T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MUTLAK EULER TOPLANABİLEN SERİLER UZAYI VE MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

DOKTORA TEZİ

FADİME GÖKÇE

DENİZLİ, EYLÜL - 2018

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MUTLAK EULER TOPLANABİLEN SERİLER UZAYI VE MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

DOKTORA TEZİ

FADİME GÖKÇE

DENİZLİ, EYLÜL - 2018

KABUL VE ONAY SAYFASI

Fadime GÖKÇE tarafından hazırlanan "**Mutlak Euler Toplanabilen Seriler Uzayı ve Matris Dönüşümleri**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 14.09.2018 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL Pamukkale Üniversitesi	....
Üye Prof. Dr. Ceyhun KARPUZ Pamukkale Üniversitesi	....
Üye Doç. Dr. Özlem GİRGİN ATLIHAN Pamukkale Üniversitesi	....
Üye Prof. Dr. İbrahim ÇANAK Ege Üniversitesi	....
Üye Prof. Dr. Salih AYTAR Süleyman Demirel Üniversitesi	....

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 26/09/2018 tarih ve 41/19 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....

Prof. Dr. Uğur YÜCEL

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tez çalışması TÜBİTAK tarafından 2211- Doktora Burs Programı ile desteklenmiştir.

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

FADİME GÖKÇE

ÖZET

MUTLAK EULER TOPLANABİLEN SERİLER UZAYI VE MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ
DOKTORA TEZİ
FADİME GÖKÇE
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. MEHMET ALİ SARIGÖL)

DENİZLİ, EYLÜL - 2018

Bu tez çalışması dört temel bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde hazırlık amacıyla giriş verilmiştir.

İkinci bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım, teorem ve lemmalara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde $|E_{\theta}^{r}|_{p}$, $\left|E_{\theta,\mathrm{p}}^{r}\right|_{\infty}$ve $\left|E_{\phi}^{r}\right|(p)$ mutlak Euler uzayları sırasıyla l_p, l_∞ ve $l(p)$ uzayları içinde $T^r(p)$ ve $T^r(\phi,p)$ üçgensel matrislerinin toplama alanı olarak elde edilmiştir. Aynı zamanda $|E_{\theta}^{r}|_{p}$, $\left|E_{\theta,\mathrm{p}}^{r}\right|_{\infty}$ uzayları ile ilgili bazı kapsama bağıntıları verilerek dual, baz, izomorfizm, norm gibi cebirsel ve topolojik özellikleri incelenmiştir. Ayrıca bu uzaylar üzerindeki belirli matris ve kompakt operatörlerin karakterizasyonları verilmiş ve normları ile Hausdorff kompaktsızlık ölçüleri belirlenmiştir.

Dördüncü bölümde $\left|E_{\phi}^{r}\right|(p)$ mutlak Euler uzayının dual, baz, izomorfizm, paranorm gibi cebirsel ve topolojik özellikleri incelenerek matris dönüşümlerinin karakterizasyonları verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Mutlak Toplanabilme, Euler Matrisi, Dizi Uzayları, Matris Dönüşümleri, Sınırlı Operatörler.

ABSTRACT

ABSOLUTE EULER SUMMABLE SERIES SPACES AND MATRIX OPERATORS
PH.D THESIS
FADİME GÖKÇE
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATİCS

(SUPERVISOR: PROF. DR. MEHMET ALİ SARIGÖL)

DENİZLİ, SEPTEMBER 2018

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, the introduction to the study has been given for preparation.

In the second chapter, some basic definitions, theorems and lemmas that will be used in the other sections have been given.

In the third chapter, the absolute Euler spaces $|E_{\theta}^{r}|_{p}, \left|E_{\theta,p}^{r}\right|_{\infty}$ and $\left|E_{\phi}^{r}\right|(p)$ have been obtained as the domain of the triangle matrix $T^{r}(p)$ and $T^{r}(\phi,p)$ in the spaces l_p, l_∞ and $l(p)$ respectively. Also, having given some inclusion relations concerning the spaces $|E_{\theta}^{r}|_{p}, \left|E_{\theta,p}^{r}\right|_{\infty}$, their some algebraic and topological structures such as dual, base, isomorphism, norm have been investigated. Further, certain matrix and compact operators on those spaces have been characterized and also their norms and Hausdorff measures of noncompactness have been determined.

In the fourth chapter, some algebraic and topological properties such as dual, base, isomorphism, paranorm and characterization of matrix transformations of the absolute Euler spaces $\left|E_{\phi}^{r}\right|(p)$ have been given.

KEYWORDS: Absolute Summability, Euler Matrix, Sequence Spaces, Matrix Transformations, Bounded Operators.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$	:	x'in $A-$ dönüşümü
$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$	:	X den Y ye olan bütün matris dönüşümlerin sınıfı
$\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{A}}$	:	A matrisinin X uzayı içindeki toplama alanı
$\boldsymbol{p}^*$	:	p'nin eşleniği
$\boldsymbol{\chi}$	:	Hausdroff kompaktsızlık ölçüsü
$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{e}_{\infty}^{\boldsymbol{r}}$	:	Euler toplanabilen dizi uzayları
$\lvert \boldsymbol{E}_{\theta}^{\boldsymbol{r}} \rvert_{\boldsymbol{p}}$	:	Mutlak Euler toplanabilen seri uzayları
$\left\lvert \boldsymbol{E}_{\theta,\mathbf{p}}^{\boldsymbol{r}} \right\rvert_{\infty}$	:	Mutlak Euler toplanabilen seri uzayları
$\left\lvert \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\phi}}^{\boldsymbol{r}} \right\rvert(\boldsymbol{p})$	:	Mutlak Euler toplanabilen seri uzayları
$\lVert . \rVert_{\boldsymbol{X}}$	:	X uzayında norm

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması, Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı doktora programında hazırlanmış ve TÜBİTAK tarafından desteklenmiştir.

Çalışma konusunun belirlenmesinde ve çalışmanın hazırlanma sürecinin her aşamasında bilgisini, tecrübesini ve değerli zamanını esirgemeyerek bana her zaman yardımcı olan değerli hocam Sayın Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL'e teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca tüm hayatım boyunca bana her zaman destek olan aileme ve arkadaşlarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

1. GİRİŞ

Geniş bir uygulama alanına sahip olan dizi veya seri kavramı Matematiğin en temel kavramlarından biridir. Seriler 17. ve 18. yüzyıl boyunca incelenmiş ve kullanılmıştır. O dönemde matematikçiler iyi bilinen yakınsaklık kavramının tanımlanmadığı periyotta rastgele dört işlemler yaparak serilerin toplamıyla ilgili çelişkili sonuçlar elde etmiş ve bu çelişkilerin uzun süre üstesinden gelememişlerdir. Gauss (1777-1855)'un kesirli bir n sayısı için $(1+x)^n$ ifadesinin açılımını veren Binom teoremi yardımıyla mevcut çelişkilerin bir kısmı çözülebilmiştir. Bu konunun öncü araştırmacılarından olan Cauchy (1789-1857) günümüzde halen kullanılan dizinin (serinin) yakınsaklık tanımını formülüze etmiştir. Cauchy'nin bu tanımı o dönemdeki birçok belirsizliği ortadan kaldırmasına rağmen beraberinde şu problemin doğmasına neden olmuştur: Acaba yakınsak olmayan yani ıraksak seriler toplanabilir mi veya ıraksak seriye bir toplam karşılık getirilebilir miydi? Bu sorunun cevabı yakınsaklık kavramının genişletilmesiyle verilmiştir. Böylece toplanabilme teorisi doğmuştur. (Powel ve Shah 1988). Bu konuda Abel, Cesàro, Riesz, Nörlund, Borel, Hölder, Hausdorff ve Euler dönüşümleri ilk akla gelenlerdir. Örneğin, Euler

$$1+x+x^2+\cdots=\frac{1}{1-x} \quad (\,|x|<1)$$

formülünde $x=-1$ alarak

$$1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{2}$$

eşitliğini elde etmiştir. Bu ise esasında Cauchy anlamında yanlıştır, çünkü eşitliğin solundaki seri ıraksaktır. Ancak, serinin (s_n) kısmi toplamlar dizisinin 1. mertebeden Cesàro ortalaması ile elde edilen dönüşüm dizisi

$$t_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k \;=\frac{1}{2}+\frac{1}{4(n+1)}[1+(-1)^n]$$

olup bu dizi 1/2 sayısına yakınsaktır. Şu halde yukarıdaki ıraksak serinin bu metotla toplamı 1/2'dir. Bu örnek ıraksak serilerin toplanabileceğini göstermesi açısından büyük önem taşımaktadır.

Dikkat edilirse sözü edilen dönüşüm bir lineer dönüşümdür ve bu dönüşüme aynı zamanda

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

sonsuz matrisi karşılık gelmektedir. Bu örnekte olduğu gibi diziler arasındaki lineer dönüşümlere genel olarak sonsuz matrisler karşılık geldiğinden en önemli dönüşüm türleri matris dönüşümleridir. Bu kavramı ifade etmek gerekirse X ile Y iki dizi uzayı ve $A = (a_{nk})$ kompleks terimli sonsuz bir matris olsun. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k,$$

serisi yakınsak ise $A(x) = (A_n(x))$ dizisine $x = (x_k)$ dizisinin dönüşüm dizisi denir. Eğer her $x \in X$ için $A(x) \in Y$ ise A ya X'den Y'ye bir matris dönüşümü adı verilir ve X'den Y'ye olan bütün matris dönüşümlerin sınıfı (X, Y) ile gösterilir. Örneğin (l, c), (l_p, c), (l, c_0) ve (l_p, l) sınıflarına $1 \leq p < \infty$ için sürekli lineer dönüşümler karşılık gelir ve bunun tersi de doğrudur yani bu uzaylar arasındaki sürekli lineer dönüşümler bu sınıfların matrisleri ile ifade edilir. Bu özellik uzayların daha sonra verilecek olan AK -uzayı olmasından kaynaklanmaktadır ve ayrıca bu matris sınıflarının karakterizasyonları iyi bilinmektedir (Maddox, 1970). Dolayısıyla dizi uzayları arasındaki lineer dönüşümlerin analiz edilebilmesi için matris dönüşümlerinin incelenmesi büyük önem taşır. Bu bağlamda adi, mutlak ve kuvvetli toplanabilme metotlarından faydalanarak bilinen pek çok uzay genişletilmiş ve bu uzayların cebirsel ve topolojik yapıları ile matris dönüşümleri incelenmiştir.

Toplanabilme teorisinin başka bir çalışma alanı ise mutlak yakınsak seriler uzayı, sınırlı salınımlı diziler uzayı ve bazı temel dizi uzaylarını genelleştiren mutlak toplanabilme metodudur. Bu kavramı kısaca ifade etmek için $\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisini (s_n) ve (s_n) dizisinin A –dönüşüm dizisini (t_n) ile gösterelim. Eğer (t_n) sınırlı salınımlı bir dizi yani

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\Delta t_{n-1}|<\infty, \quad (t_{-1}=0)$$

ise $\sum a_n$ serisine mutlak A-toplanabilirdir veya kısaca $|A|$ toplanabilirdir denir. Bu tanımda A matrisi yerine özel matrisler alınırsa iyi bilinen bazı toplanabilme metotları elde edilir. Örneğin; bu metot, A matrisi Nörlund matrisi olarak alınırsa yani $P_n = p_0 + p_1 + \cdots + p_n \neq 0$ olmak üzere

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{p_{n-k}}{P_n}, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

ise Mears (1937) tarafından verilen $|N, p_n|$ mutlak Nörlund metoduna, $P_n = p_0 + p_1 + \cdots + p_n \to \infty$ olmak üzere, Riesz matrisi olarak seçilirse yani

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{p_k}{P_n}, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

ise Sunouchi (1949) tarafından verilen $|\bar{N}, p_n| \cong |R, p_n|$ mutlak Riesz toplanabilme metoduna, $\alpha.$ mertebeden Cesàro matrisi alınırsa, yani

$$A_n^{\alpha} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{n!}, n \geq 1,$$

$$A_0^{\alpha} = 1 \ \text{ve} \ \ A_{-n}^{\alpha} = 0 \ \ (n \in \mathbb{N})$$

olmak üzere

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}}, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

ise Fekete (1911) tarafından tanımlanan $|C, \alpha\,|$ mutlak Cesàro metoduna ve $0 < r < 1$ için Euler matrisi alınırsa $|E, r|_k$ mutlak Euler toplanabilme metoduna indirgenir (Hardy 2000). Burada $E^r = (e_{nk})$ Euler matrisi

$$e_{nk}^{r} = \begin{cases} \binom{n}{k}(1-r)^{n-k} r^k, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

ve

$$e_{nk}^{1} = \begin{cases} 0, & 0 \leq k \leq n \\ 1, & k = n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca σ_n^{α} ve t_n^{α} sırasıyla (s_n) ve (na_n) dizilerinin α. mertebeden Ces$\dot{a}$ro ortalamalarını göstermek üzere, $|C,\alpha\,|_k$ mutlak toplanabilme metodu Flett (1957) tarafından

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{k-1} |\Delta\sigma_{n-1}^{\alpha}|^k < \infty\,, 1 \leq k \leq \infty$$

veya denk olarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} |t_n^{\alpha}|^k < \infty$$

şartı ile tanımlanarak $|C,\alpha\,|$ metodu indisel olarak genişletilmiştir. Bu yönde Borwein ve Cass (1968) tarafından $|N,p_n|_k$ mutlak Nörlund toplanabilme metodu

$$t_n = \frac{1}{P_n} \sum_{j=0}^{n} p_{n-j} s_j = \frac{1}{P_n} \sum_{j=0}^{n} P_{n-j} a_j$$

olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{k-1} |\Delta t_{n-1}|^k < \infty$$

şartı ile tanımlanmıştır. Bu metotları kapsayan $|A|_k$ metodu ise Tanovic-Miller (1979) ve Sarıgöl (1992) tarafından sırasıyla

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |\Delta A_{n-1}(s)|^k < \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{nn}|^{1-k} |\Delta A_{n-1}(s)|^k < \infty$$

şartları ile verilmiştir. $|A|_k$ metodu ise 2010 yılında, Sarıgöl tarafından n veya $|a_{nn}|^{-1}$ çarpanları yerine keyfi pozitif θ_n çarpanı alınarak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n^{k-1} |\Delta A_{n-1}(s)|^k < \infty, \qquad k \geq 1$$

biçiminde genelleştirilmiştir. Nihayet Gökçe ve Sarıgöl (2017) tarafından keyfi pozitif sayıların sınırlı herhangi bir (μ_n) dizisi için $|A, \theta|(\mu)$ toplanabilme metodu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n^{\mu_{n-1}} |\Delta A_{n-1}(s)|^{\mu_n} < \infty$$

şartı ile ifade edilerek en genel metot elde edilmiştir.

