ax^*} = H_a \sin \alpha, \quad H_{ay^*} = H_a \cos \alpha, \quad H_a = (H_{ax^*}^2 + H_{ay^*}^2)^{1/2}$$

olur. $U_1 = V + B$ ve $U_2 = V - B$ (Tezer-Sezgin ve Aydın 2002) değişkenleri tanımlanarak (4.18) ifadesi sınır koşulları $U_1 = U_2 = 0$ olan

$$\begin{cases} \nabla^2 U_1 + H_{ax^*} \frac{\partial U_1}{\partial x^*} + H_{ay^*} \frac{\partial U_1}{\partial y^*} = -1 \\ \nabla^2 U_2 - H_{ax^*} \frac{\partial U_2}{\partial x^*} - H_{ay^*} \frac{\partial U_2}{\partial y^*} = -1 \end{cases}, -1 \leq x^*, y^* \leq 1 \quad (4.19)$$

haline dönüşür. Burada $U_1(H_{ax^*}, H_{ay^*})$ çözümü bulunursa $U_2 = U_1(-H_{ax^*}, -H_{ay^*})$ ifadesinden direk hesaplanabilir. (4.18) denkleminin çözümü $V = \frac{U_1 + U_2}{2}$, $B = \frac{U_1 - U_2}{2}$ eşitliklerinden hesaplanır.

(4.19) denkleminin $-1 \leq x^*, y^* \leq 1$ aralığı $0 < x, y < 1$ basit aralığına dönüştürülerek

$$\begin{cases} \nabla^2 U_1 + 2H_{ax} \frac{\partial U_1}{\partial x} + 2H_{ay} \frac{\partial U_1}{\partial y} = -4 \\ \nabla^2 U_2 - 2H_{ax} \frac{\partial U_2}{\partial x} - 2H_{ay} \frac{\partial U_2}{\partial y} = -4 \end{cases}, 0 < x, y < 1 \quad (4.20)$$

şeklinde yazılabilir (Çelik 2013^a). Sınır koşulları $U_1(x, 0) = 0$, $U_1(x, 1) = 0$, $U_1(0, y) = 0$, $U_1(1, y) = 0$ ve $U_2(x, 0) = 0$, $U_2(x, 1) = 0$, $U_2(0, y) = 0$, $U_2(1, y) = 0$ dir.

(4.20) denkleminde x 'e ve y 'ye göre en yüksek mertebeli türev ifadelerinden oluşan $u^{(2,2)}(x, y)$ ifadesinden yola çıkacağız. Daha önce bahsedildiği gibi c_{nm}^{rs} katsayılar, $\psi_{nm}(x)$ ve $\psi_{rs}(y)$ Chebyshev dalgacıklar olmak üzere

$$u^{(2,2)}(x, y) = \sum_{n=1}^{2^k} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{r=1}^{2^k} \sum_{s=0}^{M-1} c_{nm}^{rs} \psi_{nm}(x) \psi_{rs}(y)$$

biçiminde yazılabilir. Bu ifade yerine

$$u^{(2,2)}(x, y) = \Psi^T(x) \mathbf{C} \Psi(y)$$

şeklindeki matris gösterimini kullanabiliriz. Bu denklemini x 'e göre 0'dan x 'e, y 'ye göre 0'dan y 'ye iki defa integralleyerek ve sınır koşullarını kullanarak aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$$u^{(2,2)}(x, y) = \Psi^T(x) \mathbf{C} \Psi(y)$$

$$u^{(1,2)}(x, y) = [(\mathbf{P}_1 \Psi_1)^T(x) - (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2)^T(1)] \mathbf{C} \Psi(y)$$

$$u^{(0,2)}(x, y) = [(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2)^T(x) - x(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2)^T(1)] \mathbf{C} \Psi(y)$$

$$u^{(2,1)}(x, y) = \Psi^T(x) \mathbf{C} [\mathbf{P}_1 \Psi_1(y) - \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)]$$

$$u^{(2,0)}(x, y) = \Psi^T(x) \mathbf{C} [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(y) - y \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)]$$

$$u^{(1,1)}(x, y) = [(\mathbf{P}_1 \Psi_1)^T(x) - (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2)^T(1)] \mathbf{C} [\mathbf{P}_1 \Psi_1(y) - \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)]$$

$$u^{(1,0)}(x, y) = [(\mathbf{P}_1 \Psi_1)^T(x) - (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2)^T(1)] \mathbf{C} [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(y) - y \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)]$$

$$u^{(0,1)}(x, y) = [(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2)^T(x) - x(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2)^T(1)] \mathbf{C} [\mathbf{P}_1 \Psi_1(y) - \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)]$$

$$u^{(0,0)}(x, y) = [(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2)^T(x) - x(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2)^T(1)] \mathbf{C} [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(y) - y \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)]$$

(4.20) ifadesinin birinci denklemi;

$$u^{(2,0)}(x, y) + u^{(0,2)}(x, y) + 2H_{ax} u^{(1,0)}(x, y) + 2H_{ay} u^{(0,1)}(x, y) = -4$$

şeklinde yazılabilir. Yukarıdaki türev ifadeleri bu denklemde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} & \left[\Psi^T(x) + 2H_{ax} \left((\mathbf{P}_1 \Psi_1)^T(x) - (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2)^T(1) \right) \right] \mathbf{C} [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(y) - y \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)] \\ & + [(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2)^T(x) - x(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2)^T(1)] \mathbf{C} [\Psi(y) \\ & + 2H_{ay} [\mathbf{P}_1 \Psi_1(y) - \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)]] = -4 \end{aligned}$$

elde edilir. Denklemin ilk kısmındaki **ACB** formundaki bu ifadeler

$$x_{1,(j-1)N+k} = a_{1,j}b_{k,1}, \quad j, k = 1, 2, \dots, 2^k M$$

ve

$$\mathbf{X} = [x_{1,q}], \quad q = 1, 2, \dots, (2^k M)^2$$

olmak üzere **XD** formuna dönüştürülebilir. Bu **XD** formundaki matrisler toplanarak denklem

$$\tilde{\mathbf{W}}(x, y)\mathbf{D} = \tilde{\mathbf{G}}(x, y)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada

$$\mathbf{D} = [c_{10}^{10} c_{10}^{11} \dots c_{10}^{1(M-1)} \dots c_{10}^{2^k 0} c_{10}^{2^k 1} \dots c_{10}^{2^k(M-1)} c_{11}^{10} c_{11}^{11} \dots c_{11}^{1(M-1)} \dots c_{11}^{2^k 0} c_{11}^{2^k 1} \dots c_{11}^{2^k(M-1)} \dots c_{1(M-1)}^{10} c_{1(M-1)}^{11} \dots c_{1(M-1)}^{1(M-1)} \dots c_{1(M-1)}^{2^k 0} c_{1(M-1)}^{2^k 1} \dots c_{1(M-1)}^{2^k(M-1)} c_{20}^{10} \dots c_{2(M-1)}^{2^k(M-1)} \dots c_{2^k 0}^{10} \dots c_{2^k(M-1)}^{2^k(M-1)}]^\top$$

ve

$$\tilde{\mathbf{W}} = [\tilde{w}_{1,q}], q = 1, 2, \dots, (2^k M)^2$$

şeklinde, ayrıca $\tilde{w}_{1,q}$ ler x ve y ye bağlı fonksiyonlardır.

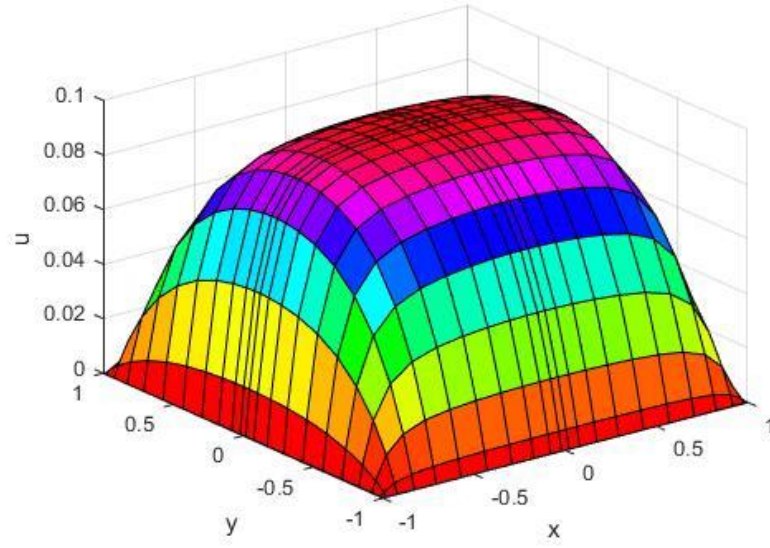
$$\left. \begin{aligned} x_{ni} &= \frac{1}{2^{k+1}} \left(2n - 1 + \cos \frac{((M+1)-i)\pi}{(M+1)} \right) \\ y_{nj} &= \frac{1}{2^{k+1}} \left(2n - 1 + \cos \frac{((M+1)-j)\pi}{(M+1)} \right) \end{aligned} \right\}, i, j = 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, 2^k$$

Chebyshev sıralama noktalarının $\tilde{\mathbf{W}}(x, y)\mathbf{D} = \tilde{\mathbf{G}}(x, y)$ denkleminde yerine yazılmasıyla $\mathbf{UD} = \mathbf{G}$ denklem sistemi elde edilir. Burada \mathbf{U} $(2^k M)^2 \times (2^k M)^2$ boyutlu matris, \mathbf{D} ve \mathbf{G} $(2^k M)^2 \times 1$ boyutlu vektörlerdir. Bu denklem sistemi çözümlenerek \mathbf{D} vektörü ve böylece Chebyshev dalgacık serisinin katsayıları bulunur. Yani \mathbf{C} katsayılar matrisi elde edilir. Bulduğumuz bu katsayılar matrisini

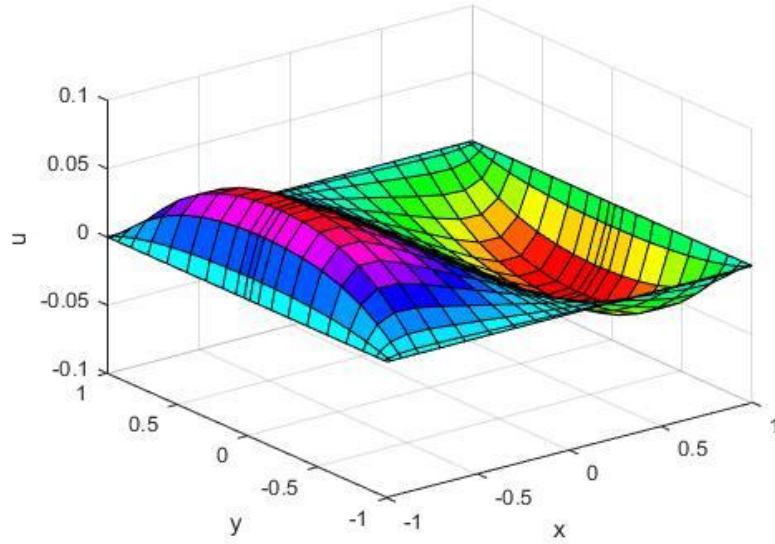
$$u^{(0,0)}(x, y) = [(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^\top(x) - x(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^\top(1)] \mathbf{C} [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(y) - y \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(1)]$$

ifadesinde yerine yazarak yaklaşık çözümü elde ederiz.

Şekil 4.1 ve Şekil 4.2’de sırasıyla $H_a = 10, M = 10, k = 1, \alpha = \pi/2$ değerleri için yaklaşık çözüm olarak bulunan hız ve manyetik alanın üç boyutlu görüntüsü verilmiştir.



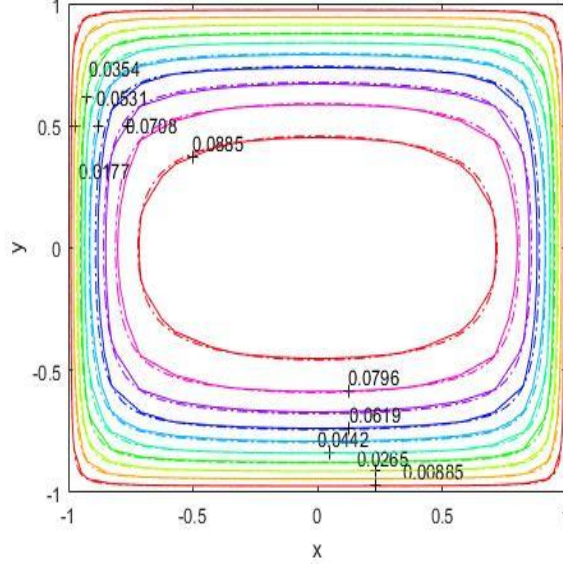
Şekil 4.1: $H_a = 10, M = 10, k = 1, \alpha = \pi/2$ değerleri için hızın yaklaşık çözümü



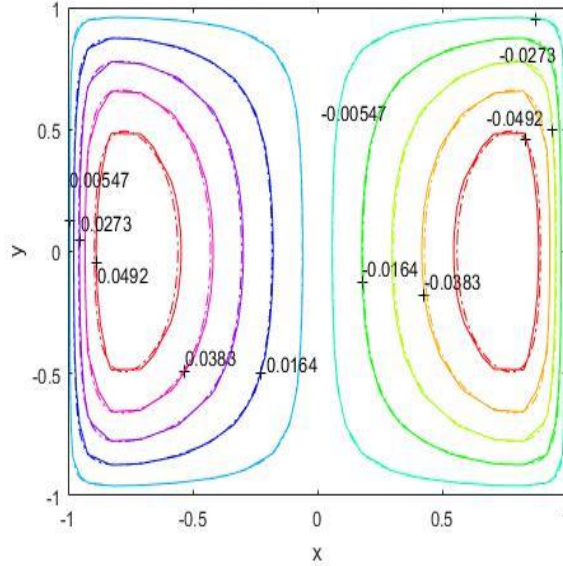
Şekil 4.2: $H_a = 10, M = 10, k = 1, \alpha = \pi/2$ değerleri için manyetik alanın yaklaşık çözümü

Şekil 4.3'ten itibaren Şekil 4.18 dahil olmak üzere hız veya manyetik alanın yaklaşık çözümleri tam çözümleri ile karşılaştırılmıştır. Verilen değerlerdeki karşılaştırmalarda --. tam çözümleri, --- yaklaşık çözümü ifade etmektedir. Bu çalışmada elde edilen sonuçların Tezer-Sezgin (2004), Tezer-Sezgin ve Aydın (2006), Bozkaya ve Tezer-Sezgin (2007), Çelik (2011), Çelik (2012^b), Çelik (2013^a) makalelerinde elde edilen sonuçlarla ve tam çözümle karşılaştırılması önerilen yöntemin iyi bir yöntem olduğunu göstermektedir.

Şekil 4.3 ve Şekil 4.4'te sırasıyla $H_a = 10, M = 10, k = 1, \alpha = \pi/2$ değerleri için hız ve manyetik alanın yaklaşık çözümleri tam çözümler ile karşılaştırılmıştır. Bulunan bu sonuçlar Tezer-Sezgin (2004), Tezer-Sezgin ve Aydın (2006), Çelik (2011), Çelik (2012^b), Çelik (2013^a) makaleleriyle uyumludur.

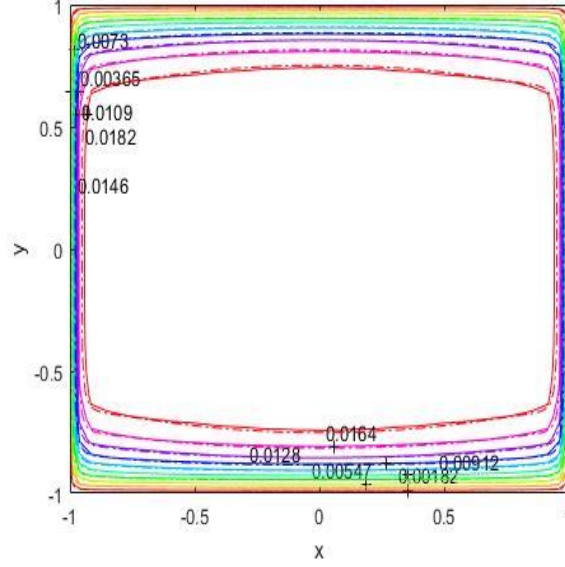


Şekil 4.3: $H_a = 10, M = 10, k = 1, \alpha = \pi/2$ değerleri için hız

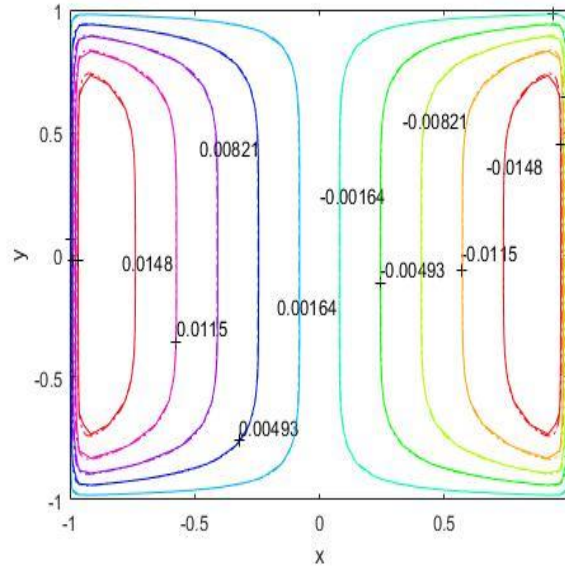


Şekil 4.4: $H_a = 10, M = 10, k = 1, \alpha = \pi/2$ değerleri için manyetik alan

Şekil 4.5 ve Şekil 4.6'da sırasıyla $H_a = 50, M = 15, k = 1, \alpha = \pi/2$ değerleri için hız ve manyetik alanın yaklaşık çözümleri tam çözümler ile karşılaştırılmıştır. Bulunan bu sonuçlar Tezer-Sezgin (2004), Tezer-Sezgin ve Aydın (2006), Bozkaya ve Tezer-Sezgin (2007), Çelik (2011), Çelik (2012^b), Çelik (2013^a) makaleleriyle uyumludur.

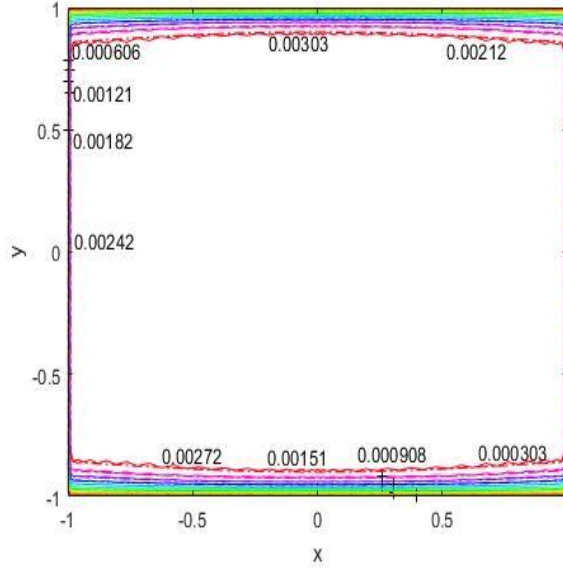


Şekil 4.5: $H_a = 50, M = 15, k = 1, \alpha = \pi/2$ değerleri için hız

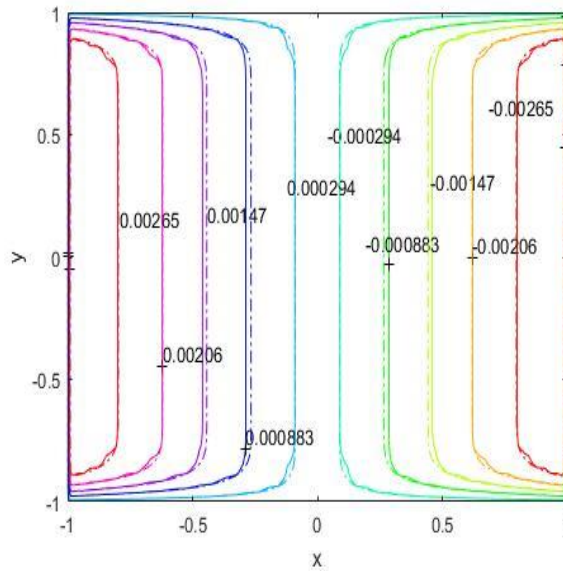


Şekil 4.6: $H_a = 50, M = 15, k = 1, \alpha = \pi/2$ değerleri için manyetik alan

Şekil 4.7 ve Şekil 4.8’de sırasıyla $H_a = 300, M = 30, k = 1, \alpha = \pi/2$ değerleri için hız ve manyetik alanın yaklaşık çözümleri tam çözümler ile karşılaştırılmıştır. Bulunan bu sonuçlar Tezer-Sezgin ve Aydın (2006), Bozkaya ve Tezer-Sezgin (2007), Çelik (2011), Çelik (2012^b) makaleleriyle uyumludur.

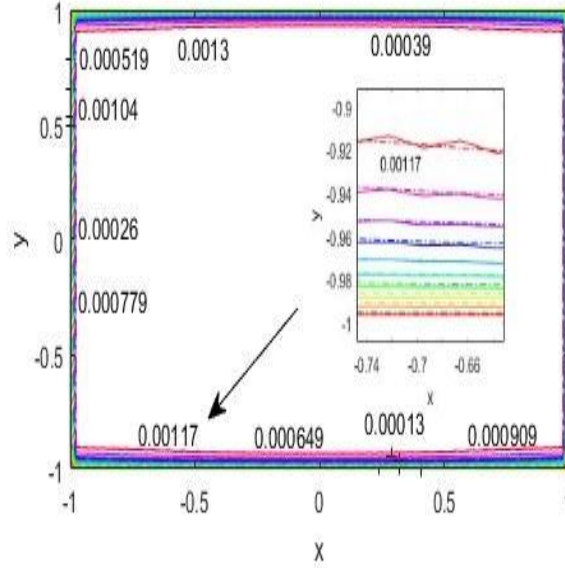


Şekil 4.7: $H_a = 300, M = 30, k = 1, \alpha = \pi/2$ değerleri için hız

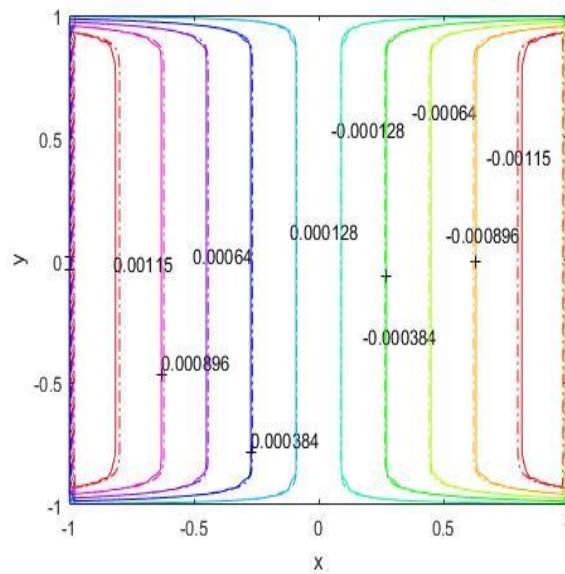


Şekil 4.8: $H_a = 300, M = 30, k = 1, \alpha = \pi/2$ değerleri için manyetik alan

Şekil 4.9 ve Şekil 4.10’da sırasıyla $H_a = 700, M = 50, k = 1, \alpha = \pi/2$ değerleri için hız ve manyetik alanın yaklaşık çözümleri tam çözümler ile karşılaştırılmıştır. Bulunan bu sonuçlar Çelik (2011), Çelik (2012^b) makaleleriyle uyumludur.

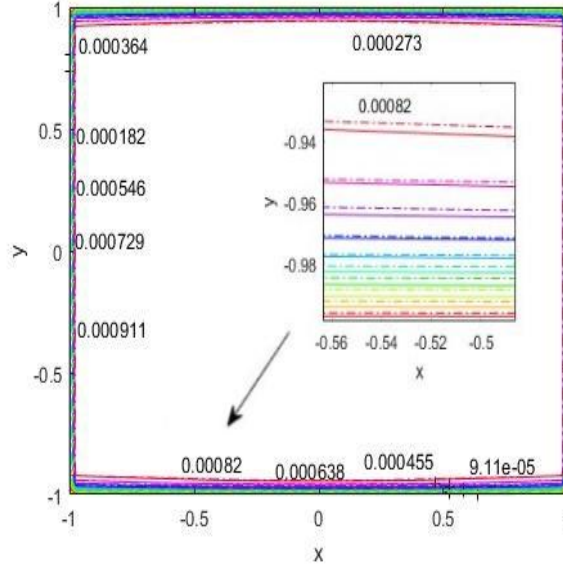


Şekil 4.9: $H_a = 700, M = 50, k = 1, \alpha = \pi/2$ değerleri için hız

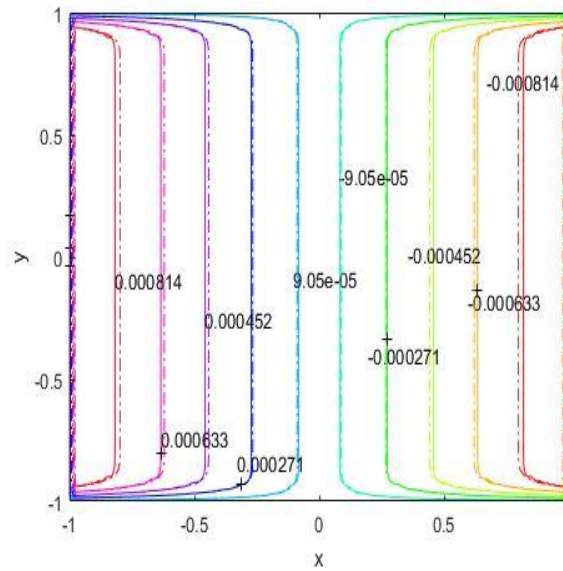


Şekil 4.10: $H_a = 700, M = 50, k = 1, \alpha = \pi/2$ değerleri için manyetik alan

Şekil 4.11 ve Şekil 4.12’de sırasıyla $H_a = 1000, M = 90, k = 0, \alpha = \pi/2$ değerleri için hız ve manyetik alanın yaklaşık çözümleri tam çözümler ile karşılaştırılmıştır. Bulunan bu sonuçlar Çelik (2011), Çelik (2012^b) makaleleriyle uyumludur.

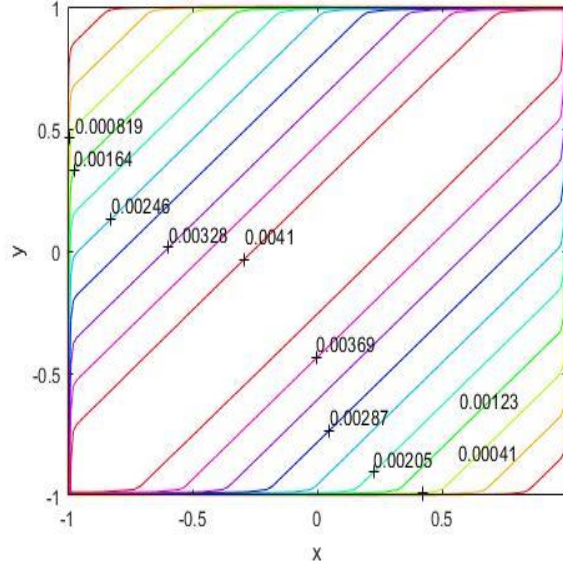


Şekil 4.11: $H_a = 1000, M = 90, k = 0, \alpha = \pi/2$ değerleri için hız

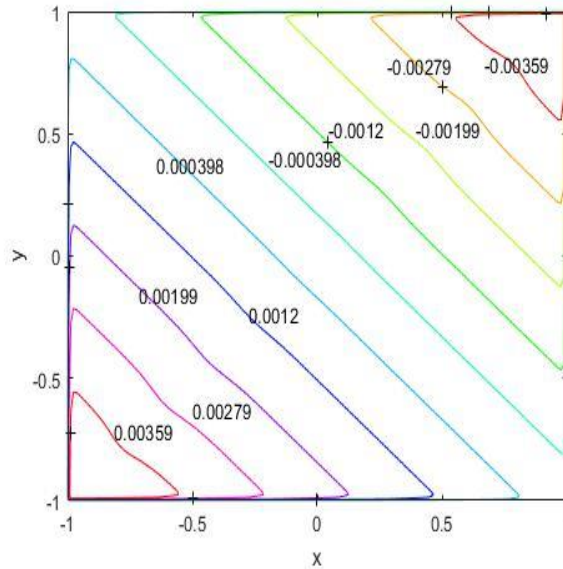


Şekil 4.12: $H_a = 1000, M = 90, k = 0, \alpha = \pi/2$ değerleri için manyetik alan

Şekil 4.13 ve Şekil 4.14'te sırasıyla $H_a = 300, M = 40, k = 1, \alpha = \pi/4$ değerleri için hız ve manyetik alanın yaklaşık çözümleri tam çözümler ile karşılaştırılmıştır. Bulunan bu sonuçlar Bozkaya ve Tezer-Sezgin (2007), Çelik (2011), Çelik (2012^b) makaleleriyle uyumludur.

