

**T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**LİNEER KESİRLİ İNTEGRO-DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN LAGUERRE POLİNOMLARI İLE
SAYISAL ÇÖZÜMLERİ**

DOKTORA TEZİ

DİLEK VAROL BAYRAM

DENİZLİ, OCAK - 2019

**T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**LİNEER KESİRLİ İNTEGRO-DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN LAGUERRE POLİNOMLARI İLE
SAYISAL ÇÖZÜMLERİ**

DOKTORA TEZİ

DİLEK VAROL BAYRAM

DENİZLİ, OCAK - 2019

KABUL VE ONAY SAYFASI

DİLEK VAROL BAYRAM tarafından hazırlanan “**LİNEER KESİRLİ İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN LAGUERRE POLİNOMLARI İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ**” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 04.01.2019 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Danışman
Prof. Dr. Ayşegül DAŞCIOĞLU



Üye
Prof. Dr. İbrahim ÇELİK
Pamukkale Üniversitesi



Üye
Doç. Dr. Handan ÇERDİK YASLAN
Pamukkale Üniversitesi



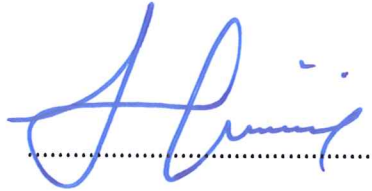
Üye
Prof. Dr. Mehmet SEZER
Celal Bayar Üniversitesi



Üye
Prof. Dr. Suna SALTAN
Süleyman Demirel Üniversitesi



Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 23/01/2019 tarih ve 04/12..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.



Prof. Dr. Uğur YÜCEL

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.



DİLEK VAROL BAYRAM

ÖZET

**LİNEER KESİRLİ İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
LAGUERRE POLİNOMLARI İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ
DOKTORA TEZİ
DİLEK VAROL BAYRAM
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. AYŞEGÜL DAŞCIOĞLU)

DENİZLİ, OCAK - 2019

Bu çalışma beş ana bölümden oluşacak şekilde organize edilmiştir. Birinci bölümde, kesirli integro-diferansiyel denklemler ve Laguerre polinomları ile ilgili literatür bilgileri ile çözümü aranan kesirli integro-diferansiyel denklemin genel hali verilmiştir. İkinci bölümde, kesirli türev tanımları ve özelliklerine yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, Laguerre polinomlarının özellikleri verilmiş, Laguerre polinomlarının Caputo kesirli türevi ve uyumlu kesirli türevi için bağıntılar elde edilmiştir. Dördüncü bölümde, lineer kesirli Fredholm integro-diferansiyel denklemler için Laguerre polinomlarına dayalı bir sıralama yöntemi geliştirilmiş ve bu yöntemin uygulamalarına yer verilmiştir. Son bölümde ise lineer kesirli Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denklemler için Laguerre polinomları üzerine bir sıralama yöntemi sunulmuş ve bu yöntemin doğruluğunu, uygulanabilirliğini ve verimliliğini göstermek için çeşitli örnekler ele alınmıştır.

ANAHTAR KELİMELELER: Kesirli integro-diferansiyel denklem, Laguerre polinomları, sıralama yöntemi.

ABSTRACT

NUMERICAL SOLUTIONS OF LINEER FRACTIONAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS BY LAGUERRE POLYNOMIALS

PH.D THESIS

DİLEK VAROL BAYRAM

PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE

MATHEMATİCS

(SUPERVISOR:PROF. DR. AYŞEGÜL DAŞCIOĞLU)

DENİZLİ, JANUARY 2019

This study is organised as five main chapters. In the first chapter, the literatures on the fractional integro-differential equations and Laguerre polynomials, and the general form of the fractional integro-differential equation that will be solved are given. In the second chapter, the definitions and the properties of the fractional derivatives are introduced. In the third chapter, the properties of the Laguerre polynomials are given and the relations for the Caputo and conformable fractional derivatives of Laguerre polynomials are obtained. In the fourth chapter, a collocation method based on the Laguerre polynomials is developed for the linear fractional Fredholm integro-differenatial equations and the applications of this method are given. In the last chapter, a collocation method based on the Laguerre polynomials is presented for the linear fractional Fredholm-Volterra integro-differenatial equations and some examples are discussed to demonstrate the accuracy, applicability and the efficiency of this method.

KEYWORDS: Fractional integro-differential equation, Laguerre polynomials, Collocation method.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
TABLO LİSTESİ	v
SEMBOL LİSTESİ.....	vi
ÖNSÖZ.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. KESİRLİ TÜREVLER VE ÖZELLİKLERİ	5
2.1 Temel Kavramlar.....	6
2.2 Kesirli Türev Tanımları.....	7
2.3 Caputo Kesirli Türev ve Özellikleri	8
2.4 Uyumlu Kesirli Türev ve Özellikleri.....	10
3. LAGUERRE POLİNOMLARI VE TÜREVLERİ İÇİN TEMEL BAĞINTILAR.....	15
3.1 Laguerre Polinomları ve Özellikleri.....	15
3.2 Laguerre Polinomlarının Caputo Kesirli Türevi için Bağntılar	18
3.3 Laguerre Polinomlarının Uyumlu Kesirli Türevi için Bağntılar	27
4. KESİRLİ FREDHOLM İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMİ İÇİN SIRALAMA YÖNTEMİ	31
4.1 Çözüm Yöntemi	31
4.2 Uygulamalar	35
5. KESİRLİ FREDHOLM-VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMİ İÇİN SIRALAMA YÖNTEMİ	41
5.1 Caputo Türevli Denklemler için Çözüm Yöntemi	41
5.2 Uyumlu Türevli Denklemler için Çözüm Yöntemi.....	44
5.3 Uygulamalar	48
5.3.1 Caputo Türevli Denklemler için Örnekler	48
5.3.2 Uyumlu Türevli Denklemler için Örnekler	58
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	63
7. KAYNAKLAR.....	65
8. ÖZGEÇMİŞ	75

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3.1: İlk beş Laguerre polinomunun grafiği	16
Şekil 4.2: Gerçek çözüm ve yaklaşık çözümlerin karşılaştırılması	39
Şekil 4.3: Örnek 4.2.3 için $N=9$ için hata analizi	39
Şekil 5.4: Gerçek çözüm ile $N=4$ için yaklaşık çözümün karşılaştırılması.....	57
Şekil 5.5: Gerçek çözüm ile $N=9$ için yaklaşık çözümün karşılaştırılması.....	58
Şekil 5.6: Örnek 5.3.2.3 için $N=9$ için mutlak hata sonuçları	61
Şekil 5.7: Örnek 5.3.2.3 için $N=12$ için mutlak hata sonuçları	61
Şekil 5.8: Örnek 5.3.2.3 için $N=17$ için mutlak hata sonuçları	61

TABLO LİSTESİ

Sayfa

Tablo 4.1: Örnek 4.2.3 için mutlak hataların karşılaştırılması.....	38
Tablo 4.2: Örnek 4.2.4 için mutlak hataların karşılaştırılması.....	40
Tablo 5.3: Örnek 5.3.1.6 için mutlak hataların karşılaştırılması.....	53
Tablo 5.4: Örnek 5.3.1.7'nin farklı N değerleri için maksimum hataları.....	54
Tablo 5.5: Örnek 5.3.1.10 için mutlak hataların karşılaştırılması.....	57
Tablo 5.6: Örnek 5.3.2.3'ün farklı N değerleri için mutlak hataları	60
Tablo 5.7: Örnek 5.3.2.4'ün farklı N değerleri için mutlak hataları	62

SEMBOL LİSTESİ

\mathbb{Z}^+	:	Pozitif tam sayılar kümesi
\mathbb{C}	:	Karmaşık sayılar kümesi
\mathbb{R}	:	Reel sayılar kümesi
\mathbb{N}	:	Doğal sayılar kümesi
[.]	:	Tavan fonksiyonu
[.]	:	Taban fonksiyonu

ÖNSÖZ

Doktora tez çalışmam boyunca bilgisini, tecrübesini, ilgisini ve sabrını bir an olsun benden esirgemeyen, ilk günden beri danışmanım olduğu için şükrettiğim ve hayatın her alanında desteğini her daim üzerimde hissettiğim çok değerli danışman hocam Prof. Dr. Ayşegül DAŞCIOĞLU'na, benim bu kadar yanımda olabilmesine sağladığı imkan ve gösterdiği anlayıştan dolayı değerli eşi Kemal DAŞCIOĞLU'na sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, matematik bölümünü seçmemdeki en büyük etken olan, lisansüstü eğitim almam konusunda çok ısrarcı olarak ilk adımı atmamı sağlayan matematik öğretmenim sayın İrfan GÜNEŞ'e, bu yolda birlikte ilerlerken sevinçlerimizi ve üzüntülerimizi birlikte paylaştığımız başta Fadime GÖKÇE ve Adnan KARATAŞ olmak üzere değerli çalışma arkadaşlarıma şükranlarımı bildiririm.

Bu sürecin daha en başında hayatıma giren, her anımı aydınlatan, varlığıyla bile bana en büyük güç kaynağı olan ve annesini çalışmalarıyla paylaşmak durumunda kalan biricik kızıma, akademisyen bir eşe sahip olmanın yükümlüğünün her an farkında olan ve bunun getirdiği zorluklarla birlikte savaştığım hayat arkadaşlarıma hayatımda ve yanımda oldukları için sonsuz teşekkür ederim.

Hayatımın her alanında olduğu gibi bu aşamasında da maddi manevi desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen, sonuç ne olursa her yaptığım la gurur duyan, onlar benim ailem olduğu için kendimi hep çok şanslı hissettiğim canım annem ve canım babama, kardeşlik duygusunun tek tarifi olan kardeşime ömür boyu minneti borç bilirim.

DİLEK VAROL BAYRAM

1. GİRİŞ

İntegro-diferansiyel denklemler 1930 yılında ilk olarak Vito Volterra tarafından ortaya atılmıştır. Volterra, integro-diferansiyel denklemleri bilinmeyen fonksiyonun türevlerini ya da integral işareti altında bilinmeyen fonksiyonu, türevlerini veya ikisini birden içeren denklemler olarak tanımlamıştır. Kesirli analiz kavramının doğuşunun ise ilk olarak 1695 yılında L'Hôpital tarafından Leibniz'e yazılan bir mektupta ortaya atılan bir sorudan kaynaklandığına inanılmaktadır. Bu sorudan sonra yüzyıllar boyu bu kavram üzerinde çalışmalar yapılmış ve 1900'lü yıllara gelindiğinde kesirli türev kavramı büyük ölçüde netlik kazanmıştır.

İntegro-diferansiyel denklemlerin Volterra tarafından tanımlanmasından yaklaşık yarım asır sonra ilk kesirli integro-diferansiyel çalışmaları ortaya çıkmaya başlamıştır. Kesirli integro-diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan yöntemler incelendiğinde ilk olarak Boyadjiev ve diğ. tarafından 1997'de Tau metodu yaklaşımı ve 1998'de parametrelerin değişimi yöntemi ile Serbest Elektron Lazeri denkleminin nümerik çözümlerine ulaşıldığı görülmüştür. Daha sonra Cuesta ve Palencia (2003) kesirli mertebeden integro-diferansiyel denklemlerin çözümü için kesirli yamuk kuralını, Rawashdeh (2006) polinom eğri fonksiyonlarını kullanarak sıralama yöntemini, Momani ve Noor (2006) ile Mittal ve Nigam (2008) Adomian ayrıştırma yöntemini, Al-Jamal ve Rawashdeh (2009) open Newton-Cotes formülünü kullanmışlardır. Bu dönemden sonra daha yoğun çalışılmaya başlanan kesirli integro-diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan yöntemler arasında sıklıkla kullanılan sıralama yöntemidir; bu yöntemde yardımcı olarak Chebyshev polinomları (Sweilam ve Khader 2010, Zhu ve Fan 2012, 2013, Setia ve diğ. 2014^a, 2014^b, Nemati ve diğ. 2016, Wang ve Zhu 2016), Legendre polinomları (Saadatmandi ve Dehghan 2011, Mokhtary 2015, Taheri ve diğ. 2017, Sharma ve diğ. 2018), hibrit fonksiyonları (Ma ve Huang 2013), Bessel fonksiyonları (Parand ve Nikarya 2014, Ordokhani ve diğ. 2016), Jacobi polinomları (Eslahchi ve diğ. 2014, Yang ve diğ. 2014, Ma ve Huang 2014), parçalı polinomlar (Zhao ve diğ. 2014), Genocchi polinomları (Loh ve diğ. 2017) ve sinc fonksiyonları (Alkan ve Hatipoğlu 2017) kullanılmıştır. Ayrıca, kullanılan diğer yöntemler kesirli diferansiyel dönüşüm yöntemi (Arikoglu ve Ozkol

2009, Nazari ve Shahmorad 2010), genelleştirilmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi (Ertürk ve Momani 2010), varyasyonel iterasyon yöntemi (Kurulay ve Secer 2011, Nawaz 2011, Sayevand 2015, Elbeleze ve diğ. 2016), operasyonel Tau yaklaşımı (Karimi Vanani ve Aminataei 2011), Taylor yaklaşımı yöntemi (Huang ve diğ. 2011, Gülsu ve diğ. 2013), homotopi analiz yöntemi (Awawdeh ve diğ. 2011, Zhang ve diğ. 2011, Abbasbandy ve diğ. 2013), operasyonel Tau yöntemi (Mokhtary ve Ghoreishi 2011), Legendre dalgacık yöntemi (Rawashdeh 2011, Meng ve diğ. 2015, Yi ve diğ. 2016), homotopi pertürbasyon yöntemi (Nawaz 2011, Sayevand ve diğ. 2013, Elbeleze ve diğ. 2016), üreten (reproducing) çekirdek yöntemi (Bushnaq ve diğ. 2013, Jiang ve Tian 2015), operasyonel matris yöntemi (Irandoost-pachkin ve diğ. 2013), He'nin varyasyonel iterasyon yöntemi (Irandoost-pachkin ve Abdi-mazraeh 2013), Haar dalgacık yöntemi (Lepik 2009, Saaedi 2013), en küçük kareler yöntemi (Mohammed 2014, Mahdy ve Shwayyea 2016, Oyedepo ve diğ. 2016, Rahimkhani ve diğ. 2017), şapka fonksiyonları yöntemi (Li 2014, Nemati ve Lima 2018), CAS dalgacık yöntemi (Saaedi ve diğ. 2011, Yi ve Huang 2014), Jacobi spektral Galerkin yöntemi (Yang 2015), quadrature kuralları (Nazari Susahab ve diğ. 2015), ayırık Galerkin yöntemi (Mokhtary 2016), Legendre dalgacık Petrov Galerkin yöntemi (Sahu ve Saha Ray 2016), kesirli yarı-spektral integrasyon matrisleri (Tang ve Xu 2016), analitik Lie grup yaklaşımı (Pashayi ve diğ. 2017), B-spline operasyonel matrisi (Ismaeelpour ve diğ. 2017), lineer, kuadratik ve kuadratik-lineer şemalar (Kumar ve diğ. 2017), Euler dalgacık yöntemi (Wang ve Zhu 2017), kesirli kuvvet serileri şeması yöntemi (Jaradat ve diğ. 2018) olarak sıralanabilir.

Bu tezde lineer kesirli Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denklemlerin çözümü araştırılacaktır. Bu problem en geniş haliyle aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\sum_{i=0}^m p_i(x) \mathfrak{D}^{\alpha_i} y(x) + \sum_{i=0}^l q_i(x) y^{(i)}(x) = g(x) + \lambda_1 \int_a^b F(x, t) y(t) dt + \lambda_2 \int_a^x V(x, t) y(t) dt, \quad a \leq x \leq b,$$

$$\sum_{k=0}^{v-1} B_{jk} y^{(k)}(\beta_{jk}) = \mu_j, \quad j = 0, 1, \dots, v-1, \quad v_i - 1 < \alpha_i < v_i.$$

Burada $v_i \in \mathbb{Z}^+$, $m, l \in \mathbb{N}$; $\lambda_1, \lambda_2, B_{jk}, \beta_{jk}, \mu_j \in \mathbb{R}$, $\max\left(\left(\max_{0 \leq i \leq m} v_i\right), l\right) = v$ ve $g(x)$, $F(x, t)$, $V(x, t)$, $p_i(x)$, $q_i(x)$ bilinen fonksiyonlardır. Ayrıca, $y(x)$ bilinmeyen fonksiyonu, $y^{(i)}(x)$, $y(x)$ 'in tam sayı mertebeden türevlerini ve $\mathfrak{D}^{\alpha_i}y(x)$, $y(x)$ 'in kesirli türevlerini ifade eder. $\mathfrak{D}^{\alpha_i}y(x)$ türevinin tanımı tezde yer aldığı bölüme göre $y(x)$ fonksiyonunun Caputo kesirli türevi ya da uyumlu (conformable) kesirli türevi olarak değişebilmektedir.

Bu problemin çözümleri için Laguerre polinomlarına dayalı bir sıralama yöntemi geliştirilmiştir. Tanım aralıklarının genişliği, kolay türevlenebilme ve integrallenebilme özellikleri sayesinde polinomlar ve polinom yaklaşımları uygulamalı matematik alanında sıkça kullanılır. Bunlardan Laguerre polinomları yıllar boyunca birçok denklemin çözümünde kullanılmıştır. Bu denklemlerden özellikle integro-diferansiyel denklemler incelendiğinde Laguerre polinomları yardımı ile çözülmüş integro-diferansiyel denklemler Altarelli-Parisi denklemi (Kobayashi 1995), Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi denklemi (Schoeffel 1999), Q^2 evolution denklemi (Kumano ve Nagai 2004), Amerikan opsiyon modeli (Golbabai 2012), Fredholm integro-diferansiyel denklemler (Gürbüz ve diğ. 2014), pantograf tipi Volterra integro-diferansiyel denklemler (Yüzbaşı 2014), yüksek mertebeden lineer Fredholm integro-diferansiyel denklemler (Baykuş Savaşaneril ve Sezer 2016), lineer olmayan kısmi integro-diferansiyel denklemler (Gürbüz ve Sezer 2017^a), parabolik tipli Volterra kısmi integro-diferansiyel denklemler (Al-Zubaidy 2013, Gürbüz ve Sezer 2017^b) ve delay kısmi fonksiyonel diferansiyel denklemler (Gürbüz ve Sezer 2017^c) olarak sıralanabilir.