Mutlak toplanabilme çarpanları ile bu metotların toplanabilme alanlarının karşılaştırılması konusu toplanabilme teorisinin en önemli araştırma alanlarından birisidir ve bu konu şimdiye kadar birçok yazar tarafından kapsamlı olarak incelenmiştir. Son zamanlarda ise ilk olarak Sarıgöl (2011), Sarıgöl (2016) ardından Hazar ve Sarıgöl (2018) tarafından bu toplama metotlarının karşılaştırılması yerine farklı bir bakış açısıyla $|\bar{N}, p_n, \theta_n|_k$, $|C, \alpha|_k$ ve $|C, \lambda, \mu|_k$ metotları ile toplanabilen seri uzayları inşa edilmiş ve bu uzayların cebirsel ve topolojik yapıları ile uzaylar arasındaki matris dönüşümleri incelenmiştir. Böylece iyi bilinen birçok sonucun genelleştirilmesinin yanı sıra mutlak toplanabilme konusunda yeni bir çalışma alanı yaratılmıştır. Burada dikkat edilmesi gereken nokta, özel olarak birim ve

$$w_{nv} = \begin{cases} \varepsilon_v, & n = v \\ 0, & n \neq v \end{cases}$$

köşegen matrisi ile elde edilen bazı matris sınıflarının toplanabilme metotlarının kıyaslanması veya toplanabilme çarpanlarına indirgenmesidir.

Bu arada toplanabilme teorisinin ortaya çıkmasında önemli rol oynayan bazı özel matris dönüşümlerinin toplama alanları göz önüne alınarak, birçok dizi uzayı tanımlanarak cebirsel ve topolojik yapıları ile bu uzaylar üzerindeki matris dönüşümleri çeşitli yazarlar tarafından incelenmiştir. Örneğin $\bar{l}(p)$, $r^t(p)$, $l(u, v, p)$ ve $N^t(p)$ uzayları sırasıyla Choudhary ve Mishra (1995), Altay ve Başar (2002), Altay ve Başar (2007), Yeşilkayagil ve Başar (2014) tarafından S- dönüşümlerin, Riesz, genelleştirilmiş ağırlıklı ortalama ve Nörlund matrislerinin $l(p)$ uzayı içindeki toplama alanları olarak tanımlanarak ele alınmıştır. Keza son zamanlarda Mursaleen ve diğ. (2006) ile Altay ve diğ. (2005) tarafından Euler dönüşümleri kullanılarak e_p^r ile e_∞^r uzayları tanımlanmış ve benzer çalışmalar yapılmıştır.

Bu tezde Euler matrisi ile mutlak toplanabilme kavramları birleştirilip $\left|E_{\phi}^{r}\right|(p)$, $|E_{\theta}^{r}|_{p}$ ve $\left|E_{\theta,\mathrm{p}}^{r}\right|_{\infty}$ seri uzayları tanımlanarak bu uzayların bazı kapsama bağıntıları ile cebirsel ve topolojik yapıları incelenmiştir. Ayrıca bu uzaylar üzerinde tanımlı belirli matris operatörleri karakterize edilmiş ve $|E_{\theta}^{r}|_{p}$ ile $\left|E_{\theta,\mathrm{p}}^{r}\right|_{\infty}$ uzaylarının operatör normları ve Hausdroff kompaktsızlık ölçüleri belirlenmiştir.

2. TEMEL TANIMLAR, LEMMALAR VE HAUSDROFF KOMPAKTSIZLIK ÖLÇÜSÜ

2.1 Temel Tanım ve Lemmalar

Bu bölümde, bundan sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve lemmalar ifade edilmiştir.

2.1.1 Tanım X boş olmayan bir küme, F reel veya kompleks sayıların bir cismi olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa X kümesine F cismi üzerinde bir lineer uzay (vektör uzayı) denir:

1-) $T : X \times X \rightarrow X,\ T(x,y) = x + y$

işlemine göre X kümesi değişmeli gruptur yani $\forall\, x,y,z \in X$ için

$i)\ x + y \in X,$

$ii)\ x + (y + z) = (x + y) + z,$

$iii)\ x + e = e + x = x$ olacak şekilde bir tek $e \in X$ birim elemanı vardır,

$iv)\ x + (-x) + = (-x) + x = e$ olacak şekilde bir tek $(-x) \in X$ vardır,

$v)\ x + y = y + x.$

2-) $S: F \times X \rightarrow X,\ S(\alpha, x) = \alpha * x$ skalerle çarpma işlemine göre $\forall\, x,y \in X$ ve $\forall\, \alpha,\beta \in F$ için

$i)\ \alpha * x \in X,$

$ii)\ (\alpha + \beta) * x = \alpha * x + \beta * x,$

$iii)\ (\alpha.\beta) * x = \alpha * (\beta * x),$

$iv)\ 1 * x = x.$

2.1.2 Tanım X ve Y aynı F cismi üzerinde iki lineer uzay olmak üzere $T : X \rightarrow Y$ dönüşümü verilmiş olsun. Eğer $\forall x,y \in X$ ve $\forall \alpha \in F$ için

$$T(x + y) = T(x) + T(y)$$
$$T(\alpha.x) = \alpha.T(x)$$

şartları sağlanıyorsa T'ye lineer dönüşüm denir. Özel olarak kompleks değerli bir lineer dönüşüme ise lineer fonksiyonel adı verilir.

2.1.3 Tanım X, F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Eğer $\|.\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x,y \in X$ ve $\forall\, \alpha \in F$ için

N_1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

N_2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

N_3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlıyorsa, $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine normlu uzay denir.

2.1.4 Tanım X lineer uzayı ve $g: X \to \mathbb{R}$ dönüşümü verilsin. Eğer $\forall x, y \in X$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için

N_1) $g(\theta) = 0$

N_2) $g(x) = g(-x)$

N_3) $g(x + y) \leq g(x) + g(y)$

N_4) $\lambda \overset{|.|}{\to} \lambda_0$ ve $x \overset{g}{\to} x_0$ iken $\lambda x \overset{g}{\to} \lambda_0 x_0$

şartları sağlanıyorsa, g'ye X üzerinde paranorm ve (X, g) ikilisine paranormlu uzay denir.

2.1.5 Tanım X ve Y iki normlu uzay ve $T: X \to Y$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer $\forall x \in X$ için

$$\|T(x)\|_Y \leq M. \| x\|_X$$

olacak şekilde $M > 0$ reel sayısı varsa T'ye sınırlı lineer dönüşüm denir. Bir sınırlı lineer dönüşümün normu

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}$$

ile tanımlanır.

2.1.6 Tanım $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ iken $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisine X uzayında bir Cauchy dizisi denir.

Her Cauchy dizisinin yakınsak olduğu normlu uzaya Banach uzayı adı verilir.

2.1.7 Tanım ω kompleks terimli diziler uzayı, X ile Y, ω'nın keyfi iki alt kümesi ve her $n, v \in \mathbb{N} = \{0,1,2, \dots\}$ için $A = (a_{nv})$ kompleks terimli sonsuz bir matris olsun. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in X$ için

$$A_n(x) = \sum_{v=0}^{\infty} a_{nv} x_v \tag{2.1}$$

serisi yakınsak ve $Ax = (A_n(x)) \in Y$ ise bu durumda A'ya X'den Y'ye bir matris dönüşümü tanımlar denir ve böyle bir dönüşüm $A \in (X, Y)$ veya $A: X \to Y$ ile gösterilir.

Bir A matrisinin X uzayı içindeki X_A toplama alanı

$$X_A = \{x = (x_n) \in \omega : A(x) \in X\} \tag{2.2}$$

biçiminde tanımlanır ve bu uzay aynı zamanda bir dizi uzayıdır.

2.1.8 Tanım X ve Y iki dizi uzayı olsun. Bu durumda

$$S(X, Y) = \{z = (z_k) \epsilon\, \omega: \ \forall\, x = (x_k) \in X \text{ için } xz = (x_k z_k) \epsilon Y\}$$

kümesine X ve Y'nin çarpan uzayı adı verilir. Özel olarak X uzayının $\alpha-, \beta-, \gamma-$ dualleri sırasıyla

$$X^\alpha = S(X, l) = \{z = (z_k) \epsilon\, \omega: \forall\, x = (x_k) \in X \text{ için } xz = (x_k z_k) \epsilon l\}$$

$$X^\beta = S(X, cs) = \{z = (z_k) \epsilon\, \omega: \forall\, x = (x_k) \in X \text{ için } xz = (x_k z_k) \epsilon cs\}$$

$$X^\gamma = S(X, bs) = \{z = (z_k) \epsilon\, \omega: \forall\, x = (x_k) \in X \text{ için } xz = (x_k z_k) \epsilon bs\}$$

kümeleri ile tanımlanır. Burada l, cs ve bs sırasıyla mutlak yakınsak, yakınsak ve kısmi toplamlar dizisi sınırlı olan serilerin uzayını göstermektedir. Ayrıca bu çalışma boyunca l_p, c, l_∞ ve ϕ sırasıyla bütün p. dereceden mutlak yakınsak seriler ile yakınsak, sınırlı ve sonlu dizi uzaylarını ifade edecek ve

$$l(p) = \left\{x = (x_k) \epsilon\, \omega: \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^{p_k} < \infty \right\}$$

olacaktır.

2.1.9 Tanım X bir dizi uzayı olmak üzere tam lineer metrik uzay olsun. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $P_n(x) = x_n$ şeklinde tanımlı $P_n: X \to \mathbb{C}$ fonksiyoneli sürekli ise X'e FK – uzayı adı verilir. Normlu bir FK –uzayına ise BK – uzayı denir. Ayrıca $\phi \subset X$ ve $e^{(k)}$, k. terimi 1 diğer terimleri 0 olan dizi olmak üzere her $x \in X$ için

$$\left\| x - \sum_{k=0}^{n} x_k e^{(k)} \right\| \to 0, \qquad n \to \infty$$

olacak şekilde skalerlerin bir tek (x_k) dizisi varsa X'e AK özelliğine sahiptir denir. Bu durumda $x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k e^{(k)}$ yazılır. Örneğin, Maddox tarafından verilen $l(p)$ uzayı, $M = \max\left\{1, \sup_k p_k\right\}$ olmak üzere

$$g(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^{p_k}\right)^{1/M}$$

paranormu ile birlikte AK özelliğine sahip bir FK – uzayıdır ve aynı zamanda her k için $p_k \geq 1$ ise

$$\|x\| = inf\left\{\delta > 0: \sum_{k=0}^{\infty} |x_k/\delta|^{p_k} \leq 1\right\}$$

normu ile de bir BK – uzayıdır (Maddox 1969; Maddox 1968; Maddox 1967; Nakano 1951).

2.1.10 Tanım $\sum a_v$, kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan seri, (u_n) pozitif reel sayıların dizisi ve (p_n) pozitif reel sayıların bir sınırlı dizisi olsun. Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n)^{p_n - 1} |A_n(s) - A_{n-1}(s)|^{p_n} < \infty \qquad (2.3)$$

ise $\sum a_v$ serisi $|A, u|(p)$ toplanabilirdir denir (Gökçe ve Sarıgöl 2017).

Dikkat edelim ki A, u ve p'nin özel seçimlerine göre $|A, u|(p)$ toplanabilme metodu iyi bilinen bazı toplanabilme metotlarına indirgenir. Örneğin,

(a) Her n için $p_n = k$ alınırsa, $|A, u|(p)$ toplanabilme metodu $|A, u|_k$ metoduna indirgenir (Sarıgöl, 2010).

(b) Her n için $p_n = k$ ve A, $\alpha > -1$ için α. mertebeden Ces$\dot{a}$ro matrisi alınırsa, $|A, u|(\mu)$ metodu $|C, \alpha|_k$ toplanabilme metoduna indirgenir (Flett, 1957).

(c) Her n için $p_n = k$, $u_n = n$ ve A, $\alpha + \beta \neq -1, -2, \ldots, (\alpha, \beta)$. mertebeden Ces$\dot{a}$ro matrisi seçilirse, $|A, u|(p)$ metodu, $|C, \alpha, \beta|_k$ metoduna indirgenir (Das, 1970).

(d) Her n için $p_n = k$, $u_n = n$ ve A, Riesz matrisi alınırsa, $|A, u|(p)$ metodu $|R, p_n|_k$ toplanabilme metoduna indirgenir (Sarıgöl, 1993).

(e) Her n için $p_n = k$, $u_n = P_n/p_n$ ve A, ağırlıklı ortalama matrisi alınırsa, $|A,u|(p)$ metodu $|\bar{N}, p_n|_k$ metoduna indirgenir (Bor, 1985).

(f) Her n için $p_n = k$, $u_n = n$ ve A, Nörlund matrisi alınırsa, $|A,u|(p)$ metodu, $|N, p_n|_k$ toplanabilme metoduna indirgenir (Borwein & Cass, 1968).

2.1.1 Lemma $1 < p < \infty$ ve $\mathcal{F}$ pozitif sayıların sonlu keyfi bir kümesi olsun. Bu durumda

$$A \in \left(l_p, l\right) \Leftrightarrow \|A\|_{(l_p,l)} = \sup_{\mathcal{F}} \left\{ \sum_{v=0}^{\infty} \left| \sum_{n \in \mathcal{F}}^{\infty} a_{nv} \right|^{p^*} \right\}^{1/p^*} < \infty,$$

(Stieglitz ve Tietz 1977).