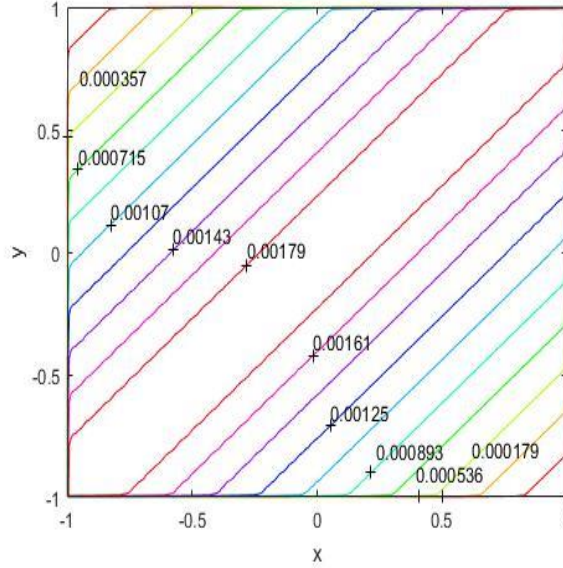


Şekil 4.13: $H_a = 300, M = 40, k = 1, \alpha = \pi/4$ değerleri için hız

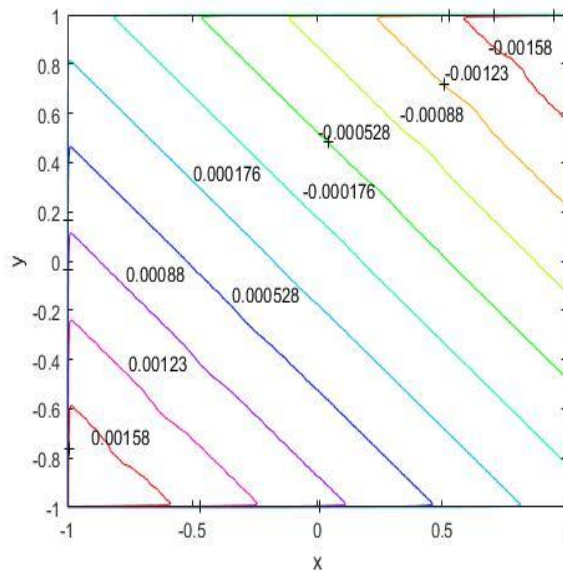


Şekil 4.14: $H_a = 300, M = 40, k = 1, \alpha = \pi/4$ değerleri için manyetik alan

Şekil 4.15 ve Şekil 4.16’da sırasıyla $H_a = 700, M = 50, k = 1, \alpha = \pi/4$ değerleri için hız ve manyetik alanın yaklaşık çözümleri tam çözümler ile karşılaştırılmıştır. Bulunan bu sonuçlar Çelik (2011), Çelik (2012^b) makaleleriyle uyumludur.

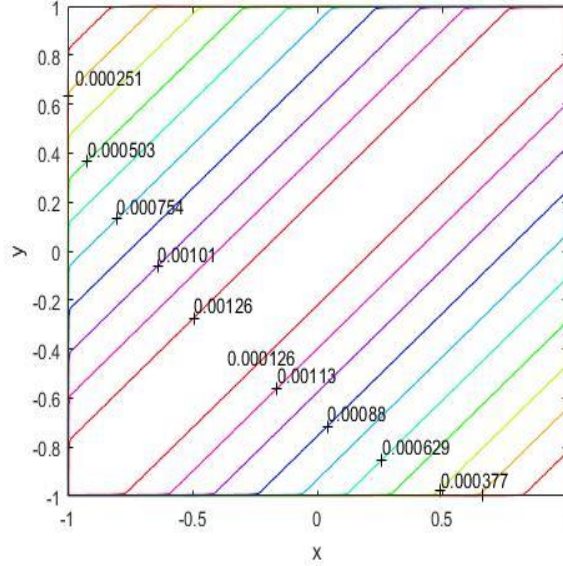


Şekil 4.15: $H_a = 700, M = 50, k = 1, \alpha = \pi/4$ değerleri için hız

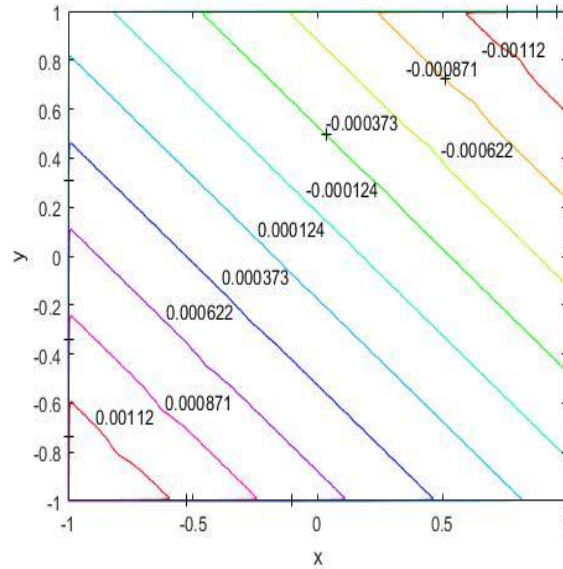


Şekil 4.16: $H_a = 700, M = 50, k = 1, \alpha = \pi/4$ değerleri için manyetik alan

Şekil 4.17 ve Şekil 4.18’de sırasıyla $H_a = 1000, M = 90, k = 0, \alpha = \pi/4$ değerleri için hız ve manyetik alanın yaklaşık çözümleri tam çözümler ile karşılaştırılmıştır. Bulunan bu sonuçlar Çelik (2011), Çelik (2012^b) makaleleriyle uyumludur.



Şekil 4.17: $H_a = 1000, M = 90, k = 0, \alpha = \pi/4$ değerleri için hız



Şekil 4.18: $H_a = 1000, M = 90, k = 0, \alpha = \pi/4$ değerleri için manyetik alan

4.2 Dördüncü Mertebeden Bir Konum Boyutlu Denklem İçin Chebyshev Dalgacık Sıralama Yöntemi

Dördüncü mertebeden bir konum boyutlu

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) = G(x, t)$$

diferansiyel denklemi göz önüne alınırsa en yüksek mertebe türevden yola çıkarak

$$\dot{u}^{(4)}(x, t) = \mathbf{C}^T \boldsymbol{\Psi}(x)$$

alınır. t 'ye göre t_0 'dan t 'ye integrallersek

$$u^{(4)}(x, t) = \Delta t \mathbf{C}^T \boldsymbol{\Psi}(x) + u^{(4)}(x, t_0)$$

elde edilir. x 'e göre 0'dan x 'e integrallersek

$$u'''(x, t) = \Delta t \mathbf{C}^T \mathbf{P}_1 \boldsymbol{\Psi}_1(x) + u'''(x, t_0) + u'''(0, t) - u'''(0, t_0)$$

elde edilir. x 'e göre 0'dan x 'e integrallersek

$$u''(x, t) = \Delta t \mathbf{C}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(x) + u''(x, t_0) + x[u'''(0, t) - u'''(0, t_0)] + u''(0, t) - u''(0, t_0) \quad (4.21)$$

elde edilir. x 'e göre 0'dan x 'e integrallersek

$$u'(x, t) = \Delta t \mathbf{C}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \boldsymbol{\Psi}_3(x) + u'(x, t_0) + \frac{x^2}{2}[u'''(0, t) - u'''(0, t_0)] + x[u''(0, t) - u''(0, t_0)] + u'(0, t) - u'(0, t_0)$$

elde edilir. x 'e göre 0'dan x 'e integrallersek

$$u(x, t) = \Delta t \mathbf{C}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \boldsymbol{\Psi}_4(x) + u(x, t_0) + \frac{x^3}{6}[u'''(0, t) - u'''(0, t_0)] + \frac{x^2}{2}[u''(0, t) - u''(0, t_0)] + x[u'(0, t) - u'(0, t_0)] + u(0, t) - u(0, t_0)$$

elde edilir. t 'ye göre türevini alırsak

$$\dot{u}(x, t) = \mathbf{C}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \boldsymbol{\Psi}_4(x) + \frac{x^3}{6} \dot{u}'''(0, t) + \frac{x^2}{2} \dot{u}''(0, t) + x \dot{u}'(0, t) + \dot{u}(0, t)$$

ifadelerini elde ederiz. Başlangıç ve sınır koşulları kullanılarak $u(0, t_0)$, $u(0, t)$, $u'(0, t_0)$, $u'(0, t)$, $u''(0, t_0)$, $u''(0, t)$, $u'''(0, t_0)$, $u'''(0, t)$ değerleri bulunup yerine yazılır. Elde edilen türev ifadeler, diferansiyel denklemde yerine koyulur ve (3.1) ifadesindeki Chebyshev sıralama noktaları göz önüne alınırsa cebirsel denklem sistemi elde edilir.

4.2.1 Chebyshev Dalgacık Sıralama Yöntemi'nin Bir Boyutlu Genelleştirilmiş Fisher Kolmogorov Denkleminin Uygulanması

Bu alt bölümde özel olarak bir boyutlu genelleştirilmiş Fisher Kolmogorov denklemini inceleyeceğiz.

$$u_t + \gamma u_{xxxx} - u_{xx} + f(u) = G(x, t)$$

$$u(0, t) = f_0(t)$$

$$u(1, t) = f_1(t)$$

$$u_{xx}(0, t) = g_0(t)$$

$$u_{xx}(1, t) = g_1(t)$$

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

(4.21) denklemi $x = 0$ için

$$u''(0, t) = g_0(t)$$

olur. (4.21) denklemi $x = 1$ için

$$u''(1, t) = g_1(t)$$

$$= \Delta t \mathbf{C}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1) + g_1(t_0) + [u'''(0, t) - u'''(0, t_0)] + g_0(t) - g_0(t_0)$$

olur. Buradan

$$u'''(0, t) - u'''(0, t_0) = -\Delta t \mathbf{C}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1) + g_1(t) - g_1(t_0) + g_0(t_0) - g_0(t)$$

elde edilir. Bu denklemi (4.21) denkleminde yerine yazarsak

$$u''(x, t) = \Delta t \mathbf{C}^T [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(x) - x \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)] + u''(x, t_0) + x[g_1(t) - g_1(t_0) + g_0(t_0) - g_0(t)] + g_0(t) - g_0(t_0)$$

bulunur. x 'e göre 0'dan x 'e iki defa integrallersek

$$u'(x, t) = \Delta t \mathbf{C}^T [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \Psi_3(x) - \frac{x^2}{2} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)] + u'(x, t_0) + \frac{x^2}{2} [g_1(t) - g_1(t_0) + g_0(t_0) - g_0(t)] + x[g_0(t) - g_0(t_0)] + u'(0, t) - u'(0, t_0) \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \Delta t \mathbf{C}^T [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(x) - \frac{x^3}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)] + u(x, t_0) \\
&+ \frac{x^3}{6} [g_1(t) - g_1(t_0) + g_0(t_0) - g_0(t)] \\
&+ \frac{x^2}{2} [g_0(t) - g_0(t_0)] + x[u'(0, t) - u'(0, t_0)] \quad (4.23) \\
&+ f_o(t) - f_o(t_0)
\end{aligned}$$

denklemlerini elde ederiz. (4.23) denklemini $x = 0$ için

$$u(0, t) = f_o(t)$$

olur. (4.23) denklemini $x = 1$ için

$$\begin{aligned}
u(1, t) &= f_1(t) \\
&= \Delta t \mathbf{C}^T [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(1) - \frac{1}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)] + f_1(t_0) + \frac{1}{6} [g_1(t) \\
&- g_1(t_0) + g_0(t_0) - g_0(t)] + \frac{1}{2} [g_0(t) - g_0(t_0)] + [u'(0, t) \\
&- u'(0, t_0)] + f_o(t) - f_o(t_0)
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
u'(0, t) - u'(0, t_0) &= -\Delta t \mathbf{C}^T [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(1) - \frac{1}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)] - \frac{1}{6} [g_1(t) - g_1(t_0) \\
&+ g_0(t_0) - g_0(t)] - \frac{1}{2} [g_0(t) - g_0(t_0)] + f_1(t) - f_1(t_0) + f_o(t_0) \\
&- f_o(t)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemini (4.22) ve (4.23) denklemlerinde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
u'(x, t) &= \Delta t \mathbf{C}^T [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \Psi_3(x) - \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(1) + \frac{(1 - 3x^2)}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)] \\
&+ u'(x, t_0) + \frac{(3x^2 - 1)}{6} [g_1(t) - g_1(t_0) + g_0(t_0) - g_0(t)] \\
&+ \frac{(2x - 1)}{2} [g_0(t) - g_0(t_0)] + f_1(t) - f_1(t_0) + f_o(t_0) - f_o(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \Delta t \mathbf{C}^T [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(x) - x \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(1) + \frac{(x - x^3)}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)] \\
&+ u(x, t_0) + \frac{(x^3 - x)}{6} [g_1(t) - g_1(t_0) + g_0(t_0) - g_0(t)] \\
&+ \frac{(x^2 - x)}{2} [g_0(t) - g_0(t_0)] + x[f_1(t) - f_1(t_0) + f_o(t_0) - f_o(t)] \\
&+ f_o(t) - f_o(t_0)
\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Denklemleri düzenlersek

$$\dot{u}^{(4)}(x, t) = \mathbf{C}^T \boldsymbol{\Psi}(x)$$

$$u^{(4)}(x, t) = u^{(4)}(x, t_0) + \Delta t \mathbf{C}^T \boldsymbol{\Psi}(x)$$

$$u'''(x, t) = u'''(x, t_0) + \Delta t \mathbf{C}^T [\mathbf{P}_1 \boldsymbol{\Psi}_1(x) - \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(1)] + g_1(t) - g_1(t_0) + g_0(t_0) - g_0(t)$$

$$u''(x, t) = u''(x, t_0) + \Delta t \mathbf{C}^T [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(x) - x \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(1)] + x[g_1(t) - g_1(t_0) + g_0(t_0) - g_0(t)] + g_0(t) - g_0(t_0)$$

$$u'(x, t) = u'(x, t_0) + \Delta t \mathbf{C}^T [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \boldsymbol{\Psi}_3(x) - \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \boldsymbol{\Psi}_4(1) + \frac{(1-3x^2)}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(1)] + \frac{(3x^2-1)}{6} [g_1(t) - g_1(t_0) + g_0(t_0) - g_0(t)] + \frac{(2x-1)}{2} [g_0(t) - g_0(t_0)] + f_1(t) - f_1(t_0) + f_0(t_0) - f_0(t)$$

$$u(x, t) = u(x, t_0) + \Delta t \mathbf{C}^T [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \boldsymbol{\Psi}_4(x) - x \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \boldsymbol{\Psi}_4(1) + \frac{(x-x^3)}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(1)] + \frac{(x^3-x)}{6} [g_1(t) - g_1(t_0) + g_0(t_0) - g_0(t)] + \frac{(x^2-x)}{2} [g_0(t) - g_0(t_0)] + x[f_1(t) - f_1(t_0) + f_0(t_0) - f_0(t)] + f_0(t) - f_0(t_0)$$

$$\dot{u}(x, t) = \mathbf{C}^T [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \boldsymbol{\Psi}_4(x) - x \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \boldsymbol{\Psi}_4(1) + \frac{(x-x^3)}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(1)] + \frac{(x^3-x)}{6} [g_1'(t) - g_0'(t)] + \frac{(x^2-x)}{2} [g_0'(t)] + x[f_1'(t) - f_0'(t)] + f_0'(t)$$

olur. Özel olarak $f(u) = u^3 - u$ alalım.

$$u_t + \gamma u_{xxxx} - u_{xx} + u^3 - u = G(x, t)$$

lineerliği bozan u^3 ifadesinde yarı lineerleştirme (quasilinearization) uygularsak bu ifade

$$u^3 \cong 3u_r^2 u_{r+1} - 2u_r^3$$

halini alır. Başlangıç anındaki çözüm u_0 bilindiğinden birinci adımdaki çözüm u_1 bulunur. Benzer şekilde iterasyon tekrarlanarak çözüme yaklaşılr.

Denkleminizde r -inci adım çözümünden faydalanarak elde ettiğimiz $(r + 1)$ -inci çözümü u olarak gösterirsek

$$u_t + \gamma u_{xxxx} - u_{xx} + 3u_r^2 u - 2u_r^3 - u = G(x, t)$$

$$u_t + \gamma u_{xxxx} - u_{xx} + (3u_r^2 - 1)u = G(x, t) + 2u_r^3$$

olur. Kullandığımız notasyonla ifade edecek olursak;

$$\begin{aligned} \dot{u}(x, t) + \gamma u^{(4)}(x, t) - u''(x, t) + (3u_r^2 - 1)u(x, t) \\ = G(x, t) + 2u_r^3 \end{aligned} \quad (4.24)$$

şeklindedir. Bulduğumuz türev ifadelerini (4.24) denkleminde yerine yazarsak;

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^T [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(x) - x \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(1) + \frac{(x - x^3)}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)] \\ + \frac{(x^3 - x)}{6} [g_1'(t) - g_0'(t)] + \frac{(x^2 - x)}{2} [g_0'(t)] + x [f_1'(t) - f_0'(t)] \\ + f_0'(t) + \gamma [u^{(4)}(x, t_0) + \Delta t \mathbf{C}^T \Psi(x)] - [\Delta t \mathbf{C}^T [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(x) \\ - x \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)] + u''(x, t_0) + x [g_1(t) - g_1(t_0) + g_0(t_0) - g_0(t) \\ + g_0(t) - g_0(t_0)] + (3u_r^2 - 1) [\Delta t \mathbf{C}^T [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(x) \\ - x \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(1) + \frac{(x - x^3)}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)] + u(x, t_0) \\ + \frac{(x^3 - x)}{6} [g_1(t) - g_1(t_0) + g_0(t_0) - g_0(t)] + \frac{(x^2 - x)}{2} [g_0(t) \\ - g_0(t_0)] + x [f_1(t) - f_1(t_0) + f_0(t_0) - f_0(t)] + f_0(t) - f_0(t_0)] \\ = G(x, t) + 2u_r^3 \end{aligned}$$

elde edilir. Başlangıç ve sınır koşullarını

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

$$u = 0, \Delta u = 0$$

olarak alırsak denklemler;

$$\dot{u}^{(4)}(x, t) = \mathbf{C}^T \Psi(x)$$

$$u^{(4)}(x, t) = u^{(4)}(x, t_0) + \Delta t \mathbf{C}^T \Psi(x)$$

$$u'''(x, t) = u'''(x, t_0) + \Delta t \mathbf{C}^T [\mathbf{P}_1 \Psi_1(x) - \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)]$$

$$u''(x, t) = u''(x, t_0) + \Delta t \mathbf{C}^T [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(x) - x \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)]$$

$$u'(x, t) = u'(x, t_0) + \Delta t \mathbf{C}^T [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \Psi_3(x) - \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(1)$$

$$+ \frac{(1 - 3x^2)}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)]$$

$$u(x, t) = u(x, t_0) + \Delta t \mathbf{C}^T [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(x) - x \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(1) + \frac{(x - x^3)}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)]$$

$$\dot{u}(x, t) = \mathbf{C}^T [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(x) - x \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(1) + \frac{(x - x^3)}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)]$$

halini alır. (4.24) denkleminde yerine koyarsak;

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^T & \left[(1 + \Delta t. (3u_r^2 - 1)) [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(x) - x \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(1) \right. \\ & \left. + \frac{(x - x^3)}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)] \right. \\ & \left. + \Delta t [\gamma \Psi(x) - \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(x) + x \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)] \right] \\ & = G(x, t) + 2u_r^3 - \gamma u^{(4)}(x, t_0) + u''(x, t_0) \\ & - (3u_r^2 - 1)u(x, t_0) \end{aligned} \quad (4.25)$$

olur. (3.1) ifadesindeki Chebyshev sıralama noktaları (4.25) denkleminde yerine yazılırsa $\mathbf{C}^T \mathbf{U} = \mathbf{B}$ yapısında bir denklem sistemi elde edilir. Burada \mathbf{U} , $2^k M \times 2^k M$ tipinde bir matris, \mathbf{C} ve \mathbf{B} $2^k M \times 1$ tipinde vektörlerdir. Öncelikle $t = t_0$ başlangıç anında u_r ifadesi u_0 olarak alınır. Elde edilen lineer denklem sistemi çözülerek \mathbf{C}^T vektörü bulunur.

$$u(x, t) = u(x, t_0) + \Delta t \mathbf{C}^T [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(x) - x \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(1) + \frac{(x - x^3)}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)]$$

çözüm denkleminde \mathbf{C}^T ifadesi yerine koyularak bir sonraki çözüm u_1 bulunur. Benzer şekilde $u_r = u_1$ çözümünden u_2 bulunur. Bu çözümler aynı olana kadar iterasyon tekrarlanır. Çözümler aynı çıkınca son hesaplanan \mathbf{C}^T vektörü,

$$u(x, t) = u(x, t_0) + \Delta t \mathbf{C}^T [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(x) - x \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(1) + \frac{(x - x^3)}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)]$$

$$u''(x, t) = u''(x, t_0) + \Delta t \mathbf{C}^T [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(x) - x \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)]$$

$$u^{(4)}(x, t) = u^{(4)}(x, t_0) + \Delta t \mathbf{C}^T \Psi(x)$$

denklemlerinde yerine koyularak $t = t_1$ adımıdaki çözüm bulunur. İşlemler bu şekilde tekrarlanarak istenilen zaman adımına kadar çözümler bulunabilir.

4.2.2 Örnekler

Örnek 4.2.2.1

Aşağıda başlangıç ve sınır koşulları verilen bir konum boyutlu genelleştirilmiş Fisher Kolmogorov denklemini ele alalım.

$$\begin{aligned}u_t + \gamma u_{xxxx} - u_{xx} + f(u) &= G(x, t) \\u(x, 0) &= \sin(2\pi x) \\u &= 0, \Delta u = 0 \\f(u) &= u^3 - u\end{aligned}$$

$$G(x, t) = (16\gamma\pi^4 + 4\pi^2 - 2) \sin(2\pi x) e^{-t} + (\sin(2\pi x) e^{-t})^3$$

Bu denklemin tam çözümü şu şekildedir:

$$u(x, t) = \sin(2\pi x) e^{-t}$$

Çözüm 4.2.2.1

Yukarıda verilen kısmi diferansiyel denklemin yaklaşık çözümünü Chebyshev Dalgacık Sıralama Yöntemi ile bulup hatayı inceleyelim:

$$u(x, 0) = \sin(2\pi x)$$

İfadesinin gereken türevleri alınarak $t = 0$ başlangıç anında $u^{(4)}(x, 0), u''(x, 0)$ ifadeleri bulunur.

$$u''(x, 0) = -4\pi^2 \sin(2\pi x)$$

$$u^{(4)}(x, 0) = 16\pi^4 \sin(2\pi x)$$

Elde edilen ifadeler (4.25) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \mathbf{C}^T \left[(1 + \Delta t \cdot (3u_r^2 - 1)) [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(x) - x \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(1)] \right. \\
& \quad \left. + \frac{(x - x^3)}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1) \right] + \Delta t [\gamma \Psi(x) - \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(x) + x \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)] \\
& = (16\gamma\pi^4 + 4\pi^2 - 2) \sin(2\pi x) e^{-t} + (\sin(2\pi x) e^{-t})^3 + 2u_r^3 \\
& \quad - \gamma 16\pi^4 \sin(2\pi x) - 4\pi^2 \sin(2\pi x) - (3u_r^2 - 1) \sin(2\pi x)
\end{aligned}$$

olur. (3.1) ifadesindeki Chebyshev sıralama noktaları (4.25) denkleminde yerine yazılırsa $\mathbf{C}^T \mathbf{U} = \mathbf{B}$ yapısında bir denklem sistemi elde edilir. Öncelikle $t = t_0$ başlangıç anında u_r ifadesi $u_0 = \sin(2\pi x)$ olarak alınır. Elde edilen lineer denklem sistemi çözülerek \mathbf{C}^T vektörü bulunur.

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= u(x, t_0) + \Delta t \mathbf{C}^T [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(x) - x \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(1) \\
& \quad + \frac{(x - x^3)}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)]
\end{aligned}$$

Çözüm denkleminde \mathbf{C}^T ifadesi yerine koyularak bir sonraki çözüm u_1 bulunur. Benzer şekilde u_1 çözümünden u_2 bulunur. Bu çözümler aynı olana kadar iterasyon tekrarlanır. Çözümler aynı çıkınca son hesaplanan \mathbf{C}^T vektörü,

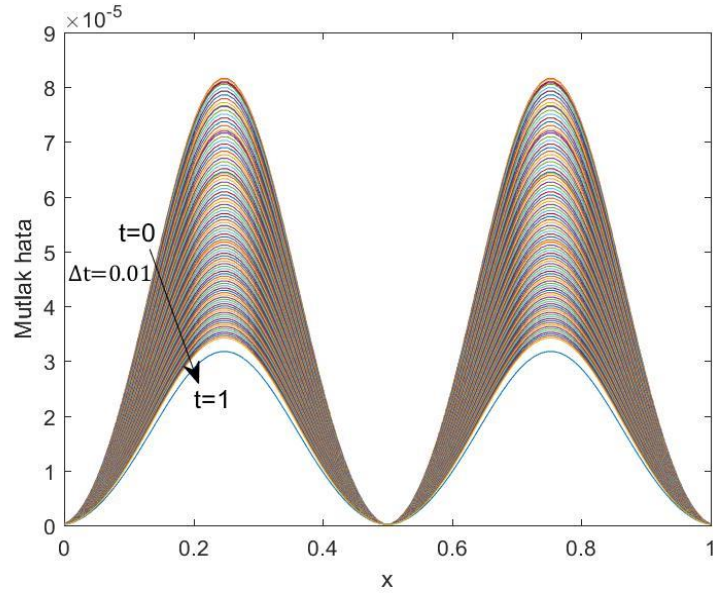
$$\begin{aligned}
u(x, t) &= u(x, t_0) + \Delta t \mathbf{C}^T [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(x) - x \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(1) \\
& \quad + \frac{(x - x^3)}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)]
\end{aligned}$$

$$u''(x, t) = u''(x, t_0) + \Delta t \mathbf{C}^T [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(x) - x \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)]$$

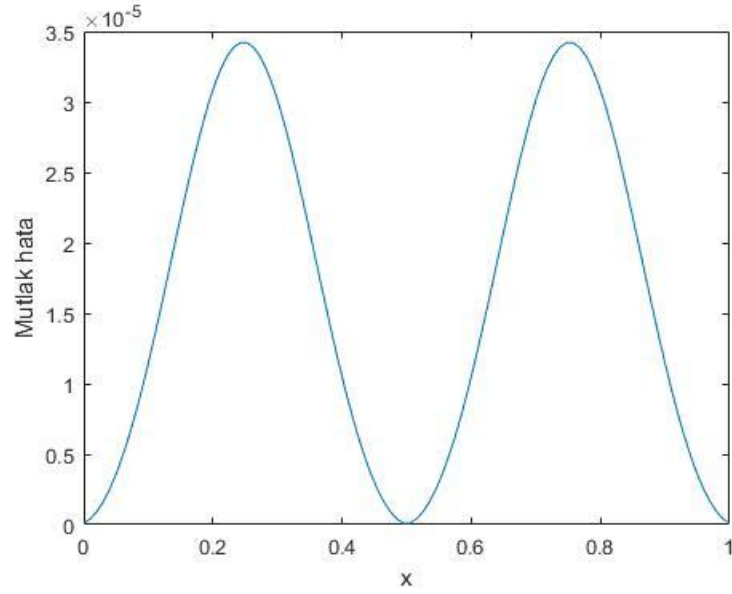
$$u^{(4)}(x, t) = u^{(4)}(x, t_0) + \Delta t \mathbf{C}^T \Psi(x)$$

denklemlerinde yerine koyularak $t = t_1$ adımıdaki çözüm bulunur. Benzer şekilde çözüm tekrarlanır. İterasyon tekrarlanarak $t = t_{son}$ anındaki çözüm de bulunur.

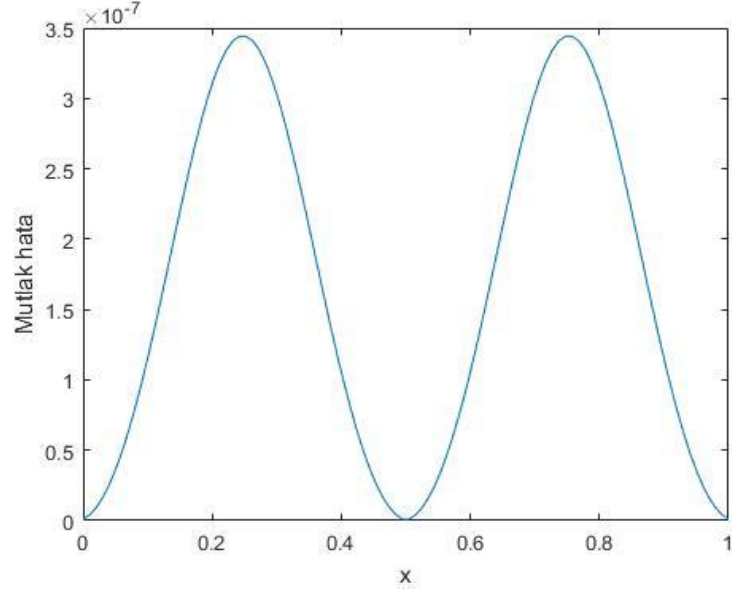
Şekil 4.19'da $\gamma = 0.01$ olmak üzere $M = 50, k = 1$ için mutlak hatanın zamana göre değişimi verilmiştir. Burada $\Delta t = 0.01$ 'dir. Şekil 4.20 ve Şekil 4.21'de $\gamma = 0.01$ olmak üzere $M = 50, k = 1$ için $t = 1$ anındaki mutlak hata gösterilmiştir. Şekil 4.20'de $\Delta t = 0.01$, Şekil 4.21'de $\Delta t = 0.0001$ 'dir. Şekil 4.20 ve Şekil 4.21'den de görüldüğü gibi Δt değeri küçüldükçe mutlak hata azalmaktadır.



Şekil 4.19: $M = 50, k = 1$ için mutlak hatanın zamana göre değişimi



Şekil 4.20: $\Delta t = 0.01, M=50, k=1$ için $t = 1$ de mutlak hata



Şekil 4.21: $\Delta t = 0.0001$, $M=50$, $k=1$ için $t = 1$ de mutlak hata

Tablo 4.1’de $\gamma = 0.01$ için belirtilen x_i değerlerinde farklı M ve k değerleri için mutlak hata tablosu verilmiştir.