Ayrıca, özellikle son yıllarda Laguerre polinomlarının kesirli denklemlerin çözümünde yaygın olarak kullanıldığı söylenebilir. Laguerre polinomları kullanılarak çözümü verilen kesirli denklemler Altarelli-Martinelli denklemi (Rezaei ve Boroun 2011), uzay ve zaman kesirli Fokker-Planck denklemi (Karimi Vanani ve Aminataei 2012), lineer çoklu-mertebeli kesirli diferansiyel denklemler (Bhrawy ve Taha 2012), kesirli gecikmeli diferansiyel denklemler (Khader 2013^a), lineer ve lineer olmayan çok terimli kesirli diferansiyel denklemler (Abdelkawy ve Taha 2014) olarak verilebilir. Bunların yanı sıra genelleştirilmiş Laguerre polinomları yardımıyla çözülen denklemler kesirli dalga denklemi (Sweilam ve diğ. 2015), kesirli Riccati diferansiyel denklemi (Khader ve diğ. 2014), genelleştirilmiş kesirli pantograf denklemi (Bhrawy ve diğ. 2014^a), lineer ve lineer olmayan çok terimli kesirli diferansiyel denklemler

(Khader ve diğ. 2012, Bhrawy ve diğ. 2013^a, Baleanu ve diğ. 2013^a, Yang ve Ma 2018), lineer kesirli Klein-Gordon denklemi (Khader 2013^b), lineer ve lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemler (Bhrawy ve diğ. 2013^b, Bhrawy ve diğ. 2014^c, Aboelenen ve diğ. 2017, Huang ve diğ. 2018) şeklinde sıralanabilir. Modifiye genelleştirilmiş Laguerre polinomlarının kullanıldığı denklemler incelendiğinde lineer ve lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemler (Bhrawy ve diğ. 2012), lineer ve lineer olmayan çok terimli kesirli diferansiyel denklemler (Baleanu ve diğ. 2013^b), değişken mertebeli diferansiyel denklemler (Zaky ve diğ. 2018), kesirli neutral fonksiyonel diferansiyel denklem (Bhrawy ve diğ. 2014^b) gibi denklemlerin çözümlerinin bu polinomlar yardımıyla elde edildiği görülmüştür. Son olarak, modifiye Laguerre dalgacık yöntemi ile lineer ve lineer olmayan gecikmeli kesirli diferansiyel denklemler (Iqbal ve diğ. 2015), kesilmiş modifiye Laguerre polinomları yardımıyla lineer ve lineer olmayan çok terimli kesirli diferansiyel denklemler (Bhrawy ve Alghamdi 2013) çözülmüştür.

Bütün bunlar incelendiğinde Laguerre polinomlarının kesirli integro-diferansiyel denklemlerin çözümünde sadece Mahdy ve Shwayyea (2016) tarafından en küçük kareler yöntemi ile lineer kesirli Fredholm integro-diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanıldığı görülmüştür. Böylelikle literatürde kesirli Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denklemler için Laguerre polinomları kullanılarak herhangi bir çalışma yapılmadığı gözlemlenmiştir. Bu yüzden bu tezin asıl amacı Caputo kesirli ve uyumlu kesirli lineer Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denklemler için Laguerre polinomları yardımı ile bir sıralama yöntemi sunmaktır.

2. KESİRLİ TÜREVLER VE ÖZELLİKLERİ

Kesirli analiz kavramının 1695 yılında L'Hospital tarafından Leibniz'e yazılan bir mektupta ortaya atılan bir sorudan kaynaklandığına inanılmaktadır. Bu mektupta L'Hôpital, Leibniz'in doğal sayı n . mertebeden türevi için geçerli olan $\frac{d^n y}{dx^n}$ notasyonunun $n = 1/2$ olduğunda anlamını aramaktadır. Leibniz, 30 Eylül 1695 tarihli cevabında L'Hospital'e şöyle yazmıştır: "Bu aşikâr bir paradokstur ama bu paradokstan bir gün faydalı sonuçlar elde edilecektir.". Kesirli türevin bundan sonraki her hangi bir bağlamda bahsi 1730'da Euler, 1772'de Lagrange, 1812'de Laplace, 1819'da Lacroix, 1822'de Fourier, 1832'de Liouville, 1847'de Riemann, 1859'da Greer, 1865'te Holmgren, 1867'de Grünwald, 1868'de Letnikov, 1869'da Sonin, 1884'te Laurent, 1888'de Nekrassov, 1890'da Krug ve 1917'de Weyl tarafından yapılmıştır. Aslına bakılırsa, S. F. Lacroix 1819'da basılan 700 sayfalık "*Traite du Calcul Differentiel et du Calcul Integral*" kitabının ikinci basımında iki sayfayı kesirli analize ayırmış ve sonunda kesirli türev için

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dv^{\frac{1}{2}}}v = \frac{2\sqrt{v}}{\sqrt{\pi}}$$

eşitliğini göstermiştir (Kilbas 2006).

Bundan sonraki dönemde birçok kesirli türev tanımı ortaya atılmış ve çalışmalarda kullanılmıştır. Bunlardan bazıları Liouville, Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov, Weyl, Marchaud, Hadamard olarak sıralanabilir (Oliviera 2014). Literatürde var olan tanımlara ek olarak 2014 yılında Khalil ve diğ. tarafından conformable (uyumlu) kesirli türev adı altında yeni bir kesirli türev tanımı ortaya atılmıştır. Çalışmalarımızda yukarıda bahsi geçen türevlerden Caputo kesirli türev veya uyumlu (conformable) kesirli türevi içeren denklemlerin çözümü araştırılmaya çalışılmıştır.

Bu bölüm genel olarak tezde kullanılan tanımlara ve özelliklerine ayrılmıştır. Bölüm 2.1'de bazı temel fonksiyonların tanımlarına, Bölüm 2.2'de bazı bilinen kesirli türevlerin tanımlarına, Bölüm 2.3'te Caputo kesirli türevinin tanımına ve özelliklerine, Bölüm 2.4'te uyumlu kesirli türevin tanımına ve özelliklerine yer verilmiştir.

2.1 Temel Kavramlar

Bu kısımda bundan sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel fonksiyonların tanımları verilmiştir.

2.1.1 Tanım (Euler gamma fonksiyonu) $Re(z) > 0$ olmak üzere

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^1 (\log 1/t)^{z-1} dt$$

integralleri Euler gamma fonksiyonu olarak tanımlanır (Erdelyi 1953). Bu fonksiyonun sağladığı bazı fonksiyonel denklemler aşağıdaki gibi sıralanabilir:

- 1) $\Gamma(z) = \frac{1}{z} \Gamma(z+1)$ ya da $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$
- 2) $\Gamma(z+n) = z(z+1)(z+2) \dots (z+n-1)\Gamma(z)$, $n \in \mathbb{Z}^+$
- 3) $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$.

2.1.2 Tanım (Mittag-Leffler fonksiyonu) Tek değişkenli Mittag-Leffler fonksiyonu $E_{\alpha}(z)$ ile gösterilir ve

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

şeklinde tanımlanır. Çift değişkenli Mittag-Leffler fonksiyonu ise $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanır

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.$$

Burada, $E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z)$ ve $E_{1,1}(z) = E_1(z) = e^z$ eşitliklerinin sağlandığı görülür (Erdelyi 1953).

2.1.3 Tanım (Kummer fonksiyonu, confluent hipergeometrik fonksiyon)

$a \in \mathbb{R}$, $-b \notin \mathbb{N}$ olmak üzere

$${}_1F_1(a; b; z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k) z^k}{\Gamma(b+k) k!}$$

kuvvet serisine confluent hipergeometrik fonksiyon denir. Bu kuvvet serisi bütün kompleks eksen için yakınsaktır (Abramovitz 1965).

2.1.4 Tanım (Gauss hipergeometrik fonksiyon) $a, b \in \mathbb{R}$, $-c \notin \mathbb{N}$ olmak üzere

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{\Gamma(c+k)} \frac{z^k}{k!}$$

kuvvet serisine Gauss hipergeometrik fonksiyon denir. Bu kuvvet serisi $|z| < 1$ eşitsizliğini sağlayan $z \in \mathbb{C}$ için yakınsaktır (Abramovitz 1965).

2.2 Kesirli Türev Tanımları

Bu bölümde sıklıkla kullanılan kesirli türev tanımlarına yer verilmiştir.

2.2.1 Tanım (Riemann-Liouville Kesirli Türevi) $-\infty < a < b < \infty$ reel eksen üzerinde sonlu bir aralık, $a < x < b$, $\alpha \in \mathbb{C}$ ($Re(\alpha) > 0$) ve $n = [Re(\alpha)] + 1$ olmak koşuluyla

$$({}^{RL}D_{a+}^{\alpha}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{y(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt$$

ve

$$({}^{RL}D_{b-}^{\alpha}y)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{y(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt$$

eşitliklerine sırasıyla y fonksiyonunun α . mertebeden sağ ve sol Riemann-Liouville kesirli türevleri denir (Kilbas 2006).

2.2.2 Tanım (Grünwald-Letnikov Kesirli Türevi) $y(x)$, $[a, x]$ aralığında $(n+1)$ kez sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $n < \alpha < n+1$, $x > a$ olmak koşuluyla

$$({}^{GL}D_a^{\alpha}y)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{y^{(k)}(a)(x-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha} y^{(n+1)}(t) dt$$

ifadesine y fonksiyonunun α . mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türevi denir (Podlubny 1999).

2.2.3 Tanım (Hadamard Kesirli Türevi) $-\infty < a < b < \infty$ reel eksen üzerinde sonlu bir aralık, $a < x < b$, $\alpha \in \mathbb{C} (Re(\alpha) > 0)$ ve $n = [Re(\alpha)] + 1$ olmak koşuluyla

$$({}^H D_{a+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(x \frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \left(\log \frac{x}{t} \right)^{n-\alpha+1} \frac{y(t)}{t} dt$$

ve

$$({}^H D_{b-}^\alpha y)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n - \alpha)} \left(x \frac{d}{dx} \right)^n \int_x^b \left(\log \frac{t}{x} \right)^{n-\alpha+1} \frac{y(t)}{t} dt$$

eşitliklerine sırasıyla y fonksiyonunun α . mertebeden sağ ve sol Hadamard kesirli türevi denir (Kilbas 2006).

2.3 Caputo Kesirli Türev ve Özellikleri

Bu bölümde Caputo kesirli türevinin tanımı, genel özellikleri ve bazı sık kullanılan fonksiyonların Caputo kesirli türevleri anlatılmıştır.

2.3.1 Tanım (Caputo Kesirli Türevi) $y(x)$, $[a, b]$ aralığında n kez sürekli türevlenebilir bir fonksiyon, $\alpha \notin \mathbb{N}$, $Re(\alpha) \geq 0$ ve $n = [Re(\alpha)] + 1$ olmak koşuluyla

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x \frac{y^{(n)}(t)}{(x - t)^{\alpha-n+1}} dt \quad (2.1)$$

ve

$$({}^C D_{b-}^\alpha y)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n - \alpha)} \int_x^b \frac{y^{(n)}(t)}{(t - x)^{\alpha-n+1}} dt \quad (2.2)$$

türevlerine sırasıyla α . mertebeden sağ ve sol Caputo kesirli türevleri denir (Kilbas 2006).

2.3.1 Lemma Eğer $\alpha \in \mathbb{N}$ ise y fonksiyonunun Caputo kesirli türevleri

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = y^{(n)}(x) \text{ ve } ({}^C D_{b-}^\alpha y)(x) = (-1)^n y^{(n)}(x)$$

eşitliklerine sahiptir.

Bu tanım ve özelliklerin yanı sıra tüm reel eksen ve yarı eksen Caputo kesirli türev tanımı aşağıdaki şekilde verilebilir.

2.3.2 Tanım (Caputo Kesirli Türevi): $\alpha \notin \mathbb{N}$, $Re(\alpha) > 0$ ve $n = [Re(\alpha)] + 1$ olmak koşuluyla

$$({}^C D_{0+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^x \frac{y^{(n)}(t)}{(x - t)^{\alpha - n + 1}} dt \quad (x \in \mathbb{R}^+)$$

$$({}^C D_-^\alpha y)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n - \alpha)} \int_x^\infty \frac{y^{(n)}(t)}{(t - x)^{\alpha - n + 1}} dt \quad (x \in \mathbb{R}^+)$$

ve

$$({}^C D_+^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{y^{(n)}(t)}{(x - t)^{\alpha - n + 1}} dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$({}^C D_-^\alpha y)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n - \alpha)} \int_x^\infty \frac{y^{(n)}(t)}{(t - x)^{\alpha - n + 1}} dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

eşitlikleri sırasıyla yarı reel eksen ve reel eksen Caputo kesirli türevi tanımlarını verir (Kilbas 2006).

Tezin bundan sonraki bölümlerinde Caputo kesirli türev tanımı için $({}^C D_{0+}^\alpha y)$ notasyonu yerine kolaylık olması açısından D^α gösterimi kullanılacaktır. Şimdi tezimizde sıklıkla kullanacağımız bazı bilinen fonksiyonların Caputo kesirli türevi örneklerine yer verelim.

Kuvvet fonksiyonunun Caputo kesirli türevi $k \in \mathbb{R}$ ve $c > 0$ için

$$D^\alpha x^k = \begin{cases} 0, & k \in \mathbb{N} \text{ ve } k < [\alpha], \\ \frac{\Gamma(k + 1)}{\Gamma(k + 1 - \alpha)} x^{k - \alpha}, & k \in \mathbb{N} \text{ ve } k \geq [\alpha] \text{ veya } k \notin \mathbb{N} \text{ ve } k > [\alpha] \end{cases} \quad (2.3)$$

ve

$$D^\alpha (x + c)^k = \frac{\Gamma(k + 1) c^{k - [\alpha] - 1} x^{[\alpha] - \alpha}}{\Gamma(k + 1 - \alpha) \Gamma([\alpha] + 1 - \alpha)} {}_2F_1(1, [\alpha] - k; [\alpha] - \alpha + 1; -x/c)$$

şeklinde hesaplanır. Bu hesaplamadan Caputo kesirli türev tanımı için iyi bilinen sabit bir sayının türevinin sıfır olması özelliği açıkça görülmektedir.

Ayrıca, üstel fonksiyonunun Caputo kesirli türevini ele alırsak $k \in \mathbb{R}$ için

$$(D^\alpha e^{kx})(x) = k^{[\alpha]} x^{[\alpha]-\alpha} E_{1, [\alpha]-\alpha+1}(kx) \quad (2.4)$$

eşitliğini elde ederiz.

Son olarak $k \in \mathbb{R}$ için trigonometrik fonksiyonların Caputo kesirli türevleri

$$(D^\alpha \sin kx)(x) = \begin{cases} -\frac{ik^{[\alpha]}(-1)^{[\alpha]/2}x^{[\alpha]-\alpha}}{2\Gamma([\alpha]+1-\alpha)} \left[{}_1F_1(1; [\alpha]+1-\alpha; ikx) \right. \\ \left. - {}_1F_1(1; [\alpha]+1-\alpha; -ikx) \right], & [\alpha] \text{ çift ise} \\ \frac{k^{[\alpha]}(-1)^{[\alpha]/2}x^{[\alpha]-\alpha}}{2\Gamma([\alpha]+1-\alpha)} \left[{}_1F_1(1; [\alpha]+1-\alpha; ikx) \right. \\ \left. + {}_1F_1(1; [\alpha]+1-\alpha; -ikx) \right], & [\alpha] \text{ tek ise} \end{cases}$$

ve

$$(D^\alpha \cos kx)(x) = \begin{cases} \frac{k^{[\alpha]}(-1)^{[\alpha]/2}x^{[\alpha]-\alpha}}{2\Gamma([\alpha]+1-\alpha)} \left[{}_1F_1(1; [\alpha]+1-\alpha; ikx) \right. \\ \left. + {}_1F_1(1; [\alpha]+1-\alpha; -ikx) \right], & [\alpha] \text{ çift ise} \\ \frac{ik^{[\alpha]}(-1)^{[\alpha]/2}x^{[\alpha]-\alpha}}{2\Gamma([\alpha]+1-\alpha)} \left[{}_1F_1(1; [\alpha]+1-\alpha; ikx) \right. \\ \left. - {}_1F_1(1; [\alpha]+1-\alpha; -ikx) \right], & [\alpha] \text{ tek ise} \end{cases}$$

olarak hesaplanabilir. Burada $i^2 = -1$ 'dir.

2.4 Uyumlu Kesirli Türev ve Özellikleri

Bu kısımda uyumlu (conformable) kesirli türevin tanımına ve genel özelliklerine yer verilmiştir. Uyumlu kesirli türev ilk olarak 2014'te Khalil ve diğ. tarafından ortaya atılmış, klasik türeve benzerliği ve kolay anlaşılabilir olması özelliğiyle dikkat çekmiştir. Daha sonra bu türevin özellikleri üzerine olan çalışmalar ortaya çıkmış ve üç yıl gibi kısa bir sürede uyumlu kesirli türevli denklemlerin

çözümlerinin araştırıldığı birçok çalışmaya rastlanmıştır. Öncelikle bu türevin tanımını verelim.