2.1.2 Lemma $1 < p < \infty$ olsun. $A \in (l_p, l)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\|A\|'_{(l_p,l)} = \left\{ \sum_{v=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{nv}| \right)^{p^*} \right\}^{1/p^*} < \infty.$$

Ayrıca $\|A\|'_{(l_p,l)} = \xi \|A\|_{(l_p,l)}$ olacak şekilde $1 \leq \xi \leq 4$ vardır (Sarıgöl 2015).

2.1.3 Lemma $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu takdirde, $A \in (l, l_p)$ olması için gerek yeter şart

$$\sup_{v} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} |a_{nv}|^p \right\}^{1/p} < \infty,$$

olmasıdır (Maddox 1970).

2.1.4 Lemma

$a)$ $A \in (l, c) \Leftrightarrow (i) \forall v \geq 0$ için $\lim_{n} a_{nv}$ mevcuttur ve $(ii) \sup_{n,v} |a_{nv}| < \infty$,

$A \in (l, l_\infty) \Leftrightarrow (ii)$ sağlanır.

$b)$ $1 < p < \infty$ için $A \in \left(l_p, c\right) \Leftrightarrow (i)$ sağlanır, $(iii) \sup_{n} \sum_{v=0}^{\infty} |a_{nv}|^{p^*} < \infty$,

$A \in \left(l_p, l_\infty\right) \Leftrightarrow (iii)$ sağlanır.

$c)\quad A \in (l_\infty, c) \Leftrightarrow (i)$ sağlanır ve $\sum_{v=0}^{\infty} |a_{nv}|$ serisi n'ye göre düzgün yakınsaktır.

$$d)\quad A \in (l_\infty, l_\infty) \Leftrightarrow \sup_n \sum_{v=0}^{\infty} |a_{nv}| < \infty,$$

$$e)\quad A \in (l_\infty, l) \Leftrightarrow \sup \left\{ \sum_{v=0}^{\infty} \left| \sum_{n \in K} a_{nv} \right| : K \subset \mathbb{N} \right\} < \infty, \tag{2.4}$$

(Stieglitz ve Tietz 1977).

Aşağıdaki koşulları göz önüne alalım:

$$(a)\quad \sup \left\{ \sum_{v=0}^{\infty} \left| \sum_{n \in K} a_{nv} M^{-1} \right|^{p_v^*} : K \subset \mathbb{N} \text{ sonlu} \right\} < \infty \tag{2.5}$$

olacak şekilde $M > 1$ vardır.

$$(b)\quad \sup_v \sum_{n=0}^{\infty} \left| a_{nv} M^{-1/p_v} \right|^{q_n} < \infty$$

olacak şekilde $M > 1$ vardır.

(c) Her v için $\lim_n a_{nv}$ mevcuttur.

(d) $\sup_{n,v} |a_{nv}|^{p_v} < \infty$.

(e) $\sup_n \sum_{v=0}^{\infty} |a_{nv} M^{-1}|^{p_v^*} < \infty$

olacak şekilde $M > 1$ vardır.

2.1.5 Lemma A kompleks terimli bir sonsuz matris, (p_v) ve (q_v) pozitif sayıların sınırlı iki dizisi olsun. Eğer her $v \in \mathbb{N}$ için

(i) $p_v > 1$ ise $A \in (l(p), l) \Leftrightarrow$ (a) sağlanır.

(ii) $p_v \leq 1$ ve $q_v \geq 1$ ise $A \in (l(p), l(q)) \Leftrightarrow$ (b) sağlanır.

(iii) $p_v \leq 1$ ise $A \in (l(p), c) \Leftrightarrow$ (c) ve (d) sağlanır.

(iv) $p_v \leq 1$ ise $A \in (l(p), l_\infty) \Leftrightarrow$ (d) sağlanır.

(v) $p_v > 1$ ise $A \in (l(p), c) \Leftrightarrow$ (c) ve (e) sağlanır.

(vi) $p_v > 1$ ise $A \in (l(p), l_\infty) \Leftrightarrow$(e) sağlanır (Grosse-Erdmann 1993).

Dikkat edilirse (2.5)'i pratikte uygulamak oldukça zordur. Sarıgöl (2013) tarafından verilen aşağıdaki lemma, (2.5)'e denk olan daha kolay uygulanabilen bir şart vermektedir.

2.1.6 Lemma A kompleks terimli bir sonsuz matris, (p_v) pozitif sayıların sınırlı bir dizisi ve $C = max\{1, 2^{H-1}\}$, $H = \sup_v p_v$ olsun. Ayrıca

$$L_p[A] = \sup\left\{\sum_{v=0}^{\infty}\left|\sum_{n\in K} a_{nv}\right|^{p_v} : K \subset \mathbb{N}\right\}$$

$$U_p[A] = \sum_{v=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_{nv}|\right)^{p_v}$$

olsun. Bu durumda $L_p[A] < \infty$ veya $U_p[A] < \infty$ ise

$$(2C)^{-2}U_p[A] \leq L_p[A] \leq U_p[A]$$

eşitsizliği sağlanır (Sarıgöl 2013).

Kolayca görülebileceği gibi (2.4) yerine de aşağıdaki sonuç alınabilir:

$$A \in (l_\infty, l) \Leftrightarrow \sum_{v=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}|a_{nv}| < \infty.$$

2.1.7 Lemma X, AK özelliğine sahip bir $FK -$ uzayı, T üçgen matris, S bu matrisin tersi ve Y, ω'nın keyfi bir alt uzayı olsun. Bu takdirde $A \in (X_T, Y)$ olması için gerek ve yeter şart her n için $\tilde{A} \in (X, Y)$ ve her bir n için $V^{(n)} \in (X, c)$ olmasıdır. Burada

$$\tilde{a}_{nv} = \sum_{j=v}^{\infty} a_{nj}s_{jv} \quad n, v = 0,1, \ldots$$

$$v_{mv}^{(n)} = \begin{cases} \sum_{j=v}^{m} a_{nj}s_{jv}, & 0 \leq v \leq m \\ 0, & v > m \end{cases}$$

dır, (Malkowsky ve Rakočević 2007).

2.1.8 Lemma T bir üçgensel matris ve $X, Y \subset \omega$ olsun. Bu takdirde $A \in (X, Y_T)$ olması için gerek ve yeter şart $C \in (X, Y)$ olmasıdır. Burada $C = TA$ yani her n ve k için

$$c_{nk} = \sum_{j=0}^{n} t_{nj} a_{jk}.$$

(Malkowsky 1996).

2.1.9 Lemma Her T üçgensel matrisin bir üçgensel matris olan bir tek S ters matrisi vardır ve her $x \in X$ için

$$x = T(S(x)) = S(T(x))$$

dir (Wilansky 1984).

2.1.10 Lemma Eğer $(b^{(n)})$, (X, d) lineer metrik uzayının bir bazı, T bir üçgensel matris ve S onun tersi ise bu durumda $(S(b^{(n)}))$ dizisi $d_T(z, \tilde{z}) = d(T(z), T(\tilde{z}))$ metriğine göre $Z = X_T$ uzayının bir bazıdır (Jarrah and Malkowsky 2003).

2.1.11 Lemma $FK -$ uzayları arasındaki matris dönüşümleri süreklidir (Boos & Cass 2000).

2.1.1 Teorem X, Y FK -uzayı, $T: X \to \omega$ sürekli lineer dönüşüm ve $Y_T = \{x \in X : T(x) \in Y\}$ olsun. Bu durumda Y_T de bir FK −uzayıdır. (Boos & Cass 2000).

2.1.2 Teorem (Hölder Eşitsizliği) $p > 1$ ve ${}^{1}/_{p} + {}^{1}/_{q} = 1$ olsun. Eğer $\sum |u_n|^p < \infty$ ve $\sum |v_n|^q < \infty$ ise

$$\sum |u_n v_n| \leq \left(\sum |u_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum |v_n|^q\right)^{1/q}.$$

2.1.3 Teorem u ile v kompleks sayılar ve $k \geq 0$ olsun. Bu durumda $k > 1$ için $c_k = 2^{k-1}$ ve $k \leq 1$ için $c_k = 1$ olmak üzere

$$|u + v|^k \leq c_k(|u|^k + |v|^k)$$

(Mitrinović, 1970).

2.2 Hausdorff Kompaktsızlık Ölçüsü

2.2.1 Tanım S ve R, (X,d) metrik uzayının herhangi iki alt kümesi ve $\varepsilon > 0$ olsun. Eğer her $r \in R$ için $d(r,s) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $s \in S$ varsa S'ye R'nin bir ε −ağı, eğer S sonlu ise R'nin sonlu ε-ağı denir.

2.2.2 Tanım X ve Y Banach uzayı olmak üzere ve $L: X \to Y$ lineer dönüşüm olsun. Eğer X içindeki her sınırlı (x_n) dizisi için $(L(x_n))$ görüntü dizisi Y'de yakınsak bir alt diziye sahip ise L'ye kompakt operatör adı verilir ve kompakt operatörlerin sınıfı $\mathcal{C}(X,Y)$ ile gösterilir.

2.2.3 Tanım Q, X metrik uzayının sınırlı bir alt kümesi olsun. Bu durumda Q'nun Hausdorff kompaktsızlık ölçüsü

$$\chi(Q) = inf\{\varepsilon > 0 : Q, X \text{ içinde sonlu bir } \varepsilon - \text{ağına sahiptir}\},$$

sayısı ile tanımlanır ve χ'ye Hausdorff kompaktsızlık ölçüsü adı verilir.

Aşağıdaki lemmalar, l_p uzayının sınırlı bir alt kümesinin Hausdorff kompaktsızlık ölçüsünü hesap etmek için son derece faydalıdır.

2.2.1 Lemma Q, X normlu uzayının sınırlı alt kümesi ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Eğer X, l_p ya da c_0 ise $P_n: X \to X, P_n(x) = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$ ise

$$\chi(Q) = \lim_{r\to\infty} \sup_{x\in Q} \|(I - P_r)(x)\|,$$

(Rakočević 1998).

2.2.4 Tanım X ve Y Banach uzayı, χ_1 ile χ_2, X ve Y üzerinde Hausdorff kompaktsızlık ölçüleri ve $L: X \to Y$ lineer operatör olsun. Eğer her sınırlı $Q \subset X$ alt kümesi için $L(Q) \subset Y$ sınırlı ve $\chi_2(L(Q)) \leq M\, \chi_1(Q)$ olacak şekilde pozitif bir M sayısı varsa L lineer dönüşümüne (χ_1, χ_2)-sınırlıdır denir ve

$$\|L\|_{(\chi_1,\chi_2)} = inf\{M > 0 : \text{her sınırlı } Q \subset X \text{ için } \chi_2(L(Q)) \leq M\chi_1(Q)\}$$

sayısına L'nin (χ_1, χ_2)- kompaktsızlık ölçüsü adı verilir. Özel olarak $\chi_1 = \chi_2 = \chi$ için $\|L\|_{(\chi,\chi)} = \|L\|_\chi$ yazılır.

2.2.2 Lemma $X,\ Y$ Banach uzayı ve $L \in B(X,Y)$ olsun. Ayrıca $S_X = \{x \in X: \|x\| \leq 1\}$, X'de kapalı birim yuvarı göstersin. Bu durumda

$$\|L\|_\chi = \chi(\mathrm{L}(S_X))$$

ve

$$L \in \mathcal{C}(X,Y) \Leftrightarrow \|L\|_\chi = 0,$$

(Malkowsky ve Rakočević 2000).

2.2.3 Lemma X normlu bir dizi uzayı $\mathcal{M}_{X_T}$ ile $\mathcal{M}_X$ sırasıyla X_T ve X uzaylarındaki bütün sınırlı kümelerin sınıfını göstersin. Eğer χ_T ile χ, $\mathcal{M}_{X_T}$ ile $\mathcal{M}_X$ üzerinde Hausdorff kompaktsızlık ölçüleri ise bu durumda her $Q \in \mathcal{M}_{X_T}$ için $\chi_T(Q) = \chi(T(Q)$ olur. Burada $T = (t_{nv})$ üçgensel bir sonsuz matristir, (Malkowsky ve Rakočević 2007).

3. MUTLAK EULER UZAYLARI

Bu kısımda mutlak Euler seri uzayları tanımlanarak bu uzayların bazı kapsama bağıntıları ile cebirsel ve topolojik yapıları incelenecektir. Aynı zamanda bu uzayların üzerindeki belirli matris dönüşümlerinin karakterizasyonları verilerek bunların normları ile Hausdorff kompaktsızlık ölçüleri belirlenecektir.