Tablo 4.1: $\gamma = 0.01$ için belirtilen değerlerdeki mutlak hata

x_i	$M = 4$ $k = 0$	$M = 4$ $k = 1$	$M = 4$ $k = 2$	$M = 6$ $k = 0$	$M = 6$ $k = 1$	$M = 10$ $k = 0$	$M = 10$ $k = 1$
0	1,71052E-15	2,27607E-16	4,56332E-18	2,13288E-15	2,30303E-16	1,88367E-15	2,30263E-16
0,1	4,95398E-03	5,35727E-05	3,58009E-05	8,10544E-05	2,01837E-05	2,01249E-05	2,01258E-05
0,2	8,87293E-03	9,47824E-05	5,91775E-05	1,71349E-05	3,31820E-05	3,25720E-05	3,25597E-05
0,3	8,27332E-03	9,47824E-05	5,91775E-05	7,33866E-05	3,31820E-05	3,25660E-05	3,25597E-05
0,4	4,50541E-03	5,35727E-05	3,58009E-05	6,01874E-05	2,01837E-05	2,01173E-05	2,01258E-05
0,5	6,36042E-16	4,83794E-15	7,44398E-16	7,06975E-16	4,73251E-15	4,38226E-16	4,26598E-15
0,6	4,50541E-03	5,35727E-05	3,58009E-05	6,01874E-05	2,01837E-05	2,01173E-05	2,01258E-05
0,7	8,27332E-03	9,47824E-05	5,91775E-05	7,33866E-05	3,31820E-05	3,25660E-05	3,25597E-05
0,8	8,87293E-03	9,47824E-05	5,91775E-05	1,71349E-05	3,31820E-05	3,25720E-05	3,25597E-05
0,9	4,95398E-03	5,35727E-05	3,58009E-05	8,10544E-05	2,01837E-05	2,01249E-05	2,01258E-05
1	1,55721E-16	1,55721E-16	1,55721E-16	1,55721E-16	1,55721E-16	1,55721E-16	1,55721E-16

Tablo 4.2’de Doss ve Nandini (2012) makalesindeki örnekle yeni metot karşılaştırılmıştır. Belirtilen makalede H1-Galerkin sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır. Tabloda verilen N değeri aralığın kaç parçaya bölündüğünü gösterir. t değeri ile belirtilen zamanda maksimum hata verilmiştir. Yeni metot karşılaştırılırken $\Delta t = 0.00001$ olarak alınmıştır. Yeni metotta sıralama noktası sayısı $2^k M$ şeklinde hesaplanmaktadır. Dolayısıyla $M = 40, k = 0$ iken aralık 40 değere bölünmüş gibi düşünülebilir. Tablo 4.2’den sunulan yöntemin daha iyi bir yaklaşım verdiği görülebilir.

Tablo 4.2: Yeni metodun Doss ve Nandini (2012) ile karşılaştırılması

	t_{son}	L_{∞} Yeni metot $\Delta t=0.00001$	N	t	L_{∞} Doss ve Nandini (2012)
M=10 k=0	0,00215	9,80855E-09	40	0,00215443469	1,45127E-06
M=15 k=0	0,01077	3,95369E-08	40	0,01077217300	1,44877E-06
M=20 k=0	0,00215	1,01517E-08	80	0,00215443469	9,27115E-08
M=25 k=0	0,01077	3,98996E-08	80	0,01077217300	9,24142E-08

Tablo 4.3’te Kadri ve Omrani (2018) makalesindeki örnekle yeni metot karşılaştırılmıştır. Belirtilen makalede sonlu fark şemaları yöntemiyle çözüme yaklaşmıştır. Tabloda verilen h konum adımlarının büyüklüğüdür. Makalede $\Delta t = 0.0001$ olarak alınmıştır. Yeni metot karşılaştırılırken $\Delta t = 0.001$ olarak alınmıştır. Sunulan yöntemin $\Delta t = 0.001$ alınmasına rağmen daha iyi sonuç verdiği Tablo 4.3’te görülmektedir.

Tablo 4.3: Yeni metodun Kadri ve Omrani (2018) ile karşılaştırılması

	L_{∞} Yeni metot $\Delta t = 0.001$	h	L_{∞} Kadri ve Omrani (2018) $\Delta t = 0.0001$
$M = 20, k = 0$	3,445401E-07	1/20	1,42525E-04
$M = 40, k = 0$	3,436968E-07	1/40	8,98452E-06
$M = 80, k = 0$	3,445401E-07	1/80	5,61664E-07

Örnek 4.2.2.2

Aşağıda başlangıç ve sınır koşulları verilen bir konum boyutlu genelleştirilmiş Fisher Kolmogorov denklemini ele alalım.

$$u_t + \gamma u_{xxxx} - u_{xx} + f(u) = G(x, t)$$

$$u(x, 0) = x^3(1 - x)^3$$

$$u = 0, \Delta u = 0$$

$$f(u) = u^3 - u$$

Çözüm 4.2.2.2

Yukarıda verilen kısmi diferansiyel denklemin yaklaşık çözümünü Chebyshev Dalgacık Sıralama Yöntemi ile bulalım:

$$u(x, 0) = x^3(1 - x)^3$$

ifadesinin gereken türevleri alınarak $t = 0$ başlangıç anında $u^{(4)}(x, 0), u''(x, 0)$ ifadeleri bulunur.

$$u''(x, 0) = 6x - 36x^2 + 60x^3 + 30x^4$$

$$u^{(4)}(x, 0) = -72 + 360x + 360x^2$$

Elde edilen ifadeler (4.25) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^T & \left[(1 + \Delta t. (3u_r^2 - 1)) [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(x) - x \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(1)] \right. \\ & \left. + \frac{(x - x^3)}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1) + \Delta t [\gamma \Psi(x) - \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(x) + x \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)] \right] \\ & = 2u_r^3 - \gamma [-72 + 360x + 360x^2] + [6x - 36x^2 + 60x^3 + 30x^4] \\ & - (3u_r^2 - 1)x^3(1 - x)^3 \end{aligned}$$

olur. (3.1) ifadesindeki Chebyshev sıralama noktaları (4.25) denkleminde yerine yazılırsa $\mathbf{C}^T \mathbf{U} = \mathbf{B}$ yapısında bir denklem sistemi elde edilir. Öncelikle $t = t_0$ başlangıç anında u_r ifadesi u_0 olarak alınır. Elde edilen lineer denklem sistemi çözümlenerek \mathbf{C}^T vektörü bulunur.

$$u(x, t) = u(x, t_0) + \Delta t \mathbf{C}^T [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(x) - x \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(1) + \frac{(x - x^3)}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)]$$

çözüm denkleminde \mathbf{C}^T ifadesi yerine koyularak bir sonraki çözüm u_1 bulunur. Benzer şekilde u_1 çözümünden u_2 bulunur. Bu çözümler arasındaki fark istenildiği kadar küçük olana kadar iterasyon tekrarlanır. Son hesaplanan \mathbf{C}^T vektörü,

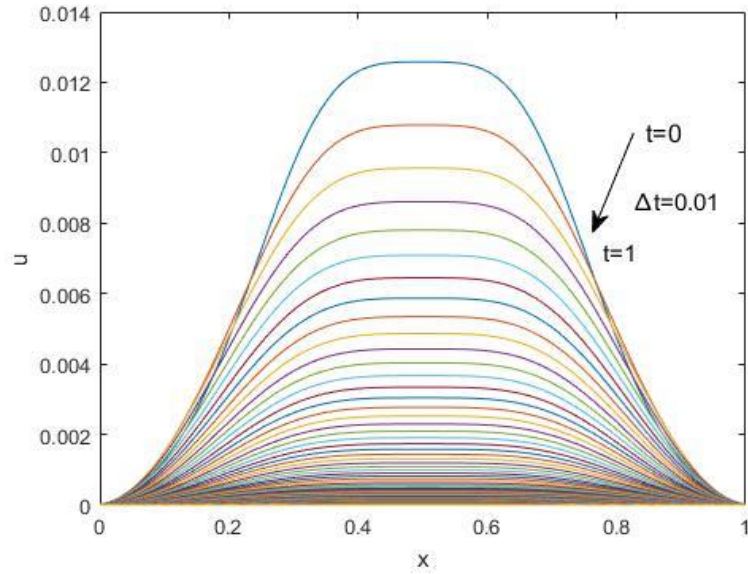
$$u(x, t) = u(x, t_0) + \Delta t \mathbf{C}^T [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(x) - x \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(1) + \frac{(x - x^3)}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)]$$

$$u''(x, t) = u''(x, t_0) + \Delta t \mathbf{C}^T [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(x) - x \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)]$$

$$u^{(4)}(x, t) = u^{(4)}(x, t_0) + \Delta t \mathbf{C}^T \Psi(x)$$

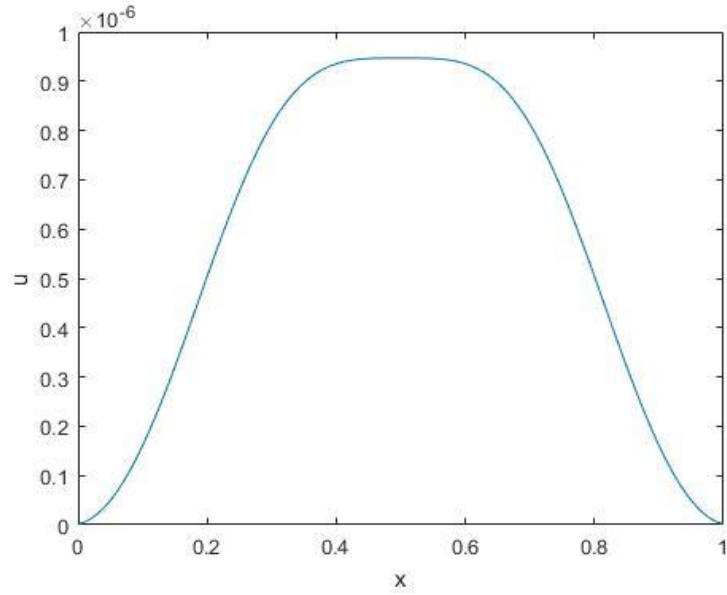
denklemlerinde yerine koyularak $t = t_1$ adımıdaki çözüm bulunur. Benzer şekilde diğer zaman adımları için çözüm tekrarlanır. Böylece $t = t_{son}$ anındaki çözüm de bulunur.

Şekil 4.22'de $\gamma = 0.01$ olmak üzere $M = 50, k = 1$ için yaklaşık çözümün zamana göre değişimi verilmiştir. Burada $\Delta t = 0.01$ 'dir.

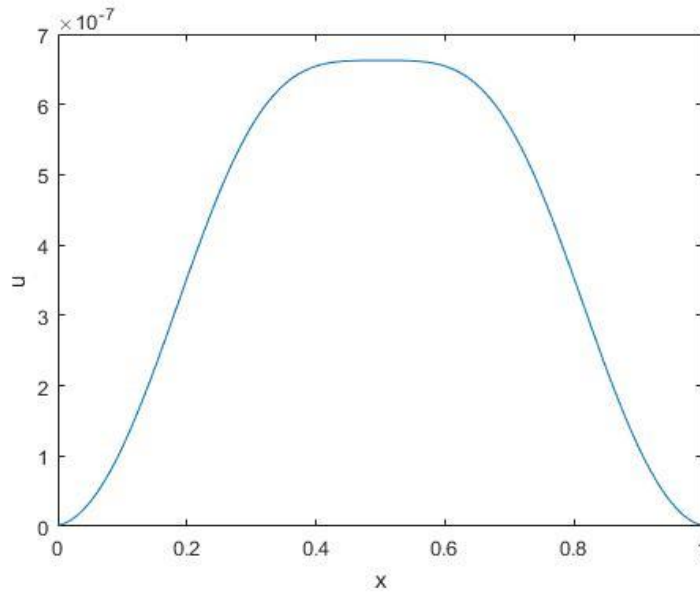


Şekil 4.22: $M = 50, k = 1$ için yaklaşık çözümün zamana göre değişimi

Şekil 4.23 ve Şekil 4.24'te $\gamma = 0.01$ olmak üzere $M = 50, k = 1$ için $t = 1$ anındaki yaklaşık çözüm gösterilmiştir. Şekil 4.23'te $\Delta t = 0.01$, Şekil 4.24'te $\Delta t = 0.0001$ 'dir.



Şekil 4.23: $\Delta t = 0.01, M = 50, k = 1$ için $t = 1$ anında yaklaşık çözüm



Şekil 4.24: $\Delta t = 0.0001, M = 50, k = 1$ için $t = 1$ anında yaklaşık çözüm

4.3 Dördüncü Mertebeden İki Konum Boyutlu Denklem İçin Chebyshev Dalgacık Sıralama Yöntemi

Dördüncü mertebeden

$$u_t + \gamma \Delta^2 u - \Delta u + f(u) = G(x, y, t)$$

diferansiyel denklemi ve

$$u^{(0,0)}(0, y, t) = f_{10}(y, t)$$

$$u^{(0,0)}(1, y, t) = f_{11}(y, t)$$

$$u^{(0,0)}(x, 0, t) = f_{20}(y, t)$$

$$u^{(0,0)}(x, 1, t) = f_{21}(y, t)$$

$$u^{(0,2)}(0, y, t) + u^{(2,0)}(0, y, t) = g_{10}(y, t)$$

$$u^{(0,2)}(1, y, t) + u^{(2,0)}(1, y, t) = g_{11}(y, t)$$

$$u^{(0,2)}(x, 0, t) + u^{(2,0)}(x, 0, t) = g_{20}(y, t)$$

$$u^{(0,2)}(x, 1, t) + u^{(2,0)}(x, 1, t) = g_{21}(y, t)$$

$$u^{(0,0)}(x, y, 0) = u_0(x, y)$$

şeklinde başlangıç ve sınır koşulları verilmiş olsun. En yüksek mertebeli türev ifadesinden yola çıkarak

$$\dot{u}^{(4,4)}(x, y, t) = \Psi^T(x) \mathbf{C} \Psi(y) \quad (4.26)$$

alalım. Burada

$$\Psi^T(x) = [\psi_{10}(x), \psi_{11}(x), \dots, \psi_{1M-1}(x), \psi_{20}(x), \dots, \psi_{2M-1}(x), \dots, \psi_{2^{k_0}}(x), \dots, \psi_{2^{k_{M-1}}}(x)]$$

$$\Psi(y)$$

$$= [\psi_{10}(y), \psi_{11}(y), \dots, \psi_{1M-1}(y), \psi_{20}(y), \dots, \psi_{2M-1}(y), \dots, \psi_{2^{k_0}}(y), \dots, \psi_{2^{k_{M-1}}}(y)]^T$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{10}^{10} & c_{10}^{11} & \dots & c_{10}^{1(M-1)} & c_{10}^{20} & \dots & c_{10}^{2(M-1)} & \dots & c_{10}^{2^{k_0}} & \dots & c_{10}^{2^{k_{(M-1)}}} \\ c_{11}^{10} & c_{11}^{11} & \dots & c_{11}^{1(M-1)} & c_{11}^{20} & \dots & c_{11}^{2(M-1)} & \dots & c_{11}^{2^{k_0}} & \dots & c_{11}^{2^{k_{(M-1)}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1(M-1)}^{10} & c_{1(M-1)}^{11} & \dots & c_{1(M-1)}^{1(M-1)} & c_{1(M-1)}^{20} & \dots & c_{1(M-1)}^{2(M-1)} & \dots & c_{1(M-1)}^{2^{k_0}} & \dots & c_{1(M-1)}^{2^{k_{(M-1)}}} \\ c_{20}^{10} & c_{20}^{11} & \dots & c_{20}^{1(M-1)} & c_{20}^{20} & \dots & c_{20}^{2(M-1)} & \dots & c_{20}^{2^{k_0}} & \dots & c_{20}^{2^{k_{(M-1)}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{2(M-1)}^{10} & c_{2(M-1)}^{11} & \dots & c_{2(M-1)}^{1(M-1)} & c_{2(M-1)}^{20} & \dots & c_{2(M-1)}^{2(M-1)} & \dots & c_{2(M-1)}^{2^{k_0}} & \dots & c_{2(M-1)}^{2^{k_{(M-1)}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{2^{k_0}}^{10} & c_{2^{k_0}}^{11} & \dots & c_{2^{k_0}}^{1(M-1)} & c_{2^{k_0}}^{20} & \dots & c_{2^{k_0}}^{2(M-1)} & \dots & c_{2^{k_0}}^{2^{k_0}} & \dots & c_{2^{k_0}}^{2^{k_{(M-1)}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{2^{k_{(M-1)}}}^{10} & c_{2^{k_{(M-1)}}}^{11} & \dots & c_{2^{k_{(M-1)}}}^{1(M-1)} & c_{2^{k_{(M-1)}}}^{20} & \dots & c_{2^{k_{(M-1)}}}^{2(M-1)} & \dots & c_{2^{k_{(M-1)}}}^{2^{k_0}} & \dots & c_{2^{k_{(M-1)}}}^{2^{k_{(M-1)}}} \end{bmatrix}$$

dir. Verilen koşullardan aşağıdaki ifadeleri elde ederiz:

$$\begin{aligned}
u^{(0,0)}(0, y, t) &= f_{10}(y, t) \\
u^{(0,1)}(0, y, t) &= f'_{10}(y, t) \\
u^{(0,2)}(0, y, t) &= f''_{10}(y, t) \\
u^{(0,3)}(0, y, t) &= f'''_{10}(y, t) \\
u^{(0,4)}(0, y, t) &= f^{(4)}_{10}(y, t) \\
u^{(2,0)}(0, y, t) &= g_{10}(y, t) - f''_{10}(y, t) \\
u^{(2,1)}(0, y, t) &= g'_{10}(y, t) - f'''_{10}(y, t) \\
u^{(2,2)}(0, y, t) &= g''_{10}(y, t) - f^{(4)}_{10}(y, t) \\
u^{(2,3)}(0, y, t) &= g'''_{10}(y, t) - f^{(5)}_{10}(y, t) \\
u^{(2,4)}(0, y, t) &= g^{(4)}_{10}(y, t) - f^{(6)}_{10}(y, t) \\
u^{(0,0)}(1, y, t) &= f_{11}(y, t) \\
u^{(0,1)}(1, y, t) &= f'_{11}(y, t) \\
u^{(0,2)}(1, y, t) &= f''_{11}(y, t) \\
u^{(0,3)}(1, y, t) &= f'''_{11}(y, t) \\
u^{(0,4)}(1, y, t) &= f^{(4)}_{11}(y, t) \\
u^{(2,0)}(1, y, t) &= g_{11}(y, t) - f''_{11}(y, t) \\
u^{(2,1)}(1, y, t) &= g'_{11}(y, t) - f'''_{11}(y, t) \\
u^{(2,2)}(1, y, t) &= g''_{11}(y, t) - f^{(4)}_{11}(y, t) \\
u^{(2,3)}(1, y, t) &= g'''_{11}(y, t) - f^{(5)}_{11}(y, t) \\
u^{(2,4)}(1, y, t) &= g^{(4)}_{11}(y, t) - f^{(6)}_{11}(y, t) \\
u^{(0,0)}(x, 0, t) &= f_{20}(x, t) \\
u^{(1,0)}(x, 0, t) &= f'_{20}(x, t) \\
u^{(2,0)}(x, 0, t) &= f''_{20}(x, t) \\
u^{(3,0)}(x, 0, t) &= f'''_{20}(x, t) \\
u^{(4,0)}(x, 0, t) &= f^{(4)}_{20}(x, t) \\
u^{(0,2)}(x, 0, t) &= g_{20}(x, t) - f''_{20}(x, t) \\
u^{(1,2)}(x, 0, t) &= g'_{20}(x, t) - f'''_{20}(x, t) \\
u^{(2,2)}(x, 0, t) &= g''_{20}(x, t) - f^{(4)}_{20}(x, t) \\
u^{(3,2)}(x, 0, t) &= g'''_{20}(x, t) - f^{(5)}_{20}(x, t) \\
u^{(4,2)}(x, 0, t) &= g^{(4)}_{20}(x, t) - f^{(6)}_{20}(x, t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^{(0,0)}(x, 1, t) &= f_{21}(x, t) \\
u^{(1,0)}(x, 1, t) &= f'_{21}(x, t) \\
u^{(2,0)}(x, 1, t) &= f''_{21}(x, t) \\
u^{(3,0)}(x, 1, t) &= f'''_{21}(x, t) \\
u^{(4,0)}(x, 1, t) &= f^{(4)}_{21}(x, t) \\
u^{(0,2)}(x, 1, t) &= g_{21}(x, t) - f''_{21}(x, t) \\
u^{(1,2)}(x, 1, t) &= g'_{21}(x, t) - f'''_{21}(x, t) \\
u^{(2,2)}(x, 1, t) &= g''_{21}(x, t) - f^{(4)}_{21}(x, t) \\
u^{(3,2)}(x, 1, t) &= g'''_{21}(x, t) - f^{(5)}_{21}(x, t) \\
u^{(4,2)}(x, 1, t) &= g^{(4)}_{21}(x, t) - f^{(6)}_{21}(x, t)
\end{aligned}$$

Koşullar göz önünde bulundurularak (4.25) ifadesinin x 'e göre 0'dan x 'e ve y 'ye göre 0'dan y 'ye integralleri alınarak aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\dot{u}^{(4,4)}(x, y, t) = \Psi^T(x) \mathbf{C} \Psi(y)$$

$$u^{(4,4)}(x, y, t) = \Delta t \Psi^T(x) \mathbf{C} \Psi(y) + u^{(4,4)}(x, y, t_0)$$

$$\begin{aligned}
u^{(4,3)}(x, y, t) &= \Delta t \Psi^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \Psi_1(y) + u^{(4,3)}(x, y, t_0) + u^{(4,3)}(x, 0, t) \\
&\quad - u^{(4,3)}(x, 0, t_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^{(4,2)}(x, y, t) &= \Delta t \Psi^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(y) + u^{(4,2)}(x, y, t_0) \\
&\quad + y [u^{(4,3)}(x, 0, t) - u^{(4,3)}(x, 0, t_0)] + u^{(4,2)}(x, 0, t) - u^{(4,2)}(x, 0, t_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^{(4,2)}(x, y, t) &= \Delta t \Psi^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(y) + u^{(4,2)}(x, y, t_0) \\
&\quad + y [u^{(4,3)}(x, 0, t) - u^{(4,3)}(x, 0, t_0)] + g_{20}^{(4)}(x, t) - f_{20}^{(6)}(x, t) \\
&\quad - g_{20}^{(4)}(x, t_0) + f_{20}^{(6)}(x, t_0)
\end{aligned}$$

$y = 1$ için

$$\begin{aligned}
u^{(4,2)}(x, 1, t) &= \Delta t \Psi^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1) + u^{(4,2)}(x, 1, t_0) \\
&\quad + [u^{(4,3)}(x, 0, t) - u^{(4,3)}(x, 0, t_0)] + g_{20}^{(4)}(x, t) - f_{20}^{(6)}(x, t) \\
&\quad - g_{20}^{(4)}(x, t_0) + f_{20}^{(6)}(x, t_0)
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
& u^{(4,3)}(x, 0, t) - u^{(4,3)}(x, 0, t_0) \\
& = -\Delta t \Psi^T(x) \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1) + g_{21}^{(4)}(x, t) - f_{21}^{(6)}(x, t) - g_{21}^{(4)}(x, t_0) \\
& \quad + f_{21}^{(6)}(x, t_0) - g_{20}^{(4)}(x, t) + f_{20}^{(6)}(x, t) + g_{20}^{(4)}(x, t_0) - f_{20}^{(6)}(x, t_0)
\end{aligned}$$

elde edilir. Yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
u^{(4,2)}(x, y, t) & = \Delta t \Psi^T(x) \mathbf{C} [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(y) - y \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)] + u^{(4,2)}(x, y, t_0) \\
& \quad + y \left[g_{21}^{(4)}(x, t) - f_{21}^{(6)}(x, t) - g_{21}^{(4)}(x, t_0) + f_{21}^{(6)}(x, t_0) - g_{20}^{(4)}(x, t) \right. \\
& \quad \left. + f_{20}^{(6)}(x, t) + g_{20}^{(4)}(x, t_0) - f_{20}^{(6)}(x, t_0) \right] + g_{20}^{(4)}(x, t) - f_{20}^{(6)}(x, t) \\
& \quad - g_{20}^{(4)}(x, t_0) + f_{20}^{(6)}(x, t_0)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadenin y 'ye göre 0'dan y 'ye integralleri alınır

$$\begin{aligned}
u^{(4,1)}(x, y, t) & = \Delta t \Psi^T(x) \mathbf{C} [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \Psi_3(y) - \frac{y^2}{2} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)] + u^{(4,1)}(x, y, t_0) \\
& \quad + \frac{y^2}{2} \left[g_{21}^{(4)}(x, t) - f_{21}^{(6)}(x, t) - g_{21}^{(4)}(x, t_0) + f_{21}^{(6)}(x, t_0) - g_{20}^{(4)}(x, t) \right. \\
& \quad \left. + f_{20}^{(6)}(x, t) + g_{20}^{(4)}(x, t_0) - f_{20}^{(6)}(x, t_0) \right] + y \left[g_{20}^{(4)}(x, t) - f_{20}^{(6)}(x, t) \right. \\
& \quad \left. - g_{20}^{(4)}(x, t_0) + f_{20}^{(6)}(x, t_0) \right] + u^{(4,1)}(x, 0, t) - u^{(4,1)}(x, 0, t_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^{(4,0)}(x, y, t) & = \Delta t \Psi^T(x) \mathbf{C} [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(y) - \frac{y^3}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)] + u^{(4,0)}(x, y, t_0) \\
& \quad + \frac{y^3}{6} \left[g_{21}^{(4)}(x, t) - f_{21}^{(6)}(x, t) - g_{21}^{(4)}(x, t_0) + f_{21}^{(6)}(x, t_0) - g_{20}^{(4)}(x, t) \right. \\
& \quad \left. + f_{20}^{(6)}(x, t) + g_{20}^{(4)}(x, t_0) - f_{20}^{(6)}(x, t_0) \right] + \frac{y^2}{2} \left[g_{20}^{(4)}(x, t) - f_{20}^{(6)}(x, t) \right. \\
& \quad \left. - g_{20}^{(4)}(x, t_0) + f_{20}^{(6)}(x, t_0) \right] + y \left[u^{(4,1)}(x, 0, t) - u^{(4,1)}(x, 0, t_0) \right] \\
& \quad + f_{20}^{(4)}(x, t) - f_{20}^{(4)}(x, t_0)
\end{aligned}$$

elde edilir. $y = 1$ için

$$\begin{aligned}
u^{(4,0)}(x, 1, t) & = \Delta t \Psi^T(x) \mathbf{C} [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(1) - \frac{1}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)] + u^{(4,0)}(x, 1, t_0) \\
& \quad + \frac{1}{6} \left[g_{21}^{(4)}(x, t) - f_{21}^{(6)}(x, t) - g_{21}^{(4)}(x, t_0) + f_{21}^{(6)}(x, t_0) - g_{20}^{(4)}(x, t) \right. \\
& \quad \left. + f_{20}^{(6)}(x, t) + g_{20}^{(4)}(x, t_0) - f_{20}^{(6)}(x, t_0) \right] + \frac{1}{2} \left[g_{20}^{(4)}(x, t) - f_{20}^{(6)}(x, t) \right. \\
& \quad \left. - g_{20}^{(4)}(x, t_0) + f_{20}^{(6)}(x, t_0) \right] + \left[u^{(4,1)}(x, 0, t) - u^{(4,1)}(x, 0, t_0) \right] \\
& \quad + f_{20}^{(4)}(x, t) - f_{20}^{(4)}(x, t_0)
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
u^{(4,1)}(x, 0, t) - u^{(4,1)}(x, 0, t_0) &= -\Delta t \Psi^T(x) \mathbf{C} [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(1) - \frac{1}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)] + f_{21}^{(4)}(x, t) \\
&- f_{21}^{(4)}(x, t_0) \\
&- \frac{1}{6} [g_{21}^{(4)}(x, t) - f_{21}^{(6)}(x, t) - g_{21}^{(4)}(x, t_0) + f_{21}^{(6)}(x, t_0) - g_{20}^{(4)}(x, t) \\
&+ f_{20}^{(6)}(x, t) + g_{20}^{(4)}(x, t_0) - f_{20}^{(6)}(x, t_0)] - \frac{1}{2} [g_{20}^{(4)}(x, t) - f_{20}^{(6)}(x, t) \\
&- g_{20}^{(4)}(x, t_0) + f_{20}^{(6)}(x, t_0)] - f_{20}^{(4)}(x, t) + f_{20}^{(4)}(x, t_0)
\end{aligned}$$

elde edilir. Yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
u^{(4,0)}(x, y, t) &= \Delta t \Psi^T(x) \mathbf{C} [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(y) + \frac{y - y^3}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1) \\
&- y \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(1)] + u^{(4,0)}(x, y, t_0) \\
&+ \frac{y - y^3}{6} [g_{21}^{(4)}(x, t) - f_{21}^{(6)}(x, t) - g_{21}^{(4)}(x, t_0) + f_{21}^{(6)}(x, t_0) \\
&- g_{20}^{(4)}(x, t) + f_{20}^{(6)}(x, t) + g_{20}^{(4)}(x, t_0) - f_{20}^{(6)}(x, t_0)] \\
&+ \frac{y^2 - y}{2} [g_{20}^{(4)}(x, t) - f_{20}^{(6)}(x, t) - g_{20}^{(4)}(x, t_0) + f_{20}^{(6)}(x, t_0)] \\
&+ y [f_{21}^{(4)}(x, t) - f_{21}^{(4)}(x, t_0) - f_{20}^{(4)}(x, t) + f_{20}^{(4)}(x, t_0)] + f_{20}^{(4)}(x, t) \\
&- f_{20}^{(4)}(x, t_0)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu denklemin x 'e göre 0'dan x 'e kadar iki defa integrali alınır