2.4.1 Tanım $f: [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun α . mertebeden uyumlu kesirli türevi

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}, \quad \alpha \in (0,1) \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer f fonksiyonu $a > 0$ olmak üzere herhangi bir $(0, a)$ aralığında α -türevlenebilir ve $\lim_{t \rightarrow 0^+} T_\alpha(f)(t)$ limiti var ise

$$T_\alpha(f)(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} T_\alpha(f)(t)$$

olarak hesaplanabilir (Khalil 2014).

Bu tanımın genişletilmiş hali olan tanıma Abdeljawad'ın 2015'teki makalesinde yer verilmiştir.

2.4.2 Tanım $f: [a, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. f fonksiyonunun α . mertebeden uyumlu kesirli türevi

$$T_\alpha^a(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon(t-a)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

ve

$${}^bT_\alpha(f)(t) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon(b-t)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

şeklinde tanımlanır ve $a = 0$ durumunda kısaca T_α yazılır. Eğer f fonksiyonu herhangi bir (a, b) aralığında α -türevlenebilir ise

$$T_\alpha^a(f)(a) = \lim_{t \rightarrow a^+} T_\alpha^a(f)(t) \text{ ve } {}^bT_\alpha(f)(b) = \lim_{t \rightarrow b^-} {}^bT_\alpha(f)(t)$$

olarak hesaplanabilir (Abdeljawad 2015).

Uyumlu kesirli türevin diğer özelliklerini incelemek için aşağıdaki teoremleri ele alalım.

2.4.1 Teorem $\alpha \in (0,1]$ ve f, g herhangi bir $t > 0$ noktasında α - türevlenebilir fonksiyonlar olsun. O zaman T_α uyumlu kesirli türevi aşağıdaki özelliklere sahiptir (Khalil 2014):

$$1) T_\alpha(cf + dg) = cT_\alpha(f) + dT_\alpha(g) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

$$2) T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha} \quad \forall p \in \mathbb{R}.$$

$$3) T_\alpha(\lambda) = 0 \quad (\lambda, \text{sabit}).$$

$$4) T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f).$$

$$5) T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}.$$

6) Bunlara ek olarak, eğer f fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyon ise $T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}$ olur.

2.4.2 Teorem (Rolle Teoremi) $a > 0$ olmak üzere $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

- (i) $f, [a, b]$ aralığında sürekli,
- (ii) $f, \alpha \in (0,1)$ için α -türevlenebilir,
- (iii) $f(a) = f(b)$

koşullarını sağlayan $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. O halde, öyle bir $c \in (a, b)$ vardır ki bu c sayısı için

$$T_\alpha(f)(c) = 0$$

olur (Khalil 2014).

2.4.3 Teorem (Ortalama Değer Teoremi) $a > 0$ olmak üzere $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

- (i) $f, [a, b]$ aralığında sürekli,
- (ii) $f, \alpha \in (0,1)$ için α -türevlenebilir,

koşullarını sağlayan $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. O halde, öyle bir $c \in (a, b)$ vardır ki bu c sayısı için

$$T_\alpha(f)(c) = \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{a}(b^\alpha - a^\alpha)}$$

olur (Khalil 2014).

2.4.4 Teorem (Zincir Kuralı) $\alpha \in (0,1]$ için f , g herhangi bir $t > 0$ noktasında α - türevlenebilir fonksiyonlar ve $h(t) = f(g(t))$ olsun. O zaman $h(t)$ fonksiyonu da $t > 0$ ve $g(t) \neq 0$ olduğunda α - türevlenebilirdir; bu türev şöyle yazılabilir (Abdeljawad 2015):

$$T_\alpha(h)(t) = T_\alpha(f)(g(t)).T_\alpha(g)(t).g(t)^{\alpha-1}$$

$t = 0$ durumunda da zincir kuralını aşağıdaki şekilde tanımlarız:

$$T_\alpha(h)(0) = \lim_{t \rightarrow 0} T_\alpha(f)(g(t)).T_\alpha(g)(t).g(t)^{\alpha-1}.$$

Şimdiye kadar verilen tanım ve teoremler $\alpha \in (0,1]$ aralığındaki türevler içindi. Aşağıdaki tanımda Tanım 2.4.1'in herhangi bir $\alpha \in (n, n + 1]$ aralığına genişletilmiş halini ele alalım.

2.4.3 Tanım $t > 0$ için f fonksiyonu n kez türevlenebilir bir fonksiyon ve $\alpha \in (n, n + 1]$ olmak üzere f fonksiyonunun α . mertebeden uyumlu kesirli türevi

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f^{(\lfloor \alpha \rfloor - 1)}(t + \varepsilon t^{(\lfloor \alpha \rfloor - \alpha)}) - f(t)}{\varepsilon}$$

şeklinde tanımlanır.

Uyumlu kesirli türevin tam sayı mertebeden klasik türevle ilişkisini daha iyi gösterebilmek için tezde kullanılacak olan bazı bilinen fonksiyonların $0 < \alpha \leq 1$ için α . mertebeden uyumlu kesirli türevi örneklerine yer verilecektir.

Kuvvet fonksiyonunun Caputo kesirli türevi $k \in \mathbb{R}$ için

$$T_\alpha(x^k)(x) = kx^{k-\alpha} \quad (2.6)$$

şeklinde hesaplanır. Sabit fonksiyonun türevi ise aynı Caputo kesirli türevinde olduğu gibi sifıra eşittir. $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$T_\alpha(c)(x) = 0 \quad (2.7)$$

olduğu görülür. Ayrıca, üstel fonksiyonunun uyumlu kesirli türevi için $k \in \mathbb{R}$ için

$$T_\alpha(e^{kx})(x) = kx^{1-\alpha}e^{kx} \quad (2.8)$$

eşitliği elde edilir. Son olarak $k \in \mathbb{R}$ için trigonometrik fonksiyonların uyumlu kesirli türevleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$T_\alpha(\sin kx)(x) = kx^{1-\alpha} \cos kx, \quad (2.9)$$

$$T_\alpha(\cos kx)(x) = -kx^{1-\alpha} \sin kx. \quad (2.10)$$

3. LAGUERRE POLİNOMLARI VE TÜREVLERİ İÇİN TEMEL BAĞINTILAR

Tanım aralıklarının genişliği, kolay türevlenebilme ve integrallenebilme özellikleri sayesinde polinomlar ve polinom yaklaşımları uygulamalı matematik alanında sıkça kullanılır. Bu tezin temelini ise Laguerre polinomları ve bu polinomların integro-diferansiyel denklem çözümünü bulmakta kullanılışı oluşturmaktadır. Bu bölüm genel itibariyle üç alt bölümden meydana gelmektedir. Bölüm 3.1’de Laguerre polinomlarının tanımı ve özelliklerine yer verilmiştir. Laguerre polinomlarının Caputo kesirli türevi için bulunan bağıntılar Bölüm 3.2’de ve uyumlu kesirli türevi için bulunan bağıntılar Bölüm 3.3’te anlatılmıştır.

3.1 Laguerre Polinomları ve Özellikleri

Bu bölümde Laguerre polinomlarının tanımı ve özelliklerine yer verilmiştir. Bunun için öncelikle ikinci mertebeden lineer bir diferansiyel denklem olan Laguerre denklemini verilsin

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + (1 - x) \frac{dy}{dx} + ny = 0.$$

Bu denklemin tekil olmayan çözümleri yalnızca n negatif olmayan tam sayı ise vardır. Bu çözümlere de Laguerre polinomları adı verilmiştir.

3.1.1 Tanım n bir doğal sayı olmak üzere n . mertebeden Laguerre polinomları $L_n(x)$ ile gösterilir ve

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!(k!)^2} x^k, \quad n = 0,1,2, \dots \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır. n 'nin ilk birkaç değeri için Laguerre polinomlarının açık hali aşağıdaki gibi sıralanabilir:

$$L_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = -x + 1$$

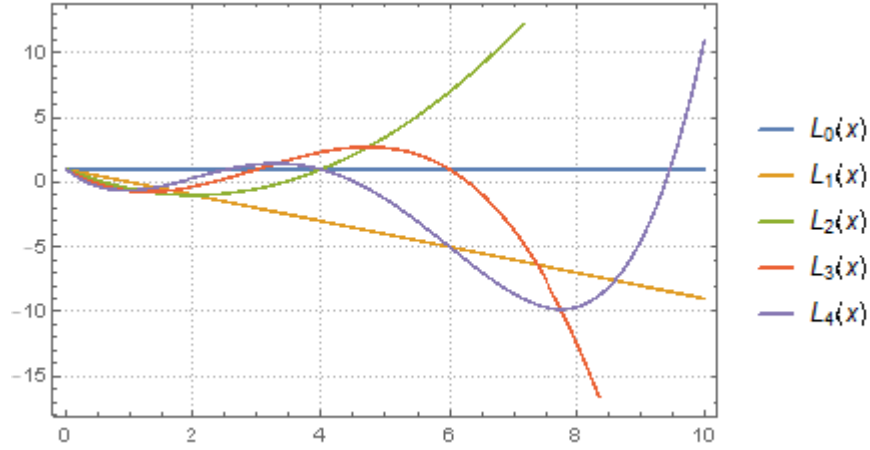
$$L_2(x) = \frac{1}{2!}(x^2 - 4x + 2)$$

$$L_3(x) = \frac{1}{3!}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)$$

$$L_4(x) = \frac{1}{4!}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24)$$

⋮

Yukarıda açık hali verilmiş ilk beş Laguerre polinomunun grafiği aşağıda Şekil 3.1'de verilmiştir.



Şekil 3.1: İlk beş Laguerre polinomunun grafiği

3.1.1 Teorem (Üreten Fonksiyon) $L_n(x)$, Laguerre polinomları için bir üreten fonksiyon

$$\frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{(1-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n$$

şeklindedir. Burada $|t| < 1$ 'dir (Bell 1968).

3.1.2 Teorem $L_n(x)$, Laguerre polinomları için

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

şeklinde verilen ifade bu polinomlar için alternatif bir tanım olarak kullanılır (Bell 1968).

3.1.3 Teorem $L_n(x)$, Laguerre polinomları ve türevlerinin $x = 0$ 'daki değerleri $L_n(0) = 1$ ve $L_n'(0) = -n$ olarak hesaplanır (Bell 1968).

3.1.4 Teorem (Laguerre polinomlarının dikliği) Laguerre polinomları $[0, \infty)$ aralığında $\omega(x) = e^{-x}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal bir sistem oluştururlar. Yani

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = \delta_{nm}$$

ortogonalite özelliğinin sağlandığı görülür. Burada δ_{nm} fonksiyonu Kronecker delta fonksiyonunu ifade eder (Bell 1968).

3.1.5 Teorem (Tekrarlama Bağlıları) $L_n(x)$, Laguerre polinomları için tekrarlama bağıntıları aşağıdaki gibi verilebilir (Bell 1968):

- (i) $(n + 1)L_{n+1}(x) = (2n + 1 - x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)$, $n \geq 1$.
- (ii) $xL_n'(x) = nL_n(x) - nL_{n-1}(x)$, $n \geq 1$, $L_0'(x) = 0$.
- (iii) $L_n'(x) = -\sum_{r=0}^{n-1} L_r(x)$.

3.1.6 Teorem $(0, \infty)$ aralığında tanımlı gerçel fonksiyon $f(x)$, $0 < x_1 < x_2 < \infty$ olmak üzere her $[x_1, x_2]$ sonlu aralığında parçalı düzgün ise ve

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f^2(x) dx$$

integrali sonlu ise $c_n = \frac{n!}{\Gamma(n+1)} \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) L_n(x) dx$ katsayıları ile

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n(x)$$

serisi $f(x)$ fonksiyonunun her süreklilik noktasında $f(x)$ fonksiyonuna yakınsar. Herhangi bir süreksizlik noktasında bu seri

$$\frac{1}{2} [f(x + 0) - f(x - 0)]$$

noktasına yakınsar.

Şimdi verilecek iki lemmada bazı fonksiyonların Laguerre polinomu seri açılımları bulunabilir.

3.1.1 Lemma $v > -\frac{1}{2}$ olmak üzere x^v fonksiyonunun Laguerre seri açılımı

$$x^v = \Gamma(v+1)\Gamma(v+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n L_n(x)}{\Gamma(n+1)\Gamma(v-n+1)}$$

olur (Lebedev 1965). Ayrıca, eğer v bir doğal sayı p 'ye eşit olursa belirli bir değerden sonra serinin elemanları sıfırlanır

$$x^p = (p!)^2 \sum_{n=0}^p \frac{(-1)^n L_n(x)}{n!(p-n)!} = p! \sum_{n=0}^p (-1)^n \binom{p}{n} L_n(x). \quad (3.2)$$

3.1.2 Lemma $a > -\frac{1}{2}$ olmak üzere e^{-ax} fonksiyonunun Laguerre seri açılımı

$$e^{-ax} = (a+1)^{-\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{a+1}\right)^n L_n(x)$$

olarak verilir (Lebedev 1965).

3.2 Laguerre Polinomlarının Caputo Kesirli Türevi için Bağlılar

Bu bölümde Laguerre polinomlarının Caputo kesirli türev formüllerinin elde edilişi ve bunlar için matris bağıntılarının çıkarılışından bahsedilecektir. Bu bağıntılar verildiği şekliyle literatürde ilk defa elde edilmiş, ispatlanmış ve kullanılmıştır. İlk olarak Laguerre polinomlarının Caputo kesirli türevini Laguerre polinomları cinsinden iki ayrı şekilde inceleyeceğimiz iki teorem ve bunların ispatları verilecektir. Bu teoremler kullanılarak elde edilen matrisler çalışmamızın temelini oluşturmaktadır. Bu matrislerin üst üçgensel matris olması sebebiyle hesaplamalarda büyük kolaylık sağladığı görülmüştür.

3.2.1 Teorem $L_n(x)$, n . mertebeden Laguerre polinomunu temsil etmek üzere, Laguerre polinomlarının Caputo kesirli türevi yine Laguerre polinomları cinsinden $n < [\alpha]$ iken

$$D^\alpha L_n(x) = 0, \quad (3.3)$$

diğer durumlarda

$$D^\alpha L_n(x) = x^{-\alpha} \sum_{k=[\alpha]}^n \sum_{r=0}^k (-1)^{r+k} \frac{k!}{\Gamma(k+1-\alpha)} \binom{n}{k} \binom{k}{r} L_r(x) \quad (3.4)$$

olarak hesaplanır.

İspat Laguerre polinomlarının tanımını kullanarak ispata başlayalım.

$$D^\alpha L_n(x) = D^\alpha \left\{ \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)! (k!)^2} x^k \right\}$$

olmak üzere Caputo kesirli türevinin lineerlik özelliğini kullanarak

$$D^\alpha L_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)! (k!)^2} D^\alpha (x^k) \quad (3.5)$$

eşitliğini elde ederiz. Bu aşamada, x^k , $k \in \mathbb{N}$ fonksiyonunun Caputo kesirli türevi

$$D^\alpha x^k = \begin{cases} 0, & k < [\alpha] \\ \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)} x^{k-\alpha}, & k \geq [\alpha] \end{cases}$$

(3.5)'te yerine konulursa $n < [\alpha]$ için $D^\alpha L_n(x) = 0$, aksi taktirde

$$D^\alpha L_n(x) = \sum_{k=[\alpha]}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{\Gamma(k+1-\alpha)} x^{k-\alpha}$$

olduğu görülür. Bu eşitlikte $x^{-\alpha}$ terimi toplamın dışına alınarak $n \geq [\alpha]$ için (3.6) ile verilen sonuç elde edilir

$$D^\alpha L_n(x) = x^{-\alpha} \sum_{k=[\alpha]}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{\Gamma(k+1-\alpha)} x^k. \quad (3.6)$$

Bu noktadan sonra x^k fonksiyonunun (3.2) eşitliği ile verilen Laguerre seri açılımı kullanılarak istenilen sonuç elde edilir.

3.2.2 Teorem $L_n(x)$, n . mertebeden Laguerre polinomunu temsil etmek üzere, Laguerre polinomlarının kesirli türevi yine Laguerre polinomları cinsinden $n < [\alpha]$ iken

$$D^\alpha L_n(x) = 0, \quad (3.7)$$

diğer durumlarda

$$D^\alpha L_n(x) = x^{1-\alpha} \sum_{k=[\alpha]}^n \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^{r+k} \frac{(k-1)!}{\Gamma(k+1-\alpha)} \binom{n}{k} \binom{k-1}{r} L_r(x) \quad (3.8)$$

olarak hesaplanır.

İspat Laguerre polinomlarının tanımını kullanarak ispata başlayalım.

$$D^\alpha L_n(x) = D^\alpha \left\{ \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)! (k!)^2} x^k \right\}$$

olmak üzere Caputo kesirli türevinin lineerlik özelliğini kullanarak (3.5) eşitliği elde edilir. Bu aşamada, x^k , $k \in \mathbb{N}$ fonksiyonunun Caputo kesirli türevi

$$D^\alpha x^k = \begin{cases} 0, & k < [\alpha] \\ \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)} x^{k-\alpha}, & k \geq [\alpha] \end{cases}$$

(3.5)'te yerine konulursa $n < [\alpha]$ için $D^\alpha L_n(x) = 0$, aksi taktirde

$$D^\alpha L_n(x) = \sum_{k=[\alpha]}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{\Gamma(k+1-\alpha)} x^{k-\alpha}$$

olduğu görülür. Bu eşitlikte $x^{1-\alpha}$ terimi toplamın dışına alınarak $n \geq [\alpha]$ için (3.9) ile verilen sonuç elde edilir

$$D^\alpha L_n(x) = x^{1-\alpha} \sum_{k=[\alpha]}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{\Gamma(k+1-\alpha)} x^{k-1}. \quad (3.9)$$

Bu noktadan sonra x^{k-1} , $k \geq 1$ fonksiyonunun (3.2) eşitliği ile verilen Laguerre seri açılımı kullanılarak istenilen sonuç elde edilir.