Şimdi $p = (p_n)$ dizisini, $0 < inf p_n < \infty$ olacak şekilde pozitif terimli sınırlı bir dizi olarak alalım. Ayrıca $p_n > 1$ için $\frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_n^*} = 1$ ve $p_n = 1$ için $\frac{1}{p_n^*} = 0$ olsun. $\phi = (\phi_n)$ pozitif terimli bir dizi olmak üzere $|E_\phi^r|(p)$ mutlak Euler seri uzayını, $|E^r, \phi|(p)$ metodu ile toplanabilen serilerin kümesi olarak tanımlayalım. Bu durumda (2.3)'den dolayı $0 < r < 1$ olmak üzere

$$|E_\phi^r|(p) = \left\{ a \in \omega: \ \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^{p_n - 1} |\triangle A_n^r(s)|^{p_n} < \infty \right\}$$

yazılabilir. Burada her $n \geq 0$ için

$$\triangle A_n^r(s) = A_n^r(s) - A_{n-1}^r(s)$$

ve

$$A_n^r(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k s_k \,, \qquad A_{-1}^r(s) = 0$$

dir. Aynı zamanda gerekli işlemler yapılırsa

$$\sigma_{nm} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=m}^{n} \left[\binom{n-1}{k-1} - r \binom{n}{k} \right] (1-r)^{n-1-k} r^k, & 1 \leq m \leq n \\ 0, & m > n \end{cases}$$

olmak üzere

$$\triangle A_n^r(s) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k \sum_{m=0}^{k} a_m - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (1-r)^{n-1-k} r^k \sum_{m=0}^{k} a_m$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k a_m \ - \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=m}^{n-1} \binom{n-1}{k} (1-r)^{n-1-k} r^k a_m$$

$$= r^n a_n + \sum_{m=1}^{n-1}\left(\sum_{k=m}^{n}\left[\binom{n}{k}(1-r) - \binom{n-1}{k}\right](1-r)^{n-1-k} r^k a_m\right)$$

$$= \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=m}^{n}\left[\binom{n-1}{k-1} - r\binom{n}{k}\right](1-r)^{n-1-k} r^k a_m$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{nm} a_m$$

bulunur. Ayrıca $r = q(1+q)^{-1}$dersek

$$\sigma_{nm} = (1+q)^{1-n}\sum_{k=m}^{n} q^k\left[\binom{n-1}{k-1} - q(1+q)^{-1}\binom{n}{k}\right]$$

$$= (1+q)^{-n}\sum_{k=m}^{n}\left[q^k\binom{n-1}{k-1} - q^{k+1}\binom{n-1}{k}\right]$$

$$= q^m(1+q)^{-n}\binom{n-1}{m-1}$$

$$= \binom{n-1}{m-1}(1-r)^{n-m} r^m$$

olur. Buradan da $T_n^r(\phi,p)(a) = \phi_n^{1/p_n^*} \triangle A_n^r(s)$ ve

$$t_{nk}^r(\phi,p) = \begin{cases} \phi_0^{1/p_0^*}, & k = n = 0 \\ \phi_n^{1/p_n^*}\binom{n-1}{k-1}(1-r)^{n-k} r^k, & 1 \le k \le n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

dersek

$$T_n^r(\phi,p)(a) = \phi_n^{1/p_n^*}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}(1-r)^{n-k} r^k a_k = \sum_{k=1}^{n} t_{nk}^r(p)\, a_k \qquad (3.1)$$

elde edilir. Şu halde

$$\left|E_\phi^r\right|(p) = \left\{a \in \omega:\ \sum_{n=1}^{\infty}\left|\phi_n^{1/p_n^*}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}(1-r)^{n-k} r^k a_k\right|^{p_n} < \infty\right\}$$

veya (2.2) ifadesine göre $\left|E_\phi^r\right|(p) = (l(p))_{T^r(\phi,p)}$ yazılabilir.

Ayrıca Lemma 2.1.9'dan dolayı $T^r(\phi,p)$ üçgensel matrisinin tersi mevcuttur ve üstelik bu matris

$$s_{nk}^r(\phi_n,p)=\begin{cases}\phi_0^{-1/p_0^*}, & k=n=0\\ \phi_k^{-1/p_k^*}\binom{n-1}{k-1}(r-1)^{n-k}r^{-n}, & 1\leq k\leq n\\ 0, & k>n\end{cases} \tag{3.2}$$

dır.

Eğer burada özel olarak $\phi=\theta$ ve her bir $n\in\mathbb{N}$ için $p_n=p\geq 1$ alınırsa $|E^r,\theta_n|_p$ ve $p=\infty$ için $|E^r,\theta_n|_\infty$ toplanabilen serilerden oluşan $|E_\theta^r|_p$ ve $\left|E_{\theta,\mathrm{p}}^r\right|_\infty$ mutlak Euler uzayları elde edilir. Diğer bir deyişle

$$|E_\theta^r|_p=\left\{a\in\omega:\ \sum_{n=1}^{\infty}\left|\theta_n^{1/p^*}\sum_{m=1}^{n}\binom{n-1}{m-1}(1-r)^{n-m}r^m\,a_m\right|^p<\infty\right\}$$

ve

$$\left|E_{\theta,\mathrm{p}}^r\right|_\infty=\left\{a\in\omega:\ \sup_n\left|\theta_n^{1/p^*}\sum_{m=1}^{n}\binom{n-1}{m-1}(1-r)^{n-m}r^m\,a_m\right|<\infty\right\}$$

dır. Bu uzaylar aynı zamanda toplama alanı tanımı gereğince $|E_\theta^r|_p=(l_p)_{T^r(\theta,p)}$ ve $|E_\theta^r|_\infty=(l_\infty)_{T^r(\theta,p)}$ şeklinde yazılabilir.

Gösterimde kolaylık açısından Bölüm 3.1 ve 3.2 boyunca $T^r(\theta,p)=T^r(p)$ alalım.

3.1 $|E_\theta^r|_p$ ve $\left|E_{\theta,\mathrm{p}}^r\right|_\infty$ Uzaylarının Özellikleri ve Kapsama Bağıntıları

Bu kısımda bu uzaylar arasındaki kapsama ilişkileri ile izomorf olduğu uzayları ve bazlarını veren teoremleri ifade ve ispat edeceğiz.

3.1.1 Teorem $0<t\leq r<1$ ve $1\leq p\leq q<\infty$ olsun. Eğer her $n\geq 0$ için $m\leq\theta_n\leq M$ olacak şekilde $m,M>0$ sabitleri mevcut ise bu durumda $|E_\theta^r|_p\subset\left|E_\theta^t\right|_q$.

İspat Önce $|E_\theta^r|_p \subset |E_\theta^t|_p$ olduğunu göstermek için $x \in |E_\theta^r|_p$ alalım. Bu durumda (3.2) nedeniyle

$$T_n^t(p)(x) = \sum_{k=1}^{n} \theta_n^{1/p^*} \binom{n-1}{k-1} (1-t)^{n-k} t^k x_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \theta_n^{\frac{1}{p^*}} \binom{n-1}{k-1} (1-t)^{n-k} t^k \sum_{j=1}^{k} \theta_j^{-\frac{1}{p^*}} \binom{k-1}{j-1} (r-1)^{k-j} r^{-k} T_j^r(p)(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\theta_n}{\theta_j}\right)^{1/p^*} \binom{n-1}{j-1} \sum_{k=j}^{n} \binom{n-j}{k-j} \left(\frac{t}{r}\right)^k (1-t)^{n-k} (r-1)^{k-j} T_j^r(p)(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\theta_n}{\theta_j}\right)^{1/p^*} \binom{n-1}{j-1} (1-t)^{n-j} \left(\frac{t}{r}\right)^j \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} \left(\frac{t}{r}\frac{r-1}{1-t}\right)^k T_j^r(p)(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\theta_n}{\theta_j}\right)^{1/p^*} \binom{n-1}{j-1} (1-t)^{n-j} \left(\frac{t}{r}\right)^j \left(\frac{r-t}{r(1-t)}\right)^{n-j} T_j^r(p)(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\theta_n}{\theta_j}\right)^{1/p^*} \binom{n-1}{j-1} \left(1-\frac{t}{r}\right)^{n-j} \left(\frac{t}{r}\right)^j T_j^r(p)(x)$$

yazılabilir. $p = 1$ için istenen açıktır. Eğer $p > 1$ için Hölder eşitsizliği uygulanırsa teoremin hipotezlerinden

$$\sum_{n=1}^{\infty} | T_n^t(p)(x)|^p \le \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{p}{p^*}} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} \binom{n-1}{j-1} \left(1-\frac{t}{r}\right)^{n-j} \left(\frac{t}{r}\right)^j \left| T_j^r(p)(x)\right|^p$$

$$\cdot\left[\sum_{j=1}^{n} \binom{n-1}{j-1} \left(1-\frac{t}{r}\right)^{n-j} \left(\frac{t}{r}\right)^j\right]^{p-1}$$

$$= \left(\frac{tM}{rm}\right)^{p/p^*} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} \binom{n-1}{j-1} \left(1-\frac{t}{r}\right)^{n-j} \left(\frac{t}{r}\right)^j \left| T_j^r(p)(x)\right|^p$$

$$= \left(\frac{tM}{rm}\right)^{p/p^*} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{t}{r}\right)^j \left| T_j^r(p)(x)\right|^p \sum_{n=j}^{\infty} \binom{n-1}{j-1} \left(1-\frac{t}{r}\right)^{n-j}$$

$$= \frac{r}{t}\left(\frac{tM}{rm}\right)^{p/p^*} \sum_{j=1}^{\infty} \left| T_j^r(p)(x)\right|^p < \infty$$

elde edilir. Bu ise x $\in \left|E_{\theta}^{t}\right|_p$ yani $|E_{\theta}^{r}|_p \subset \left|E_{\theta}^{t}\right|_p$ demektir. Ayrıca $\left|E_{\theta}^{t}\right|_p \subset \left|E_{\theta}^{t}\right|_q$'dır. Çünkü, x $\in \left|E_{\theta}^{t}\right|_p$ ise $l_p \subset l_q$ olduğundan $T^t(p)(x) \in l_p$ ve dolayısıyla $T^t(p)(x) \in l_q$ yani $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\theta_n^{1/p^*}\, \Delta A_n^t\right|^q < \infty$ olur. Aynı zamanda her n için

$$M^{\frac{q}{p^*}-\frac{q}{q^*}}\left(\theta_n^{q/q^*} |\, \Delta A_n^t|^q\right) \leq \left|\theta_n^{1/p^*}\, \Delta A_n^t\right|^q$$

olduğu göz önüne alınırsa x $\in \left|E_{\theta}^{t}\right|_q$ bulunur. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Bu noktada $|E_{\theta}^{r}|_p$ uzayının l_p uzayından üretilmesi nedeniyle doğal olarak bu iki uzay arasındaki ilişkiyi sorgulamak gerekir. Aşağıdaki teorem direkt olarak bu konuyla ilgilidir.

3.1.2 Teorem Eğer $0 < r < 1, 1 \leq p < \infty$ ve $(\theta_n) \in l_\infty$ ise $l_p \subset |E_{\theta}^{r}|_p$.

İspat $x \in l_p$ alalım. $p = 1$ için sonuç açıktır. $p > 1$ için (3.1) ifadesine Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |\, T_n^r(p)(x)|^p &= \sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{n} \theta_n^{1/p^*} \binom{n-1}{k-1} (1-r)^{n-k} r^k\, x_k\right|^p \\
&\leq \left(\sup_n \theta_n\right)^{\frac{p}{p^*}} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} (1-r)^{n-k} r^k\, |x_k|^p \\
&\quad \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} (1-r)^{n-k} r^k\right)^{p-1} \\
&\leq \left(r \sup_n \theta_n\right)^{\frac{p}{p^*}} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} (1-r)^{n-k} r^k\, |x_k|^p \\
&= \left(r \sup_n \theta_n\right)^{\frac{p}{p^*}} \sum_{k=1}^{\infty} r^k\, |x_k|^p \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n-1}{k-1} (1-r)^{n-k} \\
&= r^{p-2} \left(\sup_n \theta_n\right)^{\frac{p}{p^*}} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty
\end{aligned}$$

bulunur. Şu halde x $\in |E_{\theta}^{r}|_p$ elde edilir. Bu isteneni verir.

Öte yandan $r = 1$ için $\triangle A_n^1 = x_n$ olduğundan $l_p = \left|E_{\theta}^{1}\right|_p$ olur. Böylece Teorem 3.1.2'den aşağıdaki sonuç hemen elde edilir.

3.1.1 Sonuç Eğer $0 < r < 1, 1 \leq p < \infty$ ve $(\theta_n) \in l_\infty$ ise $\left|E_{\theta}^{1}\right|_p \subset |E_{\theta}^{r}|_p$.

3.1.3 Teorem Eğer $0 < r < 1, 1 \le p < \infty$ ve $(\theta_n) \in l_\infty$ ise $e_p^r \subset |E_\theta^r|_p$.

İspat $x \in e_p^r$ verilsin. x'in Euler dönüşümü $t^r(x) = (t_n^r(x))$ ile gösterilirse $t^r(x) \in l_p$ ve ayrıca

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (r-1)^{n-k} r^{-n} t_k^r(x)$$

olur. (Mursaleen ve diğ. 2006, Altay ve diğ. 2005). Buradan $n \ge 2$ için

$$\begin{aligned}
T_n^r(p)(x) &= \theta_n^{1/p^*} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} (1-r)^{n-k} r^k x_k \\
&= \theta_n^{1/p^*} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} (1-r)^{n-k} r^k \sum_{v=0}^{k} \binom{k}{v} (r-1)^{k-v} r^{-k} t_v^r(x) \\
&= \theta_n^{1/p^*} \sum_{v=1}^{n} (1-r)^{n-v} t_v^r(x) \sum_{k=v}^{n} (-1)^{k-v} \binom{n-1}{k-1} \binom{k}{v} \\
&= \theta_n^{1/p^*} \sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} (1-r)^{n-v} t_v^r(x) \sum_{k=v}^{n} (-1)^{k-v} \frac{k}{n} \binom{n-v}{k-v} \\
&= \theta_n^{1/p^*} \sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} (1-r)^{n-v} t_v^r(x) \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-v} (-1)^{k} (k+v) \binom{n-v}{k} \\
&= \theta_n^{1/p^*} \sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} (1-r)^{n-v} t_v^r(x) \frac{1}{n} \left\{ v \sum_{k=0}^{n-v} (-1)^{k} \binom{n-v}{k} \right. \\
&\quad \left. +(n-v) \sum_{k=0}^{n-v-1} (-1)^{k+1} \binom{n-v-1}{k} \right\} \\
&= \theta_n^{1/p^*} \left(t_n^r(x) - (1-r)\, t_{n-1}^r(x) \right)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Şu halde

$$\sum_{n=2}^{\infty} | T_n^r(p)(x)|^p \le 2^{p-1} M^{p/p^*} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} | t_n^r(x)|^p + (1-r)^p \sum_{n=2}^{\infty} | t_{n-1}^r(x)|^p \right\} < \infty$$

bulunur. Bu ise $e_p^r \subset |E_\theta^r|_p$ demektir.