$$\begin{aligned}
u^{(3,0)}(x, y, t) &= \Delta t (\mathbf{P}_1 \Psi_1)^T(x) \mathbf{C} [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(y) + \frac{y - y^3}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1) \\
&- y \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(1)] + u^{(3,0)}(x, y, t_0) \\
&+ \frac{y - y^3}{6} [g_{21}^{(3)}(x, t) - f_{21}^{(5)}(x, t) - g_{21}^{(3)}(x, t_0) + f_{21}^{(5)}(x, t_0) \\
&- g_{20}^{(3)}(x, t) + f_{20}^{(5)}(x, t) + g_{20}^{(3)}(x, t_0) - f_{20}^{(5)}(x, t_0) \\
&- [g_{21}^{(3)}(0, t) - f_{21}^{(5)}(0, t) - g_{21}^{(3)}(0, t_0) + f_{21}^{(5)}(0, t_0) - g_{20}^{(3)}(0, t) \\
&+ f_{20}^{(5)}(0, t) + g_{20}^{(3)}(0, t_0) - f_{20}^{(5)}(0, t_0)]] + \frac{y^2 - y}{2} [g_{20}^{(3)}(x, t) \\
&- f_{20}^{(5)}(x, t) - g_{20}^{(3)}(x, t_0) + f_{20}^{(5)}(x, t_0) - [g_{20}^{(3)}(0, t) - f_{20}^{(5)}(0, t) \\
&- g_{20}^{(3)}(0, t_0) + f_{20}^{(5)}(0, t_0)]] + y [f_{21}^{(3)}(x, t) - f_{21}^{(3)}(x, t_0) - f_{20}^{(3)}(x, t) \\
&+ f_{20}^{(3)}(x, t_0) - [f_{21}^{(3)}(0, t) - f_{21}^{(3)}(0, t_0) - f_{20}^{(3)}(0, t) + f_{20}^{(3)}(0, t_0)]] \\
&+ f_{20}^{(3)}(x, t) - f_{20}^{(3)}(x, t_0) - [f_{20}^{(3)}(0, t) - f_{20}^{(3)}(0, t_0)] + u^{(3,0)}(0, y, t) \\
&- u^{(3,0)}(0, y, t_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^{(2,0)}(x, y, t) = & \Delta t(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(x) \mathbf{C}[\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \boldsymbol{\Psi}_4(y) + \frac{y - y^3}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(1) \\
& - y \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \boldsymbol{\Psi}_4(1)] + u^{(2,0)}(x, y, t_0) \\
& + \frac{y - y^3}{6} \left[g_{21}''(x, t) - f_{21}^{(4)}(x, t) - g_{21}''(x, t_0) + f_{21}^{(4)}(x, t_0) \right. \\
& - g_{20}''(x, t) + f_{20}^{(4)}(x, t) + g_{20}''(x, t_0) - f_{20}^{(4)}(x, t_0) \\
& - \left[g_{21}''(0, t) - f_{21}^{(4)}(0, t) - g_{21}''(0, t_0) + f_{21}^{(4)}(0, t_0) - g_{20}''(0, t) \right. \\
& \left. + f_{20}^{(4)}(0, t) + g_{20}''(0, t_0) - f_{20}^{(4)}(0, t_0) \right] \\
& - x \left[g_{21}^{(3)}(0, t) - f_{21}^{(5)}(0, t) - g_{21}^{(3)}(0, t_0) + f_{21}^{(5)}(0, t_0) - g_{20}^{(3)}(0, t) \right. \\
& \left. + f_{20}^{(5)}(0, t) + g_{20}^{(3)}(0, t_0) - f_{20}^{(5)}(0, t_0) \right] + \frac{y^2 - y}{2} [g_{20}''(x, t) \\
& - f_{20}^{(4)}(x, t) - g_{20}''(x, t_0) + f_{20}^{(4)}(x, t_0) - [g_{20}''(0, t) - f_{20}^{(4)}(0, t) \\
& - g_{20}''(0, t_0) + f_{20}^{(4)}(0, t_0)] - x [g_{20}^{(3)}(0, t) - f_{20}^{(5)}(0, t) - g_{20}^{(3)}(0, t_0) \\
& + f_{20}^{(5)}(0, t_0)] + y [f_{21}''(x, t) - f_{21}''(x, t_0) - f_{20}''(x, t) + f_{20}''(x, t_0) \\
& - [f_{21}''(0, t) - f_{21}''(0, t_0) - f_{20}''(0, t) + f_{20}''(0, t_0)] - x \cdot [f_{21}^{(3)}(0, t) \\
& - f_{21}^{(3)}(0, t_0) - f_{20}^{(3)}(0, t) + f_{20}^{(3)}(0, t_0)] + f_{20}''(x, t) - f_{20}''(x, t_0) \\
& - [f_{20}''(0, t) - f_{20}''(0, t_0)] - x \cdot [f_{20}^{(3)}(0, t) \\
& - f_{20}^{(3)}(0, t_0)] + x [u^{(3,0)}(0, y, t) - u^{(3,0)}(0, y, t_0)] + g_{10}(y, t) \\
& - f_{10}''(y, t) - g_{10}(y, t_0) + f_{10}''(y, t_0)
\end{aligned}$$

elde edilir. $x = 1$ için

$$\begin{aligned}
u^{(2,0)}(1, y, t) = & \Delta t(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(1) \mathbf{C}[\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \boldsymbol{\Psi}_4(y) + \frac{y - y^3}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(1) \\
& - y \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \boldsymbol{\Psi}_4(1)] + u^{(2,0)}(1, y, t_0) \\
& + \frac{y - y^3}{6} \left[g_{21}''(1, t) - f_{21}^{(4)}(1, t) - g_{21}''(1, t_0) + f_{21}^{(4)}(1, t_0) \right. \\
& - g_{20}''(1, t) + f_{20}^{(4)}(1, t) + g_{20}''(1, t_0) - f_{20}^{(4)}(1, t_0) \\
& - \left[g_{21}''(0, t) - f_{21}^{(4)}(0, t) - g_{21}''(0, t_0) + f_{21}^{(4)}(0, t_0) - g_{20}''(0, t) \right. \\
& \left. + f_{20}^{(4)}(0, t) + g_{20}''(0, t_0) - f_{20}^{(4)}(0, t_0) \right] \\
& - \left[g_{21}^{(3)}(0, t) - f_{21}^{(5)}(0, t) - g_{21}^{(3)}(0, t_0) + f_{21}^{(5)}(0, t_0) - g_{20}^{(3)}(0, t) \right. \\
& \left. + f_{20}^{(5)}(0, t) + g_{20}^{(3)}(0, t_0) - f_{20}^{(5)}(0, t_0) \right] + \frac{y^2 - y}{2} [g_{20}''(1, t) \\
& - f_{20}^{(4)}(1, t) - g_{20}''(1, t_0) + f_{20}^{(4)}(1, t_0) - [g_{20}''(0, t) - f_{20}^{(4)}(0, t) \\
& - g_{20}''(0, t_0) + f_{20}^{(4)}(0, t_0)] - [g_{20}^{(3)}(0, t) - f_{20}^{(5)}(0, t) - g_{20}^{(3)}(0, t_0) \\
& + f_{20}^{(5)}(0, t_0)] + y [f_{21}''(1, t) - f_{21}''(1, t_0) - f_{20}''(1, t) + f_{20}''(1, t_0) \\
& - [f_{21}''(0, t) - f_{21}''(0, t_0) - f_{20}''(0, t) + f_{20}''(0, t_0)] - [f_{21}^{(3)}(0, t) \\
& - f_{21}^{(3)}(0, t_0) - f_{20}^{(3)}(0, t) + f_{20}^{(3)}(0, t_0)] + f_{20}''(1, t) - f_{20}''(1, t_0) \\
& - [f_{20}''(0, t) - f_{20}''(0, t_0)] - 1 [f_{20}^{(3)}(0, t) - f_{20}^{(3)}(0, t_0)] + [u^{(3,0)}(0, y, t) \\
& - u^{(3,0)}(0, y, t_0)] + g_{10}(y, t) - f_{10}''(y, t) - g_{10}(y, t_0) + f_{10}''(y, t_0)
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
& u^{(3,0)}(0, y, t) - u^{(3,0)}(0, y, t_0) \\
&= -\Delta t(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2)^T(1) \mathbf{C}[\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \mathbf{\Psi}_4(y) + \frac{y - y^3}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2(1) \\
&\quad - y \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \mathbf{\Psi}_4(1)] + g_{11}(y, t) - f_{11}''(y, t) - g_{11}(y, t_0) + f_{11}''(y, t_0) \\
&\quad - \frac{y - y^3}{6} \left[g_{21}''(1, t) - f_{21}^{(4)}(1, t) - g_{21}''(1, t_0) + f_{21}^{(4)}(1, t_0) \right. \\
&\quad - g_{20}''(1, t) + f_{20}^{(4)}(1, t) + g_{20}''(1, t_0) - f_{20}^{(4)}(1, t_0) \\
&\quad - \left[g_{21}''(0, t) - f_{21}^{(4)}(0, t) - g_{21}''(0, t_0) + f_{21}^{(4)}(0, t_0) - g_{20}''(0, t) \right. \\
&\quad \left. + f_{20}^{(4)}(0, t) + g_{20}''(0, t_0) - f_{20}^{(4)}(0, t_0) \right] \\
&\quad - \left[g_{21}^{(3)}(0, t) - f_{21}^{(5)}(0, t) - g_{21}^{(3)}(0, t_0) + f_{21}^{(5)}(0, t_0) - g_{20}^{(3)}(0, t) \right. \\
&\quad \left. + f_{20}^{(5)}(0, t) + g_{20}^{(3)}(0, t_0) - f_{20}^{(5)}(0, t_0) \right] - \frac{y^2 - y}{2} [g_{20}''(1, t) \\
&\quad - f_{20}^{(4)}(1, t) - g_{20}''(1, t_0) + f_{20}^{(4)}(1, t_0) - [g_{20}''(0, t) - f_{20}^{(4)}(0, t) \\
&\quad - g_{20}''(0, t_0) + f_{20}^{(4)}(0, t_0)] - [g_{20}^{(3)}(0, t) - f_{20}^{(5)}(0, t) - g_{20}^{(3)}(0, t_0) \\
&\quad + f_{20}^{(5)}(0, t_0)] - y[f_{21}''(1, t) - f_{21}''(1, t_0) - f_{20}''(1, t) + f_{20}''(1, t_0) \\
&\quad - [f_{21}''(0, t) - f_{21}''(0, t_0) - f_{20}''(0, t) + f_{20}''(0, t_0)] - [f_{21}^{(3)}(0, t) \\
&\quad - f_{21}^{(3)}(0, t_0) - f_{20}^{(3)}(0, t) + f_{20}^{(3)}(0, t_0)] - f_{20}''(1, t) + f_{20}''(1, t_0) \\
&\quad + f_{20}''(0, t) - f_{20}''(0, t_0) + f_{20}^{(3)}(0, t) - f_{20}^{(3)}(0, t_0) - g_{10}(y, t) \\
&\quad + f_{10}''(y, t) + g_{10}(y, t_0) - f_{10}''(y, t_0)
\end{aligned}$$

elde edilir. Denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& u^{(2,0)}(x, y, t) = \Delta t[(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2)^T(x) - x(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2)^T(1)] \mathbf{C}[\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \mathbf{\Psi}_4(y) \\
&\quad + \frac{y - y^3}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2(1) - y \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \mathbf{\Psi}_4(1)] + u^{(2,0)}(x, y, t_0) \\
&\quad + \frac{y - y^3}{6} \left[g_{21}''(x, t) - f_{21}^{(4)}(x, t) - g_{21}''(x, t_0) + f_{21}^{(4)}(x, t_0) \right. \\
&\quad - g_{20}''(x, t) + f_{20}^{(4)}(x, t) + g_{20}''(x, t_0) - f_{20}^{(4)}(x, t_0) \\
&\quad - \left[g_{21}''(0, t) - f_{21}^{(4)}(0, t) - g_{21}''(0, t_0) + f_{21}^{(4)}(0, t_0) - g_{20}''(0, t) \right. \\
&\quad \left. + f_{20}^{(4)}(0, t) + g_{20}''(0, t_0) - f_{20}^{(4)}(0, t_0) \right] \\
&\quad - x \left[g_{21}^{(3)}(0, t) - f_{21}^{(5)}(0, t) - g_{21}^{(3)}(0, t_0) + f_{21}^{(5)}(0, t_0) - g_{20}^{(3)}(0, t) \right. \\
&\quad \left. + f_{20}^{(5)}(0, t) + g_{20}^{(3)}(0, t_0) - f_{20}^{(5)}(0, t_0) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{y^2 - y}{2} \left[g''_{20}(x, t) - f_{20}^{(4)}(x, t) - g''_{20}(x, t_0) + f_{20}^{(4)}(x, t_0) \right. \\
& \quad - \left[g''_{20}(0, t) - f_{20}^{(4)}(0, t) - g''_{20}(0, t_0) + f_{20}^{(4)}(0, t_0) \right] \\
& \quad \left. - x \left[g_{20}^{(3)}(0, t) - f_{20}^{(5)}(0, t) - g_{20}^{(3)}(0, t_0) + f_{20}^{(5)}(0, t_0) \right] \right] \\
& + y \left[f''_{21}(x, t) - f''_{21}(x, t_0) - f''_{20}(x, t) + f''_{20}(x, t_0) \right. \\
& \quad - \left[f''_{21}(0, t) - f''_{21}(0, t_0) - f''_{20}(0, t) + f''_{20}(0, t_0) \right] \\
& \quad \left. - x \left[f_{21}^{(3)}(0, t) - f_{21}^{(3)}(0, t_0) - f_{20}^{(3)}(0, t) + f_{20}^{(3)}(0, t_0) \right] \right] + f''_{20}(x, t) \\
& \quad - f''_{20}(x, t_0) - \left[f''_{20}(0, t) - f''_{20}(0, t_0) \right] - x \left[f_{20}^{(3)}(0, t) - f_{20}^{(3)}(0, t_0) \right] \\
& + x \left[g_{11}(y, t) - f''_{11}(y, t) - g_{11}(y, t_0) + f''_{11}(y, t_0) \right. \\
& \quad - \frac{y - y^3}{6} \left[g''_{21}(1, t) - f_{21}^{(4)}(1, t) - g''_{21}(1, t_0) + f_{21}^{(4)}(1, t_0) \right. \\
& \quad - g''_{20}(1, t) + f_{20}^{(4)}(1, t) + g''_{20}(1, t_0) - f_{20}^{(4)}(1, t_0) \\
& \quad - \left[g''_{21}(0, t) - f_{21}^{(4)}(0, t) - g''_{21}(0, t_0) + f_{21}^{(4)}(0, t_0) - g''_{20}(0, t) \right. \\
& \quad \left. + f_{20}^{(4)}(0, t) + g''_{20}(0, t_0) - f_{20}^{(4)}(0, t_0) \right] \\
& \quad \left. - \left[g_{21}^{(3)}(0, t) - f_{21}^{(5)}(0, t) - g_{21}^{(3)}(0, t_0) + f_{21}^{(5)}(0, t_0) - g_{20}^{(3)}(0, t) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + f_{20}^{(5)}(0, t) + g_{20}^{(3)}(0, t_0) - f_{20}^{(5)}(0, t_0) \right] \right] \\
& \quad - \frac{y^2 - y}{2} \left[g''_{20}(1, t) - f_{20}^{(4)}(1, t) - g''_{20}(1, t_0) + f_{20}^{(4)}(1, t_0) \right. \\
& \quad - \left[g''_{20}(0, t) - f_{20}^{(4)}(0, t) - g''_{20}(0, t_0) + f_{20}^{(4)}(0, t_0) \right] \\
& \quad \left. - \left[g_{20}^{(3)}(0, t) - f_{20}^{(5)}(0, t) - g_{20}^{(3)}(0, t_0) + f_{20}^{(5)}(0, t_0) \right] \right] \\
& \quad - y \left[f''_{21}(1, t) - f''_{21}(1, t_0) - f''_{20}(1, t) + f''_{20}(1, t_0) \right. \\
& \quad - \left[f''_{21}(0, t) - f''_{21}(0, t_0) - f''_{20}(0, t) + f''_{20}(0, t_0) \right] \\
& \quad \left. - \left[f_{21}^{(3)}(0, t) - f_{21}^{(3)}(0, t_0) - f_{20}^{(3)}(0, t) + f_{20}^{(3)}(0, t_0) \right] \right] - f''_{20}(1, t) \\
& \quad + f''_{20}(1, t_0) + f''_{20}(0, t) - f''_{20}(0, t_0) + f_{20}^{(3)}(0, t) - f_{20}^{(3)}(0, t_0) \\
& \quad - g_{10}(y, t) + f''_{10}(y, t) + g_{10}(y, t_0) - f''_{10}(y, t_0) \Big] + g_{10}(y, t) \\
& \quad - f''_{10}(y, t) - g_{10}(y, t_0) + f''_{10}(y, t_0)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemin x 'e göre 0'dan x 'e kadar iki defa integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
u^{(1,0)}(x, y, t) = & \Delta t [(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{\Psi}_3)^T(x) - \frac{x^2}{2} (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2)^T(1)] \mathbf{C} [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \mathbf{\Psi}_4(y) \\
& + \frac{y - y^3}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2(1) - y \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \mathbf{\Psi}_4(1)] + u^{(1,0)}(x, y, t_0) \\
& + \frac{y - y^3}{6} \left[g'_{21}(x, t) - f_{21}^{(3)}(x, t) - g'_{21}(x, t_0) + f_{21}^{(3)}(x, t_0) - g'_{20}(x, t) \right. \\
& + f_{20}^{(3)}(x, t) + g'_{20}(x, t_0) - f_{20}^{(3)}(x, t_0) \\
& - \left[g'_{21}(0, t) - f_{21}^{(3)}(0, t) - g'_{21}(0, t_0) + f_{21}^{(3)}(0, t_0) - g'_{20}(0, t) + f_{20}^{(3)}(0, t) \right. \\
& \left. + g'_{20}(0, t_0) - f_{20}^{(3)}(0, t_0) \right] \\
& - x \left[g''_{21}(0, t) - f_{21}^{(4)}(0, t) - g''_{21}(0, t_0) + f_{21}^{(4)}(0, t_0) - g''_{20}(0, t) \right. \\
& \left. + f_{20}^{(4)}(0, t) + g''_{20}(0, t_0) - f_{20}^{(4)}(0, t_0) \right] \\
& - \frac{x^2}{2} \left[g_{21}^{(3)}(0, t) - f_{21}^{(5)}(0, t) - g_{21}^{(3)}(0, t_0) + f_{21}^{(5)}(0, t_0) - g_{20}^{(3)}(0, t) \right. \\
& \left. + f_{20}^{(5)}(0, t) + g_{20}^{(3)}(0, t_0) - f_{20}^{(5)}(0, t_0) \right] \\
& + \frac{y^2 - y}{2} \left[g'_{20}(x, t) - f_{20}^{(3)}(x, t) - g'_{20}(x, t_0) + f_{20}^{(3)}(x, t_0) \right. \\
& - \left[g'_{20}(0, t) - f_{20}^{(3)}(0, t) - g'_{20}(0, t_0) + f_{20}^{(3)}(0, t_0) \right] \\
& - x \left[g''_{20}(0, t) - f_{20}^{(4)}(0, t) - g''_{20}(0, t_0) + f_{20}^{(4)}(0, t_0) \right] \\
& \left. - \frac{x^2}{2} \left[g_{20}^{(3)}(0, t) - f_{20}^{(5)}(0, t) - g_{20}^{(3)}(0, t_0) + f_{20}^{(5)}(0, t_0) \right] \right] \\
& + y \left[f'_{21}(x, t) - f'_{21}(x, t_0) - f'_{20}(x, t) + f'_{20}(x, t_0) \right. \\
& - \left[f'_{21}(0, t) - f'_{21}(0, t_0) - f'_{20}(0, t) + f'_{20}(0, t_0) \right] \\
& - x \left[f''_{21}(0, t) - f''_{21}(0, t_0) - f''_{20}(0, t) + f''_{20}(0, t_0) \right] \\
& \left. - \frac{x^2}{2} \left[f_{21}^{(3)}(0, t) - f_{21}^{(3)}(0, t_0) - f_{20}^{(3)}(0, t) + f_{20}^{(3)}(0, t_0) \right] \right] + f'_{20}(x, t) \\
& - f'_{20}(x, t_0) - \left[f'_{20}(0, t) - f'_{20}(0, t_0) \right] - x \left[f''_{20}(0, t) - f''_{20}(0, t_0) \right] \\
& - \frac{x^2}{2} \left[f_{20}^{(3)}(0, t) - f_{20}^{(3)}(0, t_0) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{x^2}{2} [g_{11}(y, t) - f_{11}''(y, t) - g_{11}(y, t_0) + f_{11}''(y, t_0) \\
& \quad - \frac{y - y^3}{6} [g_{21}''(1, t) - f_{21}^{(4)}(1, t) - g_{21}''(1, t_0) + f_{21}^{(4)}(1, t_0) - g_{20}''(1, t) \\
& \quad + f_{20}^{(4)}(1, t) + g_{20}''(1, t_0) - f_{20}^{(4)}(1, t_0) \\
& \quad - [g_{21}''(0, t) - f_{21}^{(4)}(0, t) - g_{21}''(0, t_0) + f_{21}^{(4)}(0, t_0) - g_{20}''(0, t) + f_{20}^{(4)}(0, t) \\
& \quad + g_{20}''(0, t_0) - f_{20}^{(4)}(0, t_0)] \\
& \quad - [g_{21}^{(3)}(0, t) - f_{21}^{(5)}(0, t) - g_{21}^{(3)}(0, t_0) + f_{21}^{(5)}(0, t_0) - g_{20}^{(3)}(0, t) \\
& \quad + f_{20}^{(5)}(0, t) + g_{20}^{(3)}(0, t_0) - f_{20}^{(5)}(0, t_0)] - \frac{y^2 - y}{2} [g_{20}''(1, t) - f_{20}^{(4)}(1, t) \\
& \quad - g_{20}''(1, t_0) + f_{20}^{(4)}(1, t_0) - [g_{20}''(0, t) - f_{20}^{(4)}(0, t) - g_{20}''(0, t_0) \\
& \quad + f_{20}^{(4)}(0, t_0)] - [g_{20}^{(3)}(0, t) - f_{20}^{(5)}(0, t) - g_{20}^{(3)}(0, t_0) + f_{20}^{(5)}(0, t_0)] \\
& \quad - y[f_{21}''(1, t) - f_{21}''(1, t_0) - f_{20}''(1, t) + f_{20}''(1, t_0) - [f_{21}''(0, t) - f_{21}''(0, t_0) \\
& \quad - f_{20}''(0, t) + f_{20}''(0, t_0)] - [f_{21}^{(3)}(0, t) - f_{21}^{(3)}(0, t_0) - f_{20}^{(3)}(0, t) \\
& \quad + f_{20}^{(3)}(0, t_0)] - f_{20}''(1, t) + f_{20}''(1, t_0) + f_{20}''(0, t) - f_{20}''(0, t_0) + f_{20}^{(3)}(0, t) \\
& \quad - f_{20}^{(3)}(0, t_0) - g_{10}(y, t) + f_{10}'(y, t) + g_{10}(y, t_0) - f_{10}'(y, t_0)] \\
& \quad + x[g_{10}(y, t) - f_{10}'(y, t) - g_{10}(y, t_0) + f_{10}'(y, t_0)] + u^{(1,0)}(0, y, t) \\
& \quad - u^{(1,0)}(0, y, t_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^{(0,0)}(x, y, t) &= \Delta t [(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \mathbf{\Psi}_4)^T(x) - \frac{x^3}{6} (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2)^T(1)] \mathbf{C} [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \mathbf{\Psi}_4(y) \\
& \quad + \frac{y - y^3}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2(1) - y \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \mathbf{\Psi}_4(1)] + u^{(0,0)}(x, y, t_0) \\
& \quad + \frac{y - y^3}{6} \left[g_{21}(x, t) - f_{21}''(x, t) - g_{21}(x, t_0) + f_{21}''(x, t_0) - g_{20}(x, t) \right. \\
& \quad + f_{20}''(x, t) + g_{20}(x, t_0) - f_{20}''(x, t_0) \\
& \quad - [g_{21}(0, t) - f_{21}''(0, t) - g_{21}(0, t_0) + f_{21}''(0, t_0) - g_{20}(0, t) + f_{20}''(0, t) \\
& \quad + g_{20}(0, t_0) - f_{20}''(0, t_0)] \\
& \quad - x [g_{21}'(0, t) - f_{21}^{(3)}(0, t) - g_{21}'(0, t_0) + f_{21}^{(3)}(0, t_0) - g_{20}'(0, t) \\
& \quad + f_{20}^{(3)}(0, t) + g_{20}'(0, t_0) - f_{20}^{(3)}(0, t_0)] \\
& \quad - \frac{x^2}{2} [g_{21}''(0, t) - f_{21}^{(4)}(0, t) - g_{21}''(0, t_0) + f_{21}^{(4)}(0, t_0) - g_{20}''(0, t) \\
& \quad + f_{20}^{(4)}(0, t) + g_{20}''(0, t_0) - f_{20}^{(4)}(0, t_0)] \\
& \quad - \frac{x^3}{6} [g_{21}^{(3)}(0, t) - f_{21}^{(5)}(0, t) - g_{21}^{(3)}(0, t_0) + f_{21}^{(5)}(0, t_0) - g_{20}^{(3)}(0, t) \\
& \quad + f_{20}^{(5)}(0, t) + g_{20}^{(3)}(0, t_0) - f_{20}^{(5)}(0, t_0)] \left. \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{y^2 - y}{2} \left[g_{20}(x, t) - f_{20}''(x, t) - g_{20}(x, t_0) + f_{20}''(x, t_0) \right. \\
& \quad - [g_{20}(0, t) - f_{20}''(0, t) - g_{20}(0, t_0) + f_{20}''(0, t_0)] \\
& \quad - x [g_{20}'(0, t) - f_{20}^{(3)}(0, t) - g_{20}'(0, t_0) + f_{20}^{(3)}(0, t_0)] \\
& \quad - \frac{x^2}{2} [g_{20}''(0, t) - f_{20}^{(4)}(0, t) - g_{20}''(0, t_0) + f_{20}^{(4)}(0, t_0)] \\
& \quad \left. - \frac{x^3}{6} [g_{20}^{(3)}(0, t) - f_{20}^{(5)}(0, t) - g_{20}^{(3)}(0, t_0) + f_{20}^{(5)}(0, t_0)] \right] \\
& + y \left[f_{21}(x, t) - f_{21}(x, t_0) - f_{20}(x, t) + f_{20}(x, t_0) \right. \\
& \quad - [f_{21}(0, t) - f_{21}(0, t_0) - f_{20}(0, t) + f_{20}(0, t_0)] \\
& \quad - x [f_{21}'(0, t) - f_{21}'(0, t_0) - f_{20}'(0, t) + f_{20}'(0, t_0)] \\
& \quad - \frac{x^2}{2} [f_{21}''(0, t) - f_{21}''(0, t_0) - f_{20}''(0, t) + f_{20}''(0, t_0)] \\
& \quad \left. - \frac{x^3}{6} [f_{21}^{(3)}(0, t) - f_{21}^{(3)}(0, t_0) - f_{20}^{(3)}(0, t) + f_{20}^{(3)}(0, t_0)] \right] \\
& + f_{20}(x, t) - f_{20}(x, t_0) - [f_{20}(0, t) - f_{20}(0, t_0)] - x [f_{20}'(0, t) - f_{20}'(0, t_0)] \\
& \quad - \frac{x^2}{2} [f_{20}''(0, t) - f_{20}''(0, t_0)] - \frac{x^3}{6} [f_{20}^{(3)}(0, t) - f_{20}^{(3)}(0, t_0)] \\
& + \frac{x^3}{6} \left[g_{11}(y, t) - f_{11}''(y, t) - g_{11}(y, t_0) + f_{11}''(y, t_0) \right. \\
& \quad - \frac{y - y^3}{6} [g_{21}''(1, t) - f_{21}^{(4)}(1, t) - g_{21}''(1, t_0) + f_{21}^{(4)}(1, t_0) - g_{20}''(1, t) \\
& \quad + f_{20}^{(4)}(1, t) + g_{20}''(1, t_0) - f_{20}^{(4)}(1, t_0) \\
& \quad - [g_{21}''(0, t) - f_{21}^{(4)}(0, t) - g_{21}''(0, t_0) + f_{21}^{(4)}(0, t_0) - g_{20}''(0, t) + f_{20}^{(4)}(0, t) \\
& \quad + g_{20}''(0, t_0) - f_{20}^{(4)}(0, t_0)] \\
& \quad - [g_{21}^{(3)}(0, t) - f_{21}^{(5)}(0, t) - g_{21}^{(3)}(0, t_0) + f_{21}^{(5)}(0, t_0) - g_{20}^{(3)}(0, t) \\
& \quad + f_{20}^{(5)}(0, t) + g_{20}^{(3)}(0, t_0) - f_{20}^{(5)}(0, t_0)] \\
& \quad - \frac{y^2 - y}{2} [g_{20}''(1, t) - f_{20}^{(4)}(1, t) - g_{20}''(1, t_0) + f_{20}^{(4)}(1, t_0) \\
& \quad - [g_{20}''(0, t) - f_{20}^{(4)}(0, t) - g_{20}''(0, t_0) + f_{20}^{(4)}(0, t_0)] \\
& \quad - [g_{20}^{(3)}(0, t) - f_{20}^{(5)}(0, t) - g_{20}^{(3)}(0, t_0) + f_{20}^{(5)}(0, t_0)] \\
& \quad - y [f_{21}''(1, t) - f_{21}''(1, t_0) - f_{20}''(1, t) + f_{20}''(1, t_0) \\
& \quad - [f_{21}''(0, t) - f_{21}''(0, t_0) - f_{20}''(0, t) + f_{20}''(0, t_0)] \\
& \quad - [f_{21}^{(3)}(0, t) - f_{21}^{(3)}(0, t_0) - f_{20}^{(3)}(0, t) + f_{20}^{(3)}(0, t_0)] - f_{20}''(1, t) \\
& \quad + f_{20}''(1, t_0) + f_{20}''(0, t) - f_{20}''(0, t_0) + f_{20}^{(3)}(0, t) - f_{20}^{(3)}(0, t_0) - g_{10}(y, t) \\
& \quad \left. + f_{10}''(y, t) + g_{10}(y, t_0) - f_{10}''(y, t_0) \right]
\end{aligned}$$