3.2.1 Tanım (Laguerre Matrisi) $L_n(x)$, $n = 0, 1, \dots, N$, n . mertebeden Laguerre polinomunu temsil etmek üzere $1 \times (N + 1)$ boyutlu Laguerre matrisi $\mathbf{L}(x)$ sembolü ile gösterilir ve

$$\mathbf{L}(x) = [L_0(x) \quad L_1(x) \quad \cdots \quad L_N(x)] \quad (3.10)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu bölümün asıl amacı $\mathbf{L}(x)$ Laguerre matrisinin α . mertebeden Caputo kesirli türevi için farklı matris bağıntıları elde etmektir. Kesirli türevlere geçmeden önce $\mathbf{L}(x)$ matrisinin tam sayı mertebeden türevleri ile arasındaki ilişkiye bakılırsa bu ilişki kolayca gözlemlenebilir ve Yüzbaşı (2014) tarafından verilmiştir. Buna göre $\mathbf{L}^{(i)}(x)$ ($i \in \mathbb{N}$), $\mathbf{L}(x)$ matrisinin i . mertebeden türevi olmak üzere aşağıdaki bağıntı sağlanır

$$\mathbf{L}^{(i)}(x) = \mathbf{L}(x)\mathbf{M}^i, \quad i = 0, 1, \dots \quad (3.11)$$

Burada \mathbf{M} matrisi $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutlu bir kare matristir ve

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır.

Şimdi Teorem 3.2.1 ve Teorem 3.2.2 ile elde ettiğimiz sonuçların Laguerre matrisi üzerindeki uygulamalarına ve bu işlem sonucunda ortaya çıkan matris bağıntılarına göz atalım.

3.2.3 Teorem $\mathbf{L}(x)$, $1 \times (N + 1)$ boyutlu Laguerre matrisi ve $D^\alpha \mathbf{L}(x)$ matrisi Laguerre matrisinin α . mertebeden Caputo kesirli türevi olmak üzere $\mathbf{L}(x)$ matrisinin Caputo kesirli türevi

$$D^\alpha \mathbf{L}(x) = x^{-\alpha} \mathbf{L}(x) \bar{\mathbf{S}}_\alpha \quad (3.12)$$

olarak elde edilir. Burada $\bar{\mathbf{S}}_\alpha$ matrisi $(N + 1)$ boyutlu kare bir matris olup

$$\bar{\mathbf{S}}_\alpha = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} \bar{S}_{0,0} & \binom{0}{0} \bar{S}_{0,1} + \binom{1}{0} \bar{S}_{1,1} & \binom{0}{0} \bar{S}_{0,2} + \binom{1}{0} \bar{S}_{1,2} + \binom{2}{0} \bar{S}_{2,2} & \cdots & \sum_{k=0}^N \binom{k}{0} \bar{S}_{k,N} \\ 0 & -\binom{1}{1} \bar{S}_{1,1} & -\left[\binom{1}{1} \bar{S}_{1,2} + \binom{2}{1} \bar{S}_{2,2} \right] & \cdots & -\sum_{k=1}^N \binom{k}{1} \bar{S}_{k,N} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} \bar{S}_{2,2} & \cdots & \sum_{k=2}^N \binom{k}{2} \bar{S}_{k,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (-1)^N \binom{N}{N} \bar{S}_{N,N} \end{bmatrix}$$

ya da

$$\bar{S}_{\alpha} = \left[(-1)^i \sum_{k=i}^j \binom{k}{i} \bar{S}_{k,j} \right], \quad i, j = 0, 1, \dots, N$$

şeklinde tanımlanır. Bu matrisin elemanlarındaki $\bar{S}_{k,j}$ teriminin açık hali şöyledir:

$$\bar{S}_{k,j} = \begin{cases} (-1)^k \frac{k!}{\Gamma(k+1-\alpha)} \binom{j}{k}, & [\alpha] \leq k \leq j \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

İspat Laguerre matrisinin tanımı ve α . mertebeden Caputo kesirli türevi ele alınarak

$$\mathbf{L}(x) = [L_0(x) \quad L_1(x) \quad \cdots \quad L_N(x)]$$

$$D^\alpha \mathbf{L}(x) = [D^\alpha L_0(x) \quad D^\alpha L_1(x) \quad \cdots \quad D^\alpha L_N(x)] \quad (3.13)$$

olduğu görülür. (3.13) eşitliğindeki matrisin j . satırını açık olarak görebilmek için Teorem 3.2.1'den başlansın, $j < [\alpha]$ için $D^\alpha L_j(x) = 0$ ve $j \geq [\alpha]$ için

$$D^\alpha L_j(x) = x^{-\alpha} \sum_{k=[\alpha]}^j \sum_{r=0}^k (-1)^{r+k} \frac{k!}{\Gamma(k+1-\alpha)} \binom{j}{k} \binom{k}{r} L_r(x).$$

Bu noktada, $\bar{S}_{k,j}$ terimi

$$\bar{S}_{k,j} = \begin{cases} (-1)^k \frac{k!}{\Gamma(k+1-\alpha)} \binom{j}{k}, & [\alpha] \leq k \leq j \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde tanımlandığında bütün j 'ler için

$$D^\alpha L_j(x) = x^{-\alpha} \sum_{k=0}^j \sum_{r=0}^k (-1)^r \binom{k}{r} \bar{S}_{k,j} L_r(x) \quad (3.14)$$

eşitliği elde edilir. Bu aşamada her $j \in \{0,1, \dots, N\}$ için (3.14) denkleminin sonucunu inceleyelim.

$j = 0$ için

$$\begin{aligned} D^\alpha L_0(x) &= x^{-\alpha} \sum_{k=0}^0 \sum_{r=0}^k (-1)^r \binom{k}{r} \bar{S}_{k,0} L_r(x) \\ &= x^{-\alpha} \binom{0}{0} \bar{S}_{0,0} L_0(x). \end{aligned}$$

$j = 1$ için

$$\begin{aligned} D^\alpha L_1(x) &= x^{-\alpha} \sum_{k=0}^1 \sum_{r=0}^k (-1)^r \binom{k}{r} \bar{S}_{k,1} L_r(x) \\ &= x^{-\alpha} \left\{ \sum_{r=0}^0 (-1)^r \binom{0}{r} \bar{S}_{0,1} L_r(x) + \sum_{r=0}^1 (-1)^r \binom{1}{r} \bar{S}_{1,1} L_r(x) \right\} \\ &= x^{-\alpha} \left\{ \left(\binom{0}{0} \bar{S}_{0,1} + \binom{1}{0} \bar{S}_{1,1} \right) L_0(x) - \binom{1}{1} \bar{S}_{1,1} L_1(x) \right\}. \end{aligned}$$

$j = 2$ için

$$\begin{aligned} D^\alpha L_2(x) &= x^{-\alpha} \sum_{k=0}^2 \sum_{r=0}^k (-1)^r \bar{S}_{k,2} \binom{k}{r} L_r(x) \\ &= x^{-\alpha} \left\{ \sum_{r=0}^0 (-1)^r \bar{S}_{0,2} \binom{0}{r} L_r(x) + \sum_{r=0}^1 (-1)^r \bar{S}_{1,2} \binom{1}{r} L_r(x) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r=0}^2 (-1)^r \bar{S}_{2,2} \binom{2}{r} L_r(x) \right\} \\ &= x^{-\alpha} \left\{ \left(\binom{0}{0} \bar{S}_{0,2} + \binom{1}{0} \bar{S}_{1,2} + \binom{2}{0} \bar{S}_{2,2} \right) L_0(x) \right. \\ &\quad \left. - \left(\binom{1}{1} \bar{S}_{1,2} + \binom{2}{1} \bar{S}_{2,2} \right) L_1(x) + \binom{2}{2} \bar{S}_{2,2} L_2(x) \right\}. \end{aligned}$$

$j = j$ için

$$\begin{aligned}
D^\alpha L_j(x) &= x^{-\alpha} \sum_{k=0}^j \sum_{r=0}^k (-1)^r \bar{S}_{k,j} \binom{k}{r} L_r(x) \\
&= x^{-\alpha} \left\{ \sum_{k=0}^j \binom{k}{0} \bar{S}_{k,j} L_0(x) - \sum_{k=1}^j \binom{k}{1} \bar{S}_{k,j} L_1(x) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=2}^j \binom{k}{2} \bar{S}_{k,j} L_2(x) - \dots + (-1)^j \binom{j}{j} \bar{S}_{j,j} L_j(x) \right\}.
\end{aligned}$$

Son olarak $j = N$ için

$$\begin{aligned}
D^\alpha L_N(x) &= x^{-\alpha} \sum_{k=0}^N \sum_{r=0}^k (-1)^r \binom{k}{r} \bar{S}_{k,N} L_r(x) \\
&= x^{-\alpha} \left\{ \sum_{k=0}^N \binom{k}{0} \bar{S}_{k,N} L_0(x) - \sum_{k=1}^N \binom{k}{1} \bar{S}_{k,N} L_1(x) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=2}^N \binom{k}{2} \bar{S}_{k,N} L_2(x) - \dots + (-1)^N \binom{N}{N} \bar{S}_{N,N} L_N(x) \right\}.
\end{aligned}$$

Bu sonuçlar incelendiğinde $D^\alpha \mathbf{L}(x)$ matrisinin i . satır ve j . sütundaki elemanın

$$x^{-\alpha} \sum_{k=i}^j (-1)^i \binom{k}{i} \bar{S}_{k,j} L_i(x)$$

olduğu görülür. Bu noktadan sonra $D^\alpha \mathbf{L}(x)$ ile $\mathbf{L}(x)$ matrisi arasındaki ilişkiye bakıldığında (3.12) eşitliği elde edilir.

3.2.4 Teorem $\mathbf{L}(x)$, $1 \times (N + 1)$ boyutlu Laguerre matrisi ve $D^\alpha \mathbf{L}(x)$ matrisi Laguerre matrisinin α . mertebeden Caputo kesirli türevi olmak üzere $\mathbf{L}(x)$ matrisinin Caputo kesirli türevi

$$D^\alpha \mathbf{L}(x) = x^{1-\alpha} \mathbf{L}(x) \mathbf{S}_\alpha \quad (3.15)$$

olarak elde edilir. Burada \mathbf{S}_α matrisi $(N + 1)$ boyutlu kare bir matris olup

$$\mathbf{S}_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & \binom{0}{0} S_{1,1} & \binom{0}{0} S_{1,2} + \binom{1}{0} S_{2,2} & \sum_{k=1}^N \binom{k-1}{0} S_{k,N} \\ 0 & 0 & -\binom{1}{1} S_{2,2} & \dots - \sum_{k=2}^N \binom{k-1}{1} S_{k,N} \\ 0 & 0 & 0 & \sum_{k=3}^N \binom{k-1}{2} S_{k,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots (-1)^{N-1} S_{N,N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ya da

$$\mathbf{S}_\alpha = \left[(-1)^i \sum_{k=i+1}^j \binom{k-1}{i} S_{k,j} \right], \quad i, j = 0, 1, \dots, N$$

şeklinde tanımlanır. Bu matrisin girdilerindeki $S_{k,j}$ teriminin açık hali de şu şekilde verilir:

$$S_{k,j} = \begin{cases} (-1)^k \frac{(k-1)!}{\Gamma(k+1-\alpha)} \binom{j}{k}, & [\alpha] \leq k \leq j \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

İspat Laguerre matrisi $\mathbf{L}(x)$ ve α . mertebeden Caputo kesirli türevi $D^\alpha \mathbf{L}(x)$ ele alınsın. Teorem 3.2.2 göz önünde bulundurularak $j < [\alpha]$ için $D^\alpha L_j(x) = 0$ ve $j \geq [\alpha]$ için

$$D^\alpha L_j(x) = x^{1-\alpha} \sum_{k=[\alpha]}^j \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^{r+k} \frac{(k-1)!}{\Gamma(k+1-\alpha)} \binom{j}{k} \binom{k-1}{r} L_r(x).$$

Bu noktada, $S_{k,j}$ terimi

$$S_{k,j} = \begin{cases} (-1)^k \frac{(k-1)!}{\Gamma(k+1-\alpha)} \binom{j}{k}, & [\alpha] \leq k \leq j \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde tanımlandığında $D^\alpha L_0(x) = 0$ ve $j = 1, 2, \dots, N$ için

$$D^\alpha L_j(x) = x^{1-\alpha} \sum_{k=1}^j \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r \binom{k-1}{r} S_{k,j} L_r(x) \quad (3.16)$$

eşitliği elde edilir. Bu aşamada her $j \in \{0, 1, \dots, N\}$ için (3.16) denkleminin sonucunu inceleyelim.

$j = 0$ için

$$D^\alpha L_0(x) = 0.$$

$j = 1$ için

$$\begin{aligned} D^\alpha L_1(x) &= x^{1-\alpha} \sum_{k=1}^1 \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r \binom{k-1}{r} S_{k,1} L_r(x) \\ &= x^{1-\alpha} \sum_{r=0}^0 (-1)^r \binom{0}{r} S_{1,1} L_r(x) \\ &= x^{1-\alpha} \binom{0}{0} S_{1,1} L_0(x). \end{aligned}$$

$j = 2$ için

$$\begin{aligned} D^\alpha L_2(x) &= x^{1-\alpha} \sum_{k=1}^2 \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r \binom{k-1}{r} S_{k,2} L_r(x) \\ &= x^{1-\alpha} \left\{ \sum_{r=0}^0 (-1)^r \binom{0}{r} S_{1,2} L_r(x) + \sum_{r=0}^1 (-1)^r \binom{1}{r} S_{2,2} L_r(x) \right\} \\ &= x^{1-\alpha} \left\{ \left(\binom{0}{0} S_{1,2} + \binom{1}{0} S_{2,2} \right) L_0(x) - \binom{1}{1} S_{2,2} L_1(x) \right\}. \end{aligned}$$

$j = j$ için

$$\begin{aligned} D^\alpha L_j(x) &= x^{1-\alpha} \sum_{k=1}^j \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r S_{k,j} \binom{k-1}{r} L_r(x) \\ &= x^{1-\alpha} \left\{ \sum_{k=1}^j \binom{k-1}{0} S_{k,j} L_0(x) - \sum_{k=2}^j \binom{k-1}{1} S_{k,j} L_1(x) - \dots \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{j-1} \binom{j-1}{j-1} S_{j,j} L_{j-1}(x) \right\}. \end{aligned}$$

Son olarak $j = N$ için

$$\begin{aligned}
D^\alpha L_N(x) &= x^{1-\alpha} \sum_{k=1}^N \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r S_{k,j} \binom{k-1}{r} L_r(x) \\
&= x^{1-\alpha} \left\{ \sum_{k=1}^N \binom{k-1}{0} S_{k,j} L_0(x) - \sum_{k=2}^N \binom{k-1}{1} S_{k,j} L_1(x) - \dots \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{N-1} \binom{N-1}{N-1} S_{N,N} L_{N-1}(x) \right\}.
\end{aligned}$$

Bu durumda $D^\alpha \mathbf{L}(x)$ matrisinin 0. sütunundaki tüm elemanları ile N . satırındaki tüm elemanlarının 0 ve diğer durumlarda i . satır j . sütundaki elemanın

$$x^{1-\alpha} \sum_{k=i+1}^j (-1)^i \binom{k-1}{i} S_{k,j} L_i(x)$$

olduğu görülür. Bu noktadan sonra $D^\alpha \mathbf{L}(x)$ ile $\mathbf{L}(x)$ matrisi arasındaki ilişkiye bakıldığında (3.15) eşitliği elde edilir.

$\bar{\mathbf{S}}_\alpha$ ve \mathbf{S}_α matrislerinin özelliklerine göz atıldığında $\bar{\mathbf{S}}_\alpha$ matrisi üst üçgensel bir matris iken \mathbf{S}_α matrisi tam üst üçgensel bir matristir. Bu durum \mathbf{S}_α matrisi ile işlem yapmayı daha da kolaylaştırmaktadır. Ayrıca, $\alpha = 1$ olduğunda \mathbf{S}_α matrisi \mathbf{M} matrisi ile tam bir uyum göstermektedir fakat bu durum $\bar{\mathbf{S}}_\alpha$ matrisi için söylenememektedir. Başka bir açıdan bakıldığında $0 < \alpha < 1$ değerleri için (3.9) denklemindeki $x^{-\alpha}$ katsayısından dolayı $x = 0$ noktasında bir tanımsızlık durumu olduğu görülür. Fakat (3.15) denkleminde \mathbf{S}_α matrisinin katsayısı $x^{1-\alpha}$ olduğundan bu bağıntıda yine aynı α değerleri için bakıldığında $x = 0$ noktasında bir tanımsızlık durumu oluşmadığı fark edilmiştir.

3.3 Laguerre Polinomlarının Uyumlu Kesirli Türevi için Bağlıntılar

Bu bölümde Laguerre polinomlarının uyumlu kesirli türev formüllerinin elde edilişi ve bunlar için matris bağıntılarının çıkarılışı anlatılacaktır. Bu bağıntılar literatürde ilk defa elde edilmiş, ispatlanmış ve kullanılmıştır. İlk olarak Laguerre polinomlarının uyumlu kesirli türevini Laguerre polinomları cinsinden

inceleyeceğimiz bir teorem ve bunun ispatı verilecektir. Ayrıca, bu teorem kullanılarak elde edilen matris bu bölümün temelini oluşturmaktadır.