Bu teorem aynı Euler dönüşümünden farklı metotla Altay ve diğ. (2005) ile Mursaleen ve diğ. (2006) tarafından tanımlanan e_p^r uzayı ile yeni verilen $|E_\theta^r|_p$ uzayı arasındaki ilişkiyi belirtmesi açısından önem taşımaktadır.

Şimdi $\left|E^r_{\theta,p}\right|_\infty$ uzayı ile ilgili bazı kapsama bağıntılarını veren aşağıdaki teoremleri verelim.

3.1.4 Teorem $0 < r < 1$ ve $(\theta_n) \in l_\infty$ olsun. Bu durumda $l_\infty \subset \left|E^r_{\theta,p}\right|_\infty$ ve $e^r_\infty \subset \left|E^r_{\theta,p}\right|_\infty$.

İspat $l_\infty \subset \left|E^r_{\theta,p}\right|_\infty$ olduğunu gösterelim. $x \in l_\infty$ ve $\sup_n \theta_n = M$ olsun.

$$\begin{aligned}
\|x\|_{\left|E^r_{\theta,p}\right|_\infty} &= \sup_n \left|\theta_n^{\frac{1}{p^*}} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} (1-r)^{n-k} r^k x_k\right| \\
&\le M^{\frac{1}{p^*}} \sup_n \left\{\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} (1-r)^{n-k} r^k \sup_k |x_k|\right\} \\
&= M^{\frac{1}{p^*}} \sup_n \{(1-r+r)^{n-1} r \|x\|_\infty\} \\
&= M^{\frac{1}{p^*}} r \|x\|_\infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ilk kısmın ispatını tamamlar. Şimdi $t^r(x) = \left(t^r_n(x)\right)$ x'in Euler dönüşümünü göstermek üzere Teorem 3.1.3'ün ispatına benzer olarak

$$\begin{aligned}
T^r_n(p)(x) &= \theta_n^{1/p^*} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} (1-r)^{n-k} r^k x_k \\
&= \theta_n^{1/p^*} \sum_{v=1}^{n} (1-r)^{n-v} t^r_v(x) \sum_{k=v}^{n} (-1)^{k-v} \binom{n-1}{k-1} \binom{k}{v} \\
&= \theta_n^{1/p^*} \sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} (1-r)^{n-v} t^r_v(x) \sum_{k=v}^{n} (-1)^{k-v} \frac{k}{n} \binom{n-v}{k-v} \\
&= \theta_n^{1/p^*} \left(t^r_n(x) - (1-r)\, t^r_{n-1}(x)\right) \\
&\le M^{1/p^*} \left(t^r_n(x) - (1-r)\, t^r_{n-1}(x)\right)
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece

$$\|x\|_{\left|E^r_{\theta,p}\right|_\infty} = \sup_n |T^r_n(p)(x)| \le O(1) \sup_n |t^r_n(x)| = O(1) \|x\|_{e^r_\infty}$$

bulunur.

3.1.5 Teorem $0 < t \le r < 1$ ve $n \ge 0$ için $m \le \theta_n \le M$ olacak şekilde $m, M > 0$ sabitleri mevcut ise $\left|E^r_{\theta,p}\right|_\infty \subset \left|E^t_{\theta,p}\right|_\infty$.

İspat $x \in \left|E^r_{\theta,p}\right|_\infty$ alalım. Teorem 3.1.1'in ispatına benzer olarak

$$|T_n^t(p)(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} \theta_n^{1/p^*} \binom{n-1}{k-1} (1-t)^{n-k} t^k x_k\right|$$

$$\leq M^{1/p^*} \left|\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} (1-t)^{n-k} t^k \sum_{j=1}^{k} \theta_j^{-\frac{1}{p^*}} \binom{k-1}{j-1} (r-1)^{k-j} r^{-k} T_j^r(p)(x)\right|$$

$$\leq \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{p^*}} \left|\sum_{j=1}^{n} \binom{n-1}{j-1} (1-t)^{n-j} \left(\frac{t}{r}\right)^j \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} \left(\frac{t}{r}\frac{r-1}{1-t}\right)^k T_j^r(p)(x)\right|$$

$$\leq \left(\frac{M}{m}\right)^{1/p^*} \sup_j \left|T_j^r(p)(x)\right| \left|\sum_{j=1}^{n} \binom{n-1}{j-1} \left(1-\frac{t}{r}\right)^{n-j} \left(\frac{t}{r}\right)^j\right|$$

$$= \left(\frac{M}{m}\right)^{1/p^*} \frac{t}{r} \sup_j \left|T_j^r(p)(x)\right|$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Ayrıca $1 \leq p < \infty$ için $l_p \subset l_\infty$ olduğu göz önüne alınırsa $|E_\theta^r|_p \subset \left|E_{\theta,p}^r\right|_\infty$ olduğu görülür.

3.1.6 Teorem $0 < r < 1$ ve $1 \leq p < \infty$ için $|E_\theta^r|_p$ ve $\left|E_{\theta,p}^r\right|_\infty$ uzayları

$$\|x\|_{|E_\theta^r|_p} = \left(|x_0|^p + \sum_{n=1}^{\infty} \left|\theta_n^{1/p^*} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} (1-r)^{n-k} r^k x_k\right|^p\right)^{1/p}$$

ve

$$\|x\|_{\left|E_{\theta,p}^r\right|_\infty} = \sup_n \left|\theta_n^{1/p^*} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} (1-r)^{n-k} r^k x_k\right|$$

normlarına göre BK-uzayıdır.

İspat Biliyoruz ki l_∞ve $1 \leq p < \infty$ için l_p BK-uzayıdır. Diğer taraftan $T^r(p)$ üçgensel matris, $|E_\theta^r|_p = (l_p)_{T^r(p)}$ ve $\left|E_{\theta,p}^r\right|_\infty = (l_\infty)_{T^r(p)}$ olduğuna göre Wilansky (1984) tarafından verilen Teorem 4.3.2'ye göre aynı zamanda $|E_\theta^r|_p$ ve $\left|E_{\theta,p}^r\right|_\infty$ uzayları da birer BK-uzayıdır.

3.1.7 Teorem $0 < r < 1$ ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu takdirde,

i) $|E_\theta^r|_p$ ile l_p ve $\left|E_{\theta,p}^r\right|_\infty$ ile l_∞ izomorfik uzaylardır, yani $|E_\theta^r|_p \cong l_p$ ve $\left|E_{\theta,p}^r\right|_\infty \cong l_\infty$ dır.

$ii)$

$$b_n^{(j)} = \begin{cases} 1, & j = 0, n \geq 0 \\ \theta_j^{-1/p^*} \binom{n-1}{j-1} (r-1)^{n-j} r^{-n}, & 1 \leq j \leq n \\ 0, & j > n \end{cases}$$

eşitliği ile tanımlı $\left(b_n^{(j)}\right)$ dizisi $|E_\theta^r|_p$ uzayının bir Schauder bazıdır.

$iii)$ $\left|E_{\theta,\mathrm{p}}^r\right|_\infty$ uzayının Schauder bazı yoktur.

İspat $i)$ İlk kısmın ispatı için $|E_\theta^r|_p$ ile l_p ve $\left|E_{\theta,\mathrm{p}}^r\right|_\infty$ ile l_∞ uzayları arasında birebir örten ve normu koruyan bir dönüşümün varlığını göstermek yeterlidir.

$$T_0^r(p)(x) = \theta_0^{1/p^*} x_0, T_n^r(p)(x) = \theta_n^{1/p^*} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} (1-r)^{n-k} r^k \, x_k, n \geq 1$$

olmak üzere $T^r(p)\colon |E_\theta^r|_p \to l_p$ ve $T^r(p)\colon \left|E_{\theta,\mathrm{p}}^r\right|_\infty \to l_\infty$ dönüşümlerini göz önüne alalım. Bu dönüşümlere üçgensel matris karşılık geldiğinden lineer, birebir ve örten olduğu açıktır. Öte yandan $x \in |E_\theta^r|_p$ için $T^r(p)(x) \in l_p$ ve $x \in \left|E_{\theta,\mathrm{p}}^r\right|_\infty$ için $T^r(p)(x) \in l_\infty$ olacağından

$$\|x\|_{|E_\theta^r|_p} = \|T^r(p)(x)\|_{l_p} \quad \text{ve} \quad \|x\|_{\left|E_{\theta,\mathrm{p}}^r\right|_\infty} = \|T^r(p)(x)\|_\infty$$

bulunur. Şu halde $T^r(p)$ dönüşümü her iki durumda da normu korur. Bu da ispatı tamamlar.

$ii)$ $n.$ terimi 1, diğer terimleri 0 olan dizi $e^{(n)}$ olmak üzere $\left(e^{(n)}\right)$ dizisi l_p uzayının bazı ve $S^r(p)$, $T^r(p)$'nin ters dönüşümü olduğuna göre Lemma 2.1.10'dan dolayı $\left(S^r(p)\left(e^{(j)}\right)\right) = \left(b_n^{(j)}\right)$, $|E_\theta^r|_p$ uzayının bir bazıdır.

$iii)$ l_∞ uzayının Schauder bazı mevcut olmadığından $\left|E_{\theta,\mathrm{p}}^r\right|_\infty$'nin bazı mevcut değildir. Çünkü aksi halde bir $b^{(k)} = \left(b_n^{(k)}\right)$ bazına sahip olsaydı her $x \in \left|E_{\theta,\mathrm{p}}^r\right|_\infty$ için $y = T^r(p)(x) \in l_\infty$ ve $T^r(p)\left(b^{(k)}\right) = \bar{b}^{(k)}$ olmak üzere

$$\left\| y - \sum_{k=0}^{n} y_k \, \bar{b}^{(k)} \right\|_\infty = \left\| x - \sum_{k=0}^{n} S^r(y_k) \, b^{(k)} \right\|_{\left|E_{\theta,\mathrm{p}}^r\right|_\infty} \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

olacak şekilde $(S^r(p)(y_k))$ skaler dizisi mevcut olurdu. Bu ise $\bar{b}^{(k)}$ dizisinin l_∞ uzayının bazı olması anlamına gelir ki, bu ise çelişkidir. Böylece ispat tamamlanır.

3.1.8 Teorem $0 < r < 1$ ve $1 < p < \infty$ için

$$D_1^r(\alpha) = \left\{a \in \omega: \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\theta_k} \left(\sum_{n=k}^{\infty} \left| \binom{n-1}{k-1} (r-1)^{n-k} r^{-n} a_n \right| \right)^{p^*} < \infty \right\},$$

$$D_2^r(\alpha) = \left\{a \in \omega: \sup_k \sum_{n=k}^{\infty} \left| \binom{n-1}{k-1} (r-1)^{n-k} r^{-n} a_n \right| < \infty \right\},$$

$$D_3^r(\alpha) = \left\{a \in \omega: \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k^{-1/p^*} \sum_{n=k}^{\infty} \left| \binom{n-1}{k-1} (r-1)^{n-k} r^{-n} a_n \right| < \infty \right\}$$

olsun. Bu durumda,

$$(i) \quad \left\{|E_\theta^r|_p\right\}^\alpha = D_1^r(\alpha),$$

$$(ii) \quad \{|E_\theta^r|_1\}^\alpha = D_2^r(\alpha),$$

$$(iii) \quad \left\{\left|E_{\theta,p}^r\right|_\infty\right\}^\alpha = D_3^r(\alpha).$$

İspat (3.1)'in ters dönüşümü göz önüne alınırsa $D = (d_{nk})$ matrisi

$$d_{nk} = \begin{cases} \theta_k^{-1/p^*} \binom{n-1}{k-1} (r-1)^{n-k} r^{-n} a_n, & 1 \leq k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

olmak üzere

$$a_n x_n = \sum_{k=1}^{n} \theta_k^{-1/p^*} \binom{n-1}{k-1} (r-1)^{n-k} r^{-n}\, a_n T_k^r(p)(x) = \sum_{k=1}^{n} d_{nk}\, T_k^r(p)(x)$$

yazılabilir. Buradan, her $\in |E_\theta^r|_p$ için $T^r(p)(x) \in l_p$ olduğu göz önüne alınırsa

$$a \in \left\{|E_\theta^r|_p\right\}^\alpha \Leftrightarrow \forall x \in |E_\theta^r|_p \text{ için } ax \in l$$

$$\Leftrightarrow D \in (l_p, l)$$

veya Lemma 2.1.2'den dolayı denk olarak

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\theta_k} \left(\sum_{n=k}^{\infty} \left| \binom{n-1}{k-1} (r-1)^{n-k} r^{-n} a_n \right| \right)^{p^*} < \infty$$

olur. Bu ise (i)'in doğruluğunu gösterir.

Teoremin diğer şıkları da Lemma 2.1.3 ve Lemma 2.1.4 dikkate alınarak ispatlanır.