$$+ \frac{x^2}{2} [g_{10}(y, t) - f''_{10}(y, t) - g_{10}(y, t_0) + f''_{10}(y, t_0)] + x[u^{(1,0)}(0, y, t) - u^{(1,0)}(0, y, t_0)] \\ + f_{10}(y, t) - f_{10}(y, t_0)$$

bulunur. $x = 1$ için

$$u^{(0,0)}(1, y, t) = \Delta t[(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4)^T(1) - \frac{1}{6}(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2)^T(1)]\mathbf{C}[\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(y) \\ + \frac{y - y^3}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1) - y \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(1)] + u^{(0,0)}(1, y, t_0) \\ + \frac{y - y^3}{6} \left[g_{21}(1, t) - f''_{21}(1, t) - g_{21}(1, t_0) + f''_{21}(1, t_0) - g_{20}(1, t) + f''_{20}(1, t) \right. \\ + g_{20}(1, t_0) - f''_{20}(1, t_0) \\ - [g_{21}(0, t) - f''_{21}(0, t) - g_{21}(0, t_0) + f''_{21}(0, t_0) - g_{20}(0, t) + f''_{20}(0, t) \\ + g_{20}(0, t_0) - f''_{20}(0, t_0)] \\ - [g'_{21}(0, t) - f_{21}^{(3)}(0, t) - g'_{21}(0, t_0) + f_{21}^{(3)}(0, t_0) - g'_{20}(0, t) + f_{20}^{(3)}(0, t) \\ + g'_{20}(0, t_0) - f_{20}^{(3)}(0, t_0)] \\ - \frac{1}{2} [g''_{21}(0, t) - f_{21}^{(4)}(0, t) - g''_{21}(0, t_0) + f_{21}^{(4)}(0, t_0) - g''_{20}(0, t) \\ + f_{20}^{(4)}(0, t) + g''_{20}(0, t_0) - f_{20}^{(4)}(0, t_0)] \\ - \frac{1}{6} [g_{21}^{(3)}(0, t) - f_{21}^{(5)}(0, t) - g_{21}^{(3)}(0, t_0) + f_{21}^{(5)}(0, t_0) - g_{20}^{(3)}(0, t) \\ + f_{20}^{(5)}(0, t) + g_{20}^{(3)}(0, t_0) - f_{20}^{(5)}(0, t_0)] \left. \right] \\ + \frac{y^2 - y}{2} \left[g_{20}(1, t) - f''_{20}(1, t) - g_{20}(1, t_0) + f''_{20}(1, t_0) \right. \\ - [g_{20}(0, t) - f''_{20}(0, t) - g_{20}(0, t_0) + f''_{20}(0, t_0)] \\ - [g'_{20}(0, t) - f_{20}^{(3)}(0, t) - g'_{20}(0, t_0) + f_{20}^{(3)}(0, t_0)] \\ - \frac{1}{2} [g''_{20}(0, t) - f_{20}^{(4)}(0, t) - g''_{20}(0, t_0) + f_{20}^{(4)}(0, t_0)] \\ \left. - \frac{1}{6} [g_{20}^{(3)}(0, t) - f_{20}^{(5)}(0, t) - g_{20}^{(3)}(0, t_0) + f_{20}^{(5)}(0, t_0)] \right] \\ + y \left[f_{21}(1, t) - f_{21}(1, t_0) - f_{20}(1, t) + f_{20}(1, t_0) \right. \\ - [f_{21}(0, t) - f_{21}(0, t_0) - f_{20}(0, t) + f_{20}(0, t_0)] \\ - [f'_{21}(0, t) - f'_{21}(0, t_0) - f'_{20}(0, t) + f'_{20}(0, t_0)] \\ - \frac{1}{2} [f''_{21}(0, t) - f''_{21}(0, t_0) - f''_{20}(0, t) + f''_{20}(0, t_0)] \\ \left. - \frac{1}{6} [f_{21}^{(3)}(0, t) - f_{21}^{(3)}(0, t_0) - f_{20}^{(3)}(0, t) + f_{20}^{(3)}(0, t_0)] \right]$$

$$\begin{aligned}
& +f_{20}(1, t) - f_{20}(1, t_0) - [f_{20}(0, t) - f_{20}(0, t_0)] - [f'_{20}(0, t) - f'_{20}(0, t_0)] \\
& \quad - \frac{1}{2}[f''_{20}(0, t) - f''_{20}(0, t_0)] - \frac{1}{6}[f^{(3)}_{20}(0, t) - f^{(3)}_{20}(0, t_0)] \\
& + \frac{1}{6} \left[g_{11}(y, t) - f''_{11}(y, t) - g_{11}(y, t_0) + f''_{11}(y, t_0) \right. \\
& \quad - \frac{y - y^3}{6} \left[g''_{21}(1, t) - f^{(4)}_{21}(1, t) - g''_{21}(1, t_0) + f^{(4)}_{21}(1, t_0) - g''_{20}(1, t) \right. \\
& \quad + f^{(4)}_{20}(1, t) + g''_{20}(1, t_0) - f^{(4)}_{20}(1, t_0) \\
& \quad - \left[g''_{21}(0, t) - f^{(4)}_{21}(0, t) - g''_{21}(0, t_0) + f^{(4)}_{21}(0, t_0) - g''_{20}(0, t) + f^{(4)}_{20}(0, t) \right. \\
& \quad \left. \left. + g''_{20}(0, t_0) - f^{(4)}_{20}(0, t_0) \right] \right. \\
& \quad - \left[g^{(3)}_{21}(0, t) - f^{(5)}_{21}(0, t) - g^{(3)}_{21}(0, t_0) + f^{(5)}_{21}(0, t_0) - g^{(3)}_{20}(0, t) \right. \\
& \quad \left. \left. + f^{(5)}_{20}(0, t) + g^{(3)}_{20}(0, t_0) - f^{(5)}_{20}(0, t_0) \right] \right] \\
& \quad - \frac{y^2 - y}{2} \left[g''_{20}(1, t) - f^{(4)}_{20}(1, t) - g''_{20}(1, t_0) + f^{(4)}_{20}(1, t_0) \right. \\
& \quad - \left[g''_{20}(0, t) - f^{(4)}_{20}(0, t) - g''_{20}(0, t_0) + f^{(4)}_{20}(0, t_0) \right] \\
& \quad - \left[g^{(3)}_{20}(0, t) - f^{(5)}_{20}(0, t) - g^{(3)}_{20}(0, t_0) + f^{(5)}_{20}(0, t_0) \right] \left. \right] \\
& \quad - y \left[f''_{21}(1, t) - f''_{21}(1, t_0) - f''_{20}(1, t) + f''_{20}(1, t_0) \right. \\
& \quad - \left[f''_{21}(0, t) - f''_{21}(0, t_0) - f''_{20}(0, t) + f''_{20}(0, t_0) \right] \\
& \quad - \left[f^{(3)}_{21}(0, t) - f^{(3)}_{21}(0, t_0) - f^{(3)}_{20}(0, t) + f^{(3)}_{20}(0, t_0) \right] \left. \right] - f''_{20}(1, t) \\
& \quad + f''_{20}(1, t_0) + f''_{20}(0, t) - f''_{20}(0, t_0) + f^{(3)}_{20}(0, t) - f^{(3)}_{20}(0, t_0) - g_{10}(y, t) \\
& \quad \left. + f''_{10}(y, t) + g_{10}(y, t_0) - f''_{10}(y, t_0) \right] \\
& + \frac{1}{2} [g_{10}(y, t) - f''_{10}(y, t) - g_{10}(y, t_0) + f''_{10}(y, t_0)] + [u^{(1,0)}(0, y, t) - u^{(1,0)}(0, y, t_0)] \\
& \quad + f_{10}(y, t) - f_{10}(y, t_0)
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
& u^{(1,0)}(0, y, t) - u^{(1,0)}(0, y, t_0) \\
& = -\Delta t [(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \mathbf{\Psi}_4)^T(1) - \frac{1}{6} (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2)^T(1)] \mathbf{C} [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \mathbf{\Psi}_4(y) \\
& \quad + \frac{y - y^3}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2(1) - y \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \mathbf{\Psi}_4(1)] + f_{11}(y, t) - f_{11}(y, t_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{y-y^3}{6} \left[g_{21}(1,t) - f_{21}''(1,t) - g_{21}(1,t_0) + f_{21}''(1,t_0) - g_{20}(1,t) + f_{20}''(1,t) \right. \\
& \quad + g_{20}(1,t_0) - f_{20}''(1,t_0) \\
& \quad - [g_{21}(0,t) - f_{21}''(0,t) - g_{21}(0,t_0) + f_{21}''(0,t_0) - g_{20}(0,t) + f_{20}''(0,t) \\
& \quad + g_{20}(0,t_0) - f_{20}''(0,t_0)] \\
& \quad - [g_{21}'(0,t) - f_{21}^{(3)}(0,t) - g_{21}'(0,t_0) + f_{21}^{(3)}(0,t_0) - g_{20}'(0,t) + f_{20}^{(3)}(0,t) \\
& \quad + g_{20}'(0,t_0) - f_{20}^{(3)}(0,t_0)] \\
& \quad - \frac{1}{2} [g_{21}''(0,t) - f_{21}^{(4)}(0,t) - g_{21}''(0,t_0) + f_{21}^{(4)}(0,t_0) - g_{20}''(0,t) \\
& \quad + f_{20}^{(4)}(0,t) + g_{20}''(0,t_0) - f_{20}^{(4)}(0,t_0)] \\
& \quad - \frac{1}{6} [g_{21}^{(3)}(0,t) - f_{21}^{(5)}(0,t) - g_{21}^{(3)}(0,t_0) + f_{21}^{(5)}(0,t_0) - g_{20}^{(3)}(0,t) \\
& \quad + f_{20}^{(5)}(0,t) + g_{20}^{(3)}(0,t_0) - f_{20}^{(5)}(0,t_0)] \left. \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{y^2-y}{2} \left[g_{20}(1,t) - f_{20}''(1,t) - g_{20}(1,t_0) + f_{20}''(1,t_0) \right. \\
& \quad - [g_{20}(0,t) - f_{20}''(0,t) - g_{20}(0,t_0) + f_{20}''(0,t_0)] \\
& \quad - [g_{20}'(0,t) - f_{20}^{(3)}(0,t) - g_{20}'(0,t_0) + f_{20}^{(3)}(0,t_0)] \\
& \quad - \frac{1}{2} [g_{20}''(0,t) - f_{20}^{(4)}(0,t) - g_{20}''(0,t_0) + f_{20}^{(4)}(0,t_0)] \\
& \quad \left. - \frac{1}{6} [g_{20}^{(3)}(0,t) - f_{20}^{(5)}(0,t) - g_{20}^{(3)}(0,t_0) + f_{20}^{(5)}(0,t_0)] \right] \\
& -y \left[f_{21}(1,t) - f_{21}(1,t_0) - f_{20}(1,t) + f_{20}(1,t_0) \right. \\
& \quad - [f_{21}(0,t) - f_{21}(0,t_0) - f_{20}(0,t) + f_{20}(0,t_0)] \\
& \quad - [f_{21}'(0,t) - f_{21}'(0,t_0) - f_{20}'(0,t) + f_{20}'(0,t_0)] \\
& \quad - \frac{1}{2} [f_{21}''(0,t) - f_{21}''(0,t_0) - f_{20}''(0,t) + f_{20}''(0,t_0)] \\
& \quad \left. - \frac{1}{6} [f_{21}^{(3)}(0,t) - f_{21}^{(3)}(0,t_0) - f_{20}^{(3)}(0,t) + f_{20}^{(3)}(0,t_0)] \right] \\
& -[f_{20}(1,t) - f_{20}(1,t_0) - [f_{20}(0,t) - f_{20}(0,t_0)] - [f_{20}'(0,t) - f_{20}'(0,t_0)] \\
& \quad - \frac{1}{2} [f_{20}''(0,t) - f_{20}''(0,t_0)] - \frac{1}{6} [f_{20}^{(3)}(0,t) - f_{20}^{(3)}(0,t_0)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{6} \left[g_{11}(y, t) - f_{11}''(y, t) - g_{11}(y, t_0) + f_{11}''(y, t_0) \right. \\
& \quad - \frac{y - y^3}{6} \left[g_{21}''(1, t) - f_{21}^{(4)}(1, t) - g_{21}''(1, t_0) + f_{21}^{(4)}(1, t_0) - g_{20}''(1, t) \right. \\
& \quad + f_{20}^{(4)}(1, t) + g_{20}''(1, t_0) - f_{20}^{(4)}(1, t_0) \\
& \quad - \left[g_{21}''(0, t) - f_{21}^{(4)}(0, t) - g_{21}''(0, t_0) + f_{21}^{(4)}(0, t_0) - g_{20}''(0, t) + f_{20}^{(4)}(0, t) \right. \\
& \quad \left. + g_{20}''(0, t_0) - f_{20}^{(4)}(0, t_0) \right] \\
& \quad - \left[g_{21}^{(3)}(0, t) - f_{21}^{(5)}(0, t) - g_{21}^{(3)}(0, t_0) + f_{21}^{(5)}(0, t_0) - g_{20}^{(3)}(0, t) \right. \\
& \quad \left. + f_{20}^{(5)}(0, t) + g_{20}^{(3)}(0, t_0) - f_{20}^{(5)}(0, t_0) \right] \\
& \quad - \frac{y^2 - y}{2} \left[g_{20}''(1, t) - f_{20}^{(4)}(1, t) - g_{20}''(1, t_0) + f_{20}^{(4)}(1, t_0) \right. \\
& \quad - \left[g_{20}''(0, t) - f_{20}^{(4)}(0, t) - g_{20}''(0, t_0) + f_{20}^{(4)}(0, t_0) \right] \\
& \quad - \left[g_{20}^{(3)}(0, t) - f_{20}^{(5)}(0, t) - g_{20}^{(3)}(0, t_0) + f_{20}^{(5)}(0, t_0) \right] \\
& \quad - y \left[f_{21}''(1, t) - f_{21}''(1, t_0) - f_{20}''(1, t) + f_{20}''(1, t_0) \right. \\
& \quad - \left[f_{21}''(0, t) - f_{21}''(0, t_0) - f_{20}''(0, t) + f_{20}''(0, t_0) \right] \\
& \quad - \left[f_{21}^{(3)}(0, t) - f_{21}^{(3)}(0, t_0) - f_{20}^{(3)}(0, t) + f_{20}^{(3)}(0, t_0) \right] - f_{20}''(1, t) \\
& \quad + f_{20}''(1, t_0) + f_{20}''(0, t) - f_{20}''(0, t_0) + f_{20}^{(3)}(0, t) - f_{20}^{(3)}(0, t_0) - g_{10}(y, t) \\
& \quad \left. + f_{10}''(y, t) + g_{10}(y, t_0) - f_{10}''(y, t_0) \right] \\
& \quad - \frac{1}{2} [g_{10}(y, t) - f_{10}''(y, t) - g_{10}(y, t_0) + f_{10}''(y, t_0)] - f_{10}(y, t) + f_{10}(y, t_0)
\end{aligned}$$

elde edilir. Denklemdede yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
u^{(0,0)}(x, y, t) &= \Delta t [(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \mathbf{\Psi}_4)^T(x) + \frac{x - x^3}{6} (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2)^T(1) \\
&\quad - x(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \mathbf{\Psi}_4)^T(1)] \mathbf{C}[\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \mathbf{\Psi}_4(y) + \frac{y - y^3}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2(1) \\
&\quad - y \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \mathbf{\Psi}_4(1)] + u^{(0,0)}(x, y, t_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{y - y^3}{6} \left[g_{21}(x, t) - f_{21}''(x, t) - g_{21}(x, t_0) + f_{21}''(x, t_0) - g_{20}(x, t) + f_{20}''(x, t) \right. \\
& \quad + g_{20}(x, t_0) - f_{20}''(x, t_0) \\
& \quad - [g_{21}(0, t) - f_{21}''(0, t) - g_{21}(0, t_0) + f_{21}''(0, t_0) - g_{20}(0, t) + f_{20}''(0, t) \\
& \quad + g_{20}(0, t_0) - f_{20}''(0, t_0)] \\
& \quad - x [g_{21}'(0, t) - f_{21}^{(3)}(0, t) - g_{21}'(0, t_0) + f_{21}^{(3)}(0, t_0) - g_{20}'(0, t) \\
& \quad + f_{20}^{(3)}(0, t) + g_{20}'(0, t_0) - f_{20}^{(3)}(0, t_0)] \\
& \quad - \frac{x^2}{2} [g_{21}''(0, t) - f_{21}^{(4)}(0, t) - g_{21}''(0, t_0) + f_{21}^{(4)}(0, t_0) - g_{20}''(0, t) \\
& \quad + f_{20}^{(4)}(0, t) + g_{20}''(0, t_0) - f_{20}^{(4)}(0, t_0)] \\
& \quad - \frac{x^3}{6} [g_{21}^{(3)}(0, t) - f_{21}^{(5)}(0, t) - g_{21}^{(3)}(0, t_0) + f_{21}^{(5)}(0, t_0) - g_{20}^{(3)}(0, t) \\
& \quad + f_{20}^{(5)}(0, t) + g_{20}^{(3)}(0, t_0) - f_{20}^{(5)}(0, t_0)] \Big] \\
& + \frac{y^2 - y}{2} \left[g_{20}(x, t) - f_{20}''(x, t) - g_{20}(x, t_0) + f_{20}''(x, t_0) \right. \\
& \quad - [g_{20}(0, t) - f_{20}''(0, t) - g_{20}(0, t_0) + f_{20}''(0, t_0)] \\
& \quad - x [g_{20}'(0, t) - f_{20}^{(3)}(0, t) - g_{20}'(0, t_0) + f_{20}^{(3)}(0, t_0)] \\
& \quad - \frac{x^2}{2} [g_{20}''(0, t) - f_{20}^{(4)}(0, t) - g_{20}''(0, t_0) + f_{20}^{(4)}(0, t_0)] \\
& \quad \left. - \frac{x^3}{6} [g_{20}^{(3)}(0, t) - f_{20}^{(5)}(0, t) - g_{20}^{(3)}(0, t_0) + f_{20}^{(5)}(0, t_0)] \right] \\
& + y \left[f_{21}(x, t) - f_{21}(x, t_0) - f_{20}(x, t) + f_{20}(x, t_0) \right. \\
& \quad - [f_{21}(0, t) - f_{21}(0, t_0) - f_{20}(0, t) + f_{20}(0, t_0)] \\
& \quad - x [f_{21}'(0, t) - f_{21}'(0, t_0) - f_{20}'(0, t) + f_{20}'(0, t_0)] \\
& \quad - \frac{x^2}{2} [f_{21}''(0, t) - f_{21}''(0, t_0) - f_{20}''(0, t) + f_{20}''(0, t_0)] \\
& \quad \left. - \frac{x^3}{6} [f_{21}^{(3)}(0, t) - f_{21}^{(3)}(0, t_0) - f_{20}^{(3)}(0, t) + f_{20}^{(3)}(0, t_0)] \right] \\
& + f_{20}(x, t) - f_{20}(x, t_0) - [f_{20}(0, t) - f_{20}(0, t_0)] - x [f_{20}'(0, t) - f_{20}'(0, t_0)] \\
& \quad - \frac{x^2}{2} [f_{20}''(0, t) - f_{20}''(0, t_0)] - \frac{x^3}{6} [f_{20}^{(3)}(0, t) - f_{20}^{(3)}(0, t_0)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{x^3}{6} \left[g_{11}(y, t) - f_{11}''(y, t) - g_{11}(y, t_0) + f_{11}''(y, t_0) \right. \\
& \quad - \frac{y - y^3}{6} \left[g_{21}''(1, t) - f_{21}^{(4)}(1, t) - g_{21}''(1, t_0) + f_{21}^{(4)}(1, t_0) - g_{20}''(1, t) \right. \\
& \quad + f_{20}^{(4)}(1, t) + g_{20}''(1, t_0) - f_{20}^{(4)}(1, t_0) \\
& \quad - \left[g_{21}''(0, t) - f_{21}^{(4)}(0, t) - g_{21}''(0, t_0) + f_{21}^{(4)}(0, t_0) - g_{20}''(0, t) + f_{20}^{(4)}(0, t) \right. \\
& \quad \left. + g_{20}''(0, t_0) - f_{20}^{(4)}(0, t_0) \right] \\
& \quad - \left[g_{21}^{(3)}(0, t) - f_{21}^{(5)}(0, t) - g_{21}^{(3)}(0, t_0) + f_{21}^{(5)}(0, t_0) - g_{20}^{(3)}(0, t) \right. \\
& \quad \left. + f_{20}^{(5)}(0, t) + g_{20}^{(3)}(0, t_0) - f_{20}^{(5)}(0, t_0) \right] \Big] \\
& \quad - \frac{y^2 - y}{2} \left[g_{20}''(1, t) - f_{20}^{(4)}(1, t) - g_{20}''(1, t_0) + f_{20}^{(4)}(1, t_0) \right. \\
& \quad - \left[g_{20}''(0, t) - f_{20}^{(4)}(0, t) - g_{20}''(0, t_0) + f_{20}^{(4)}(0, t_0) \right] \\
& \quad - \left[g_{20}^{(3)}(0, t) - f_{20}^{(5)}(0, t) - g_{20}^{(3)}(0, t_0) + f_{20}^{(5)}(0, t_0) \right] \Big] \\
& \quad - y \left[f_{21}''(1, t) - f_{21}''(1, t_0) - f_{20}''(1, t) + f_{20}''(1, t_0) \right. \\
& \quad - \left[f_{21}''(0, t) - f_{21}''(0, t_0) - f_{20}''(0, t) + f_{20}''(0, t_0) \right] \\
& \quad - \left[f_{21}^{(3)}(0, t) - f_{21}^{(3)}(0, t_0) - f_{20}^{(3)}(0, t) + f_{20}^{(3)}(0, t_0) \right] \Big] - f_{20}''(1, t) \\
& \quad + f_{20}''(1, t_0) + f_{20}''(0, t) - f_{20}''(0, t_0) + f_{20}^{(3)}(0, t) - f_{20}^{(3)}(0, t_0) - g_{10}(y, t) \\
& \quad \left. + f_{10}''(y, t) + g_{10}(y, t_0) - f_{10}''(y, t_0) \right] \\
& \quad + \frac{x^2}{2} [g_{10}(y, t) - f_{10}''(y, t) - g_{10}(y, t_0) + f_{10}''(y, t_0)] + f_{10}(y, t) \\
& \quad - f_{10}(y, t_0) + x[f_{11}(y, t) - f_{11}(y, t_0)] \\
& - x \frac{y - y^3}{6} \left[g_{21}(1, t) - f_{21}''(1, t) - g_{21}(1, t_0) + f_{21}''(1, t_0) - g_{20}(1, t) + f_{20}''(1, t) \right. \\
& \quad + g_{20}(1, t_0) - f_{20}''(1, t_0) \\
& \quad - [g_{21}(0, t) - f_{21}''(0, t) - g_{21}(0, t_0) + f_{21}''(0, t_0) - g_{20}(0, t) + f_{20}''(0, t) \\
& \quad + g_{20}(0, t_0) - f_{20}''(0, t_0)] \\
& \quad - [g_{21}'(0, t) - f_{21}^{(3)}(0, t) - g_{21}'(0, t_0) + f_{21}^{(3)}(0, t_0) - g_{20}'(0, t) + f_{20}^{(3)}(0, t) \\
& \quad \left. + g_{20}'(0, t_0) - f_{20}^{(3)}(0, t_0) \right] \\
& \quad - \frac{1}{2} [g_{21}''(0, t) - f_{21}^{(4)}(0, t) - g_{21}''(0, t_0) + f_{21}^{(4)}(0, t_0) - g_{20}''(0, t) \\
& \quad + f_{20}^{(4)}(0, t) + g_{20}''(0, t_0) - f_{20}^{(4)}(0, t_0)] \\
& \quad - \frac{1}{6} [g_{21}^{(3)}(0, t) - f_{21}^{(5)}(0, t) - g_{21}^{(3)}(0, t_0) + f_{21}^{(5)}(0, t_0) - g_{20}^{(3)}(0, t) \\
& \quad \left. + f_{20}^{(5)}(0, t) + g_{20}^{(3)}(0, t_0) - f_{20}^{(5)}(0, t_0) \right] \Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -x \frac{y^2 - y}{2} \left[g_{20}(1, t) - f_{20}''(1, t) - g_{20}(1, t_0) + f_{20}''(1, t_0) \right. \\
& \quad - [g_{20}(0, t) - f_{20}''(0, t) - g_{20}(0, t_0) + f_{20}''(0, t_0)] \\
& \quad - [g_{20}'(0, t) - f_{20}^{(3)}(0, t) - g_{20}'(0, t_0) + f_{20}^{(3)}(0, t_0)] \\
& \quad - \frac{1}{2} [g_{20}''(0, t) - f_{20}^{(4)}(0, t) - g_{20}''(0, t_0) + f_{20}^{(4)}(0, t_0)] \\
& \quad \left. - \frac{1}{6} [g_{20}^{(3)}(0, t) - f_{20}^{(5)}(0, t) - g_{20}^{(3)}(0, t_0) + f_{20}^{(5)}(0, t_0)] \right] \\
& -xy \left[f_{21}(1, t) - f_{21}(1, t_0) - f_{20}(1, t) + f_{20}(1, t_0) \right. \\
& \quad - [f_{21}(0, t) - f_{21}(0, t_0) - f_{20}(0, t) + f_{20}(0, t_0)] \\
& \quad - [f_{21}'(0, t) - f_{21}'(0, t_0) - f_{20}'(0, t) + f_{20}'(0, t_0)] \\
& \quad - \frac{1}{2} [f_{21}''(0, t) - f_{21}''(0, t_0) - f_{20}''(0, t) + f_{20}''(0, t_0)] \\
& \quad \left. - \frac{1}{6} [f_{21}^{(3)}(0, t) - f_{21}^{(3)}(0, t_0) - f_{20}^{(3)}(0, t) + f_{20}^{(3)}(0, t_0)] \right] \\
& -x[f_{20}(1, t) - f_{20}(1, t_0) - [f_{20}(0, t) - f_{20}(0, t_0)] - [f_{20}'(0, t) - f_{20}'(0, t_0)] \\
& \quad - \frac{1}{2} [f_{20}''(0, t) - f_{20}''(0, t_0)] - \frac{1}{6} [f_{20}^{(3)}(0, t) - f_{20}^{(3)}(0, t_0)] \\
& -\frac{x}{6} \left[g_{11}(y, t) - f_{11}''(y, t) - g_{11}(y, t_0) + f_{11}''(y, t_0) \right. \\
& \quad - \frac{y - y^3}{6} [g_{21}''(1, t) - f_{21}^{(4)}(1, t) - g_{21}''(1, t_0) + f_{21}^{(4)}(1, t_0) - g_{20}''(1, t) \\
& \quad + f_{20}^{(4)}(1, t) + g_{20}''(1, t_0) - f_{20}^{(4)}(1, t_0) \\
& \quad - [g_{21}''(0, t) - f_{21}^{(4)}(0, t) - g_{21}''(0, t_0) + f_{21}^{(4)}(0, t_0) - g_{20}''(0, t) + f_{20}^{(4)}(0, t) \\
& \quad + g_{20}''(0, t_0) - f_{20}^{(4)}(0, t_0)] \\
& \quad - [g_{21}^{(3)}(0, t) - f_{21}^{(5)}(0, t) - g_{21}^{(3)}(0, t_0) + f_{21}^{(5)}(0, t_0) - g_{20}^{(3)}(0, t) \\
& \quad + f_{20}^{(5)}(0, t) + g_{20}^{(3)}(0, t_0) - f_{20}^{(5)}(0, t_0)] \\
& \quad - \frac{y^2 - y}{2} [g_{20}''(1, t) - f_{20}^{(4)}(1, t) - g_{20}''(1, t_0) + f_{20}^{(4)}(1, t_0) \\
& \quad - [g_{20}''(0, t) - f_{20}^{(4)}(0, t) - g_{20}''(0, t_0) + f_{20}^{(4)}(0, t_0)] \\
& \quad - [g_{20}^{(3)}(0, t) - f_{20}^{(5)}(0, t) - g_{20}^{(3)}(0, t_0) + f_{20}^{(5)}(0, t_0)] \\
& \quad - y [f_{21}''(1, t) - f_{21}''(1, t_0) - f_{20}''(1, t) + f_{20}''(1, t_0) \\
& \quad - [f_{21}''(0, t) - f_{21}''(0, t_0) - f_{20}''(0, t) + f_{20}''(0, t_0)] \\
& \quad - [f_{21}^{(3)}(0, t) - f_{21}^{(3)}(0, t_0) - f_{20}^{(3)}(0, t) + f_{20}^{(3)}(0, t_0)] - f_{20}''(1, t) \\
& \quad + f_{20}''(1, t_0) + f_{20}''(0, t) - f_{20}''(0, t_0) + f_{20}^{(3)}(0, t) - f_{20}^{(3)}(0, t_0) - g_{10}(y, t) \\
& \quad \left. + f_{10}''(y, t) + g_{10}(y, t_0) - f_{10}''(y, t_0) \right] \\
& -\frac{x}{2} [g_{10}(y, t) - f_{10}''(y, t) - g_{10}(y, t_0) + f_{10}''(y, t_0)] - x[f_{10}(y, t) - f_{10}(y, t_0)]
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$u^{(3,4)}(x, y, t) = \Delta t(\mathbf{P}_1 \mathbf{\Psi}_1)^T(x) \mathbf{C} \mathbf{\Psi}(y) + u^{(3,4)}(x, y, t_0) + u^{(3,4)}(0, y, t) - u^{(3,4)}(0, y, t_0)$$

$$u^{(2,4)}(x, y, t) = \Delta t(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2)^T(x) \mathbf{C} \mathbf{\Psi}(y) + u^{(2,4)}(x, y, t_0) + x[u^{(3,4)}(0, y, t) - u^{(3,4)}(0, y, t_0)] + g_{10}^{(4)}(y, t) - f_{10}^{(6)}(y, t) - g_{10}^{(4)}(y, t_0) + f_{10}^{(6)}(y, t_0)$$