3.3.1 Teorem $L_n(x)$, n . mertebeden Laguerre polinomu ve $0 < \alpha < 1$ olmak üzere, Laguerre polinomlarının α . mertebeden uyumlu kesirli türevi yine Laguerre polinomları cinsinden aşağıdaki şekilde hesaplanır

$$T_\alpha L_0(x) = 0 \quad (3.17)$$

ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$T_\alpha L_n(x) = x^{1-\alpha} \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{j+k} \binom{n}{k} \binom{k-1}{j} L_j(x). \quad (3.18)$$

İspat İlk önce Laguerre polinomlarının tanımını kullanalım

$$T_\alpha L_n(x) = T_\alpha \left\{ \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)! (k!)^2} x^k \right\}$$

olmak üzere uyumlu kesirli türevin lineerliğini ve x^k , $k \in \mathbb{N}$ fonksiyonunun uyumlu kesirli türevini kullanarak

$$T_\alpha L_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)! (k!)^2} k x^{k-\alpha}$$

olduğu görülür. Buradan $n = 0$ için

$$T_\alpha L_0(x) = 0$$

ve $k \neq 0$ olmak üzere $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$T_\alpha L_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{(k-1)!} x^{k-\alpha}$$

olur. Bu aşamada $x^{1-\alpha}$ toplamın dışına alınır ve x^{k-1} fonksiyonunun Lemma 3.1.1 ile verilen Laguerre seri açılımı kullanılırsa istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 3.3.2 $\mathbf{L}(x)$, $1 \times (N + 1)$ boyutlu Laguerre matrisi ve $T_\alpha \mathbf{L}(x)$ matrisi Laguerre matrisinin α . mertebeden uyumlu kesirli türevi olmak üzere $\mathbf{L}(x)$ matrisinin uyumlu kesirli türevi

$$T_\alpha \mathbf{L}(x) = x^{1-\alpha} \mathbf{L}(x) \tilde{\mathbf{S}} \quad (3.19)$$

olarak elde edilir. Burada $\tilde{\mathbf{S}}$ matrisi $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutlu bir kare matristir ve

$$\tilde{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -1 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

ya da $i, j = 0, 1, \dots, N$ olmak üzere,

$$\tilde{\mathbf{S}} = [\tilde{s}_{ij}], \quad \tilde{s}_{ij} = \begin{cases} -1, & i < j \\ 0, & i \geq j \end{cases},$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat Laguerre matrisi

$$\mathbf{L}(x) = [L_0(x) \quad L_1(x) \quad \cdots \quad L_N(x)]$$

bunun uyumlu kesirli türevi

$$T_\alpha \mathbf{L}(x) = [T_\alpha L_0(x) \quad T_\alpha L_1(x) \quad \cdots \quad T_\alpha L_N(x)]$$

olarak verilir. Bu matrislerin arasındaki ilişkiyi bulmak için Teorem 3.3.1'in sonucu kullanılır. $j \in \{0, 1, \dots, N\}$ için Laguerre polinomlarının uyumlu kesirli türevi ele alınsın.

$j = 0$ için $T_\alpha L_0(x) = 0$ olur.

$j = 1$ için

$$T_\alpha L_1(x) = x^{1-\alpha} \sum_{k=1}^1 \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^{r+k} \binom{1}{k} \binom{k-1}{r} L_r(x) = x^{1-\alpha} (-1)^1 \binom{1}{1} L_0(x).$$

$j = 2$ için

$$\begin{aligned} T_\alpha L_2(x) &= x^{1-\alpha} \sum_{k=1}^2 \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^{r+k} \binom{2}{k} \binom{k-1}{r} L_r(x) \\ &= x^{1-\alpha} \left\{ \sum_{r=0}^0 (-1)^{r+1} \binom{2}{1} \binom{0}{r} L_r(x) + \sum_{r=0}^1 (-1)^{r+2} \binom{2}{2} \binom{1}{r} L_r(x) \right\} \\ &= x^{1-\alpha} [-L_0(x) - L_1(x)]. \end{aligned}$$

$j = N$ için

$$\begin{aligned} T_\alpha L_N(x) &= x^{1-\alpha} \sum_{k=1}^N \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^{r+k} \binom{N}{k} \binom{k-1}{r} L_r(x) \\ &= x^{1-\alpha} [-L_0(x) - L_1(x) - \dots - L_{N-1}(x)] \end{aligned}$$

olur. Bu sonuçlara bakılarak $T_\alpha \mathbf{L}(x)$ matrisi ile $\mathbf{L}(x)$ matrisinin arasındaki ilişki (3.19) denkleminde verildiği gibi elde edilir.

Açıkça görüldüğü gibi (3.19) eşitliğinde verilen $\tilde{\mathbf{S}}$ matrisi Laguerre matrisinin tam sayı mertebeden türevleri için elde edilmiş olan \mathbf{M} matrisi ile aynı matristir. Bu da uyumlu kesirli türevin klasik türev ile benzerliğinin bir sonucudur.

4. KESİRLİ FREDHOLM İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMİ İÇİN SIRALAMA YÖNTEMİ

Bu bölümde kesirli lineer Fredholm integro-diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için Bölüm 3.1’de anlatılan Laguerre polinomlarından yararlanarak bir sıralama yöntemi geliştirilmiştir. Ayrıca, Laguerre polinomları için elde edilen temel matris bağıntısı ve sıralama noktaları kullanılarak verilen integro-diferansiyel denklemler matris denklemleri haline getirilir. Öncelikle Bölüm 4.1’de çözüm yönteminin temeline değinilerek yöntem verilecek, Bölüm 4.2’de bu yöntem kullanılarak çözülen denklemlere ve sonuçlarına yer verilecektir.

4.1 Çözüm Yöntemi

Bu bölümde verilecek olan çözüm yöntemi geniş olarak bakıldığında sıralama noktaları ve Laguerre polinomları üzerine kurulu bir yöntemdir. Bu bölümde (4.2) koşulları altında verilen kesirli Fredholm integro-diferansiyel denklemi ele alınır

$$\sum_{i=0}^m p_i(x) D^{\alpha_i} y(x) + \sum_{i=0}^l q_i(x) y^{(i)}(x) = g(x) + \lambda \int_a^b F(x, t) y(t) dt \quad (4.1)$$

$$\sum_{k=0}^{\nu-1} B_{jk} y^{(k)}(\beta_{jk}) = \mu_j, \quad j = 0, 1, \dots, \nu-1, \quad \nu_i - 1 < \alpha_i < \nu_i. \quad (4.2)$$

Burada $\nu_i \in \mathbb{Z}^+$, $m, l \in \mathbb{N}$; $\lambda, B_{jk}, \beta_{jk}, \mu_j \in \mathbb{R}$, $\max\left(\left(\max_{0 \leq i \leq m} \nu_i\right), l\right) = \nu$ ve $F(x, t)$, $p_i(x)$, $q_i(x)$, $g(x)$ bilinen fonksiyonlardır. Ayrıca, $D^{\alpha_i} y(x)$, $y(x)$ ’in Caputo kesirli türevlerini ifade eder.

Bu yöntemin asıl amacı (4.1)-(4.2) probleminin

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n L_n(x) \quad (4.3)$$

şelindeki yaklaşık çözümlerini bulmaktır. Burada a_n ’ler bilinmeyen katsayıları, N , $N \geq \nu$ olacak şekilde bir pozitif tamsayıyı ve $L_n(x)$, n . mertebeden Laguerre

polinomunu ifade eder. Bunun için öncelikle yaklaşık çözüm $y_N(x)$ matris formunda yazılır

$$y_N(x) = \mathbf{L}(x)\mathbf{A}. \quad (4.4)$$

Burada $\mathbf{L}(x)$, (3.10) ile tanımlanan Laguerre matrisi ve $\mathbf{A} = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_N]^T$ katsayılar matrisidir.

4.1.1 Teorem (4.1) denklemi ile tanımlanan kesirli Fredholm integro-diferansiyel denklemlerin integral çekirdeği Laguerre serisine açılabilen bir fonksiyon olsun. Bu durumda $x_s > 0$ olacak şekilde $x_s \in [a, b]$ sıralama noktaları üzerinde bu denklem, aşağıdaki matris bağıntısına indirgenebilir

$$\left\{ \sum_{i=0}^m \mathbf{P}_i \mathbf{X}_{\alpha_i} \mathbf{L} \bar{\mathbf{S}}_{\alpha_i} + \sum_{i=0}^l \mathbf{Q}_i \mathbf{L} \mathbf{M}^i - \lambda \mathbf{C} \mathbf{R} \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G}. \quad (4.5)$$

Burada, $\bar{\mathbf{S}}_{\alpha_i}$ matrisi Teorem 3.2.3'te tanımlandığı, \mathbf{M} matrisi (3.11) denklemindeki gibi, $\mathbf{G} = [g(x_s)]$ matrisi $(N + 1) \times 1$ boyutlu, $\mathbf{P}_i = \text{diag}[p_i(x_s)]$, $\mathbf{L} = [\mathbf{L}(x_s)]$, $\mathbf{Q}_i = \text{diag}[q_i(x_s)]$, $\mathbf{X}_{\alpha_i} = \text{diag}[x_s^{-\alpha_i}]$, $\mathbf{C} = [\mathbf{c}(x_s)]$ ve $\mathbf{R} = [r_{ij}]$ matrisleri $(N + 1)$ boyutlu kare matrislerdir. Burada, $\mathbf{c}(x) = [c_j(x)]$; $r_{ij} = \int_a^b L_i(t)L_j(t)dt$ ve $\mathbf{L}(x)$, Laguerre matrisini temsil eder.

İspat Bilinmeyen fonksiyon $y(x)$ 'in türevleri için matris bağıntıları Bölüm 3.2'de elde edilen Laguerre polinomlarının türevlerinin matris bağıntıları kullanılarak

$$y^{(i)}(x) \cong \mathbf{L}(x)\mathbf{M}^i\mathbf{A} \quad (4.6)$$

ve

$$D^\alpha y(x) \cong D^\alpha \mathbf{L}(x)\mathbf{A} = x^{-\alpha} \mathbf{L}(x) \bar{\mathbf{S}}_\alpha \mathbf{A} \quad (4.7)$$

şeklinde elde edilir. Burada \mathbf{M} ve $\bar{\mathbf{S}}_\alpha$ sırasıyla (3.11) ve (3.12) denklemlerinde verildiği gibidir. Bunların yanı sıra integral kısmı için de matris bağıntılarını oluşturmak için (4.1) denkleminin integral kısmını $I(x)$ ile gösterelim

$$I(x) = \int_a^b F(x, t)y(t)dt. \quad (4.8)$$

Bundan sonra çekirdek fonksiyonu $F(x, t)$ 'yi t değişkenine göre Laguerre serisine açar ve onu kesersek yaklaşık olarak

$$F(x, t) \cong \sum_{n=0}^N c_n(x) L_n(t)$$

şeklinde yazılır. Açıkça görülüyor ki bu fonksiyon iki matrisin çarpımı şeklinde ifade edilebilir. Yani,

$$F(x, t) = \mathbf{C}(x) \mathbf{L}^T(t) \quad (4.9)$$

olur. Burada $\mathbf{C}(x) = [c_0(x) \quad c_1(x) \quad \dots \quad c_N(x)]$ bir satır matrisi, $\mathbf{L}^T(t)$ Laguerre sütun matrisidir. Böylelikle, (4.9) denkleminde elde edilen matris bağıntısını (4.8)'de yerine koyarak

$$I(x) = \int_a^b \mathbf{C}(x) \mathbf{L}^T(t) \mathbf{L}(t) \mathbf{A} dt = \mathbf{C}(x) \left(\int_a^b \mathbf{L}^T(t) \mathbf{L}(t) dt \right) \mathbf{A} = \mathbf{C}(x) \mathbf{R} \mathbf{A} \quad (4.10)$$

şeklinde bulunur. Burada $\int_a^b \mathbf{L}^T(t) \mathbf{L}(t) dt$ matrisi $\mathbf{R} = [r_{ij}]$ ile ifade edilirse

$$r_{ij} = \int_a^b L_i(t) L_j(t) dt, \quad i, j = 0, 1, \dots, N$$

olur. (4.6), (4.7) ve (4.10) eşitlikleri (4.1) denkleminde yerine konulursa

$$\sum_{i=0}^m p_i(x) x^{-\alpha_i} \mathbf{L}(x) \bar{\mathbf{S}}_{\alpha_i} \mathbf{A} + \sum_{i=0}^l q_i(x) \mathbf{L}(x) \mathbf{M}^i \mathbf{A} = g(x) + \lambda \mathbf{C}(x) \mathbf{R} \mathbf{A}$$

denklemini elde edilir. Bu denkleminde $x_s > 0$ olacak şekilde $x_s \in [a, b]$ sıralama noktaları kullanılarak

$$\left[\sum_{i=0}^m p_i(x_s) x_s^{-\alpha_i} \mathbf{L}(x_s) \bar{\mathbf{S}}_{\alpha_i} + \sum_{i=0}^l q_i(x_s) \mathbf{L}(x_s) \mathbf{M}^i - \lambda \mathbf{C}(x_s) \mathbf{R} \right] \mathbf{A} = g(x_s)$$

sistemi elde edilir. $s = 0, 1, \dots, N$ için bu sistem kapalı formda

$$\left\{ \sum_{i=0}^m \mathbf{P}_i \mathbf{X}_{\alpha_i} \mathbf{L} \bar{\mathbf{S}}_{\alpha_i} + \sum_{i=0}^l \mathbf{Q}_i \mathbf{L} \mathbf{M}^i - \lambda \mathbf{C} \mathbf{R} \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

olarak yazılabilir. Buradaki matrisler açık olarak aşağıdaki biçimde verilebilir ve böylece ispat tamamlanmış olur

$$\mathbf{X}_{\alpha_i} = \begin{bmatrix} x_0^{-\alpha_i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_1^{-\alpha_i} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_N^{-\alpha_i} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} p_i(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_i(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_i(x_N) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} q_i(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_i(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_i(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}(x_0) \\ \mathbf{c}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{c}(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}(x_0) \\ \mathbf{L}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{L}(x_N) \end{bmatrix}.$$

(4.5) ile verilen sistem kısaca $\mathbf{WA} = \mathbf{G}$ ya da $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ gösterimiyle ifade edilebilir; burada \mathbf{W} aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\mathbf{W} = \sum_{i=0}^m \mathbf{P}_i \mathbf{X}_{\alpha_i} \mathbf{L} \bar{\mathbf{S}}_{\alpha_i} + \sum_{i=0}^l \mathbf{Q}_i \mathbf{L} \mathbf{M}^i - \lambda \mathbf{C} \mathbf{R}.$$

Böylece, $(N + 1)$ bilinmeyenli (a_0, a_1, \dots, a_N) , $(N + 1)$ denklemlerli lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir.

Benzer şekilde, (4.6) denklemini kullanılarak koşullar için matris bağıntıları hesaplanabilir

$$\sum_{k=0}^{v-1} B_{jk} \mathbf{L}(\beta_{jk}) \mathbf{M}^k \mathbf{A} = \mu_j, \quad j = 0, 1, \dots, v - 1. \quad (4.11)$$

Burada, $1 \times (N + 1)$ boyutlu $\sum_{k=0}^{v-1} B_{jk} \mathbf{L}(\beta_{jk}) \mathbf{M}^k$ matrisi \mathbf{U}_j matrisi olarak adlandırılırsa (4.11) eşitliği

$$\mathbf{U}_j \mathbf{A} = \mu_j \quad \text{ya da} \quad [\mathbf{U}_j; \mu_j], \quad j = 0, 1, \dots, v - 1$$

halini alır.

Lineer denklem sisteminin verilen koşullar altındaki çözümlerini elde etmek için $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ arttırılmış matrisinin satırlarını silmeden $[\mathbf{U}_j; c_j]$ arttırılmış matrisinin satırlarını ekleyerek ya da $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ arttırılmış matrisinin v satırını silip $[\mathbf{U}_j; c_j]$ matrisi ile yer değiştirerek yeni arttırılmış matrisler elde edilir. Bu matrisler; sıralama noktalarının sayısına, denklemin verilen koşullarına ve denklemin mertebesine bağlı

olarak farklı şekillerde ifade edilebilir. Böylelikle, bu lineer cebirsel denklem sisteminin çözümü ile aranan Laguerre katsayıları elde edilir.

4.2 Uygulamalar

Bu bölümde, yukarıda açıkladığımız çözüm yönteminin çeşitli örneklere uygulanışı incelenecektir. Buradaki sayısal hesaplamalar Mathcad 15 kullanılarak yapılmıştır. Ayrıca, bu problemlerde $x_s = \left[1 - \cos\left(\frac{(s+1)\pi}{N+1}\right)\right]/2$ sıralama noktaları kullanılmıştır.

4.2.1 Örnek $y(0) = 0$ koşulu ile verilen aşağıdaki lineer kesirli Fredholm integrodiferansiyel denklemi ele alalım

$$D^{\frac{1}{2}}y(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{8}{3}x^{3/2} - 2x^{1/2}\right) + \frac{x}{12} + \int_0^1 xty(t)dt, \quad 0 \leq x, t \leq 1.$$

Bu problemin verilen koşul altındaki tam çözümü $y(x) = x^2 - x$ fonksiyonudur.

Verilen problemin Teorem 4.1.1 ile elde edilen temel matris denklemi

$$\{\mathbf{X}_{1/2}\mathbf{L}\bar{\mathbf{S}}_{1/2} - \mathbf{C}\mathbf{R}\}\mathbf{A} = \mathbf{G}$$

şeklindedir. Burada, $N = 2$ için sıralama noktaları $x_0 = 0.25, x_1 = 0.75, x_2 = 1$ olarak hesaplanır. Böylelikle, temel matris denklemindeki matrisler

$$\mathbf{X}_{1/2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} & \frac{17}{32} \\ 1 & \frac{1}{4} & -\frac{7}{32} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{1}{48} - \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \\ \frac{1}{16} \\ \frac{1}{12} + \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{S}}_{1/2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-2}{\sqrt{\pi}} & \frac{-4}{3\sqrt{\pi}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{\pi}} & \frac{-4}{3\sqrt{\pi}} \\ 0 & 0 & \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{24} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{24} & \frac{13}{60} \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Ayrıca, $y(0) = 0$ koşulu da $\mathbf{U}_0\mathbf{A} = \mathbf{L}(0)\mathbf{A} = 0$ biçiminde yazılır. Burada $\mathbf{L}(0) = [1 \ 1 \ 1]$ olarak verilir.