3.1.9 Teorem $0 < r < 1$ ve $1 < p < \infty$ için

$$D_1^r(\beta)=\left\{a\in\omega\text{: Her } v \text{ için } \sum_{k=v}^{\infty}\binom{k-1}{v-1}(r-1)^{k-v}r^{-k}a_k \text{ yakınsaktır}\right\},$$

$$D_2^r(\beta)=\left\{a\in\omega\text{: } \sup_m\sum_{v=1}^{m}\frac{1}{\theta_v}\left|\sum_{k=v}^{m}\binom{k-1}{v-1}(r-1)^{k-v}r^{-k}a_k\right|^{p^*}<\infty\right\},$$

$$D_3^r(\beta)=\left\{a\in\omega\text{: } \sup_{m,v}\left|\sum_{k=v}^{m}\binom{k-1}{v-1}(r-1)^{k-v}r^{-k}a_k\right|<\infty\right\},$$

$$D_4^r(\beta)=\left\{a\in\omega\text{: } \sum_{v=1}^{\infty}\theta_k^{-\frac{1}{p^*}}\left|\sum_{k=v}^{m}\binom{k-1}{v-1}(r-1)^{k-v}r^{-k}a_k\right| < \infty \ m \text{ ye göre düzgün yakınsaktır}\right\}$$

olsun. Bu takdirde

$$i)\quad \{|E_\theta^r|_p\}^\beta=D_1^r(\beta)\cap D_2^r(\beta),$$

$$ii)\quad \{|E_\theta^r|_1\}^\beta=D_1^r(\beta)\cap D_3^r(\beta),$$

$$iii)\quad \{|E_{\theta,p}^r|_\infty\}^\beta=D_4^r(\beta)\cap D_1^r(\beta).$$

İspat *i)* $a\in\{|E_\theta^r|_p\}^\beta$ olması için gerek ve yeter şart her $x\in|E_\theta^r|_p$ için $(\sum_{k=1}^m x_k a_k)$ yakınsak olmasıdır. $W=(w_{mv})$ matrisini

$$w_{mv}=\begin{cases}\theta_v^{-1/p^*}\sum_{k=v}^{m}\binom{k-1}{v-1}(r-1)^{k-v}r^{-k}a_k, & 1\le v\le m\\ 0, & v>m\end{cases}$$

alalım. Bu durumda (3.1) ile tanımlı $T^r(p)$ dönüşümünün tersi mevcut olduğundan,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}x_k a_k&=\sum_{k=1}^{m}a_k\sum_{v=1}^{k}\theta_v^{-1/p^*}\binom{k-1}{v-1}(r-1)^{k-v}r^{-k}T_v^r(p)(x)\\&=\sum_{v=1}^{m}\theta_v^{-1/p^*}\sum_{k=v}^{m}\binom{k-1}{v-1}(r-1)^{k-v}r^{-k}a_kT_v^r(p)(x)\\&=\sum_{v=1}^{m}w_{mv}T_v^r(p)(x)\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan görülür ki $a \in \{|E_\theta^r|_p\}^\beta \Leftrightarrow W \in (l_p, c)$. Şu halde Lemma 2.1.4'den dolayı $\{|E_\theta^r|_p\}^\beta = D_1^r(\beta) \cap D_2^r(\beta)$ elde edilir.

Teoremin diğer şıkları da benzer olarak ispatlanır.

3.1.10 Teorem $0 < r < 1$ ve $1 < p < \infty$ için

$$D^r(\gamma) = \left\{a \in \omega:\ \sup_n \sum_{v=1}^{n} \theta_v^{-\frac{1}{p^*}} \left|\sum_{k=v}^{n} \binom{k-1}{v-1} (r-1)^{k-v} r^{-k} a_v\right| < \infty\right\}$$

olsun. Bu takdirde

$$i)\ \{|E_\theta^r|_p\}^\gamma = D_2^r(\beta),$$

$$ii)\ \{|E_\theta^r|_1\}^\gamma = D_3^r(\beta),$$

$$iii)\ \left\{\left|E_{\theta,\mathrm{p}}^r\right|_\infty\right\}^\gamma = D^r(\gamma).$$

3.2 Mutlak Euler Uzayları Üzerinde Matris ve Kompakt Operatörler

Bu kısımda $|E_\theta^r|_p$ uzayı üzerinde tanımlanan belirli matris dönüşümleri ile kompakt operatörleri karakterize edilerek bu operatörlere karşılık gelen normlar ile Hausdorff kompaktsızlık ölçülerini veren teoremler ifade ve ispat edilecektir.

3.2.1 Teorem $1 \le q < \infty$, her $n, v \ge 0$ için $A = (a_{nv})$ kompleks terimli sonsuz matris ve $W^{(\mathrm{n})} = (w_{mv}^{(n)})$ matrisi

$$w_{mv}^{(n)} = \begin{cases} a_{n0}, & v = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=v}^{m} \binom{k-1}{v-1} (r-1)^{k-v} r^{-k} a_{nk}, & 1 \le v \le m \\ 0, & v > m \end{cases} \tag{3.3}$$

olsun. Ayrıca $\overline{W} = (\overline{w}_{nv}) = \left(\lim_m w_{mv}^{(n)}\right)$ ve $\widetilde{W} = T^r(q)\overline{W}$ olsun. Bu takdirde $A \in \left(|E_\theta^r|_1, |E_\theta^r|_q\right)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\text{Her } n, v \ge 0 \text{ için } \overline{w}_{nv} \text{ mevcut} \tag{3.4}$$

$$\sup_{m,v} \left|w_{mv}^{(n)}\right| < \infty \tag{3.5}$$

$$\sup_{v}\sum_{n=0}^{\infty}|\widetilde{w}_{nv}|^{q}<\infty \tag{3.6}$$

olmasıdır. Eğer $A\in\left(|E_{\theta}^{r}|_{1},|E_{\theta}^{r}|_{q}\right)$ ise bu takdirde A sınırlı lineer operatördür, ayrıca

$$\|A\|_{\left(|E_{\theta}^{r}|_{1},|E_{\theta}^{r}|_{q}\right)}=\|\widetilde{W}\|_{(l,\,l_{q})}=\sup_{v}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}|\widetilde{w}_{nv}|^{q}\right\}^{1/q}$$

ve

$$\|A\|_{\chi}=\lim_{v\to\infty}\sup_{j}\left\{\sum_{n=v+1}^{\infty}\left|\widetilde{w}_{nj}\right|^{q}\right\}^{1/q}.$$

İspat $A\in\left(|E_{\theta}^{r}|_{1},|E_{\theta}^{r}|_{q}\right)$ olması için gerek yeter şart $A_{n}=(a_{nv})_{v=0}^{\infty}\in\{|E_{\theta}^{r}|_{1}\}^{\beta}$ ve her $x\in|E_{\theta}^{r}|_{1}$ için $A(x)\in|E_{\theta}^{r}|_{q}$ olmasıdır. Teorem 3.1.9'dan dolayı $A_{n}\in\{|E_{\theta}^{r}|_{1}\}^{\beta}$ olması için gerek yeter ve şart (3.4) ve (3.5)'in sağlanmasıdır. Ayrıca herhangi keyfi $R=(r_{nv})\in(l,c)$ matrisi için $\sum_{v=0}^{\infty}r_{nv}\,x_{v}$ serisi n'ye göre düzgün yakınsaktır. Çünkü, bu serinin kalan terimi

$$\left|\sum_{v=m}^{\infty}r_{nv}\,x_{v}\right|\leq\sup_{n,v}|r_{nv}|\sum_{v=m}^{\infty}|x_{v}|\to 0\ \ (m\to\infty)$$

olduğundan n'ye göre düzgün olarak sıfıra gider. Dolayısıyla

$$\lim_{n}R_{n}(x)=\sum_{v=0}^{\infty}\lim_{n}r_{nv}\,x_{v} \tag{3.7}$$

yazılabilir. Şimdi $T^{r}(1)(x)$ nin ters dönüşümü göz önüne alınırsa, (3.7) nedeniyle

$$\begin{aligned}A_{n}(x)&=\lim_{m}\sum_{k=0}^{m}a_{nk}x_{k}\\&=a_{n0}T_{0}^{r}(\,1)(x)+\lim_{m}\sum_{v=1}^{m}\left[\sum_{k=v}^{m}\binom{k-1}{v-1}(r-1)^{k-v}r^{-k}\,a_{nk}\right]T_{v}^{r}(\,1)(x)\\&=a_{n0}T_{0}^{r}(\,1)(x)+\lim_{m}\left\{\sum_{v=1}^{\infty}\left[\sum_{k=v}^{m}\binom{k-1}{v-1}(r-1)^{k-v}r^{-k}\,a_{nk}\right]\right.\end{aligned}$$

$$-\sum_{v=m+1}^{\infty}\left[\sum_{k=v}^{m}\binom{k-1}{v-1}(r-1)^{k-v}r^{-k}\,a_{nk}\right]\Bigg\}T_v^r(\,1)(x)$$

$$=\sum_{v=0}^{\infty}\overline{w}_{nv}\,T_v^r(\,1)(x)$$

$$=\overline{W}_n\big(T^r(1)(x)\big).$$

yazılabilir. Bu durumda, $y=T^r(1)(x)$ dersek Teorem 3.1.7'den $|E_\theta^r|_1\cong l$ ve $|E_\theta^r|_q$ $\cong l_q$ olduğuna göre her $x\in|E_\theta^r|_1$ için $A(x)\in|E_\theta^r|_q$ $\Leftrightarrow$ her $y\in l$ için $\overline{W}(y)\in\ |E_\theta^r|_q$, yani $\widetilde{W}(y)=T^r(q)(\overline{W}(y))\in l_q$ veya denk olarak $\widetilde{W}\in(l,l_q)$'dır. Böylece Lemma 2.1.3'den (3.6) elde edilir. Bu ise teoremin birinci kısmının ispatını tamamlar.

Eğer $A\in\big(|E_\theta^r|_1,|E_\theta^r|_q\big)$ ise $|E_\theta^r|_1$ ile $|E_\theta^r|_q$ BK -uzayı ve BK -uzayları arasındaki matris dönüşümleri sınırlı olduğundan A sınırlı operatördür.

A operatörünün normunu belirlemek için Teorem 3.1.7'den dolayı bilinen $T^r(1)\colon|E_\theta^r|_1\to\ l$ ve $T^r(q)\colon|E_\theta^r|_q\to\ l_q$ izometrik izomorfileri dikkate alınırsa $A=S^r(q)o\widetilde{W}oT^r(1)$ olur ve dolayısıyla

$$\|A\|_{\left(|E_\theta^r|_1,|E_\theta^r|_q\right)}=\sup_{x\neq0}\frac{\|A(x)\|_{|E_\theta^r|_q}}{\|x\|_{|E_\theta^r|_1}}$$

$$=\sup_{x\neq0}\frac{\left\|S^r(q)o\widetilde{W}oT^r(1)(x)\right\|_{|E_\theta^r|_q}}{\|x\|_{|E_\theta^r|_1}}$$

$$=\sup_{y\neq0}\frac{\left\|\widetilde{W}(y)\right\|_{l_q}}{\|y\|_l}$$

$$=\left\|\widetilde{W}\right\|_{(l,l_q)},\big(y=T^r(1)(x)\big)$$

bulunur.

Son kısmı ispatlamak için $|E_\theta^r|_1$ uzayı içinde $Q=S_{|E_\theta^r|_1}$ birim yuvarını alalım. Ayrıca

$$\widehat{w}_{nj}^{(v)} = \begin{cases} \widetilde{w}_{nj}, & v < n \\ 0, & n \leq v. \end{cases}$$

olsun. Bu durumda $x \in Q \Leftrightarrow y = T^r(1)(x) \in l$ ve aynı zamanda $A = S^r(q)o\widetilde{W}oT^r(1)$ eşitiğinden $T^r(q)AQ = \widetilde{W}T^r(1)Q$ yazılabilir. Dolayısıyla Lemma 2.2.1, Lemma 2.2.3 ve Lemma 2.1.3 göz önüne alınırsa

$$\|A\|_\chi = \chi(\mathrm{AQ}) = \chi(T^r(q)\mathrm{AQ}) = \chi\big(\widetilde{W}\ T^r(1)\mathrm{Q}\big)$$

$$= \lim_{v\to\infty} \sup_{y\in T^r(1)Q} \|(I - P_v)(\widetilde{W}(y))\|$$

$$= \lim_{v\to\infty} \left(\sup_{y\in T^r(1)Q} \left\|\widehat{W}^{(v)}(y)\right\|_{l_q} \right)$$

$$= \lim_{v\to\infty} \sup_j \left\{ \sum_{n=v+1}^{\infty} \left|\widetilde{w}_{nj}\right|^q \right\}^{1/q}$$

elde edilir ki, bu da teoremin ispatını tamamlar.

Ayrıca kompakt operatörler, Lemma 2.2.2 ve Teorem 3.2.1'in sonucu olarak aşağıdaki şekilde kolayca karakterize edilebilir.

3.2.1 Sonuç Teorem 3.2.1'in şartları altında

$$A \in \left(|E_\theta^r|_1, |E_\theta^r|_q\right) \text{ kompakt operatördür} \Leftrightarrow \lim_{v\to\infty} \sup_j \sum_{n=v+1}^{\infty} \left|\widetilde{w}_{nj}\right|^q = 0.$$

3.2.2 Teorem $1 < p \leq \infty$, her $n \geq 0$ için $W^{(n)} = \left(w_{mv}^{(n)}\right)$ matrisini (3.3)'de tanımlanan matris, $W^* = (w_{nv}^*) = \left(\theta_v^{-1/p^*} \lim_m w_{mv}^{(n)}\right)$ ve $U = T^r(1)W^*(y)$ olsun. Bu takdirde, $A \in \left(|E_\theta^r|_p, |E_\theta^r|_1\right)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\text{Her } n, v \geq 0 \text{ için } w_{nv}^* \text{ mevcut,} \tag{3.8}$$

$$\sup_m \sum_{v=1}^{m} \frac{1}{\theta_v} \left|w_{mv}^{(n)}\right|^{p^*} < \infty, \tag{3.9}$$

$$\sum_{v=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_{nv}| \right)^{p^*} < \infty \tag{3.10}$$

olmasıdır. Ayrıca $A \in \left(|E_\theta^r|_p, |E_\theta^r|_1\right)$ ise A sınırlı lineer operatördür,

$$\|A\|_{\left(|E_\theta^r|_p, |E_\theta^r|_1\right)} = \|U\|_{(l_p, l)}$$

ve

$$\|A\|_\chi = \frac{1}{\xi} \lim_{v\to\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{n=v+1}^{\infty} |u_{nj}| \right)^{p^*} \right\}^{1/p}$$

olacak şekilde bir $1 \le \xi \le 4$ vardır.