$x = 1$ için

$$u^{(2,4)}(1, y, t) = \Delta t(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2)^T(1) \mathbf{C} \mathbf{\Psi}(y) + u^{(2,4)}(1, y, t_0) + [u^{(3,4)}(0, y, t) - u^{(3,4)}(0, y, t_0)] + g_{10}^{(4)}(y, t) - f_{10}^{(6)}(y, t) - g_{10}^{(4)}(y, t_0) + f_{10}^{(6)}(y, t_0)$$

olur. Buradan

$$u^{(3,4)}(0, y, t) - u^{(3,4)}(0, y, t_0) = -\Delta t(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2)^T(1) \mathbf{C} \mathbf{\Psi}(y) + g_{11}^{(4)}(y, t) - f_{11}^{(6)}(y, t) - g_{11}^{(4)}(y, t_0) + f_{11}^{(6)}(y, t_0) - g_{10}^{(4)}(y, t) + f_{10}^{(6)}(y, t) + g_{10}^{(4)}(y, t_0) - f_{10}^{(6)}(y, t_0)$$

elde edilir. Yerine yazılırsa

$$u^{(2,4)}(x, y, t) = \Delta t[(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2)^T(x) - x(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2)^T(1)] \mathbf{C} \mathbf{\Psi}(y) + u^{(2,4)}(x, y, t_0) + x[g_{11}^{(4)}(y, t) - f_{11}^{(6)}(y, t) - g_{11}^{(4)}(y, t_0) + f_{11}^{(6)}(y, t_0) - g_{10}^{(4)}(y, t) + f_{10}^{(6)}(y, t) + g_{10}^{(4)}(y, t_0) - f_{10}^{(6)}(y, t_0)] + g_{10}^{(4)}(y, t) - f_{10}^{(6)}(y, t) - g_{10}^{(4)}(y, t_0) + f_{10}^{(6)}(y, t_0)$$

elde edilir. x 'e göre 0'dan x 'e kadar tekrar integraller olarak

$$u^{(1,4)}(x, y, t) = \Delta t[(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{\Psi}_3)^T(x) - \frac{x^2}{2}(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2)^T(1)] \mathbf{C} \mathbf{\Psi}(y) + u^{(1,4)}(x, y, t_0) + \frac{x^2}{2}[g_{11}^{(4)}(y, t) - f_{11}^{(6)}(y, t) - g_{11}^{(4)}(y, t_0) + f_{11}^{(6)}(y, t_0) - g_{10}^{(4)}(y, t) + f_{10}^{(6)}(y, t) + g_{10}^{(4)}(y, t_0) - f_{10}^{(6)}(y, t_0)] + x[g_{10}^{(4)}(y, t) - f_{10}^{(6)}(y, t) - g_{10}^{(4)}(y, t_0) + f_{10}^{(6)}(y, t_0)] + u^{(1,4)}(0, y, t) - u^{(1,4)}(0, y, t_0)$$

$$\begin{aligned}
u^{(0,4)}(x, y, t) &= \Delta t [((\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \mathbf{\Psi}_4)^T(x) - \frac{x^3}{6} (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2)^T(1))] \mathbf{C} \mathbf{\Psi}(y) \\
&+ u^{(0,4)}(x, y, t_0) \\
&+ \frac{x^3}{6} [g_{11}^{(4)}(y, t) - f_{11}^{(6)}(y, t) - g_{11}^{(4)}(y, t_0) + f_{11}^{(6)}(y, t_0) - g_{10}^{(4)}(y, t) \\
&+ f_{10}^{(6)}(y, t) + g_{10}^{(4)}(y, t_0) - f_{10}^{(6)}(y, t_0)] + \frac{x^2}{2} [g_{10}^{(4)}(y, t) - f_{10}^{(6)}(y, t) \\
&- g_{10}^{(4)}(y, t_0) + f_{10}^{(6)}(y, t_0)] + x [u^{(1,4)}(0, y, t) - u^{(1,4)}(0, y, t_0)] \\
&+ f_{10}^{(4)}(y, t) - f_{10}^{(4)}(y, t_0)
\end{aligned}$$

denklemleri bulunur. $x = 1$ için

$$\begin{aligned}
u^{(0,4)}(1, y, t) &= \Delta t [((\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \mathbf{\Psi}_4)^T(1) - \frac{1}{6} (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2)^T(1))] \mathbf{C} \mathbf{\Psi}(y) \\
&+ u^{(0,4)}(1, y, t_0) \\
&+ \frac{1}{6} [g_{11}^{(4)}(y, t) - f_{11}^{(6)}(y, t) - g_{11}^{(4)}(y, t_0) + f_{11}^{(6)}(y, t_0) - g_{10}^{(4)}(y, t) \\
&+ f_{10}^{(6)}(y, t) + g_{10}^{(4)}(y, t_0) - f_{10}^{(6)}(y, t_0)] + \frac{1}{2} [g_{10}^{(4)}(y, t) - f_{10}^{(6)}(y, t) \\
&- g_{10}^{(4)}(y, t_0) + f_{10}^{(6)}(y, t_0)] + [u^{(1,4)}(0, y, t) - u^{(1,4)}(0, y, t_0)] \\
&+ f_{10}^{(4)}(y, t) - f_{10}^{(4)}(y, t_0)
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
&u^{(1,4)}(0, y, t) - u^{(1,4)}(0, y, t_0) \\
&= -\Delta t [(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \mathbf{\Psi}_4)^T(1) - \frac{1}{6} (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2)^T(1)] \mathbf{C} \mathbf{\Psi}(y) + f_{11}^{(4)}(y, t) \\
&- f_{11}^{(4)}(y, t_0) \\
&- \frac{1}{6} [g_{11}^{(4)}(y, t) - f_{11}^{(6)}(y, t) - g_{11}^{(4)}(y, t_0) + f_{11}^{(6)}(y, t_0) - g_{10}^{(4)}(y, t) \\
&+ f_{10}^{(6)}(y, t) + g_{10}^{(4)}(y, t_0) - f_{10}^{(6)}(y, t_0)] - \frac{1}{2} [g_{10}^{(4)}(y, t) - f_{10}^{(6)}(y, t) \\
&- g_{10}^{(4)}(y, t_0) + f_{10}^{(6)}(y, t_0)] - f_{10}^{(4)}(y, t) + f_{10}^{(4)}(y, t_0)
\end{aligned}$$

elde edilir. Yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
u^{(0,4)}(x, y, t) &= \Delta t [(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \mathbf{\Psi}_4)^T(x) + \frac{x - x^3}{6} (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2)^T(1) \\
&- x (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \mathbf{\Psi}_4)^T(1)] \mathbf{C} \mathbf{\Psi}(y) + u^{(0,4)}(x, y, t_0) \\
&+ \frac{x^3 - x}{6} [g_{11}^{(4)}(y, t) - f_{11}^{(6)}(y, t) - g_{11}^{(4)}(y, t_0) + f_{11}^{(6)}(y, t_0) - g_{10}^{(4)}(y, t) \\
&+ f_{10}^{(6)}(y, t) + g_{10}^{(4)}(y, t_0) - f_{10}^{(6)}(y, t_0)] + \frac{x^2 - x}{2} [g_{10}^{(4)}(y, t) - f_{10}^{(6)}(y, t) \\
&- g_{10}^{(4)}(y, t_0) + f_{10}^{(6)}(y, t_0)] + x [f_{11}^{(4)}(y, t) - f_{11}^{(4)}(y, t_0) - f_{10}^{(4)}(y, t) \\
&+ f_{10}^{(4)}(y, t_0)] + f_{10}^{(4)}(y, t) - f_{10}^{(4)}(y, t_0)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu denklemin y 'ye göre 0'dan y 'ye kadar iki defa integral alınır

$$\begin{aligned}
u^{(0,3)}(x, y, t) = & \Delta t[(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \boldsymbol{\Psi}_4)^T(x) + \frac{x - x^3}{6} (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(1) \\
& - x(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \boldsymbol{\Psi}_4)^T(1)] \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \boldsymbol{\Psi}_1(y) + u^{(0,3)}(x, y, t_0) \\
& + \frac{x^3 - x}{6} \left[g_{11}^{(3)}(y, t) - f_{11}^{(5)}(y, t) - g_{11}^{(3)}(y, t_0) + f_{11}^{(5)}(y, t_0) - g_{10}^{(3)}(y, t) \right. \\
& + f_{10}^{(5)}(y, t) + g_{10}^{(3)}(y, t_0) - f_{10}^{(5)}(y, t_0) \\
& - \left[g_{11}^{(3)}(0, t) - f_{11}^{(5)}(0, t) - g_{11}^{(3)}(0, t_0) + f_{11}^{(5)}(0, t_0) - g_{10}^{(3)}(0, t) \right. \\
& + f_{10}^{(5)}(0, t) + g_{10}^{(3)}(0, t_0) - f_{10}^{(5)}(0, t_0) \left. \right] + \frac{x^2 - x}{2} [g_{10}^{(3)}(y, t) - f_{10}^{(5)}(y, t) \\
& - g_{10}^{(3)}(y, t_0) + f_{10}^{(5)}(y, t_0) - [g_{10}^{(3)}(0, t) - f_{10}^{(5)}(0, t) - g_{10}^{(3)}(0, t_0) \\
& + f_{10}^{(5)}(0, t_0)]] + x[f_{11}^{(3)}(y, t) - f_{11}^{(3)}(y, t_0) - f_{10}^{(3)}(y, t) + f_{10}^{(3)}(y, t_0) \\
& - [f_{11}^{(3)}(0, t) - f_{11}^{(3)}(0, t_0) - f_{10}^{(3)}(y, t) + f_{10}^{(3)}(0, t_0)]] + f_{10}^{(3)}(y, t) \\
& - f_{10}^{(3)}(y, t_0) - [f_{10}^{(3)}(0, t) - f_{10}^{(3)}(0, t_0)] + u^{(0,3)}(x, 0, t) - u^{(0,3)}(x, 0, t_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^{(0,2)}(x, y, t) = & \Delta t[(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \boldsymbol{\Psi}_4)^T(x) + \frac{x - x^3}{6} (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(1) \\
& - x(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \boldsymbol{\Psi}_4)^T(1)] \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(y) + u^{(0,2)}(x, y, t_0) \\
& + \frac{x^3 - x}{6} \left[g_{11}''(y, t) - f_{11}^{(4)}(y, t) - g_{11}''(y, t_0) + f_{11}^{(4)}(y, t_0) - g_{10}''(y, t) \right. \\
& + f_{10}^{(4)}(y, t) + g_{10}''(y, t_0) - f_{10}^{(4)}(y, t_0) \\
& - \left[g_{11}''(0, t) - f_{11}^{(4)}(0, t) - g_{11}''(0, t_0) + f_{11}^{(4)}(0, t_0) - g_{10}''(0, t) + f_{10}^{(4)}(0, t) \right. \\
& + g_{10}''(0, t_0) - f_{10}^{(4)}(0, t_0) \left. \right] \\
& - y \left[g_{11}^{(3)}(0, t) - f_{11}^{(5)}(0, t) - g_{11}^{(3)}(0, t_0) + f_{11}^{(5)}(0, t_0) - g_{10}^{(3)}(0, t) \right. \\
& + f_{10}^{(5)}(0, t) + g_{10}^{(3)}(0, t_0) - f_{10}^{(5)}(0, t_0) \left. \right] \\
& + \frac{x^2 - x}{2} \left[g_{10}''(y, t) - f_{10}^{(4)}(y, t) - g_{10}''(y, t_0) + f_{10}^{(4)}(y, t_0) \right. \\
& - \left[g_{10}''(0, t) - f_{10}^{(4)}(0, t) - g_{10}''(0, t_0) + f_{10}^{(4)}(0, t_0) \right] \\
& - y \left[g_{10}^{(3)}(0, t) - f_{10}^{(5)}(0, t) - g_{10}^{(3)}(0, t_0) + f_{10}^{(5)}(0, t_0) \right] + x[f_{11}''(y, t) \\
& - f_{11}''(y, t_0) - f_{10}''(y, t) + f_{10}''(y, t_0) \\
& - [f_{11}''(0, t) - f_{11}''(0, t_0) - f_{10}''(0, t) + f_{10}''(0, t_0)] - y[f_{11}^{(3)}(0, t) \\
& - f_{11}^{(3)}(0, t_0) - f_{10}^{(3)}(y, t) + f_{10}^{(3)}(0, t_0)] + f_{10}''(y, t) - f_{10}''(y, t_0) - [f_{10}''(0, t) \\
& - f_{10}''(0, t_0)] - y[f_{10}^{(3)}(0, t) - f_{10}^{(3)}(0, t_0)] + y[u^{(0,3)}(x, 0, t) \\
& - u^{(0,3)}(x, 0, t_0)] + g_{20}(x, t) - f_{20}''(x, t) - g_{20}(x, t_0) + f_{20}''(x, t_0)
\end{aligned}$$

bulunur. $y = 1$ için

$$\begin{aligned}
u^{(0,2)}(x, 1, t) &= \Delta t[(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4)^T(x) + \frac{x - x^3}{6} (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2)^T(1) \\
&\quad - x(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4)^T(1)] \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1) + u^{(0,2)}(x, 1, t_0) \\
&+ \frac{x^3 - x}{6} \left[g''_{11}(1, t) - f_{11}^{(4)}(1, t) - g''_{11}(1, t_0) + f_{11}^{(4)}(1, t_0) - g''_{10}(1, t) + f_{10}^{(4)}(1, t) \right. \\
&\quad + g''_{10}(1, t_0) - f_{10}^{(4)}(1, t_0) \\
&\quad - \left[g''_{11}(0, t) - f_{11}^{(4)}(0, t) - g''_{11}(0, t_0) + f_{11}^{(4)}(0, t_0) - g''_{10}(0, t) \right. \\
&\quad \left. + f_{10}^{(4)}(0, t) + g''_{10}(0, t_0) - f_{10}^{(4)}(0, t_0) \right] \\
&\quad - \left[g_{11}^{(3)}(0, t) - f_{11}^{(5)}(0, t) - g_{11}^{(3)}(0, t_0) + f_{11}^{(5)}(0, t_0) - g_{10}^{(3)}(0, t) \right. \\
&\quad \left. + f_{10}^{(5)}(0, t) + g_{10}^{(3)}(0, t_0) - f_{10}^{(5)}(0, t_0) \right] \Big] \\
&+ \frac{x^2 - x}{2} \left[g''_{10}(1, t) - f_{10}^{(4)}(1, t) - g''_{10}(1, t_0) + f_{10}^{(4)}(1, t_0) \right. \\
&\quad - \left[g''_{10}(0, t) - f_{10}^{(4)}(0, t) - g''_{10}(0, t_0) + f_{10}^{(4)}(0, t_0) \right] \\
&\quad \left. - \left[g_{10}^{(3)}(0, t) - f_{10}^{(5)}(0, t) - g_{10}^{(3)}(0, t_0) + f_{10}^{(5)}(0, t_0) \right] \right] \\
&+ x \left[f''_{11}(1, t) - f''_{11}(1, t_0) - f''_{10}(1, t) + f''_{10}(1, t_0) \right. \\
&\quad - \left[f''_{11}(0, t) - f''_{11}(0, t_0) - f''_{10}(0, t) + f''_{10}(0, t_0) \right] \\
&\quad \left. - \left[f_{11}^{(3)}(0, t) - f_{11}^{(3)}(0, t_0) - f_{10}^{(3)}(y, t) + f_{10}^{(3)}(0, t_0) \right] \right] \\
&+ f''_{10}(1, t) - f''_{10}(1, t_0) - \left[f''_{10}(0, t) - f''_{10}(0, t_0) \right] - \left[f_{10}^{(3)}(0, t) - f_{10}^{(3)}(0, t_0) \right] \\
&\quad + \left[u^{(0,3)}(x, 0, t) - u^{(0,3)}(x, 0, t_0) \right] + g_{20}(x, t) - f_{20}''(x, t) \\
&\quad - g_{20}(x, t_0) + f_{20}''(x, t_0)
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
&u^{(0,3)}(x, 0, t) - u^{(0,3)}(x, 0, t_0) \\
&= -\Delta t[(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4)^T(x) + \frac{x - x^3}{6} (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2)^T(1) \\
&\quad - x(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4)^T(1)] \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1) + g_{21}(x, t) - f_{21}''(x, t) \\
&\quad - g_{21}(x, t_0) + f_{21}''(x, t_0) \\
&- \frac{x^3 - x}{6} \left[g''_{11}(1, t) - f_{11}^{(4)}(1, t) - g''_{11}(1, t_0) + f_{11}^{(4)}(1, t_0) - g''_{10}(1, t) + f_{10}^{(4)}(1, t) \right. \\
&\quad + g''_{10}(1, t_0) - f_{10}^{(4)}(1, t_0) \\
&\quad - \left[g''_{11}(0, t) - f_{11}^{(4)}(0, t) - g''_{11}(0, t_0) + f_{11}^{(4)}(0, t_0) - g''_{10}(0, t) \right. \\
&\quad \left. + f_{10}^{(4)}(0, t) + g''_{10}(0, t_0) - f_{10}^{(4)}(0, t_0) \right] \\
&\quad - \left[g_{11}^{(3)}(0, t) - f_{11}^{(5)}(0, t) - g_{11}^{(3)}(0, t_0) + f_{11}^{(5)}(0, t_0) - g_{10}^{(3)}(0, t) \right. \\
&\quad \left. + f_{10}^{(5)}(0, t) + g_{10}^{(3)}(0, t_0) - f_{10}^{(5)}(0, t_0) \right] \Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{x^2-x}{2} \left[g''_{10}(1,t) - f_{10}^{(4)}(1,t) - g''_{10}(1,t_0) + f_{10}^{(4)}(1,t_0) \right. \\
& \quad - \left[g''_{10}(0,t) - f_{10}^{(4)}(0,t) - g''_{10}(0,t_0) + f_{10}^{(4)}(0,t_0) \right] \\
& \quad \left. - \left[g_{10}^{(3)}(0,t) - f_{10}^{(5)}(0,t) - g_{10}^{(3)}(0,t_0) + f_{10}^{(5)}(0,t_0) \right] \right] \\
& -x \left[f''_{11}(1,t) - f''_{11}(1,t_0) - f''_{10}(1,t) + f''_{10}(1,t_0) \right. \\
& \quad - \left[f''_{11}(0,t) - f''_{11}(0,t_0) - f''_{10}(0,t) + f''_{10}(0,t_0) \right] \\
& \quad \left. - \left[f_{11}^{(3)}(0,t) - f_{11}^{(3)}(0,t_0) - f_{10}^{(3)}(y,t) + f_{10}^{(3)}(0,t_0) \right] \right] \\
& - \left[f''_{10}(1,t) - f''_{10}(1,t_0) - \left[f''_{10}(0,t) - f''_{10}(0,t_0) \right] - \left[f_{10}^{(3)}(0,t) - f_{10}^{(3)}(0,t_0) \right] \right. \\
& \quad \left. + g_{20}(x,t) - f''_{20}(x,t) - g_{20}(x,t_0) + f''_{20}(x,t_0) \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
u^{(0,2)}(x,y,t) &= \Delta t [(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4)^T(x) + \frac{x-x^3}{6} (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2)^T(1) \\
& \quad - x(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4)^T(1)] \mathbf{C} [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(y) - y \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)] \\
& \quad + u^{(0,2)}(x,y,t_0) \\
& + \frac{x^3-x}{6} \left[g''_{11}(y,t) - f_{11}^{(4)}(y,t) - g''_{11}(y,t_0) + f_{11}^{(4)}(y,t_0) - g''_{10}(y,t) + f_{10}^{(4)}(y,t) \right. \\
& \quad + g''_{10}(y,t_0) - f_{10}^{(4)}(y,t_0) \\
& \quad - \left[g''_{11}(0,t) - f_{11}^{(4)}(0,t) - g''_{11}(0,t_0) + f_{11}^{(4)}(0,t_0) - g''_{10}(0,t) \right. \\
& \quad \left. + f_{10}^{(4)}(0,t) + g''_{10}(0,t_0) - f_{10}^{(4)}(0,t_0) \right] \\
& \quad - y \left[g_{11}^{(3)}(0,t) - f_{11}^{(5)}(0,t) - g_{11}^{(3)}(0,t_0) + f_{11}^{(5)}(0,t_0) - g_{10}^{(3)}(0,t) \right. \\
& \quad \left. + f_{10}^{(5)}(0,t) + g_{10}^{(3)}(0,t_0) - f_{10}^{(5)}(0,t_0) \right] \left. \right] \\
& + \frac{x^2-x}{2} \left[g''_{10}(y,t) - f_{10}^{(4)}(y,t) - g''_{10}(y,t_0) + f_{10}^{(4)}(y,t_0) \right. \\
& \quad - \left[g''_{10}(0,t) - f_{10}^{(4)}(0,t) - g''_{10}(0,t_0) + f_{10}^{(4)}(0,t_0) \right] \\
& \quad \left. - y \left[g_{10}^{(3)}(0,t) - f_{10}^{(5)}(0,t) - g_{10}^{(3)}(0,t_0) + f_{10}^{(5)}(0,t_0) \right] \right] \\
& + x \left[f''_{11}(y,t) - f''_{11}(y,t_0) - f''_{10}(y,t) + f''_{10}(y,t_0) \right. \\
& \quad - \left[f''_{11}(0,t) - f''_{11}(0,t_0) - f''_{10}(0,t) + f''_{10}(0,t_0) \right] \\
& \quad \left. - y \left[f_{11}^{(3)}(0,t) - f_{11}^{(3)}(0,t_0) - f_{10}^{(3)}(y,t) + f_{10}^{(3)}(0,t_0) \right] \right] \\
& + f''_{10}(y,t) - f''_{10}(y,t_0) - \left[f''_{10}(0,t) - f''_{10}(0,t_0) \right] - y \left[f_{10}^{(3)}(0,t) - f_{10}^{(3)}(0,t_0) \right] \\
& \quad + g_{20}(x,t) - f''_{20}(x,t) - g_{20}(x,t_0) + f''_{20}(x,t_0) \\
& \quad + y \left[g_{21}(x,t) - f''_{21}(x,t) - g_{21}(x,t_0) + f''_{21}(x,t_0) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{x^3-x}{6}y \left[g''_{11}(1,t) - f_{11}^{(4)}(1,t) - g''_{11}(1,t_0) + f_{11}^{(4)}(1,t_0) - g''_{10}(1,t) + f_{10}^{(4)}(1,t) \right. \\
& \quad + g''_{10}(1,t_0) - f_{10}^{(4)}(1,t_0) \\
& \quad - \left[g''_{11}(0,t) - f_{11}^{(4)}(0,t) - g''_{11}(0,t_0) + f_{11}^{(4)}(0,t_0) - g''_{10}(0,t) \right. \\
& \quad \left. + f_{10}^{(4)}(0,t) + g''_{10}(0,t_0) - f_{10}^{(4)}(0,t_0) \right] \\
& \quad - \left[g_{11}^{(3)}(0,t) - f_{11}^{(5)}(0,t) - g_{11}^{(3)}(0,t_0) + f_{11}^{(5)}(0,t_0) - g_{10}^{(3)}(0,t) \right. \\
& \quad \left. + f_{10}^{(5)}(0,t) + g_{10}^{(3)}(0,t_0) - f_{10}^{(5)}(0,t_0) \right] \Big] \\
& -\frac{x^2-x}{2}y \left[g''_{10}(1,t) - f_{10}^{(4)}(1,t) - g''_{10}(1,t_0) + f_{10}^{(4)}(1,t_0) \right. \\
& \quad - \left[g''_{10}(0,t) - f_{10}^{(4)}(0,t) - g''_{10}(0,t_0) + f_{10}^{(4)}(0,t_0) \right] \\
& \quad \left. - \left[g_{10}^{(3)}(0,t) - f_{10}^{(5)}(0,t) - g_{10}^{(3)}(0,t_0) + f_{10}^{(5)}(0,t_0) \right] \right] \\
& -xy \left[f''_{11}(1,t) - f''_{11}(1,t_0) - f''_{10}(1,t) + f''_{10}(1,t_0) \right. \\
& \quad - \left[f''_{11}(0,t) - f''_{11}(0,t_0) - f''_{10}(0,t) + f''_{10}(0,t_0) \right] \\
& \quad \left. - \left[f_{11}^{(3)}(0,t) - f_{11}^{(3)}(0,t_0) - f_{10}^{(3)}(y,t) + f_{10}^{(3)}(0,t_0) \right] \right] \\
& -y \left[f''_{10}(1,t) - f''_{10}(1,t_0) - \left[f''_{10}(0,t) - f''_{10}(0,t_0) \right] - \left[f_{10}^{(3)}(0,t) - f_{10}^{(3)}(0,t_0) \right] \right. \\
& \quad \left. + g_{20}(x,t) - f''_{20}(x,t) - g_{20}(x,t_0) + f''_{20}(x,t_0) \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
u^{(2,4)}(x,y,t) &= \Delta t [(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2)^T(x) - x(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2)^T(1)] \mathbf{C} \mathbf{\Psi}(y) + u^{(2,4)}(x,y,t_0) \\
& \quad + x \left[g_{11}^{(4)}(y,t) - f_{11}^{(6)}(y,t) - g_{11}^{(4)}(y,t_0) + f_{11}^{(6)}(y,t_0) - g_{10}^{(4)}(y,t) \right. \\
& \quad \left. + f_{10}^{(6)}(y,t) + g_{10}^{(4)}(y,t_0) - f_{10}^{(6)}(y,t_0) \right] + g_{10}^{(4)}(y,t) - f_{10}^{(6)}(y,t) \\
& \quad - g_{10}^{(4)}(y,t_0) + f_{10}^{(6)}(y,t_0) \\
u^{(2,3)}(x,y,t) &= \Delta t [(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2)^T(x) - x(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2)^T(1)] \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{\Psi}_1(y) + u^{(2,3)}(x,y,t_0) \\
& \quad + x \left[g_{11}^{(3)}(y,t) - f_{11}^{(5)}(y,t) - g_{11}^{(3)}(y,t_0) + f_{11}^{(5)}(y,t_0) - g_{10}^{(3)}(y,t) \right. \\
& \quad \left. + f_{10}^{(5)}(y,t) + g_{10}^{(3)}(y,t_0) - f_{10}^{(5)}(y,t_0) \right. \\
& \quad \left. - \left[g_{11}^{(3)}(0,t) - f_{11}^{(5)}(0,t) - g_{11}^{(3)}(0,t_0) + f_{11}^{(5)}(0,t_0) - g_{10}^{(3)}(0,t) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + f_{10}^{(5)}(0,t) + g_{10}^{(3)}(0,t_0) - f_{10}^{(5)}(0,t_0) \right] \right] + g_{10}^{(3)}(y,t) - f_{10}^{(5)}(y,t) \\
& \quad - g_{10}^{(3)}(y,t_0) + f_{10}^{(5)}(y,t_0) - \left[g_{10}^{(3)}(0,t) - f_{10}^{(5)}(0,t) - g_{10}^{(3)}(0,t_0) \right. \\
& \quad \left. + f_{10}^{(5)}(0,t_0) \right] + u^{(2,3)}(x,0,t) - u^{(2,3)}(x,0,t_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^{(2,2)}(x, y, t) = & \Delta t [(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(x) - x(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(1)] \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(y) + u^{(2,2)}(x, y, t_0) \\
& + x \left[g''_{11}(y, t) - f_{11}^{(4)}(y, t) - g''_{11}(y, t_0) + f_{11}^{(4)}(y, t_0) - g''_{10}(y, t) \right. \\
& + f_{10}^{(4)}(y, t) + g''_{10}(y, t_0) - f_{10}^{(4)}(y, t_0) \\
& - \left[g''_{11}(0, t) - f_{11}^{(4)}(0, t) - g''_{11}(0, t_0) + f_{11}^{(4)}(0, t_0) - g''_{10}(0, t) + f_{10}^{(4)}(0, t) \right. \\
& \left. \left. + g''_{10}(0, t_0) - f_{10}^{(4)}(0, t_0) \right] \right. \\
& - y \left[g_{11}^{(3)}(0, t) - f_{11}^{(5)}(0, t) - g_{11}^{(3)}(0, t_0) + f_{11}^{(5)}(0, t_0) - g_{10}^{(3)}(0, t) \right. \\
& \left. + f_{10}^{(5)}(0, t) + g_{10}^{(3)}(0, t_0) - f_{10}^{(5)}(0, t_0) \right] + g''_{10}(y, t) - f_{10}^{(4)}(y, t) \\
& - g''_{10}(y, t_0) + f_{10}^{(4)}(y, t_0) - [g''_{10}(0, t) - f_{10}^{(4)}(0, t) - g''_{10}(0, t_0) \\
& + f_{10}^{(4)}(0, t_0)] - y [g_{10}^{(3)}(0, t) - f_{10}^{(5)}(0, t) - g_{10}^{(3)}(0, t_0) + f_{10}^{(5)}(0, t_0)] \\
& + y [u^{(2,3)}(x, 0, t) - u^{(2,3)}(x, 0, t_0)] + g''_{20}(x, t) - f_{20}^{(4)}(x, t) - g''_{20}(x, t_0) \\
& + f_{20}^{(4)}(x, t_0)
\end{aligned}$$