Bu sistem hem koşul matrisini ekleme hem de yer değiştirme tekniği kullanılarak çözdürüldüğünde bilinmeyen katsayılar $a_0 = 1$, $a_1 = -3$, $a_2 = 2$ olarak elde edilir. Bu katsayılar (4.3) denkleminde yerine konulduğunda, problemin tam çözümlü $x^2 - x$ bulunur.

Bu problem daha önce Mahdy ve Shwayyea (2016), Mohammed (2014) ve Oyedepo ve diğ. (2016) tarafından da çözülmüştür. Mahdy ve Shwayyea ile Mohammed sırasıyla yaklaşık çözümlü $N = 7$ and $N = 5$ için bulduklarını ifade etmişlerdir fakat uyguladıkları yöntemlerde yaklaşık çözümlü ile gerçek çözümlü arasındaki hatayı sayısal olarak vermeyip buldukları çözümlerin gerçek çözümlü ile tam bir uyum içinde olduğunun grafiklerinden anlaşılabilirliğini ileri sürmüşlerdir. Oysaki, grafikleri 0.1 ölçekle çizildiği için bu uyum tam çözümlü bulduklarını ifade etmeleri için yeterli değildir. Oyedepo ve diğ. standart en küçük kareler yöntemi ve pertürbe edilmiş en küçük kareler yöntemini kullanarak sırasıyla $4 \cdot 10^{-5}$ ve $1 \cdot 10^{-4}$ maksimum hatayla yaklaşık çözümlü elde etmişlerdir. Bununla birlikte, önerilen yöntem ile bu problemin tam çözümlü $N = 2$ için bulunmuştur. Açıkça görülmüyor ki önerilen yöntemin sonucu diğer yöntemlerin sonucundan daha iyidir.

4.2.2 Örnek $y(0) = 0$ koşulu altında verilen aşağıdaki lineer kesirli integrodiferansiyel denklemlü göz önüne alalım

$$D_{5/3}^5 y(x) = \frac{3\sqrt{3}\Gamma(2/3)x^{1/3}}{\pi} - \frac{x^2}{5} - \frac{x}{4} + \int_0^1 (xt + x^2t^2)y(t)dt, \quad 0 \leq x, t \leq 1.$$

Bu problemin verilen başlangıç koşulu altındaki tam çözümlü $y(x) = x^2$ fonksiyonudur.

Verilen problemin Teorem 4.1.1 ile elde edilen temel matris denklemlü

$$\{\mathbf{X}_{5/3}\mathbf{L}\bar{\mathbf{S}}_{5/3} - \mathbf{CR}\}\mathbf{A} = \mathbf{G}$$

şeklindedir. Burada, $N = 2$ için sıralama noktaları $x_0 = 0.25$, $x_1 = 0.75$, $x_2 = 1$ olarak hesaplanır. Bu noktalar için temel matris denklemlündeki matrislerden \mathbf{L} ve \mathbf{R} matrisleri Örnek 4.2.1'de verildiği gibidir, diğer matrisler aşağıda verilmiştir

$$\mathbf{X}_{5/3} = \begin{bmatrix} 4^{5/3} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{4}{3}\right)^{5/3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{S}}_{5/3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{\Gamma(\frac{4}{3})} \\ 0 & 0 & \frac{-4}{\Gamma(\frac{4}{3})} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\Gamma(\frac{4}{3})} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{15}{8} & -3 & \frac{9}{8} \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{3}(4^{2/3})\Gamma(\frac{2}{3})}{4\pi} - \frac{3}{40} \\ \frac{(3^{11/6})(4^{2/3})\Gamma(\frac{2}{3})}{4\pi} - \frac{3}{10} \\ \frac{3\sqrt{3}\Gamma(\frac{2}{3})}{\pi} - \frac{9}{20} \end{bmatrix}.$$

Ayrıca, $y(0) = 0$ koşulu da $\mathbf{U}_0\mathbf{A} = \mathbf{L}(0)\mathbf{A} = 0$ biçiminde yazılır. Burada $\mathbf{L}(0) = [1 \ 1 \ 1]$ olarak verilir.

Bu sistem hem koşul matrisini ekleme hem de yer değiştirme tekniği kullanılarak çözdürüldüğünde bilinmeyen katsayılar $a_0 = 2$, $a_1 = -4$, $a_2 = 2$ şeklinde bulunur. Bu katsayılar (4.3) denkleminde yerine konulduğunda bu problemin tam çözümü x^2 elde edilir.

Bu problem daha önce Mahdy ve Shwayyea (2016), Mohammed (2014) tarafından en küçük kareler yöntemiyle çözülmüştür. Mahdy ve Shwayyea ile Mohammed sırasıyla yaklaşık çözümü $N = 7$ and $N = 5$ için bulduklarını ifade etmişlerdir fakat Örnek 4.2.1'de olduğu gibi karşılaştırma yapabilmeye uygun bir sayısal sonuç belirtmemişlerdir. Bununla birlikte, önerilen yöntem ile bu problemin tam çözümü $N = 2$ için bulunmuştur. Açıkça görülüyor ki önerilen yöntemin sonucu diğer yöntemlerin sonucundan daha iyidir.

4.2.3 Örnek $y(0) = 0$ başlangıç koşulu ile verilen aşağıdaki lineer kesirli Fredholm integro-diferansiyel denklemini ele alalım

$$D^{\frac{1}{2}}y(x) = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} + \frac{3x\sqrt{\pi}}{4} - \frac{9}{10} + \int_0^1 y(t)dt, \quad 0 \leq x, t \leq 1.$$

Bu problemin verilen koşul altındaki tam çözümü $y(x) = x^{3/2} + x$ şeklinde verilen polinom olmayan bir fonksiyondur.

Teorem 4.1.1 ile verilen temel matris denklemi ve koşul bağıntısı bu problem için aşağıdaki gibi elde edilir:

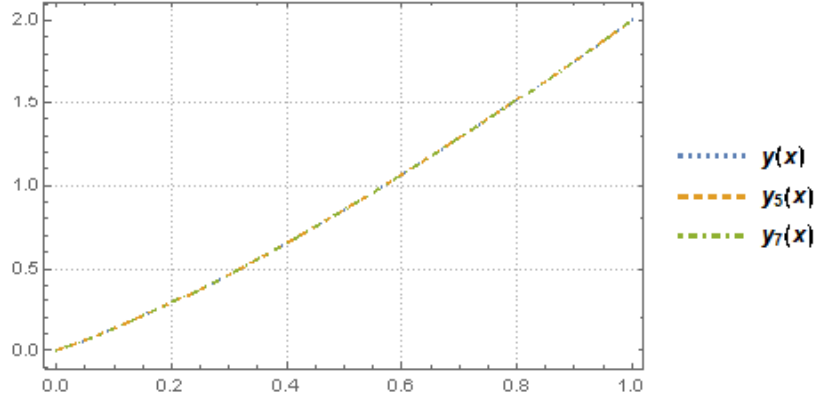
$$\{\mathbf{X}_{1/2}\mathbf{L}\bar{\mathbf{S}}_{1/2} - \mathbf{C}\mathbf{R}\}\mathbf{A} = \mathbf{G}, \quad \mathbf{U}_0\mathbf{A} = \mathbf{L}(0)\mathbf{A} = 0.$$

Bu problem önerilen yöntem ile farklı N değerleri için çözdürülmüş ve ortaya çıkan mutlak hatalar, ikinci tür Chebyshev dalgacık yöntemi (Setia ve diğ. 2014^a) ile verilen hatalar ile karşılaştırılmış ve bu karşılaştırma Tablo 4.1’de verilmiştir. Bu tabloda Chebyshev dalgacık yönteminin 16 terim ve 32 terim için mutlak hataları ile önerilen yöntemde $[\mathbf{W}, \mathbf{G}]$ arttırılmış matrisinin son satırının $[\mathbf{U}_0, 0]$ arttırılmış matrisi ile yer değiştirmesi ile sonuç $N = 5$ ve $N = 7$ için sırasıyla 6 ve 8 terim için elde edilen mutlak hataları karşılaştırılmıştır ve önerilen yöntemin sonuçlarının daha iyi olduğu görülmüştür.

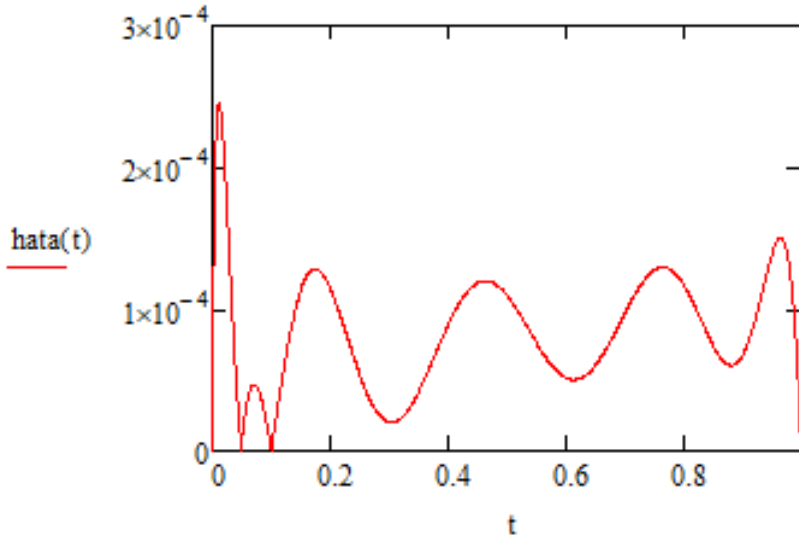
Tablo 4.1: Örnek 4.2.3 için mutlak hataların karşılaştırılması

x	Chebyshev dalgacık yöntemi-16 terim $k = 4, M = 2$	Chebyshev dalgacık yöntemi-32 terim $k = 4, M = 4$	Önerilen yöntem 6 terim $N = 5$	Önerilen yöntem 8 terim $N = 7$
0.1	4.4×10^{-3}	1.7×10^{-3}	4.1×10^{-4}	9.5×10^{-5}
0.2	6.1×10^{-3}	1.7×10^{-3}	1.8×10^{-4}	1.6×10^{-4}
0.3	6.2×10^{-3}	1.8×10^{-3}	3.2×10^{-4}	2.4×10^{-4}
0.4	5.7×10^{-3}	1.9×10^{-3}	8.0×10^{-4}	5.8×10^{-5}
0.5	4.8×10^{-3}	2.0×10^{-3}	7.4×10^{-4}	6.7×10^{-5}
0.6	6.5×10^{-3}	2.2×10^{-3}	3.4×10^{-4}	2.3×10^{-4}
0.7	7.4×10^{-3}	2.3×10^{-3}	1.6×10^{-4}	2.2×10^{-4}
0.8	7.8×10^{-3}	2.5×10^{-3}	5.2×10^{-4}	7.8×10^{-5}
0.9	7.6×10^{-3}	2.6×10^{-3}	9.7×10^{-4}	2.2×10^{-4}
1.0	7.0×10^{-3}	2.7×10^{-3}	3.5×10^{-4}	1.0×10^{-4}

Ayrıca, Şekil 4.2’de Mathematica 11.1 kullanılarak bu problemin gerçek çözümünün grafiği ile $N = 5$ ve $N = 7$ için yaklaşık çözümlerinin grafikleri verilmiş ve her iki yaklaşık çözüm grafiğinin de gerçek çözüm grafiği ile uyum içinde olduğu gözlemlenmiştir. Şekil 4.3’te bu problemin önerilen yöntem ile $N = 9$ için mutlak hata sonuçlarının Mathcad 15 yardımıyla oluşturulan grafiği verilmiştir.



Şekil 4.2: Gerçek çözüm ve yaklaşık çözümlerin karşılaştırılması



Şekil 4.3: Örnek 4.2.3 için N=9 için hata analizi

4.2.4 Örnek Aşağıdaki $0 \leq x, t \leq 1$ aralığında $y(0) = 0$ başlangıç koşulu ile verilen lineer kesirli Fredholm integro-diferansiyel denklemini ele alalım

$$D_{5/6}^5 y(x) = -\frac{3\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)x^{\frac{1}{6}}(-91 + 216x^2)}{91\pi} + (5 - 2e)x + \int_0^1 xe^t y(t) dt.$$

Bu denklemin verilen koşul altındaki tam çözümünü $y(x) = x - x^3$ fonksiyonudur.

Bu problem için istenen temel matris denklemi ve koşul bağıntısı aşağıdaki gibi elde edilir

$$\{\mathbf{X}_{5/6} \mathbf{L}_{5/6} - \mathbf{CR}\} \mathbf{A} = \mathbf{G}, \quad \mathbf{U}_0 \mathbf{A} = \mathbf{L}(0) \mathbf{A} = 0.$$

Bu problem Mohammed (2014) ve Oyedepo ve diğ. (2016) tarafından da çözülmüştür. Mohammed, $N = 5$ için yaklaşık çözümü bulduğunu ifade etmiş fakat yönteminin hatası için herhangi bir sayısal sonuç verilmediği için karşılaştırma yapılamamıştır. Bunun yanı sıra, Oyedepo ve diğ. standart en küçük kareler yöntemi ve pertürbe edilmiş en küçük kareler yöntemini kullanarak elde ettikleri çözümlerin mutlak hatalarını vermişlerdir. Tablo 4.2’de bu hatalar ile önerilen yöntemde $[\mathbf{W}, \mathbf{G}]$ arttırılmış matrisinin son satırının $[\mathbf{U}_0, 0]$ arttırılmış matrisi ile yer değiştirmesi ile sonuç $N = 6$ için elde edilen mutlak hataları karşılaştırılmış ve önerilen yöntemin daha iyi sonuç verdiği gözlemlenmiştir.

Tablo 4.2: Örnek 4.2.4 için mutlak hataların karşılaştırılması

x	Standart en küçük kareler yöntemi	Pertürbe edilmiş en küçük kareler yöntemi	Önerilen yöntem $N = 5$	Önerilen yöntem $N = 6$
0.1	6.3036×10^{-5}	0.7034×10^{-5}	6.0445×10^{-7}	6.7988×10^{-8}
0.2	2.5659×10^{-5}	3.3421×10^{-5}	2.1141×10^{-6}	2.4063×10^{-7}
0.3	6.8668×10^{-6}	1.6037×10^{-6}	4.4425×10^{-6}	5.0604×10^{-7}
0.4	3.2130×10^{-5}	2.2706×10^{-5}	7.5285×10^{-6}	8.5722×10^{-7}
0.5	4.7716×10^{-5}	3.7106×10^{-5}	1.1331×10^{-5}	1.2901×10^{-6}
0.6	5.1213×10^{-5}	3.9193×10^{-5}	1.5822×10^{-5}	1.8018×10^{-6}
0.7	4.0208×10^{-5}	2.6563×10^{-5}	2.0984×10^{-5}	2.3903×10^{-6}
0.8	1.2286×10^{-5}	3.1847×10^{-6}	2.6804×10^{-5}	3.0533×10^{-6}
0.9	3.4964×10^{-5}	5.2455×10^{-5}	3.3266×10^{-5}	3.7890×10^{-6}
1.0	1.0395×10^{-5}	1.2365×10^{-4}	4.0349×10^{-5}	4.5965×10^{-6}

5. KESİRLİ FREDHOLM-VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMİ İÇİN SIRALAMA YÖNTEMİ

Bu bölümde kesirli lineer Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için Bölüm 3.1’de anlatılan Laguerre polinomlarından yararlanarak farklı bir sıralama yöntemi geliştirilmiştir. Ayrıca, Laguerre polinomları için elde edilen temel matris bağıntısı ve sıralama noktaları kullanılarak verilen integro-diferansiyel denklemler matris denklemleri haline getirilmiştir. Öncelikle Bölüm 5.1’de çözüm yöntemi sunulacak, ardından Bölüm 5.2’de bu yöntem kullanılarak çözümlenen denklemlere ve sonuçlarına yer verilecektir.

5.1 Caputo Türevli Denklemler için Çözüm Yöntemi

Bu bölümde verilecek olan çözüm yöntemi geniş olarak bakıldığında sıralama noktaları ve Laguerre polinomları üzerine kurulu bir yöntemdir. Yönteme geçmeden önce çözümü araştırılacak olan lineer kesirli Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denklemi tekrar ele alalım:

$$\sum_{i=0}^m p_i(x) D^{\alpha_i} y(x) + \sum_{i=0}^l q_i(x) y^{(i)}(x) = g(x) + \lambda_1 \int_a^b F(x, t) y(t) dt + \lambda_2 \int_0^x V(x, t) y(t) dt, \quad a \leq x \leq b, \quad (5.1)$$

$$\sum_{k=0}^{\nu-1} B_{jk} y^{(k)}(\beta_{jk}) = \mu_j, \quad j = 0, 1, \dots, \nu-1, \quad \nu_i - 1 < \alpha_i < \nu_i. \quad (5.2)$$

Burada $\nu_i \in \mathbb{Z}^+$, $m, l \in \mathbb{N}$; $\lambda_1, \lambda_2, B_{jk}, \beta_{jk}, \mu_j \in \mathbb{R}$, $\max\left(\left(\max_{0 \leq i \leq m} \nu_i\right), l\right) = \nu$ ve $F(x, t), V(x, t), p_i(x), q_i(x), g(x)$ bilinen fonksiyonlardır. Ayrıca, $y(x)$ bilinmeyen fonksiyonu, $y^{(i)}(x)$, $y(x)$ ’in tam sayı mertebeli türevlerini ve $D^{\alpha_i} y(x)$, $y(x)$ ’in Caputo kesirli türevlerini ifade eder.