İspat $A \in \left(|E_\theta^r|_p, |E_\theta^r|_1\right)$ olması için gerek yeter şartlar $A_n = (a_{nv})_{v=0}^{\infty} \in \left\{|E_\theta^r|_p\right\}^\beta$ ve her $x \in |E_\theta^r|_p$ için $A(x) \in |E_\theta^r|_1$ olmasıdır. Teorem 3.1.9'dan dolayı $(a_{nv})_{v=0}^{\infty} \in \left\{|E_\theta^r|_p\right\}^\beta$ olması için gerek ve yeter şart (3.8) ve (3.9) koşullarının sağlanmasıdır. Keyfi bir $R = (r_{nv}) \in (l_p, c)$ matrisi alalım.

$$\left| \sum_{v=m}^{\infty} r_{nv}\, x_v \right| \le \left(\sum_{v=m}^{\infty} |r_{nv}|^{p^*} \right)^{1/p^*} \left(\sum_{v=m}^{\infty} |x_v|^p \right)^{1/p} \to 0 \;\; (m \to \infty)$$

olup $\sum_{v=0}^{\infty} r_{nv}\, x_v$ serisinin kalan terimi n'ye düzgün olarak sıfıra gider. Yani bu seri n'ye göre düzgün yakınsaktır. Böylece

$$\lim_n R_n(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \lim_n r_{nv}\, x_v \tag{3.11}$$

yazılabilir. $T^r(p)$'nin ters dönüşümü (3.11) ile birlikte göz önüne alınırsa

$$A_n(x) = \lim_m \sum_{k=0}^{m} a_{nk} x_k$$

$$= a_{n0} \theta_0^{-\frac{1}{p^*}} T_0^r(p)(x) + \lim_m \sum_{v=1}^{m} \left[\sum_{k=v}^{m} \theta_v^{-\frac{1}{p^*}} \binom{k-1}{v-1} (r-1)^{k-v} r^{-k} a_{nk} \right] T_v^r(p)(x)$$

$$= a_{n0}\theta_0^{-\frac{1}{p^*}} T_0^r(\,p)(x) + \sum_{v=1}^{\infty} \theta_v^{-\frac{1}{p^*}} \lim_m w_{mv}^{(n)}\, T_v^r(p)(x)$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty} w_{nv}^*\, T_v^r(\,p)(x)$$

$$= W_n^*\big(T^r(p)(x)\big)$$

elde edilir. Ayrıca, Teorem 3.1.7'den $|E_\theta^r|_1 \cong l$ ve $|E_\theta^r|_p \cong l_p$ olduğuna göre $y = T^r(p)(x)$ olmak üzere, her $x \in |E_\theta^r|_p$ için $A(x) = W^*(y) \in |E_\theta^r|_1 \Leftrightarrow$ Her $T^r(p)(x) \in l_p$ için $U = T^r(1)W^*(y) \in l$, yani $U \in (l_p, l)$ 'dır. Eğer U matrisine, Lemma 2.1.2 uygulanırsa (3.10) koşulu elde edilir. Böylece ispatın ilk kısmı tamamlanır.

Eğer $A \in \big(|E_\theta^r|_p, |E_\theta^r|_1\big)$ ise bu takdirde $|E_\theta^r|_p$ ve $|E_\theta^r|_1$, BK-uzayı olduğundan A operatörü sınırlıdır. Diğer taraftan, $A = S^r(1)oUoT^r(p)$ olup dolayısıyla

$$\|A\|_{\left(|E_\theta^r|_p, |E_\theta^r|_1\right)} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|A(x)\|_{|E_\theta^r|_1}}{\|x\|_{|E_\theta^r|_p}}$$

$$= \sup_{x\neq 0} \frac{\|S^r(1)oUoT^r(p)(x)\|_{|E_\theta^r|_1}}{\|x\|_{|E_\theta^r|_p}}$$

$$= \sup_{y\neq 0} \frac{\|U(y)\|_l}{\|y\|_{l_p}} \quad = \|U\|_{(\,l_p, l)}, \big(y = T^r(p)(x)\big)$$

bulunur.

Nihayet teoremin son kısmının ispatı için $Q = S_{|E_\theta^r|_p}$ ve

$$\hat{u}_{nj}^{(v)} = \begin{cases} u_{nj}, & v < n \\ 0, & n \geq v \end{cases}$$

olsun. $A = S^r(1)oUoT^r(p)$ olduğuna göre $T^r(1)AQ = UT^r(p)Q$ yazılabilir. Şu halde

$$\|A\|_\chi = \chi(\mathrm{AQ}) = \chi(\,T^r(1)\mathrm{AQ}) = \chi(U\,T^r(\mathrm{p})\mathrm{Q})$$

$$= \lim_{v\to\infty}\left(\sup_{y\in T^r(p)Q}\|(I-P_v)(U(y))\|_l\right)$$

$$= \lim_{v\to\infty}\left(\sup_{y\in T^r(p)Q}\left\|\widehat{U}^{(v)}(y)\right\|_l\right)$$

$$= \frac{1}{\xi}\lim_{v\to\infty}\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{n=v+1}^{\infty}|u_{nj}|\right)^{p^*}\right\}^{1/p}$$

bulunur.

3.2.2 Sonuç Teorem 3.2.2'nin şartları altında

$$A \in \left(|E_\theta^r|_p, |E_\theta^r|_1\right) \text{ kompakttır } \Leftrightarrow \lim_{v\to\infty}\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{n=v+1}^{\infty}|u_{nj}|\right)^{p^*}\right\}^{1/p} = 0.$$

4. $|E_\phi^r|(p)$ UZAYININ BAZI ÖZELLİKLERİ VE MATRİS KARAKTERİZASYONU

Bu bölümde, 3. bölümde tanımlanan $|E_\phi^r|(p)$ uzayının dual, baz, izomorfizm gibi bazı cebirsel ve topolojik özelliklerini inceledikten sonra bu uzay üzerindeki matris dönüşümlerinin karakterizasyonlarını vereceğiz.

4.1 Teorem $0 < \mathrm{r} < 1$ ve $p = (p_n)$ pozitif sayıların sınırlı bir dizisi olsun.

(a) $|E_\phi^r|(p)$ kümesi dizilerin toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir lineer uzaydır. Ayrıca $M = max\{1, supp_n\}$ olmak üzere

$$\|x\|_{|E_\phi^r|(p)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |T_n^r(\phi_n, p)(x)|^{p_n}\right)^{1/M}$$

paranormu ile birlikte bir FK $-$uzayıdır.

(b) $|E_\phi^r|(p)$ ile $l(p)$ izomorfik uzaylardır.

(c) $\left(b_n^{(v)}\right) = S^r(\phi, p)\left(e^{(v)}\right)$ dizisi, $|E_\phi^r|(p)$ uzayının Schauder bazıdır.

(d) $|E_\phi^r|(p)$ uzayı ayrılabilirdir.

İspat

(a) $|E_\phi^r|(p)$ uzayının lineer uzay olduğunu göstermek rutin bir işlem olduğundan ispat verilmemiştir. Diğer taraftan $T^r(\phi, p)$ bir üçgensel matris, $|E_\phi^r|(p) = (l(p))_{T^r(\phi,p)}$ ve $l(p)$ bir FK-uzayı olduğundan Wilansky (1984)'nin Teorem 4.3.2'ye göre $|E_\phi^r|(p)$ uzayı bir FK- uzayıdır.

(b) $|E_\phi^r|(p)$ ile $l(p)$ uzayları arasında birebir, örten, paranormu koruyan bir dönüşümün bulunduğunu göstermek yeterlidir. (3.1) ile tanımlı

$$T^r(\phi, p): |E_\phi^r|(p) \to l(p)$$

dönüşümünü ele alalım. Bu dönüşüme karşılık gelen matris üçgensel matris olduğundan $T^r(\phi, p)$, birebir, örten bir lineer dönüşümdür. Ayrıca her $x \in |E_\phi^r|(p)$ için $T^r(\phi, p)(x) \in l(p)$ olduğuna göre

$$\|x\|_{|E_\phi^r|(p)} = \|T^r(\phi, p)(x)\|_{l(p)}$$

dir. Yani $T^r(\phi,p)$ dönüşümü paranormu korur, böylece ispat tamamlanmış olur.

(c) $e^{(v)}$, v. terimi 1 ve diğer terimleri 0 olan diziyi göstermek üzere $\left(e^{(v)}\right)$, $l(p)$ uzayının Schauder bazı olduğundan Lemma 2.1.10 nedeniyle

$$\left(b_n^{(v)}\right) = S^r(\phi,p)\left(e^{(v)}\right) = \left(\sum_{v=0}^{n} s_{nv}^r(\phi_n,p)\, e^{(v)}\right)$$

dizisi $\left|E_\phi^r\right|(p)$ uzayının bir Schauder bazıdır.

(d) $\left|E_\phi^r\right|(p)$ sayılabilir yoğun bir Schauder bazına sahip olması nedeniyle ayrılabilirdir.

4.2 Teorem $0 < \mathrm{r} < 1$ için

$$D_1^r = \left\{a \in \omega : \exists M > 1, \sum_{v=0}^{\infty}\left(\sum_{n=v}^{\infty}\left|M^{-1} b_n^{(v)} a_n\right|\right)^{p_v^*} < \infty\right\},$$

$$D_2^r = \left\{a \in \omega : \exists M > 1, \sup_v M^{-1/p_v}\sum_{n=v}^{\infty}\left|b_n^{(v)} a_n\right| < \infty\right\},$$

$$D_3^r = \left\{a \in \omega : \sum_{n=v}^{\infty} b_n^{(v)} a_n \quad \text{her } v \text{ için yakınsak}\right\},$$

$$D_4^r = \left\{a \in \omega : \exists M > 1, \sup_n \sum_{v=1}^{n}\left|\sum_{k=v}^{n} M^{-1} b_k^{(v)} a_k\right|^{p_v^*} < \infty\right\},$$

$$D_5^r = \left\{a \in \omega : \sup_{n,v}\left|\sum_{k=v}^{n} b_k^{(v)} a_k\right|^{p_v} < \infty\right\}$$

olsun. Eğer her $v \geq 0$ için

i. $p_v > 1$ ise $\left\{\left|E_\phi^r\right|(p)\right\}^\alpha = D_1^r$, $\left\{\left|E_\phi^r\right|(p)\right\}^\beta = D_3^r \cap D_4^r$, $\left\{\left|E_\phi^r\right|(p)\right\}^\gamma = D_4^r$,

ii. $p_v \leq 1$ ise $\left\{\left|E_\phi^r\right|(p)\right\}^\alpha = D_2^r$, $\left\{\left|E_\phi^r\right|(p)\right\}^\beta = D_3^r \cap D_5^r$, $\left\{\left|E_\phi^r\right|(p)\right\}^\gamma = D_5^r$.

İspat Tekrardan kaçınmak için sadece $\left|E_\phi^r\right|(p)$ uzayının β -dualini hesaplayacağız. Bunun için $D = (d_{nv})$ matrisini

$$d_{nv}=\begin{cases}\phi_0^{-1/p_0^*}a_0, & v=n=0\\ \sum_{k=v}^{n} b_k^{(v)}a_k\,, & 1\le v\le n\\ 0, & v>n\end{cases}$$

olarak alalım. Dual uzayın tanımından dolayı $a\in\{|E_\phi^r|(p)\}^\beta$ olması için gerek ve yeter şart her $x\in|E_\phi^r|(p)$ için $ax\in cs$ olmasıdır. Eğer ters dönüşüm göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}a_kx_k&=T_0^r(\phi,p)\phi_0^{-1/p_0^*}a_0\\&+\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{v=1}^{k}\phi_v^{-1/p_v^*}\binom{k-1}{v-1}(r-1)^{k-v}r^{-k}T_v^r(\phi,p)\\&=T_0^r(\phi,p)\phi_0^{-1/p_0^*}a_0\\&+\sum_{v=1}^{n}\phi_v^{-1/p_v^*}T_v^r(\phi,p)\sum_{k=v}^{n}a_k\binom{k-1}{v-1}(r-1)^{k-v}r^{-k}\\&=\sum_{v=0}^{n}d_{nv}T_v^r(\phi,p)\end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca $x\in|E_\phi^r|(p)$ için $T^r(\phi,p)\in l(p)$ olduğuna göre, $a\in\{|E_\phi^r|(p)\}^\beta$ olması için gerek ve yeter şart $D\in(l(p),c)$ olmasıdır. Buradan da Lemma 2.1.5 nedeniyle $p_v>1$ için $\{|E_\phi^r|(p)\}^\beta=D_3^r\cap D_4^r$ ve $p_v\le 1$ için $\{|E_\phi^r|(p)\}^\beta=D_3^r\cap D_5^r$ elde edilir.

4.3 Teorem $A=(a_{nv})$ kompleks sayıların sonsuz bir matrisi, (ϕ_n) ile (ψ_n) pozitif sayıların dizisi, (p_n) ile (q_n) her n için $p_n\le 1$ ve $q_n\ge 1$ şartlarını sağlayan pozitif sayıların sınırlı dizileri olsun. Ayrıca $\tilde{A}$ matrisini

$$\tilde{a}_{nv}=\sum_{j=v}^{\infty}b_j^{(v)}a_{nj}$$

eşitliği ile tanımlayalım ve $F=T^r(\psi,q)\,\tilde{A}$ olsun. Bu takdirde $A\in\left(|E_\phi^r|(p),|E_\psi^r|(q)\right)$ olması için gerek ve yeter şart her $n\ge 0$ için

$$\forall\, v \text{ için } \sum_{k=v}^{\infty} b_k^{(v)} a_{nk} \quad \text{yakınsak}, \tag{4.1}$$

$$\sup_{m,v} \left| \sum_{k=v}^{m} b_k^{(v)} a_{nk} \right|^{p_v} < \infty, \tag{4.2}$$

ve

$$\sup_{v} \sum_{n=0}^{\infty} \left| M^{-\frac{1}{p_v}} f_{nv} \right|^{q_n} < \infty. \tag{4.3}$$

olacak şekilde bir $M > 1$ sayısı vardır.