bulunur. $y = 1$ için

$$\begin{aligned}
u^{(2,2)}(x, 1, t) = & \Delta t [(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(x) - x(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(1)] \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(1) + u^{(2,2)}(x, 1, t_0) \\
& + x \left[g''_{11}(1, t) - f_{11}^{(4)}(1, t) - g''_{11}(1, t_0) + f_{11}^{(4)}(1, t_0) - g''_{10}(1, t) \right. \\
& + f_{10}^{(4)}(1, t) + g''_{10}(1, t_0) - f_{10}^{(4)}(1, t_0) \\
& - \left[g''_{11}(0, t) - f_{11}^{(4)}(0, t) - g''_{11}(0, t_0) + f_{11}^{(4)}(0, t_0) - g''_{10}(0, t) \right. \\
& \left. + f_{10}^{(4)}(0, t) + g''_{10}(0, t_0) - f_{10}^{(4)}(0, t_0) \right] \\
& - \left[g_{11}^{(3)}(0, t) - f_{11}^{(5)}(0, t) - g_{11}^{(3)}(0, t_0) + f_{11}^{(5)}(0, t_0) - g_{10}^{(3)}(0, t) \right. \\
& \left. + f_{10}^{(5)}(0, t) + g_{10}^{(3)}(0, t_0) - f_{10}^{(5)}(0, t_0) \right] + g''_{10}(1, t) - f_{10}^{(4)}(1, t) \\
& - g''_{10}(1, t_0) + f_{10}^{(4)}(1, t_0) - [g''_{10}(0, t) - f_{10}^{(4)}(0, t) - g''_{10}(0, t_0) \\
& + f_{10}^{(4)}(0, t_0)] - [g_{10}^{(3)}(0, t) - f_{10}^{(5)}(0, t) - g_{10}^{(3)}(0, t_0) + f_{10}^{(5)}(0, t_0)] \\
& + [u^{(2,3)}(x, 0, t) - u^{(2,3)}(x, 0, t_0)] + g''_{20}(x, t) - f_{20}^{(4)}(x, t) \\
& - g''_{20}(x, t_0) + f_{20}^{(4)}(x, t_0)
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
& u^{(2,3)}(x, 0, t) - u^{(2,3)}(x, 0, t_0) \\
& = -\Delta t [(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(x) - x(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2)^T(1)] \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\Psi}_2(1) + g''_{21}(x, t) \\
& - f_{21}^{(4)}(x, t) - g''_{21}(x, t_0) + f_{21}^{(4)}(x, t_0) \\
& - x \left[g''_{11}(1, t) - f_{11}^{(4)}(1, t) - g''_{11}(1, t_0) + f_{11}^{(4)}(1, t_0) - g''_{10}(1, t) + f_{10}^{(4)}(1, t) \right. \\
& + g''_{10}(1, t_0) - f_{10}^{(4)}(1, t_0) \\
& - \left[g''_{11}(0, t) - f_{11}^{(4)}(0, t) - g''_{11}(0, t_0) + f_{11}^{(4)}(0, t_0) - g''_{10}(0, t) \right. \\
& \left. + f_{10}^{(4)}(0, t) + g''_{10}(0, t_0) - f_{10}^{(4)}(0, t_0) \right] \\
& - \left[g_{11}^{(3)}(0, t) - f_{11}^{(5)}(0, t) - g_{11}^{(3)}(0, t_0) + f_{11}^{(5)}(0, t_0) - g_{10}^{(3)}(0, t) \right. \\
& \left. + f_{10}^{(5)}(0, t) + g_{10}^{(3)}(0, t_0) - f_{10}^{(5)}(0, t_0) \right] \left. \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[g''_{10}(1, t) - f_{10}^{(4)}(1, t) - g''_{10}(1, t_0) + f_{10}^{(4)}(1, t_0) \right. \\
& \quad - \left[g''_{10}(0, t) - f_{10}^{(4)}(0, t) - g''_{10}(0, t_0) + f_{10}^{(4)}(0, t_0) \right] \\
& \quad \left. - \left[g_{10}^{(3)}(0, t) - f_{10}^{(5)}(0, t) - g_{10}^{(3)}(0, t_0) + f_{10}^{(5)}(0, t_0) \right] \right] - [g''_{20}(x, t) \\
& \quad - f_{20}^{(4)}(x, t) - g''_{20}(x, t_0) + f_{20}^{(4)}(x, t_0)]
\end{aligned}$$

elde edilir. Yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
u^{(2,2)}(x, y, t) &= \Delta t [(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2)^T(x) - x(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2)^T(1)] \mathbf{C} [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2(y) - y \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2(1)] \\
& \quad + u^{(2,2)}(x, y, t_0) \\
& + x \left[g''_{11}(y, t) - f_{11}^{(4)}(y, t) - g''_{11}(y, t_0) + f_{11}^{(4)}(y, t_0) - g''_{10}(y, t) + f_{10}^{(4)}(y, t) \right. \\
& \quad + g''_{10}(y, t_0) - f_{10}^{(4)}(y, t_0) \\
& \quad - \left[g''_{11}(0, t) - f_{11}^{(4)}(0, t) - g''_{11}(0, t_0) + f_{11}^{(4)}(0, t_0) - g''_{10}(0, t) \right. \\
& \quad \left. + f_{10}^{(4)}(0, t) + g''_{10}(0, t_0) - f_{10}^{(4)}(0, t_0) \right] \\
& \quad - y \left[g_{11}^{(3)}(0, t) - f_{11}^{(5)}(0, t) - g_{11}^{(3)}(0, t_0) + f_{11}^{(5)}(0, t_0) - g_{10}^{(3)}(0, t) \right. \\
& \quad \left. + f_{10}^{(5)}(0, t) + g_{10}^{(3)}(0, t_0) - f_{10}^{(5)}(0, t_0) \right] \left. \right] + g''_{10}(y, t) - f_{10}^{(4)}(y, t) \\
& \quad - g''_{10}(y, t_0) + f_{10}^{(4)}(y, t_0) - [g''_{10}(0, t) - f_{10}^{(4)}(0, t) - g''_{10}(0, t_0) \\
& \quad + f_{10}^{(4)}(0, t_0)] - y [g_{10}^{(3)}(0, t) - f_{10}^{(5)}(0, t) - g_{10}^{(3)}(0, t_0) + f_{10}^{(5)}(0, t_0)] \\
& \quad + g''_{20}(x, t) - f_{20}^{(4)}(x, t) - g''_{20}(x, t_0) + f_{20}^{(4)}(x, t_0) \\
& \quad + y [g''_{21}(x, t) - f_{21}^{(4)}(x, t) - g''_{21}(x, t_0) + f_{21}^{(4)}(x, t_0)] \\
& - xy \left[g''_{11}(1, t) - f_{11}^{(4)}(1, t) - g''_{11}(1, t_0) + f_{11}^{(4)}(1, t_0) - g''_{10}(1, t) + f_{10}^{(4)}(1, t) \right. \\
& \quad + g''_{10}(1, t_0) - f_{10}^{(4)}(1, t_0) \\
& \quad - \left[g''_{11}(0, t) - f_{11}^{(4)}(0, t) - g''_{11}(0, t_0) + f_{11}^{(4)}(0, t_0) - g''_{10}(0, t) \right. \\
& \quad \left. + f_{10}^{(4)}(0, t) + g''_{10}(0, t_0) - f_{10}^{(4)}(0, t_0) \right] \\
& \quad - \left[g_{11}^{(3)}(0, t) - f_{11}^{(5)}(0, t) - g_{11}^{(3)}(0, t_0) + f_{11}^{(5)}(0, t_0) - g_{10}^{(3)}(0, t) \right. \\
& \quad \left. + f_{10}^{(5)}(0, t) + g_{10}^{(3)}(0, t_0) - f_{10}^{(5)}(0, t_0) \right] \left. \right] \\
& - y \left[g''_{10}(1, t) - f_{10}^{(4)}(1, t) - g''_{10}(1, t_0) + f_{10}^{(4)}(1, t_0) \right. \\
& \quad - \left[g''_{10}(0, t) - f_{10}^{(4)}(0, t) - g''_{10}(0, t_0) + f_{10}^{(4)}(0, t_0) \right] \\
& \quad \left. - \left[g_{10}^{(3)}(0, t) - f_{10}^{(5)}(0, t) - g_{10}^{(3)}(0, t_0) + f_{10}^{(5)}(0, t_0) \right] \right] - y [g''_{20}(x, t) \\
& \quad - f_{20}^{(4)}(x, t) - g''_{20}(x, t_0) + f_{20}^{(4)}(x, t_0)]
\end{aligned}$$

bulunur. $u^{(0,0)}(x, y, t)$ ifadesinin t 'ye göre türevi alınır

$$\begin{aligned}
\dot{u}^{(0,0)}(x, y, t) &= [(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \mathbf{\Psi}_4)^T(x) + \frac{x - x^3}{6} (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2)^T(1) \\
& \quad - x(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \mathbf{\Psi}_4)^T(1)] \mathbf{C} [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \mathbf{\Psi}_4(y) + \frac{y - y^3}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2(1) \\
& \quad - y \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \mathbf{\Psi}_4(1)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{y-y^3}{6} \left[\dot{g}_{21}(x,t) - \dot{f}_{21}''(x,t) - \dot{g}_{20}(x,t) + \dot{f}_{20}''(x,t) \right. \\
& \quad - [\dot{g}_{21}(0,t) - \dot{f}_{21}''(0,t) - \dot{g}_{20}(0,t) + \dot{f}_{20}''(0,t)] \\
& \quad - x [\dot{g}'_{21}(0,t) - \dot{f}_{21}^{(3)}(0,t) - \dot{g}'_{20}(0,t) + \dot{f}_{20}^{(3)}(0,t)] \\
& \quad - \frac{x^2}{2} [\dot{g}''_{21}(0,t) - \dot{f}_{21}^{(4)}(0,t) - \dot{g}''_{20}(0,t) + \dot{f}_{20}^{(4)}(0,t)] \\
& \quad \left. - \frac{x^3}{6} [\dot{g}_{21}^{(3)}(0,t) - \dot{f}_{21}^{(5)}(0,t) - \dot{g}_{20}^{(3)}(0,t) + \dot{f}_{20}^{(5)}(0,t)] \right] \\
& + \frac{y^2-y}{2} \left[\dot{g}_{20}(x,t) - \dot{f}_{20}''(x,t) - [\dot{g}_{20}(0,t) - \dot{f}_{20}''(0,t)] - x [\dot{g}'_{20}(0,t) - \dot{f}_{20}^{(3)}(0,t)] \right. \\
& \quad \left. - \frac{x^2}{2} [\dot{g}''_{20}(0,t) - \dot{f}_{20}^{(4)}(0,t)] - \frac{x^3}{6} [\dot{g}_{20}^{(3)}(0,t) - \dot{f}_{20}^{(5)}(0,t)] \right] \\
& + y \left[\dot{f}_{21}(x,t) - \dot{f}_{20}(x,t) - [\dot{f}_{21}(0,t) - \dot{f}_{20}(0,t)] - x [\dot{f}'_{21}(0,t) - \dot{f}'_{20}(0,t)] \right. \\
& \quad \left. - \frac{x^2}{2} [\dot{f}''_{21}(0,t) - \dot{f}''(0,t)] - \frac{x^3}{6} [\dot{f}_{21}^{(3)}(0,t) - \dot{f}_{20}^{(3)}(0,t)] \right] \\
& \quad + \dot{f}_{20}(x,t) - \dot{f}_{20}(0,t) - x \dot{f}'_{20}(0,t) - \frac{x^2}{2} \dot{f}''_{20}(0,t) - \frac{x^3}{6} \dot{f}_{20}^{(3)}(0,t) \\
& + \frac{x^3}{6} \left[\dot{g}_{11}(y,t) - \dot{f}_{11}''(y,t) \right. \\
& \quad - \frac{y-y^3}{6} [\dot{g}''_{21}(1,t) - \dot{f}_{21}^{(4)}(1,t) - \dot{g}''_{20}(1,t) + \dot{f}_{20}^{(4)}(1,t) \\
& \quad - [\dot{g}''_{21}(0,t) - \dot{f}_{21}^{(4)}(0,t) - \dot{g}''_{20}(0,t) + \dot{f}_{20}^{(4)}(0,t)] \\
& \quad - [\dot{g}_{21}^{(3)}(0,t) - \dot{f}_{21}^{(5)}(0,t) - \dot{g}_{20}^{(3)}(0,t) + \dot{f}_{20}^{(5)}(0,t)] \\
& \quad - \frac{y^2-y}{2} [\dot{g}''_{20}(1,t) - \dot{f}_{20}^{(4)}(1,t) - [\dot{g}''_{20}(0,t) - \dot{f}_{20}^{(4)}(0,t)] \\
& \quad - [\dot{g}_{20}^{(3)}(0,t) - \dot{f}_{20}^{(5)}(0,t)]] \\
& \quad - y [\dot{f}''_{21}(1,t) - \dot{f}''_{20}(1,t) - [\dot{f}''_{21}(0,t) - \dot{f}''_{20}(0,t)] \\
& \quad - [\dot{f}_{21}^{(3)}(0,t) - \dot{f}_{20}^{(3)}(0,t)]] - \dot{f}''_{20}(1,t) + \dot{f}''_{20}(0,t) + \dot{f}_{20}^{(3)}(0,t) - \dot{g}_{10}(y,t) \\
& \quad \left. + \dot{f}_{10}(y,t) \right] + \frac{x^2}{2} [\dot{g}_{10}(y,t) - \dot{f}_{10}''(y,t)] + \dot{f}_{10}(y,t) + x \dot{f}_{11}(y,t) \\
& - x \frac{y-y^3}{6} \left[\dot{g}_{21}(1,t) - \dot{f}_{21}''(1,t) - \dot{g}_{20}(1,t) + \dot{f}_{20}''(1,t) \right. \\
& \quad - [\dot{g}_{21}(0,t) - \dot{f}_{21}''(0,t) - \dot{g}_{20}(0,t) + \dot{f}_{20}''(0,t)] \\
& \quad - [\dot{g}'_{21}(0,t) - \dot{f}_{21}^{(3)}(0,t) - \dot{g}'_{20}(0,t) + \dot{f}_{20}^{(3)}(0,t)] \\
& \quad - \frac{1}{2} [\dot{g}''_{21}(0,t) - \dot{f}_{21}^{(4)}(0,t) - \dot{g}''_{20}(0,t) + \dot{f}_{20}^{(4)}(0,t)] \\
& \quad \left. - \frac{1}{6} [\dot{g}_{21}^{(3)}(0,t) - \dot{f}_{21}^{(5)}(0,t) - \dot{g}_{20}^{(3)}(0,t) + \dot{f}_{20}^{(5)}(0,t)] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -x \frac{y^2 - y}{2} \left[\dot{g}_{20}(1, t) - \dot{f}_{20}''(1, t) - [\dot{g}_{20}(0, t) - \dot{f}_{20}''(0, t)] - [\dot{g}'_{20}(0, t) - \dot{f}_{20}^{(3)}(0, t)] \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} [\dot{g}''_{20}(0, t) - \dot{f}_{20}^{(4)}(0, t)] - \frac{1}{6} [\dot{g}_{20}^{(3)}(0, t) - \dot{f}_{20}^{(5)}(0, t)] \right] \\
& -xy \left[\dot{f}_{21}(1, t) - \dot{f}_{20}(1, t) - [\dot{f}_{21}(0, t) - \dot{f}_{20}(0, t)] - [\dot{f}'_{21}(0, t) - \dot{f}'_{20}(0, t)] \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} [\dot{f}''_{21}(0, t) - \dot{f}''_{20}(0, t)] - \frac{1}{6} [\dot{f}_{21}^{(3)}(0, t) - \dot{f}_{20}^{(3)}(0, t)] \right] \\
& -x [\dot{f}_{20}(1, t) - \dot{f}_{20}(0, t) - \dot{f}'_{20}(0, t) - \frac{1}{2} \dot{f}''_{20}(0, t) - \frac{1}{6} \dot{f}_{20}^{(3)}(0, t)] \\
& -\frac{x}{6} \left[\dot{g}_{11}(y, t) - \dot{f}_{11}''(y, t) \right. \\
& \quad - \frac{y - y^3}{6} \left[\dot{g}''_{21}(1, t) - \dot{f}_{21}^{(4)}(1, t) - \dot{g}''_{20}(1, t) + \dot{f}_{20}^{(4)}(1, t) \right. \\
& \quad \left. - [\dot{g}''_{21}(0, t) - \dot{f}_{21}^{(4)}(0, t) - \dot{g}''_{20}(0, t) + \dot{f}_{20}^{(4)}(0, t)] \right. \\
& \quad \left. - [\dot{g}_{21}^{(3)}(0, t) - \dot{f}_{21}^{(5)}(0, t) - \dot{g}_{20}^{(3)}(0, t) + \dot{f}_{20}^{(5)}(0, t)] \right] \\
& \quad - \frac{y^2 - y}{2} \left[\dot{g}''_{20}(1, t) - \dot{f}_{20}^{(4)}(1, t) - [\dot{g}''_{20}(0, t) - \dot{f}_{20}^{(4)}(0, t)] \right. \\
& \quad \left. - [\dot{g}_{20}^{(3)}(0, t) - \dot{f}_{20}^{(5)}(0, t)] \right] \\
& \quad - y \left[\dot{f}'_{21}(1, t) - \dot{f}''_{20}(1, t) - [\dot{f}'_{21}(0, t) - \dot{f}''_{20}(0, t)] \right. \\
& \quad \left. - [\dot{f}_{21}^{(3)}(0, t) - \dot{f}_{20}^{(3)}(0, t)] \right] - \dot{f}''_{20}(1, t) + \dot{f}''_{20}(0, t) + \dot{f}_{20}^{(3)}(0, t) - \dot{g}_{10}(y, t) \\
& \quad \left. + \dot{f}'_{10}(y, t) \right] - \frac{x}{2} [\dot{g}_{10}(y, t) - \dot{f}'_{10}(y, t)] - x \dot{f}_{10}(y, t)
\end{aligned}$$

bulunur. Elde edilen denklemler kısmi diferansiyel denklemde yerine koyarak **ACB** formuna getirilir. **ACB** formundaki bu ifadeler

$$x_{1,(j-1)N+k} = a_{1,j} b_{k,1}, \quad j, k = 1, 2, \dots, 2^k M$$

ve

$$\mathbf{X} = [x_{1,q}] \quad q = 1, 2, \dots, (2^k M)^2$$

olmak üzere **XD** formuna dönüştürülebilir. Bu **XD** formundaki matrisler toplanarak denklem

$$\tilde{\mathbf{W}}(x, y) \mathbf{D} = \tilde{\mathbf{G}}(x, y)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\tilde{\mathbf{W}} = [\tilde{w}_{1,q}]$, $q = 1, 2, \dots, (2^k M)^2$ ve

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} = & [c_{10}^{10} c_{10}^{11} \dots c_{10}^{1(M-1)} \dots c_{10}^{2^k 0} c_{10}^{2^k 1} \dots c_{10}^{2^k(M-1)} c_{11}^{10} c_{11}^{11} \dots c_{11}^{1(M-1)} \dots c_{11}^{2^k 0} c_{11}^{2^k 1} \dots c_{11}^{2^k(M-1)} \\
& \dots c_{1(M-1)}^{10} c_{1(M-1)}^{11} \dots c_{1(M-1)}^{1(M-1)} \dots c_{1(M-1)}^{2^k 0} \dots c_{1(M-1)}^{2^k(M-1)} c_{20}^{10} \dots c_{2(M-1)}^{2^k(M-1)} \dots c_{2^k 0}^{10} \dots c_{2^k(M-1)}^{2^k(M-1)}]^T
\end{aligned}$$

şeklinindedir.

$$\left. \begin{aligned} x_{ni} &= \frac{1}{2^{k+1}} \left(2n - 1 + \cos \frac{((M+1)-i)\pi}{(M+1)} \right) \\ y_{nj} &= \frac{1}{2^{k+1}} \left(2n - 1 + \cos \frac{((M+1)-j)\pi}{(M+1)} \right) \end{aligned} \right\}, i, j = 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, 2^k \quad (4.26)$$

Chebyshev sıralama noktalarının $\tilde{\mathbf{W}}(x, y)\mathbf{D} = \tilde{\mathbf{G}}(x, y)$ denkleminde yerine yazılmasıyla $\mathbf{UD} = \mathbf{G}$ denklem sistemi elde edilir. Burada \mathbf{U} $(2^k M)^2 \times (2^k M)^2$ boyutlu matris, \mathbf{D} ve \mathbf{G} $(2^k M)^2 \times 1$ boyutlu vektörlerdir. Bu denklem sistemi çözülerek \mathbf{D} vektörü ve böylece Chebyshev dalgacık serisinin katsayıları bulunur. Yani \mathbf{C} katsayılar matrisi elde edilmiş olur. Gerekli denklemlerde \mathbf{C} katsayılar matrisi yerine koyularak $(t_0 + \Delta t)$ anında bu ifadelerin değeri bulunur. Denklem yeniden çözülerek \mathbf{C} katsayılar matrisi bulunur. Benzer şekilde çözüm tekrarlanarak istenilen zaman adımındaki çözümler elde edilir.

4.3.1 Chebyshev Dalgacık Sıralama Yöntemi'nin İki Konum Boyutlu Genelleştirilmiş Fisher Kolmogorov Denklemine Uygulanması

Bu alt bölümde özel olarak iki konum boyutlu genelleştirilmiş Fisher Kolmogorov denklemini inceleyeceğiz.

$$u_t + \gamma \Delta^2 u - \Delta u + f(u) = G(x, y, t)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y)$$

$$u = 0, \Delta u = 0$$

$$f(u) = u^3 - u$$

$$u_t + \gamma \Delta^2 u - \Delta u + u^3 - u = G(x, y, t)$$

lineerliği bozan u^3 ifadesinde yarı lineerleştirme (quasilinearization) uygularsak bu ifade

$$u^3 \cong 3u_r^2 u_{r+1} - 2u_r^3$$

halini alır. Başlangıç anındaki çözüm u_0 bilindiğinden birinci adımdaki çözüm u_1 bulunur. Benzer şekilde iterasyon tekrarlanarak çözüme yaklaşılr. Denkleminizde r -inci adım çözümünden faydalanarak elde ettiğimiz $(r + 1)$ -inci çözümü u olarak gösterirsek

$$u_t + \gamma \Delta^2 u - \Delta u + 3u_r^2 u - 2u_r^3 - u = G(x, y, t)$$

$$u_t + \gamma \Delta^2 u - \Delta u + (3u_r^2 - 1)u = G(x, y, t) + 2u_r^3$$

olur. Sınır koşulları sıfır alındığından dolayı

$$\begin{aligned}
u^{(4,0)}(x, y, t) &= \Delta t \Psi^T(x) \mathbf{C} [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(y) + \frac{y-y^3}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1) \\
&\quad - y \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(1)] + u^{(4,0)}(x, y, t_0) \\
u^{(2,0)}(x, y, t) &= \Delta t [(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2)^T(x) - x(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2)^T(1)] \mathbf{C} [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(y) \\
&\quad + \frac{y-y^3}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1) - y \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(1)] + u^{(2,0)}(x, y, t_0) \\
u^{(0,0)}(x, y, t) &= \Delta t [(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4)^T(x) + \frac{x-x^3}{6} (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2)^T(1) \\
&\quad - x(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4)^T(1)] \mathbf{C} [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(y) + \frac{y-y^3}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1) \\
&\quad - y \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(1)] + u^{(0,0)}(x, y, t_0) \\
u^{(0,4)}(x, y, t) &= \Delta t [(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4)^T(x) + \frac{x-x^3}{6} (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2)^T(1) \\
&\quad - x(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4)^T(1)] \mathbf{C} \Psi(y) + u^{(0,4)}(x, y, t_0) \\
u^{(0,2)}(x, y, t) &= \Delta t [(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4)^T(x) + \frac{x-x^3}{6} (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2)^T(1) \\
&\quad - x(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4)^T(1)] \mathbf{C} [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(y) - y \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)] \\
&\quad + u^{(0,2)}(x, y, t_0) \\
u^{(2,2)}(x, y, t) &= \Delta t [(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2)^T(x) - x(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2)^T(1)] \mathbf{C} [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(y) - y \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1)] \\
&\quad + u^{(2,2)}(x, y, t_0) \\
\dot{u}^{(0,0)}(x, y, t) &= [(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4)^T(x) + \frac{x-x^3}{6} (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2)^T(1) \\
&\quad - x(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4)^T(1)] \mathbf{C} [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(y) + \frac{y-y^3}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \Psi_2(1) \\
&\quad - y \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \Psi_4(1)]
\end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir.

$$u_t + \gamma \Delta^2 u - \Delta u + (3u_r^2 - 1)u = G(x, y, t) + 2u_r^3$$

Kullandığımız notasyonla ifade edecek olursak;

$$\begin{aligned}
\dot{u}^{(0,0)}(x, y, t) + \gamma [u^{(4,0)}(x, y, t) + u^{(0,4)}(x, y, t) + 2u^{(2,2)}(x, y, t)] - [u^{(2,0)}(x, y, t) \\
+ u^{(0,2)}(x, y, t)] + (3u_r^2 - 1)u^{(0,0)}(x, y, t) = G(x, y, t) + 2u_r^3
\end{aligned}$$

şeklindedir. Bulduğumuz ifadeleri denklemde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
& [(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4\boldsymbol{\Psi}_4)^T(x) + \frac{x-x^3}{6}(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\boldsymbol{\Psi}_2)^T(1) \\
& \quad - x(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4\boldsymbol{\Psi}_4)^T(1)]\mathbf{C}[\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4\boldsymbol{\Psi}_4(y) + \frac{y-y^3}{6}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\boldsymbol{\Psi}_2(1) \\
& \quad - y\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4\boldsymbol{\Psi}_4(1)] \\
& \quad + \gamma \left[\Delta t \boldsymbol{\Psi}^T(x) \mathbf{C} \left[\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4\boldsymbol{\Psi}_4(y) + \frac{y-y^3}{6}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\boldsymbol{\Psi}_2(1) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - y\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4\boldsymbol{\Psi}_4(1) \right] + u^{(4,0)}(x,y,t_0) + \Delta t [(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4\boldsymbol{\Psi}_4)^T(x) \right. \\
& \quad \left. + \frac{x-x^3}{6}(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\boldsymbol{\Psi}_2)^T(1) - x(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4\boldsymbol{\Psi}_4)^T(1)]\mathbf{C}\boldsymbol{\Psi}(y) \right. \\
& \quad \left. + u^{(0,4)}(x,y,t_0) + 2[\Delta t [(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\boldsymbol{\Psi}_2)^T(x) \right. \\
& \quad \left. - x(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\boldsymbol{\Psi}_2)^T(1)]\mathbf{C}[\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\boldsymbol{\Psi}_2(y) - y\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\boldsymbol{\Psi}_2(1)] + u^{(2,2)}(x,y,t_0) \right] \\
& \quad - [\Delta t [(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\boldsymbol{\Psi}_2)^T(x) - x(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\boldsymbol{\Psi}_2)^T(1)]\mathbf{C}[\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4\boldsymbol{\Psi}_4(y) \\
& \quad + \frac{y-y^3}{6}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\boldsymbol{\Psi}_2(1) - y\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4\boldsymbol{\Psi}_4(1)] + u^{(2,0)}(x,y,t_0) \\
& \quad + \Delta t [(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4\boldsymbol{\Psi}_4)^T(x) + \frac{x-x^3}{6}(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\boldsymbol{\Psi}_2)^T(1) \\
& \quad - x(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4\boldsymbol{\Psi}_4)^T(1)]\mathbf{C}[\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\boldsymbol{\Psi}_2(y) - y\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\boldsymbol{\Psi}_2(1)] \\
& \quad + u^{(0,2)}(x,y,t_0) + (3u_r^2 - 1)[\Delta t [(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4\boldsymbol{\Psi}_4)^T(x) \\
& \quad + \frac{x-x^3}{6}(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\boldsymbol{\Psi}_2)^T(1) - x(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4\boldsymbol{\Psi}_4)^T(1)]\mathbf{C}[\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4\boldsymbol{\Psi}_4(y) \\
& \quad + \frac{y-y^3}{6}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\boldsymbol{\Psi}_2(1) - y\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4\boldsymbol{\Psi}_4(1)] + u^{(0,0)}(x,y,t_0)] \\
& \quad = G(x,y,t) + 2u_r^3
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemi düzenlersek

$$\begin{aligned}
& (1 + \Delta t(3u_r^2 - 1))[(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4\boldsymbol{\Psi}_4)^T(x) + \frac{x-x^3}{6}(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\boldsymbol{\Psi}_2)^T(1) \\
& \quad - x(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4\boldsymbol{\Psi}_4)^T(1)]\mathbf{C}[\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4\boldsymbol{\Psi}_4(y) \\
& \quad + \frac{y-y^3}{6}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\boldsymbol{\Psi}_2(1) - y\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4\boldsymbol{\Psi}_4(1)] \\
& \quad + \Delta t[\gamma\boldsymbol{\Psi}^T(x) - (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\boldsymbol{\Psi}_2)^T(x) \\
& \quad + x(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\boldsymbol{\Psi}_2)^T(1)]\mathbf{C}[\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4\boldsymbol{\Psi}_4(y) \\
& \quad + \frac{y-y^3}{6}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\boldsymbol{\Psi}_2(1) - y\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4\boldsymbol{\Psi}_4(1)] \\
& \quad + \Delta t [(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4\boldsymbol{\Psi}_4)^T(x) + \frac{x-x^3}{6}(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\boldsymbol{\Psi}_2)^T(1) \\
& \quad - x(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4\boldsymbol{\Psi}_4)^T(1)]\mathbf{C}[\gamma\boldsymbol{\Psi}(y) - \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\boldsymbol{\Psi}_2(y) \\
& \quad + y\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\boldsymbol{\Psi}_2(1)] + 2\Delta t\gamma [(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\boldsymbol{\Psi}_2)^T(x) \\
& \quad - x(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\boldsymbol{\Psi}_2)^T(1)]\mathbf{C}[\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\boldsymbol{\Psi}_2(y) - y\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\boldsymbol{\Psi}_2(1)] \\
& \quad = G(x,y,t) + 2u_r^3 \\
& \quad - \gamma[u^{(4,0)}(x,y,t_0) + u^{(0,4)}(x,y,t_0) \\
& \quad + 2u^{(2,2)}(x,y,t_0)] + u^{(2,0)}(x,y,t_0) \\
& \quad + u^{(0,2)}(x,y,t_0) - (3u_r^2 - 1)u^{(0,0)}(x,y,t_0) \tag{4.27}
\end{aligned}$$

olur. **ACB** formundaki bu ifadede gerekli dönüşümler yapılır ve denklem $\tilde{\mathbf{W}}(x,y)\mathbf{D} = \tilde{\mathbf{G}}(x,y)$ halini alır. (4.26) ifadesinde belirtilen Chebyshev sıralama noktalarının $\tilde{\mathbf{W}}(x,y)\mathbf{D} = \tilde{\mathbf{G}}(x,y)$ denkleminde yerine yazılmasıyla $\mathbf{UD} = \mathbf{G}$ denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözülerek $t = t_0$ başlangıç anındaki \mathbf{D} vektörü ve böylece Chebyshev dalgacık serisinin katsayıları bulunur. Yani \mathbf{C} katsayılar matrisi elde edilmiş olur. Çözüm denkleminde ve $u^{(4,0)}(x,y,t)$, $u^{(0,4)}(x,y,t)$, $u^{(2,0)}(x,y,t)$, $u^{(0,2)}(x,y,t)$, $u^{(2,2)}(x,y,t)$ denklemlerinde \mathbf{C} katsayılar matrisi yerine koyularak $(t_0 + \Delta t)$ anında bu ifadelerin değeri bulunur. Denklem yeniden çözülerek \mathbf{C} katsayılar matrisi bulunur. Benzer şekilde iterasyonu tekrarlayarak $t = t_{son}$ anındaki çözümü de buluruz.