Bu yöntemin asıl amacı (5.1)-(5.2) probleminin (4.3) eşitliğinde olduğu gibi

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n L_n(x)$$

yaklaşık çözümlerini bulmaktır.

5.1.1 Teorem (5.1) denklemi ile tanımlanan kesirli Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denklemi verilmiş olsun. Bu durumda $x_s > 0$ olacak şekilde $x_s \in [a, b]$ sıralama noktaları üzerinde bu denklem, aşağıdaki matris bağıntısına indirgenebilir

$$\left\{ \sum_{i=0}^m \mathbf{P}_i \mathbf{X}_{\alpha_i} \mathbf{L} \mathbf{S}_{\alpha_i} + \sum_{i=0}^l \mathbf{Q}_i \mathbf{L} \mathbf{M}^i - \lambda_1 \mathbf{F} - \lambda_2 \mathbf{V} \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G}. \quad (5.3)$$

Burada, \mathbf{S}_{α_i} matrisi Teorem 3.2.4'te tanımlandığı, \mathbf{M} matrisi (3.11) denkleminde olduğu gibi, $\mathbf{G} = [g(x_s)]$, $(N+1) \times 1$ boyutlu bir matris, $\mathbf{L} = [\mathbf{L}(x_s)]$, $\mathbf{F} = [\mathbf{f}(x_s)]$, $\mathbf{X}_{\alpha_i} = \text{diag}[x_s^{1-\alpha_i}]$, $\mathbf{P}_i = \text{diag}[p_i(x_s)]$, $\mathbf{V} = [\mathbf{v}(x_s)]$ ve $\mathbf{Q}_i = \text{diag}[q_i(x_s)]$ matrisleri $(N+1) \times (N+1)$ boyutlu kare matrislerdir. Burada $\mathbf{L}(x)$ matrisi Laguerre matrisini temsil ederken $\mathbf{f}(x_s) = \int_a^b F(x_s, t) \mathbf{L}(t) dt$ ve $\mathbf{v}(x_s) = \int_0^{x_s} K(x_s, t) \mathbf{L}(t) dt$ olarak alınır.

İspat Bilinmeyen fonksiyon $y(x)$ 'in türevleri için matris bağıntıları, Bölüm 3.2'de elde edilen Laguerre polinomlarının türevlerinin matris bağıntıları kullanılarak (4.5) denklemi

$$y^{(i)}(x) \cong \mathbf{L}(x) \mathbf{M}^i \mathbf{A}$$

ve (5.4) denklemi

$$D^\alpha y(x) \cong D^\alpha \mathbf{L}(x) \mathbf{A} = x^{1-\alpha} \mathbf{L}(x) \mathbf{S}_\alpha \mathbf{A} \quad (5.4)$$

elde edilir. Burada \mathbf{M} ve \mathbf{S}_α sırasıyla (3.11) ve (3.16) denklemlerinde verildiği gibidir. Bu matris bağıntıları (5.1) denkleminde yerine konulursa aşağıdaki matris denklemi ortaya çıkar

$$\sum_{i=0}^m p_i(x)x^{1-\alpha_i}\mathbf{L}(x)\mathbf{S}_{\alpha_i}\mathbf{A} + \sum_{i=0}^l q_i(x)\mathbf{L}(x)\mathbf{M}^i\mathbf{A} = g(x) + \lambda_1 \int_a^b F(x,t)\mathbf{L}(t)\mathbf{A}dt$$

$$+ \lambda_2 \int_0^x K(x,t)\mathbf{L}(t)\mathbf{A}dt$$

Bu denklemde $x_s > 0$ olacak şekilde $x_s \in [a, b]$ sıralama noktaları kullanılarak

$$\sum_{i=0}^m p_i(x_s)x_s^{1-\alpha_i}\mathbf{L}(x_s)\mathbf{S}_{\alpha_i}\mathbf{A} + \sum_{i=0}^l q_i(x_s)\mathbf{L}(x_s)\mathbf{M}^i\mathbf{A}$$

$$= g(x_s) + \lambda_1 \int_a^b F(x_s,t)\mathbf{L}(t)dt \mathbf{A} + \lambda_2 \int_0^{x_s} K(x_s,t)\mathbf{L}(t)dt \mathbf{A}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminde $\mathbf{f}(x_s) = \int_a^b F(x_s,t)\mathbf{L}(t)dt$ ve $\mathbf{v}(x_s) = \int_0^{x_s} K(x_s,t)\mathbf{L}(t)dt$ gösterimleri kullanılsın. O halde denklem sistemi

$$\left\{ \sum_{i=0}^m p_i(x_s)x_s^{1-\alpha_i}\mathbf{L}(x_s)\mathbf{S}_{\alpha_i} + \sum_{i=0}^l q_i(x_s)\mathbf{L}(x_s)\mathbf{M}^i - \lambda_1\mathbf{f}(x_s) - \lambda_2\mathbf{v}(x_s) \right\} \mathbf{A} = g(x_s)$$

olarak yazılabilir. $s = 0, 1, \dots, N$ için

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} p_i(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_i(x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_i(x_N) \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} q_i(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_i(x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q_i(x_N) \end{bmatrix}, \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}(x_0) \\ \mathbf{L}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{L}(x_N) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_{\alpha_i} = \begin{bmatrix} x_0^{1-\alpha_i} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_1^{1-\alpha_i} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_N^{1-\alpha_i} \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(x_0) \\ \mathbf{f}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(x_N) \end{bmatrix}, \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}(x_0) \\ \mathbf{v}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{v}(x_N) \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{bmatrix}$$

matris gösterimleri kullanılarak bu sistem kapalı formda

$$\left\{ \sum_{i=0}^m \mathbf{P}_i \mathbf{X}_{\alpha_i} \mathbf{L} \mathbf{S}_{\alpha_i} + \sum_{i=0}^l \mathbf{Q}_i \mathbf{L} \mathbf{M}^i - \lambda_1 \mathbf{F} - \lambda_2 \mathbf{V} \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

şeklinde yazılabilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

(5.3) ile verilen sistem kısaca $\mathbf{WA} = \mathbf{G}$ ya da $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ gösterimiyle ifade edilebilir; burada \mathbf{W} aşağıdaki gibi verilebilir

$$\mathbf{W} = \sum_{i=0}^m \mathbf{P}_i \mathbf{X}_{\alpha_i} \mathbf{L} \mathbf{S}_{\alpha_i} + \sum_{i=0}^l \mathbf{Q}_i \mathbf{L} \mathbf{M}^i - \lambda_1 \mathbf{F} - \lambda_2 \mathbf{V}.$$

Böylece, (a_0, a_1, \dots, a_N) $(N + 1)$ bilinmeyenli $(N + 1)$ denklemlili lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir.

Benzer şekilde, (5.2) denklemi kullanılarak koşullar için matris bağıntıları hesaplanabilir

$$\sum_{k=0}^{v-1} B_{jk} \mathbf{L}(\beta_{jk}) \mathbf{M}^k \mathbf{A} = \mu_j, \quad j = 0, 1, \dots, v - 1. \quad (5.5)$$

Burada, $1 \times (N + 1)$ boyutlu $\sum_{k=0}^{v-1} B_{jk} \mathbf{L}(\beta_{jk}) \mathbf{M}^k$ matrisi \mathbf{U}_j matrisi olarak adlandırılırsa (5.5) eşitliği

$$\mathbf{U}_j \mathbf{A} = \mu_j \text{ ya da } [\mathbf{U}_j; \mu_j], \quad j = 0, 1, \dots, v - 1$$

halini alır.

Lineer denklem sisteminin verilen koşullar altındaki çözümlerini elde etmek için $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ arttırılmış matrisinin satırlarını silmeden $[\mathbf{U}_j; c_j]$ arttırılmış matrisinin satırlarını ekleyerek ya da $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ arttırılmış matrisinin v satırını silerek $[\mathbf{U}_j; c_j]$ matrisinin v satırını ekleme tekniğini kullanarak yeni arttırılmış matrisler elde edilir. Bu matrisler; sıralama noktalarının sayısına, denklemin verilen koşullarına ve denklemin mertebesine bağlı olarak farklı şekillerde ifade edilebilir. Böylelikle, bu lineer cebirsel denklem sisteminin çözümü ile aranan Laguerre katsayıları elde edilir.

5.2 Uyumlu Türevli Denklemler için Çözüm Yöntemi

Bu bölümde Bölüm 5.1'de Caputo kesirli türevli denklemler için anlatılan yöntemin uyumlu kesirli türevli Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denklemler için işleyişi verilecektir. Yönteme geçmeden önce çözümü araştırılacak olan lineer kesirli Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denklem ele alınsın:

$$\sum_{i=0}^m p_i(x) T_{\alpha_i} y(x) + \sum_{i=0}^l q_i(x) y^{(i)}(x) = g(x) + \lambda_1 \int_a^b F(x,t) y(t) dt + \lambda_2 \int_0^x V(x,t) y(t) dt, \quad a \leq x \leq b, \quad (5.6)$$

$$\sum_{k=0}^{v-1} B_{jk} y^{(k)}(\beta_{jk}) = \mu_j, \quad j = 0, 1, \dots, v-1, \quad 0 < \alpha_i < 1. \quad (5.7)$$

Burada, $m, l \in \mathbb{N}$; $\lambda_1, \lambda_2, B_{jk}, \beta_{jk}, \mu_j \in \mathbb{R}$, $\max(1, l) = v$ ve $F(x, t), V(x, t), p_i(x), q_i(x), g(x)$ bilinen fonksiyonlardır. Ayrıca, $y(x)$ bilinmeyen fonksiyonu, $y^{(i)}(x), y(x)$ 'in tam sayı merteben türevlerini ve $T_{\alpha_i} y(x), y(x)$ 'in uyumlu kesirli türevlerini ifade eder.

Burada kullanılacak yöntemin amacı (5.6)-(5.7) probleminin (4.3) eşitliğindeki

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n L_n(x)$$

yaklaşık çözümlerini bulmaktır.

5.2.1 Teorem (5.6) denklemi ile tanımlanan kesirli Fredholm integro-diferansiyel denklem verilmiş olsun. Bu durumda $x_s > 0$ olacak şekilde $x_s \in [a, b]$ sıralama noktaları üzerinde bu denklem, aşağıdaki matris bağıntısına indirgenebilir

$$\left\{ \sum_{i=0}^m \mathbf{P}_i \mathbf{X}_{\alpha_i} \mathbf{L} \tilde{\mathbf{S}} + \sum_{i=0}^l \mathbf{Q}_i \mathbf{L} \mathbf{M}^i - \lambda_1 \mathbf{F} - \lambda_2 \mathbf{V} \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G}.$$

Burada, $\tilde{\mathbf{S}}$ matrisi Teorem 3.3.2'de tanımlandığı, \mathbf{M} matrisi (3.11) denkleminde olduğu gibi, $\mathbf{G} = [g(x_s)]$, $(N+1) \times 1$ boyutlu bir matris, $\mathbf{L} = [\mathbf{L}(x_s)]$, $\mathbf{F} = [\mathbf{f}(x_s)]$, $\mathbf{X}_{\alpha_i} = \text{diag}[x_s^{1-\alpha_i}]$, $\mathbf{P}_i = \text{diag}[p_i(x_s)]$, $\mathbf{V} = [\mathbf{v}(x_s)]$ ve $\mathbf{Q}_i = \text{diag}[q_i(x_s)]$ matrisleri $(N+1) \times (N+1)$ boyutlu kare matrislerdir. Burada, $\mathbf{L}(x)$ matrisi Laguerre matrisini temsil ederken $\mathbf{f}(x_s) = \int_a^b F(x_s, t) \mathbf{L}(t) dt$ ve $\mathbf{v}(x_s) = \int_0^{x_s} K(x_s, t) \mathbf{L}(t) dt$ olarak alınır.

İspat Bilinmeyen fonksiyon $y(x)$ 'in türevleri için matris bağıntıları Bölüm 3.2'de elde edilen Laguerre polinomlarının türevlerinin matris bağıntıları kullanılarak

$$y^{(i)}(x) \cong \mathbf{L}(x) \mathbf{M}^i \mathbf{A}$$

ve

$$T^\alpha y(x) \cong T^\alpha \mathbf{L}(x) \mathbf{A} = x^{1-\alpha} \mathbf{L}(x) \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{A}$$

şeklinde elde edilir. Burada \mathbf{M} ve $\tilde{\mathbf{S}}$ sırasıyla (3.11) ve (3.19) denklemlerinde verildiği gibidir. Bu matris bağıntıları (5.6) denkleminde yerine konulursa aşağıdaki matris denklemini ortaya çıkar

$$\sum_{i=0}^m p_i(x) x^{1-\alpha_i} \mathbf{L}(x) \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{A} + \sum_{i=0}^l q_i(x) \mathbf{L}(x) \mathbf{M}^i \mathbf{A} = g(x) + \lambda_1 \int_a^b F(x, t) \mathbf{L}(t) \mathbf{A} dt + \lambda_2 \int_0^x K(x, t) \mathbf{L}(t) \mathbf{A} dt.$$

Bu denkleminde $x_s > 0$ olacak şekilde $x_s \in [a, b]$ sıralama noktaları kullanılarak

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m p_i(x_s) x_s^{1-\alpha_i} \mathbf{L}(x_s) \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{A} + \sum_{i=0}^l q_i(x_s) \mathbf{L}(x_s) \mathbf{M}^i \mathbf{A} \\ = g(x_s) + \lambda_1 \int_a^b F(x_s, t) \mathbf{L}(t) dt \mathbf{A} + \lambda_2 \int_0^{x_s} K(x_s, t) \mathbf{L}(t) dt \mathbf{A} \end{aligned}$$

denklemin sistemi elde edilir. Bu denklemin sisteminde $\mathbf{f}(x_s) = \int_a^b F(x_s, t) \mathbf{L}(t) dt$ ve $\mathbf{v}(x_s) = \int_0^{x_s} K(x_s, t) \mathbf{L}(t) dt$ gösterimleri kullanılsın. O halde denklemin sistemi

$$\left\{ \sum_{i=0}^m p_i(x_s) x_s^{1-\alpha_i} \mathbf{L}(x_s) \tilde{\mathbf{S}} + \sum_{i=0}^l q_i(x_s) \mathbf{L}(x_s) \mathbf{M}^i - \lambda_1 \mathbf{f}(x_s) - \lambda_2 \mathbf{v}(x_s) \right\} \mathbf{A} = g(x_s)$$

olarak yazılabilir. $s = 0, 1, \dots, N$ için

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} p_i(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_i(x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_i(x_N) \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} q_i(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_i(x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q_i(x_N) \end{bmatrix}, \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}(x_0) \\ \mathbf{L}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{L}(x_N) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_{\alpha_i} = \begin{bmatrix} x_0^{1-\alpha_i} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_1^{1-\alpha_i} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_N^{1-\alpha_i} \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(x_0) \\ \mathbf{f}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(x_N) \end{bmatrix}, \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}(x_0) \\ \mathbf{v}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{v}(x_N) \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{bmatrix}$$

matris gösterimleri kullanılarak bu sistem kapalı formda

$$\left\{ \sum_{i=0}^m \mathbf{P}_i \mathbf{X}_{\alpha_i} \mathbf{L} \tilde{\mathbf{S}} + \sum_{i=0}^l \mathbf{Q}_i \mathbf{L} \mathbf{M}^i - \lambda_1 \mathbf{F} - \lambda_2 \mathbf{V} \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (5.8)$$

şeklinde yazılabilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

(5.8) ile verilen sistem kısaca $\mathbf{W}\mathbf{A} = \mathbf{G}$ ya da $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ gösterimiyle ifade edilebilir; burada \mathbf{W} aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\mathbf{W} = \sum_{i=0}^m \mathbf{P}_i \mathbf{X}_{\alpha_i} \mathbf{L} \tilde{\mathbf{S}} + \sum_{i=0}^l \mathbf{Q}_i \mathbf{L} \mathbf{M}^i - \lambda_1 \mathbf{F} - \lambda_2 \mathbf{V}.$$

Böylece, (a_0, a_1, \dots, a_N) $(N + 1)$ bilinmeyenli $(N + 1)$ denklemlerli lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir.

Benzer şekilde, (5.7) denklemini kullanılarak koşullar için matris bağıntıları hesaplanabilir

$$\sum_{k=0}^{v-1} B_{jk} \mathbf{L}(\beta_{jk}) \mathbf{M}^k \mathbf{A} = \mu_j, \quad j = 0, 1, \dots, v - 1. \quad (5.9)$$

Burada, $1 \times (N + 1)$ boyutlu $\sum_{k=0}^{v-1} B_{jk} \mathbf{L}(\beta_{jk}) \mathbf{M}^k$ matrisi \mathbf{U}_j matrisi olarak adlandırılırsa (5.9) eşitliği

$$\mathbf{U}_j \mathbf{A} = \mu_j \text{ ya da } [\mathbf{U}_j; \mu_j], \quad j = 0, 1, \dots, v - 1$$

halini alır.

Lineer denklem sisteminin verilen koşullar altındaki çözümlerini elde etmek için $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ arttırılmış matrisinin satırlarını silmeden $[\mathbf{U}_j; c_j]$ arttırılmış matrisinin satırlarını ekleyerek ya da $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ arttırılmış matrisinin v satırını silerek $[\mathbf{U}_j; c_j]$ matrisinin v satırını ekleme tekniğini kullanarak yeni arttırılmış matrisler elde edilir. Bu matrisler; sıralama noktalarının sayısına, denklemin verilen koşullarına ve denklemin mertebesine bağlı olarak farklı şekillerde ifade edilebilir. Böylelikle, bu lineer cebirsel denklem sisteminin çözümü ile aranan Laguerre katsayıları elde edilir.