İspat Her n için $p_n \leq 1$ ve $q_n \geq 1$ olsun. $V^{(n)}$ matrisi her $n \geq 0$ için

$$v_{mv}^{(n)} = \begin{cases} \sum_{j=v}^{m} b_j^{(v)} a_{nj}, & 0 \leq v \leq m \\ 0, & v > m \end{cases}$$

ve $|E_\phi^r|(p) = (l(p))_{T^r(\phi,p)}$ olduğu göz önüne alınırsa Lemma 2.1.7'den dolayı $A \in \left(|E_\phi^r|(p),\ |E_\psi^r|(q)\right) \Leftrightarrow \tilde{A} \in \left(l(p), |E_\psi^r|(q)\right)$ ve $V^{(n)} \in (l(p), c)$. Öte yandan $|E_\psi^r|(q) = (l(q))_{T^r(\psi,q)}$ olduğuna göre $\tilde{A} \in \left(l(p), |E_\psi^r|(q)\right) \Leftrightarrow F = T^r(\psi,q)\tilde{A} \in \left(l(p), l(q)\right)$. Böylece $V^{(n)}$ ve F matrislerine sırasıyla Lemma 2.1.5 (iii) ve (ii) şartları uygulanırsa istenen elde edilir.

4.4 Teorem $A = (a_{nv})$ kompleks sayıların sonsuz bir matrisi, (ϕ_n) ile (ψ_n) pozitif sayıların dizisi, (p_n) ise her n için $p_n > 1$ koşulunu sağlayan pozitif sayıların sınırlı bir dizisi olsun. Ayrıca $H = T^r(\psi, 1)\,\tilde{A}$ alalım. Bu takdirde $A \in \left(|E_\phi^r|(p), |E_\psi^r|(1)\right)$ olması için gerek ve yeter şart her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\forall\, v \text{ için} \sum_{k=v}^{\infty} b_k^{(v)} a_{nk} \quad \text{yakınsak}, \tag{4.4}$$

$$\sup_{m} \sum_{v=0}^{m} \left| \sum_{k=v}^{m} M^{-1} b_k^{(v)} a_{nk} \right|^{p_v^*} < \infty, \tag{4.5}$$

ve

$$\sum_{v=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}|M^{-1}h_{nv}|\right)^{p_v^*} < \infty \tag{4.6}$$

olacak şekilde $M > 1$ sayısı mevcut olmasıdır.

İspat Her n için $p_n > 1$ olsun. $\left|E_\phi^r\right|(p) = (l(p))_{T^r(\phi,p)}$ olduğu göz önüne alınırsa, $V^{(n)}$ ve $\tilde{A}$, Teorem 4.3'de verilen matrisler olmak üzere Lemma 2.1.7'den dolayı $A \in \left(\left|E_\phi^r\right|(p), \left|E_\psi^r\right|(1)\right) \Leftrightarrow \tilde{A} \in \left(l(p), \left|E_\psi^r\right|(1)\right)$ ve $V^{(n)} \in (l(p), c)$ olur. Ayrıca $\left|E_\psi^r\right|(1) = (l)_{T^r(\psi,1)}$ olduğuna göre, $\tilde{A} \in \left(l(p), \left|E_\psi^r\right|(1)\right) \Leftrightarrow H = T^r(\psi, 1)\tilde{A} \in (l(p), l)$. Dolayısıyla $V^{(n)}$ ve H matrislerine Lemma 2.1.5 uygulanırsa, Lemma 2.1.6 ile birlikte teoremin ispatı tamamlanır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Son zamanlarda Riesz, çarpımsal, Nörlund, Cesàro gibi özel matrislerinin l_p, l_∞, c ve $l(p)$ uzaylarındaki toplama alanı olarak tanımlanan dizi uzayları ve Euler toplanabilen dizi uzayları birçok yazar tarafından ele alınmıştır. Bu tezde mutlak Euler toplanabilme metoduyla toplanabilen $|E_\theta^r|_p$, $\left|E_{\theta,\mathrm{p}}^r\right|_\infty$ ve $\left|E_\phi^r\right|(p)$ seri uzayları tanımlanarak kapsama bağıntıları, izomorfizm, dual, baz, norm, paranorm gibi cebirsel ve topolojik yapıları incelenmiştir. Ayrıca bu uzaylar üzerinde tanımlı belirli matris dönüşümleri karakterize edilerek $|E_\theta^r|_p$ ve $\left|E_{\theta,\mathrm{p}}^r\right|_\infty$ uzaylarının operatör normları ile Hausdorff kompaktsızlık ölçüleri belirlenmiştir.

6. KAYNAKLAR

Altay, B. and Başar F., “Generalization of the sequence space $l(p)$ derived by weighted mean” *J. Math. Anal. Appl.*, 330(1), 174-185, (2007).

Altay, B., Başar, F. and Mursaleen, M., “On the Euler sequence spaces which include the spaces l_p and l_∞ I”, *Inform. Sci*, 176(10), 1450-1462, (2005).

Altay, B. and Başar, F. “On the paranormed Riesz sequence spaces of non-absolute type”. *Southeast Asian Bull. Math*, 26(5), 701-715, (2002).

Bor, H., “On $|\bar{N}, p_n|_k$ summability factors of infinite series”, *Tamkang J. Math.*, 16 (1), 13-20, (1985).

Borwein, D. and Cass, F. P., **“**Strong Nörlund summability”, *Math. Zeitschr*., 103(2), 94 -111, (1968).

Boos, J. and Cass, P., *Classical and modern methods in summability*, New York: Oxford University Press, (2000).

Choudhary, B. and S. K. Mishra, “A note on Köthe-Toeplitz duals of certain sequence spaces and their matrix transformations”, *Int. J. Math. Math. Sci.,* 18(4), 681-688, (1995).

Das, G**.**, **“**A Tauberian theorem for absolute summability”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.,* 67, 321-326, (1970).

Fekete, M., *Zur Theorie der Divergenten Reihen*, 29, Budapest : Math. Es Termezs Ertesitö, 719-726, (1911).

Flett, T.M., “On an extension of absolute summability and some theorems of Littlewood and Paley”, *Proc. London Math. Soc.* 7, 113-141, (1957).

Gökçe F. and Sarıgöl M.A, “Matrix operators on the series space $\left|\bar{N}_p^\theta\right|(\mu)$ and applications”, *Kuwait J. Sci*. (in press) (2017).

Grosse-Erdmann, K.G., “Matrix transformations between the sequence spaces of Maddox”, *J. Math. Anal. Appl.*, 180, 223-238, (1993).

Hardy, G. H., *Divergent series*, 334 , American Mathematical Soc., (2000).

Hazar, G.C. and Sarıgöl, M.A., “Absolute Cesàro Series Spaces and Matrix Operators”, *Acta Appl. Math.*, 154(1), 153-165, (2018).

Jarrah, A.M. and Malkowsky, E., “Ordinary absolute and strong summability and matrix transformations”, *Filomat*, 17, 59–78, (2003).

Maddox, I. J., *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press, (1970).

Maddox, I.J. “Some properties of paranormed sequence spaces”, *J. Lond. Math. Soc.* 2(1), 316-322, (1969).

Maddox, I.J. “Paranormed sequence spaces generated by infinite matrices”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 64, 335-340, (1968).

Maddox, I.J. “Spaces of strongly summable sequences”, *Q. J. Math*.,18, 345-355, (1967).

Malkowsky, E. and Rakocevic, V., “On matrix domains of triangles”, *Appl. Math. Comput.*, 189 (2), 1146-1163, (2007).

Malkowsky, E. and Rakočević, V., “An introduction into the theory of sequence space and measures of noncompactness”, *Zb. Rad. (Beogr.),* 9 (17), 143-234, (2000).

Malkowsky, E., “Linear operators in certain BK spaces”, *Bolyai Soc. Math. Studies*, 5, 241-250, (1996).

Mears, F. M., “Absolute regularity and the Nörlund mean”, *Ann. Of Math*., 38, 594-601, (1937).

Mitrinović , D. S., *Analytic Inequalties*, Berlin : Springer-Verlag, (1970).

Mursaleen, M., Başar, F. and Altay, B., “On the Euler sequence spaces which include the spaces l_p and l_∞ II”, *Nonlinear Anal*., 65(3), 707-717, (2006).

Nakano, H., “Modulared sequence space”, *Proc. Japan Acad.*, 27(9), 508-512, (1951).

Powell, R. E. and Shah, S. M., *Summability Theory and Applications*, Revised Edition, Prentice-Hall of India Private Limited New Delhi-110001, (1988).

Rakocevic, V., “Measures of noncompactness and some applications”, *Filomat,* 12(2), 87-120, (1998)

Sarıgöl, M.A.,“Spaces of Series Summable by Absolute Ces *à* ro and Matrix Operators”, *Comm. Math Appl.,* 7(1), 11-22, (2016),

Sargöl, M.A., “Extension of Mazhar's theorem on summability factors”, *Kuwait J. Sci*., 42(3), 28-35, (2015).

Sarıgöl, M.A. “An inequality for matrix operators and its applications”, *J. Class. Anal*., 2(2), 145-150, (2013).

Sarıgöl, M.A., “Matrix transformations on fields of absolute weighted mean summability”, *Studia Sci. Math. Hungar*., 48(3), 331-341, (2011).

Sarıgöl, M.A., “On local properties of factored Fourier series”, *Appl. Math. Comp.,* 216, 3386-3390, (2010).

Sarıgöl, M.A., “On two absolute summability Riesz summability of infinite series”, *Proc. Amer. Math. Soc.,* 118, 485-488, (1993).

Sarıgöl, “On absolute weighted mean summability methods”, *Proc. Amer. Math. Soc.,* 115 (1), 157-160, (1992).

Stieglitz, M. and Tietz, H., **“**Matrix transformationen von Folgenraumen Eine Ergebnisübersicht”, *Math. Z.,* 154, 1-16, (1977).

Sunouchi, G., “Notes of Fourier Analysis, XVIII, Absolute summability of Series with Constant Terms”, *Tohoku Math. J.,* 2, 57-65, (1949).

Tanovic- Miller, N., **“**On strong summability”, *Glas. Mat.,* 34(14), 87-97, (1979).

Yeşilkayagil, M. and Başar, F., “On the paranormed Nörlund sequence space of nonabsolute type”, *Abstr. Appl. Anal..* Vol. 2014. Hindawi, (2014).

Wilansky, A., *Summability Through Functional Analysis,* 85. North Holland, Amsterdam: Oxford, (1984).

7. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Fadime GÖKÇE
Doğum Yeri ve Tarihi	: Ankara, 10.11.1988
Lisans Üniversite	: Gazi Üniversitesi
Y. Lisans Üniversite	: Gazi Üniversitesi
Elektronik posta	: fgokce@pau.edu.tr
İletişim Adresi	: Pamukkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi D blok Matematik Bölümü Kınıklı Kampüsü Denizli

Yayın Listesi :

• Gökçe, F. and Sarıgöl, M.A., "A new series space $\left|\overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{p}}^{\theta}\right|(\mu)$ and matrix operators with applications", *Kuwait J. Sci*., (in press) (2017).

• Gökçe, F. and Sarıgöl, M.A., "Some Matrix And Compact Operators Of The Absolute Fibonacci Series Spaces", *Kragujevac J. Math*., (in press) (2018).

• Gökçe, F. and Sarıgöl, M.A., "Generalization of the space $l(p)$ derived by absolute Euler summability and matrix operators", *J. Inequal. Appl*., 2018(1), 133, (2018).

• Hazar, G.C. and Gökçe, F., "Characterizations of Matrix Transformatios on the Series Spaces Derived by Absolute Factorable Summability", Developments in Science and Engineering, 411-426, (2016).

•Hazar, G., C. and Gökçe, F., "On Summability Methods $|C,0|_k$and $\left|A_f\right|_s$", *Bull. Math. Anal. Appl*,, 8 (1), 22-26, (2016).

Konferans listesi:

• Gökçe, F. and Sarıgöl, M.A., “Absolute Summability Factors Related To The $|\bar{N}, p, \theta|(\mu)$ Summability Method” ICAAMM, 2018 (Gelişim Üniversitesi)

• Gökçe, F. and Sarıgöl, M.A., “Some Matrix Transformations of the Spaces $\left|C_{\lambda,\mu}\right|(p)$ and Its Applications” ICAAMM, 2018 (Gelişim Üniversitesi)

• Gökçe, F. and Sarıgöl, M.A., “The Absolute Cesàro Space On The $l(p)$ With Paranorm And Some Matrix Transformations” ICFAS, 2018 (International Balkan University)

• Gökçe, F. and Sarıgöl, M.A., “Generalization of the Space $l(p)$ Derived by Absolute Euler Summability” ICFAS, 2018 (International Balkan University)

• Gökçe, F. and Sarıgöl, M.A., “Characterizations of Matrix and Compact Operators on the Space $|E_{\theta}^{r}|_{p}$” IECMSA, 2017 (Sakarya Üniversitesi)

• Gökçe, F. and Sarıgöl, M.A., “Matrix and Compact Operators on the Absolute Fibonacci Spaces” IECMSA, 2017 (Sakarya Üniversitesi)

• Gökçe, F. and Sarıgöl, M.A., “Compact and Matrix Mapping on the Spaces $\left|A_{f}^{\theta}\right|_{k}$” IMCOFE, 2017 (Genç Akademisyenler Derneği)

• Gökçe, F. and Sarıgöl, M.A., “On Absolute Euler Spaces and Related Matrix Operators” MME, 2017 (Çankaya Üniversitesi)

• Gökçe, F. and Sarıgöl, M.A., “Compact and matrix mappings on the space $|A_{f}^{\theta}|_{k}$” ICRAPAM, 2017 (İstanbul Ticaret Üniversitesi)

• Gökçe, F. and Sarıgöl, M.A., “On Some Properties About The Space $\left|E_{r}^{\theta}\right|p$” ICAAMM, 2017 (Gelişim Üniversitesi)

• Gökçe, F. and Sarıgöl, M.A., “Matrix Operators on the Series Space $\left|\bar{N}_{p}^{\theta}\right|(\mu)$ and Applications” ICRAPAM, 2016 (İstanbul Ticaret Üniversitesi)

• Gökçe, F. and Sarıgöl, M.A., “Some Matrix Characterizations On The Series Space $\left|\bar{N}_{p}^{\theta}\right|(\mu)$ And Applications” ICAA, 2016 (Ahi Evran Üniversitesi)