4.3.2 Örnekler

Örnek 4.3.1.1

Aşağıda başlangıç ve sınır koşulları verilen iki konum boyutlu genelleştirilmiş Fisher Kolmogorov denklemini ele alalım.

$$u_t + \gamma \Delta^2 u - \Delta u + f(u) = G(x, y, t)$$

$$u(x, y, 0) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)$$

$$u = 0, \Delta u = 0$$

$$f(u) = u^3 - u$$

$$G(x, y, t) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) e^{-t} (\sin^2(2\pi x) \sin^2(2\pi y) e^{-2t} - 2 + 64\gamma\pi^4 + 8\pi^2)$$

Bu denklemin tam çözümü şu şekildedir:

$$u(x, y, t) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) e^{-t}$$

Çözüm 4.3.1.1

Yukarıda verilen kısmi diferansiyel denklemin yaklaşık çözümünü Chebyshev Dalgacık Sıralama Yöntemi ile bulup hatayı inceleyelim:

$$u(x, y, 0) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)$$

ifadesinin gereken türevleri alınarak t_0 başlangıç anında $u^{(4,0)}$, $u^{(0,4)}$, $u^{(2,0)}$, $u^{(0,2)}$, $u^{(2,2)}$ ifadeleri bulunur. Elde edilen ifadeler aşağıdaki (4.27) denkleminde yerine yazılır. Daha sonra (4.26) ifadesinde belirtilen Chebyshev

sıralama noktaları (4.27) denkleminde yerine yazılırsa $\mathbf{C}^T \mathbf{U} = \mathbf{B}$ yapısında bir denklem sistemi elde edilir. Öncelikle $t = t_0$ başlangıç anında u_r ifadesi $u_0 = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)$ olarak alınır. Elde edilen lineer denklem sistemi çözülerek \mathbf{C} katsayılar matrisi bulunur.

$$u^{(0,0)}(x, y, t) = \Delta t [(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \mathbf{\Psi}_4)^T(x) + \frac{x - x^3}{6} (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2)^T(1) - x(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \mathbf{\Psi}_4)^T(1)] \mathbf{C} [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \mathbf{\Psi}_4(y) + \frac{y - y^3}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2(1) - y \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \mathbf{\Psi}_4(1)] + u^{(0,0)}(x, y, t_0)$$

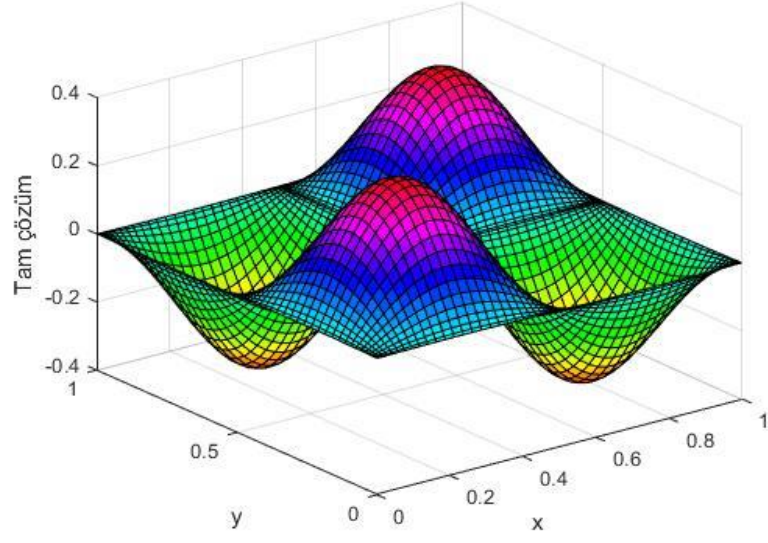
Çözüm denkleminde \mathbf{C} ifadesi yerine koyularak bir sonraki çözüm u_1 bulunur. Benzer şekilde u_1 çözümünden u_2 bulunur. Bu çözümler yeteri kadar birbirine yaklaşıncaya kadar iterasyon tekrarlanır. Çözümler arası fark istenildiği kadar azalınca son hesaplanan \mathbf{C} katsayılar matrisi, gerekli denklemlerde yerine yazılarak $t_1 = (t_0 + \Delta t)$ anındaki çözüm elde edilir. Bu şekilde iterasyon tekrarlanarak istenilen zaman adımındaki çözüme ulaşılr.

Tablo 4.4'te verilen M ve k değerleri için mutlak maksimum hata değerleri gösterilmektedir. Burada $\gamma = 0.01$ ve $\Delta t = 0.01$ olarak alınmıştır. Tablo incelendiğinde M değeri sabit tutulup k değeri arttırıldığında mutlak maksimum hatanın azaldığı gözlemlenmiştir. Ayrıca k değeri sabit tutulup M değeri arttırıldığında da mutlak maksimum hata azalmıştır.

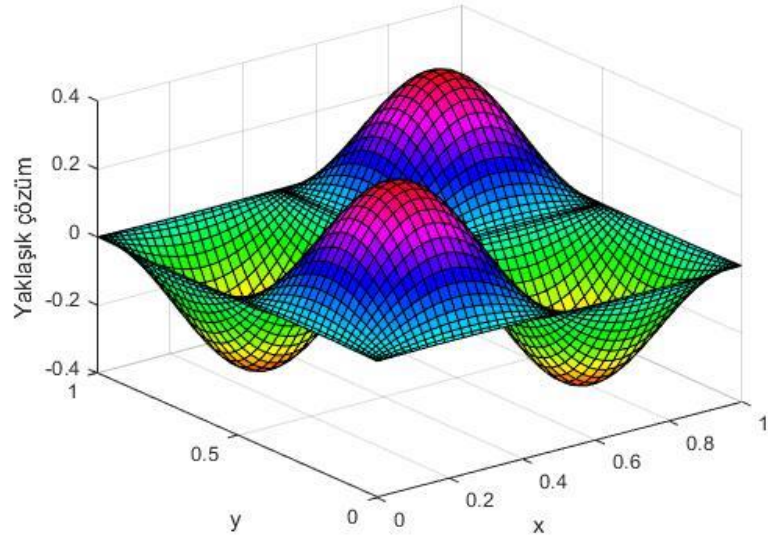
Tablo 4.4: Verilen M ve k değerleri için mutlak maksimum hata

$M = 4$ $k = 0$	$M = 4$ $k = 1$	$M = 4$ $k = 2$	$M = 4$ $k = 3$	$M = 5$ $k = 0$
5,28386E-03	4,84647E-05	3,51756E-05	1,47754E-05	1,88837E-03
$M = 5$ $k = 1$	$M = 6$ $k = 0$	$M = 6$ $k = 1$	$M = 8$ $k = 0$	$M = 10$ $k = 0$
1,15553E-05	7,24773E-05	1,21531E-05	1,34495E-05	1,23240E-05

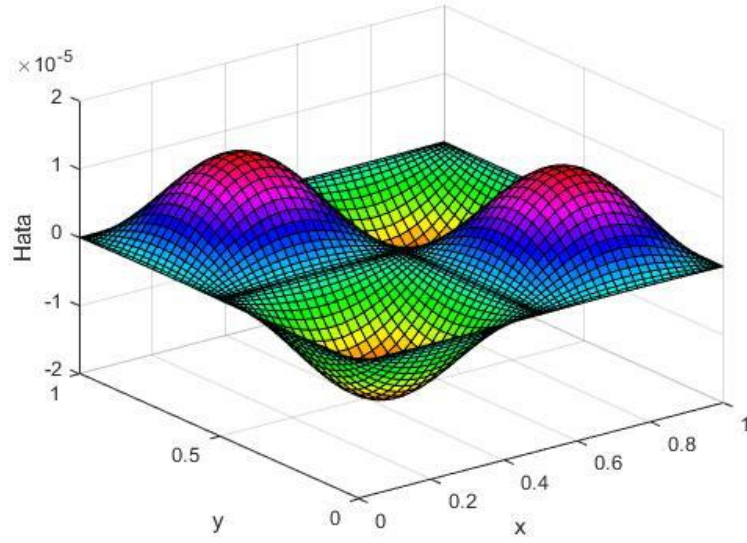
Şekil 4.25, Şekil 4.26 ve Şekil 4.27'de sırasıyla $M = 30$, $k = 1$ değerleri için tam çözüm, yaklaşık çözüm ve hata verilmiştir. Burada $\gamma = 0.01$ ve $\Delta t = 0.01$ olarak alınmıştır. Bu şekiller Khiari ve Omrani (2011), Ilati ve Dehghan (2018), Oruç (2019), Çelik (2020) makaleleriyle uyumludur.



Şekil 4.25: $M = 30, k = 1$ için tam çözüm



Şekil 4.26: $M = 30, k = 1$ için yaklaşık çözüm



Şekil 4.27: $M = 30, k = 1$ için hata

Tablo 4.5'te yeni metot belirtilen makalelerle karşılaştırılmıştır. Bu tabloda $k = 1/20$ olarak gösterilen ifade N parçalanış sayısı olmak üzere $k = t_{son}/N$ şeklindedir. h ifadeleri konum adımlarının büyüklüğüdür. Tablo 4.5'ten de görüleceği gibi yeni metotla, küçük M ve k değerlerinde bile daha iyi sonuçlar elde edilmiştir.

Tablo 4.5: Yeni metodun belirtilen makalelerle karşılaştırılması

Yeni metot	L_{∞}				
	Khiari ve Omrani (2011)	llati ve Dehghan (2018)	llati ve Dehghan (2018)	llati ve Dehghan (2018)	llati ve Dehghan (2018)
$M = 5, k = 1$	$k = 1/50$	DLBIE	LBIE-MLS	LBIE-RPI	LBIE-MK
		$h = 1/40$	$h = 1/40$	$h = 1/40$	$h = 1/40$
1,15553E-05	4.4541E-04	2.3295E-4	6.0959E-4	2.5933E-4	2.0228E-4

Örnek 4.3.1.2

Aşağıda başlangıç ve sınır koşulları verilen iki konum boyutlu genelleştirilmiş Fisher Kolmogorov denklemini ele alalım.

$$\begin{aligned}u_t + \gamma \Delta^2 u - \Delta u + f(u) &= 0 \\u(x, y, 0) &= x^3(1-x)^3y^3(1-y)^3 \\u &= 0, \Delta u = 0 \\f(u) &= u^3 - u\end{aligned}$$

Çözüm 4.3.1.2

Yukarıda verilen kısmi diferansiyel denklemin yaklaşık çözümünü Chebyshev Sıralama Metodu ile bulalım:

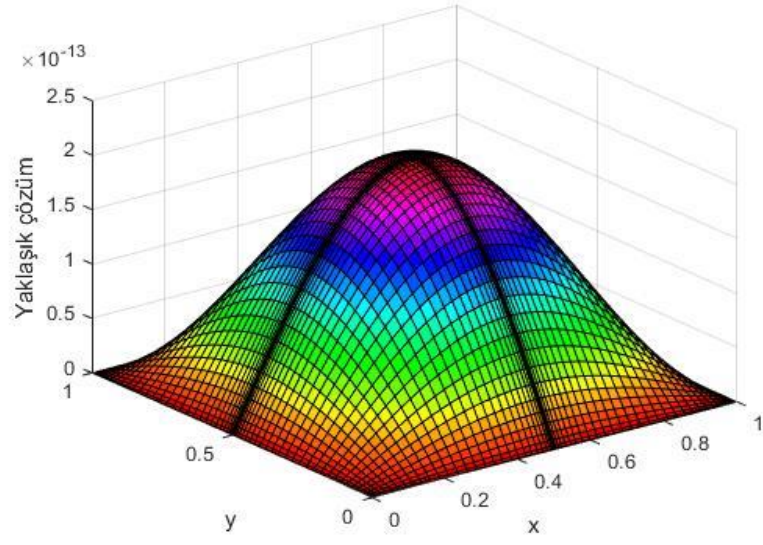
$$u^{(0,0)}(x, y, 0) = x^3(1-x)^3y^3(1-y)^3$$

ifadesinin gereken türevleri alınarak t_0 başlangıç anında $u^{(4,0)}, u^{(0,4)}, u^{(2,0)}, u^{(0,2)}, u^{(2,2)}$ ifadeleri bulunur. Elde edilen ifadeler aşağıdaki (4.27) denkleminde yerine yazılır. Daha sonra (4.26) ifadesinde belirtilen Chebyshev sıralama noktaları (4.27) denkleminde yerine yazılırsa $\mathbf{C}^T \mathbf{U} = \mathbf{B}$ yapısında bir denklem sistemi elde edilir. Öncelikle $t = t_0$ başlangıç anında u_r ifadesi $u_0 = x^3(1-x)^3y^3(1-y)^3$ olarak alınır. Elde edilen lineer denklem sistemi çözülerek \mathbf{C} katsayılar matrisi bulunur.

$$\begin{aligned}u^{(0,0)}(x, y, t) &= \Delta t [(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \mathbf{\Psi}_4)^T(x) + \frac{x-x^3}{6} (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2)^T(1) \\&\quad - x(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \mathbf{\Psi}_4)^T(1)] \mathbf{C} [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \mathbf{\Psi}_4(y) + \frac{y-y^3}{6} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{\Psi}_2(1) \\&\quad - y \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \mathbf{\Psi}_4(1)] + u^{(0,0)}(x, y, t_0)\end{aligned}$$

çözüm denkleminde \mathbf{C} ifadesi yerine koyularak bir sonraki çözüm u_1 bulunur. Benzer şekilde u_1 çözümünde u_2 bulunur. Bu çözümler yeteri kadar birbirine yaklaşıncaya kadar iterasyon tekrarlanır. Çözümler arasındaki fark yeterince azalınca son hesaplanan \mathbf{C} katsayılar matrisi, gerekli denklemlerde yerine yazılarak $t_1 = (t_0 + \Delta t)$ anındaki çözümler elde edilir. Bu şekilde iterasyon tekrarlanarak istenilen zaman adımıdaki çözüme ulaşılır.

Şekil 4.28'de $M = 30$, $k = 1$ değerleri için çözümün üç boyutlu görüntüsü verilmiştir. Burada $\gamma = 0.01$ ve $\Delta t = 0.01$ olarak alınmıştır. Elde edilen bu şekil Joshi ve Arora (2018) ve Çelik (2020) çalışmalarıyla uyumludur.



Şekil 4.28: $M = 30, k = 1$ için yaklaşık çözüm

5. SONUÇ

Bu tezde, dalgacıklarla ilgili temel bilgiler verilmiş olup Chebyshev Dalgacık Sıralama Yöntemi'nin kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin elde edilmesinde nasıl kullanıldığı gösterilmiştir. Yöntem hakkında bilgi verildikten sonra, yöntemin uygulanmasıyla ilgili bilgiler verilmiştir.

İlk olarak Chebyshev Dalgacık Sıralama Yöntemi'nin ikinci mertebeden iki boyutlu denklemlerde nasıl uygulanacağından bahsedilmiş, daha sonra Magnetohidrokinamik akı denkleminin uygulanması anlatılmıştır. Elde edilen sonuçlar Tezer-Sezgin (2004), Tezer-Sezgin ve Aydın (2006), Bozkaya ve Tezer-Sezgin (2007), Çelik (2011), Çelik (2012^b) ve Çelik (2013^a) makaleleriyle ve tam çözümlerle uyumludur.

Daha sonra dördüncü mertebeden bir ve iki konum boyutlu denklemler için metodun nasıl uygulanacağı anlatıldıktan sonra bir ve iki konum boyutlu geliştirilmiş Fisher Kolmogorov denklemlerinin çözümünde kullanılması anlatılmıştır. İkişer tane örnek çözülmüştür. Dördüncü mertebeden bir konum boyutlu denklemler için çözülen ilk örnekte önce Tablo 4.1'de belirtilen değerlerdeki mutlak hata verilmiş, daha sonra Tablo 4.2 ve Tablo 4.3'te Doss ve Nandini (2012) ve Kadri ve Omrani (2018) makaleleriyle kullandığımız yöntem karşılaştırılmış kullandığımız yöntemin daha iyi sonuçlar elde ettiği görülmüştür. Dördüncü mertebeden iki konum boyutlu denklemler için çözülen ilk örnekte elde edilen şekiller Khiari ve Omrani (2011), Ilati ve Dehghan (2018), Oruç (2019), Çelik (2019) makaleleriyle uyumludur. Tablo 4.4'te verilen M ve k değerleri için mutlak maksimum hata tablosu verilmiştir. Ayrıca Tablo 4.5'te yeni yöntem Khiari ve Omrani (2011), Ilati ve Dehghan (2018) makalelerindeki yöntemlerle karşılaştırılmış sunulan yöntemin oldukça iyi olduğu görülmüştür. İkinci örnekte elde edilen şekiller de Joshi ve Arora (2018) ve Çelik (2019) çalışmalarıyla uyumludur. Yapılan hesaplamalarda ve çizimlerde Matlab kullanılmıştır.

6. KAYNAKLAR

Adibi, H. and Assari, P., "Chebyshev wavelet method for numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind." *Mathematical problems in Engineering*, 2010 (2010).

Ali, A., Iqbal, M. A. and Mohyud-Din, S. T. "Chebyshev wavelets method for delay differential equations." *Int J Mod Math Sci*, 8 (2), 102-110, (2013).

Babolian, E. and Fattahzadeh, F., "Numerical solution of differential equations by using Chebyshev wavelet operational matrix of integration." *Applied Mathematics and computation*, 188 (1), 417-426, (2007^a).

Babolian, E. and Fattahzadeh, F., "Numerical computation method in solving integral equations by using Chebyshev wavelet operational matrix of integration." *Applied Mathematics and Computation*, 188 (1), 1016-1022, (2007^b).

Baird, C. A., "Quasilinearization and the methods of finite difference and initial values." *Journal of Optimization Theory and Applications*, 6 (4), 320-330, (1970).

Barzkar, A., Assari, P. and Mehrpouya, M. A., "Numerical solution of the nonlinear Fredholm integral equation and the Fredholm integro-differential equation of second kind using Chebyshev wavelets." (2012).

Biazar, J. and Ebrahimi, H., "Chebyshev wavelets approach for nonlinear systems of Volterra integral equations." *Computers & Mathematics with Applications*, 63 (3), 608-616, (2012).

Bozkaya, C., and Tezer-Sezgin, M., "Fundamental solution for coupled magnetohydrodynamic flow equations." *Journal of computational and applied mathematics*, 203 (1), 125-144, (2007).

Bujurke, N. M., Salimath, C. S., Kudenatti, R. B., and Shiralashetti, S. C., "A fast wavelet-multigrid method to solve elliptic partial differential equations." *Applied mathematics and computation*, 185 (1), 667-680, (2007).

Chang, R. Y. and Wang, M. L., "Shifted Legendre direct method for variational problems." *Journal of Optimization Theory and Applications*, 39 (2), 299-307, (1983).

Chen, C. F. and Hsiao, C. H., "Haar wavelet method for solving lumped and distributed-parameter systems." *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, 144 (1), 87-94, (1997).

Crandall, R. E., *Projects in scientific computation*. Springer Science & Business Media, 2000.

Çelik, İ., "Solution of magnetohydrodynamic flow in a rectangular duct by Chebyshev collocation method." *International Journal for Numerical methods in fluids*, 66 (10), 1325-1340, (2011).

Çelik, İ., "Haar wavelet method for solving generalized Burgers–Huxley equation." *Arab Journal of Mathematical Science*, 18 (1), 25-37, (2012^a).

Çelik, İ., "Solution of magneto-hydrodynamic flow in a rectangular duct by Chebyshev polynomial method." *Applied Mathematics*, 2 (3), 58-65, (2012^b).

Çelik, İ., "Haar wavelet approximation for magnetohydrodynamic flow equations." *Applied Mathematical Modelling*, 37 (6), 3894-3902, (2013^a).

Çelik, İ., "Numerical solution of differential equations by using Chebyshev wavelet collocation method." *Çankaya Üniversitesi Bilim ve Mühendislik Dergisi*, 10 (2) (2013^b).

Çelik, İ., "Chebyshev Wavelet collocation method for solving generalized Burgers–Huxley equation." *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39 (3), 366-377, (2016).

Çelik, İ., "Free vibration of non-uniform Euler–Bernoulli beam under various supporting conditions using Chebyshev wavelet collocation method." *Applied Mathematical Modelling*, 54, 268-280, (2018^a).

Çelik, İ., "Generalization of Chebyshev wavelet collocation method to the rth-order differential equations." *Communication in Mathematical Modeling and Applications*, 3 (2), 31-47, (2018^b).

Çelik, İ., Chebyshev Wavelet collocation method for solving a class of linear and nonlinear nonlocal boundary value problems. *Fundamental Journal of Mathematics and Applications*, 1 (1), 25-35, (2018^c).

Çelik, İ., Gegenbauer Wavelet Collocation Method for the extended Fisher-Kolmogorov equation in two dimensions. *Mathematical methods in the applied sciences*, (in press) (2020).

Daubechies, I., "Orthonormal bases of compactly supported wavelets." *Communications on pure and applied mathematics*, 41 (7), 909-996, (1988).

Daubechies, I., *Ten lectures on wavelets.*, Vol. 61. Siam, (1992).

Doss, L. J. T., and Nandini, A. P., "An H1-Galerkin mixed finite element method for the extended Fisher–Kolmogorov equation." *Int. J. Numer. Anal. Model. Ser. B*, 3, 460-485, (2012).

Dragos, L., "Magnetofluid dynamics." *Translation of Magnetodinamica fluidelor, Bucharest, Editura Academiei Romane, 1969. Bucharest, Editura Academiei; Tunbridge Wells, Kent, England, Abacus Press, 1975. 478 p.* (1975).

Fox, L. and Parker, I. B., *Chebyshev polynomials in numerical analysis.*, No. 519 (4) F6., (1968).

Guf, J. S. and Jiang, W. S., "The Haar wavelets operational matrix of integration." *International Journal of Systems Science*, 27 (7), 623-628, (1996).

Gül, Ş., "Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin Wavelet yöntemiyle çözümü", Yüksek Lisans Tezi, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, İzmir, (2008).

Haar, A., "Zur theorie der orthogonalen funktionensysteme." *Mathematische Annalen*, 69 (3), 331-371, (1910).

Heydari, M. H., Hooshmandasl, M. R., Maalek Ghaini, F. M. and Mohammadi, F., "Wavelet collocation method for solving multiorder fractional differential equations." *Journal of Applied mathematics*, 2012 (2012).

Heydari, M. H., Hooshmandasl, M. R., Maalek Ghaini, F. M. and Li, M., "Chebyshev wavelets method for solution of nonlinear fractional integrodifferential equations in a large interval." *Advances in Mathematical Physics*, 2013 (2013^a).

Heydari, M. H., Hooshmandasl, M. R., Ghaini, F. M. and Fereidouni, F., "Two-dimensional Legendre wavelets for solving fractional Poisson equation with Dirichlet boundary conditions." *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 37 (11), 1331-1338, (2013^b).

Heydari, M. H., Hooshmandasl, M. R. and Ghaini, F. M., "A new approach of the Chebyshev wavelets method for partial differential equations with boundary conditions of the telegraph type." *Applied Mathematical Modelling*, 38 (5-6), 1597-1606, (2014^a).

Heydari, M. H., Hooshmandasl, M. R., Mohammadi, F. and Cattani, C., "Wavelets method for solving systems of nonlinear singular fractional Volterra integro-differential equations." *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19 (1), 37-48, (2014^b).

Horng, I. R. and Chou, J.H., "Shifted Chebyshev direct method for solving variational problems." *International Journal of systems science*, 16 (7), 855-861, (1985).

Hwang, C. and Shih, Y. P., "Laguerre series direct method for variational problems." *Journal of Optimization Theory and Applications*, 39 (1), 143-149, (1983).

Ilati, M., and Dehghan, M. "Direct local boundary integral equation method for numerical solution of extended Fisher–Kolmogorov equation." *Engineering with Computers*, 34 (1), 203-213, (2018).

Joshi, V., and Arora, G., *The Numerical Solutions of Some Linear and Nonlinear Partial Differential Equations Using Trigonometric B-Spline Basis Functions* (Doctoral dissertation, Lovely Professional University) (2018).

Kadri, T., and Omrani, K., "A fourth-order accurate finite difference scheme for the extended-Fisher-Kolmogorov equation." *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 55 (1), 297-310, (2018).

Kajani, M. T. and Vencheh, A. H., "Solving linear integro-differential equation with Legendre wavelets." *International Journal of Computer Mathematics*, 81 (6), 719-726, (2004).

Kajani, M. T., Vencheh, A. H. and Ghasemi, M., "The Chebyshev wavelets operational matrix of integration and product operation matrix." *International Journal of Computer Mathematics*, 86 (7), 1118-1125, (2009).

Keşan, C., Chebyshev polynomial solutions of second-order linear partial differential equations. *Applied mathematics and computation*, 134 (1), 109-124, (2003).

Khiari, N., and Omrani, K., "Finite difference discretization of the extended Fisher–Kolmogorov equation in two dimensions." *Computers & Mathematics with Applications*, 62 (11), 4151-4160, (2011).

Lepik, Ü., "Numerical solution of differential equations using Haar wavelets." *Mathematics and computers in simulation*, 68 (2), 127-143, (2005).

Lepik, Ü. and Hein, H., "Application of the Haar wavelet method for solution the problems of mathematical calculus." *Waves, Wavelets and Fractals*, 1 (1), (2015).

Lévy, P. and Loeve, M., *Processus stochastiques et mouvement brownien*. Paris: Gauthier-Villars, (1965).

Mallat, S. G., "A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation." *IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence*, 7, 674-693, (1989).

Maleknejad, K., Tavassoli Kajani, M. and Mahmoudi, Y., "Numerical solution of linear Fredholm and Volterra integral equation of the second kind by using Legendre wavelets." *Kybernetes*, 32 (9-10), 1530-1539, (2003).

Maleknejad, K. and Mirzaee, F., "Using rationalized Haar wavelet for solving linear integral equations." *Applied Mathematics and Computation*, 160 (2), 579-587, (2005).

Meyer, Y., "Ondelettes et opérateurs, volume I." *Hermann, Paris* (1990).

Oruç, Ö., "An efficient wavelet collocation method for nonlinear two-space dimensional Fisher–Kolmogorov–Petrovsky–Piscounov equation and two-space dimensional extended Fisher–Kolmogorov equation." *Engineering with Computers*, 1-18, (2019).

Razzaghi, M. and Razzaghi, M., "Fourier series direct method for variational problems." *International Journal of Control*, 48 (3), 887-895, (1988).

Razzaghi, M. and Yousefi, S., "Legendre wavelets direct method for variational problems." *Mathematics and computers in simulation*, 53 (3), 185-192, (2000).

Razzaghi, M. and Yousefi, S., "Legendre wavelets method for the solution of nonlinear problems in the calculus of variations." *Mathematical and Computer Modelling*, 34 (1-2), 45-54, (2001^a).

Razzaghi, M. and Yousefi, S., "The Legendre wavelets operational matrix of integration." *International Journal of Systems Science*, 32 (4), 495-502, (2001^b).

Saeed, U., Ur Rehman, M. and Iqbal, M. A., "Modified Chebyshev wavelet methods for fractional delay-type equations." *Applied Mathematics and Computation*, 264, 431-442, (2015).

Sohrabi, S., "Comparison Chebyshev wavelets method with BPFs method for solving Abel's integral equation." *Ain Shams Engineering Journal*, 2 (3-4), 249-254, (2011).

Tezer-Sezgin, M., and Aydın, S. H., "Dual reciprocity boundary element method for magnetohydrodynamic flow using radial basis functions." *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 16 (1), 49-63, (2002).

Tezer-Sezgin, M., "Solution of magnetohydrodynamic flow in a rectangular duct by differential quadrature method." *Computers & fluids*, 33 (4), 533-547, (2004).

Tezer-Sezgin, M., and Aydın, S. H., "Solution of magnetohydrodynamic flow problems using the boundary element method." *Engineering analysis with boundary elements*, 30 (5), 411-418, (2006).

Venkatesh, S. G., Ayyaswamy, S. K., and Balachandar, S. R., "The Legendre wavelet method for solving initial value problems of Bratu-type." *Computers & Mathematics with Applications*, 63 (8), 1287-1295, (2012).

Wang, Y. and Fan, Q., "The second kind Chebyshev wavelet method for solving fractional differential equations." *Applied Mathematics and Computation*, 218 (17), 8592-8601, (2012).

Yang, C. and Hou, J., "Chebyshev wavelets method for solving Bratu's problem." *Boundary value problems*, 2013 (1), 142, (2013).

Yuanlu, L. I., "Solving a nonlinear fractional differential equation using Chebyshev wavelets." *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15 (9), 2284-2292, (2010).

Zheng, X. and Yang, X., "Techniques for solving integral and differential equations by Legendre wavelets." *International Journal of Systems Science*, 40 (11), 1127-1137, (2009).

Zhu, L. and Fan, Q., "Solving fractional nonlinear Fredholm integro-differential equations by the second kind Chebyshev wavelet." *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17 (6), 2333-2341, (2012).

7. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Aslı Sultan Karataş

Doğum Yeri ve Tarihi : Karaman,1988.

Lisans : TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Elektronik posta : a.sultan.ozturen@gmail.com