5.3 Uygulamalar

Bu bölümde, yukarıda açıkladığımız çözüm yönteminin çeşitli örneklere uygulanışı incelenecektir. Buradaki sayısal hesaplamalar Mathcad 15 kullanılarak yapılmıştır. Ayrıca, bu problemlerde aksi belirtilmedikçe $x_s = \left[1 - \cos\left(\frac{(s+1)\pi}{N+1}\right)\right]/2$ sıralama noktaları kullanılmıştır. Caputo kesirli türevli integro-diferansiyel denklemlerin uygulamaları Bölüm 5.3.1’de verilirken Bölüm 5.3.2’de uyumlu kesirli türevli denklemlerin uygulamalarına yer verilecektir.

5.3.1 Caputo Türevli Denklemler için Örnekler

Bu bölümde Bölüm 5.1’de verilen yöntemin Caputo kesirli türevli integro-diferansiyel denklemlerdeki uygulamalarına örnekler verilecektir. Bu örneklerden literatürde yer alanlar için karşılaştırma yapıp bu karşılaştırmanın sonucu verilecektir.

5.3.1.1 Örnek Aşağıda verilen kesirli Fredholm integro-diferansiyel denklemi ele alınsın

$$y''(x) + D^{\frac{1}{2}}y(x) + y(x) = \frac{9}{4} - \frac{1}{3}x - \frac{2}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}x^{\frac{3}{2}} + x^2 + \int_0^1 (x-t)y(t)dt.$$

Bu problemin $y(0) = y'(0) = 0$ koşulları altındaki tam çözümü $y(x) = x^2$ fonksiyonudur.

Bölüm 5.1’de anlatılan yöntem uygulanarak bu problemin temel matris denklemi

$$\{\mathbf{X}_{1/2}\mathbf{L}\mathbf{S}_{1/2} + \mathbf{L} + \mathbf{L}\mathbf{M}^2 - \mathbf{F}\}\mathbf{A} = \mathbf{G}$$

ve başlangıç koşullarının bağıntısı

$$\mathbf{U}_0\mathbf{A} = \mathbf{L}(0)\mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{U}_1\mathbf{A} = \mathbf{L}(0)\mathbf{M}\mathbf{A} = 0.$$

şeklinde ifade edilir. $N = 2$ için sıralama noktaları $x_0 = 0.25, x_1 = 0.75, x_2 = 1$ olarak hesaplanabilir. Böylelikle, temel matris denklemindeki matrisler

$$\mathbf{X}_{1/2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} & \frac{17}{32} \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{-7}{32} \\ 1 & 0 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_{1/2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-2}{\sqrt{\pi}} & \frac{-8}{3\sqrt{\pi}} \\ 0 & 0 & \frac{-4}{3\sqrt{\pi}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{-1}{24} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{24} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{5}{24} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3\sqrt{\pi}} + \frac{107}{48} \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} + \frac{41}{16} \\ \frac{8}{3\sqrt{\pi}} + \frac{35}{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_0 = [1 \quad 1 \quad 1] \\ \mathbf{U}_1 = [0 \quad -1 \quad 2]$$

şeklindedir. Bu sistem çözdürüldüğünde bilinmeyen katsayılar $a_0 = 2$, $a_1 = -4$, $a_2 = 2$ olarak bulunur. Bulunan katsayıları (4.3) denkleminde yerine koyduğumuzda $y(x) = x^2$ tam çözümü elde edilir.

Bu problem daha önce Bessel sıralama yöntemi kullanılarak Ordokhani ve diğ. (2016) tarafından çözülmüştür ve bulunan yaklaşık çözümün maksimum hataları $N = 2$, $N = 4$ ve $N = 6$ için sırasıyla 3.70×10^{-3} , 3.28×10^{-4} ve 8.58×10^{-5} olarak hesaplanmıştır. Bölüm 5.1'de önerilen yöntem ile $N = 2$ için Mathcad 15 programında sembolik hesaplama kullanılarak bu problemin tam çözümü elde edilmiştir. Açıkça görülüyor ki, önerilen yöntem diğer yöntemlerden daha doğru bir çözüm vermektedir.

5.3.1.2 Örnek Aşağıdaki $0 \leq x, t \leq 1$ aralığında $y(0) = 0$ başlangıç koşulu ile verilen lineer kesirli Fredholm integro-diferansiyel denklemini ele alalım

$$D_{\frac{5}{6}} y(x) = -\frac{3\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)x^{\frac{1}{6}}(-91 + 216x^2)}{91\pi} + (5 - 2e)x + \int_0^1 xe^t y(t) dt.$$

Bu denklemin verilen koşul altındaki tam çözümü $y(x) = x - x^3$ fonksiyonudur.

Bu problem için $x_s = s/(N + 1)$ sıralama noktaları kullanılarak problemin temel matris denklemini aşağıdaki gibi elde edilir

$$\{\mathbf{X}_{5/6} \mathbf{L} \mathbf{S}_{5/6} - \mathbf{F}\} \mathbf{A} = \mathbf{G}, \quad \mathbf{U}_0 \mathbf{A} = 0.$$

Burada, $N = 3$ için sıralama noktaları $x_0 = 0.25$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 0.75$ ve $x_3 = 1$ olarak hesaplanır. Bu sistem Mathcad 15 programında sembolik hesaplama kullanılarak çözdürüldüğünde bilinmeyen katsayılar $a_0 = -5$, $a_1 = 17$, $a_2 = -18$ ve $a_3 = 6$ olarak bulunur. Bulunan katsayılar (4.3) denkleminde yerine konulduğunda $y(x) = x - x^3$ tam çözümü elde edilir.

Bu problem daha önce Bölüm 4.2’de de çözdürülmüş ve diğer yöntemlerle karşılaştırması yapılmıştır. $N = 6$ için elde edilen çözümün diğer yöntemlerden daha iyi olduğu gözlemlendi. Ancak çekirdek fonksiyonundan dolayı bu bölümde elde edilen sonuçlarda tam çözüme ulaşıldığından daha iyi olduğu anlaşılmaktadır.

5.3.1.3 Örnek $y(0) = 0$ başlangıç koşulu altında tam çözümü x^2 fonksiyonu olan kesirli integro-diferansiyel denklemi ele alalım

$$D^{\frac{1}{2}}y(x) = y(x) + \frac{8}{3\Gamma(0.5)}x^{1.5} - x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \int_0^x y(t)dt .$$

Bölüm 5.1’de anlatılan yöntemi uygulayarak bu denklem ve koşulu için temel matris denklemi aşağıdaki gibi bulunur

$$\{\mathbf{X}_{1/2}\mathbf{L}\mathbf{S}_{1/2} - \mathbf{L} - \mathbf{V}\}\mathbf{A} = \mathbf{G}, \quad \mathbf{U}_0\mathbf{A} = 0.$$

Burada $N = 2$ alınırsa, sıralama noktaları $x_0 = 0.25$, $x_1 = 0.75$, $x_2 = 1$ olur. Bu sıralama noktaları için yukarıda bahsedilen matrisler aşağıdaki gibidir

$$\mathbf{X}_{1/2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} & \frac{17}{32} \\ 1 & \frac{1}{4} & -\frac{7}{32} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_{1/2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-2}{\sqrt{\pi}} & \frac{-8}{3\sqrt{\pi}} \\ 0 & 0 & \frac{-4}{3\sqrt{\pi}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{7}{32} & \frac{73}{384} \\ \frac{3}{4} & \frac{15}{32} & \frac{33}{128} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3\sqrt{\pi}} - \frac{13}{192} \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} - \frac{45}{64} \\ \frac{8}{3\sqrt{\pi}} - \frac{4}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_0 = [1 \quad 1 \quad 1].$$

Bu sistem çözdürüldüğünde bilinmeyen katsayılar $a_0 = 2$, $a_1 = -4$, $a_2 = 2$ olarak hesaplanır. Bulunan katsayıları (4.3) denkleminde yerine koyduğumuzda bu problemin tam çözümünü elde ederiz.

Bahsi geçen problem daha önce Awawdeh ve diğ. (2011) tarafından homotopi analiz yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Bu çalışmada $N = 5$ için yaklaşık çözüm bulunduğu ifade edilmiş fakat bu çözümün hatası sayısal değerlerle verilmemiştir. Ayrıca, Sahu ve Saha Ray (2016) Legendre dalgacık Petrov–Galerkin yöntemini kullanarak $N = 6$ için 4.2×10^{-15} maksimum hata ile bir yaklaşık çözüm bulmuşlardır. Önerilen yöntem ile $N = 2$ için Mathcad 15 programının sembolik hesaplaması kullanılarak problemin tam çözümü elde edildiği için bu yöntemin diğer yöntemlerden daha iyi olduğu söylenebilir.

5.3.1.4 Örnek $y(0) = 0$ başlangıç koşulu altındaki tam çözümü $y(x) = x$ olan kesirli integro-diferansiyel denklemi ele alalım

$$D^{0.75}y(x) = \frac{1}{\Gamma(1.25)}x^{0.25} + (x \cos x - \sin x)y(x) + \int_0^x x \sin t y(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Bölüm 5.1’de anlatılan yöntemi uygulayarak bu denklem ve koşulu için temel matris denklemi aşağıdaki gibi bulunur:

$$\{\mathbf{X}_{3/4}\mathbf{L}\mathbf{S}_{3/4} - \mathbf{P}\mathbf{L} - \mathbf{V}\}\mathbf{A} = \mathbf{G}, \quad \mathbf{U}_0\mathbf{A} = 0.$$

Burada $N = 1$ alınırsa, sıralama noktaları $x_0 = 0.5$, $x_1 = 1$ olur ve bu sıralama noktaları için bahsedilen matrisler aşağıdaki gibi verilir

$$\mathbf{X}_{3/4} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt[4]{8}}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_{3/4} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2\sqrt{2}\Gamma(\frac{3}{4})}{-\pi} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{\cos(\frac{1}{2})}{2} - \sin(\frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & \cos(1) - \sin(1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} [\sin(\frac{1}{4})]^2 & \frac{\sin^2(\frac{1}{4})}{2} - \frac{\sin(\frac{1}{2})}{2} + \frac{1}{4} \\ 1 - \cos(1) & \frac{1}{2} - \frac{\sin(1)}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\pi} \begin{bmatrix} 2^{\frac{5}{4}} \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_0 = [1 \quad 1].$$

Bu sistem Mathcad 15 programı kullanılarak sembolik olarak çözdürüldüğünde $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ katsayıları elde edilir. Bu katsayılar (4.3) denkleminde yerine konursa bu problemin tam çözümü elde edilir.

Bu problem daha önce Awawdeh ve diğ. (2011) tarafından homotopi analiz yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Bu çalışmada $N = 5$ için yaklaşık çözüm bulunduğu ifade edilmiş fakat bu çözümün hatası sayısal değerlerle verilmemiştir. Ayrıca, Sahu ve Saha Ray (2016) Legendre dalgacık Petrov–Galerkin yöntemini kullanarak $N = 6$ için 1.1×10^{-16} maksimum mutlak hata ile yaklaşık çözüm bulmuşlardır. Önerilen yöntem ile $N = 1$ için Mathcad 15 programının sembolik hesaplaması kullanılarak problemin tam çözümü elde edildiği için bu yöntemin diğer yöntemlerden daha iyi olduğu söylenebilir.

5.3.1.5 Örnek $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ koşulları altında tam çözümü $y(x) = x^2$ olan kesirli integro-diferansiyel denklemi ele alalım

$$D^{\sqrt{3}}y(x) = \frac{2}{\Gamma(3-\sqrt{3})}x^{2-\sqrt{3}} + 2 \sin x - 2x + \int_0^x \cos(x-t)y(t)dt.$$

Bölüm 5.1’de anlatılan yöntemi uygulayarak bu denklem ve koşulu için temel matris denklemi aşağıdaki gibi bulunur

$$\{\mathbf{X}_{\sqrt{3}}\mathbf{L}\mathbf{S}_{\sqrt{3}} - \mathbf{V}\}\mathbf{A} = \mathbf{G}, \quad \mathbf{U}_0\mathbf{A} = 0.$$

Burada $N = 2$ alınırsa, sıralama noktaları $x_0 = 0.25, x_1 = 0.75, x_2 = 1$ olur. Bu sıralama noktaları için yukarıda bahsedilen matrisler aşağıdaki gibidir

$$\mathbf{X}_{\sqrt{3}} = \begin{bmatrix} 4^{\sqrt{3}-1} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{4}{3}\right)^{\sqrt{3}-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_{\sqrt{3}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\Gamma(3-\sqrt{3})} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\Gamma(3-\sqrt{3})} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} & \frac{17}{32} \\ 1 & \frac{1}{4} & -\frac{7}{32} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 2 \sin\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{2(4)^{\sqrt{3}-2}}{\Gamma(3-\sqrt{3})} - \frac{1}{2} \\ 2 \sin\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{2\left(\frac{3}{4}\right)^{2-\sqrt{3}}}{\Gamma(3-\sqrt{3})} - \frac{3}{2} \\ 2 \sin(1) + \frac{2}{\Gamma(3-\sqrt{3})} - 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{1}{4}\right) & \cos\left(\frac{1}{4}\right) + \sin\left(\frac{1}{4}\right) - 1 & 2 \cos\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{7}{4} \\ \sin\left(\frac{3}{4}\right) & \cos\left(\frac{3}{4}\right) + \sin\left(\frac{3}{4}\right) - 1 & 2 \cos\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{5}{4} \\ \sin(1) & \cos(1) + \sin(1) - 1 & 2 \cos(1) - 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{U}_0 = [1 \quad 1 \quad 1].$$

Bu sistem çözdürüldüğünde bilinmeyen katsayılar $a_0 = 2$, $a_1 = -4$, $a_2 = 2$. Bulunan katsayılar (4.3) denkleminde yerine konursa bu problemin tam çözümü elde edilir.

Bu problem daha önce Awawdeh ve diğ. (2017) tarafından homotopi analiz yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Bu çalışmada $N = 5$ için yaklaşık çözüm bulunduğu ifade edilmiş fakat bu çözümün hatası sayısal değerlerle verilmemiştir. Önerilen yöntem ile $N = 2$ için Mathcad 15 programının sembolik hesaplaması kullanılarak problemin tam çözümü elde edildiği için bu yöntemin diğer yöntemden daha iyi olduğu söylenebilir.

5.3.1.6 Örnek $0 \leq x, t \leq 1$ aralığında $y(0) = 0$ koşulu altında tam çözümü polinom olmayan $y(x) = x^{3/2}$ fonksiyonu olan kesirli Volterra integro-diferansiyel denklemi ele alalım

$$D^{\frac{1}{3}}y(x) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4\Gamma(13/6)}x^{7/6} - \frac{2}{63}x^{9/2}(9 + 7x^2) + \int_0^x (xt + x^2t^2)y(t)dt.$$

Bu problemin temel matris denklemi ve koşul bağıntısı

$$\{\mathbf{X}_{1/3}\mathbf{L}\mathbf{S}_{1/3} - \mathbf{V}\}\mathbf{A} = \mathbf{G}, \quad \mathbf{U}_0\mathbf{A} = 0$$

şeklinde verilebilir.

Bu problemin önerilen yöntem ile elde edilen yaklaşık çözümünün $N = 5$ için mutlak hataları üç ayrı yöntemin mutlak hataları ile Tablo 5.3'te karşılaştırılmıştır. Bu yöntemler, lineer şema, kuadratik şema ve lineer-kuadratik şema yöntemleridir (Kumar ve diğ. 2017). Önerilen yöntemin mutlak hataları arttırılmış matris $[\mathbf{W}, \mathbf{G}]$ matrisinin son satırının arttırılmış matris $[\mathbf{U}_0, 0]$ ile yer değiştirmesi ve $[\mathbf{U}_0, 0]$ matrisinin silmeden $[\mathbf{W}, \mathbf{G}]$ matrisine eklenmesiyle ortaya çıkan hatalardır.

Tablo 5.3: Örnek 5.3.1.6 için mutlak hataların karşılaştırılması

x	Lineer Şema	Kuadratik Şema	Lineer Kuadratik Şema	Önerilen yöntem (silmeden)	Önerilen yöntem (silerek)
0.2	9.8×10^{-3}	9.8×10^{-3}	9.8×10^{-3}	2.9×10^{-4}	3.0×10^{-4}
0.4	1.1×10^{-2}	4.8×10^{-3}	4.9×10^{-3}	7.3×10^{-4}	7.9×10^{-4}

0.6	1.2×10^{-2}	2.9×10^{-3}	3.2×10^{-3}	9.5×10^{-4}	1.1×10^{-3}
0.8	1.4×10^{-2}	2.6×10^{-3}	3.5×10^{-3}	8.3×10^{-4}	1.0×10^{-3}
1	1.9×10^{-2}	3.3×10^{-3}	5.5×10^{-3}	4.5×10^{-4}	6.3×10^{-4}

5.3.1.7 Örnek Başlangıç koşulu $y(0) = 0$ altındaki tam çözümü $y(x) = x^{3/2}$ fonksiyonu olan kesirli Volterra integro-diferansiyel denklemi ele alalım. Bu problem önerilen yönteme tam çözümü polinom olmayan ve integral çekirdeği değişkenlerine ayıramaya bir test problemi olarak üretilmiştir

$$D^{\frac{1}{2}}y(x) + y(x) = \frac{2}{5} + \frac{3\sqrt{\pi}x}{4} + x^{\frac{3}{2}} - 2\frac{e^{x^2}}{5} + \int_0^x xe^{xt^2\sqrt{t}}y(t)dt.$$

Problemin çözümü polinom olmadığı için önerilen yöntem ile tam çözüm elde edilememektedir. Bu yüzden yaklaşık çözümler elde edilmiş ve bu çözümlerin maksimum hataları farklı N değerleri için Tablo 5.4'te verilmiştir.

Tablo 5.4: Örnek 5.3.1.7'nin farklı N değerleri için maksimum hataları

N	Silmeden	İlk Satırı Silerek	Son Satırı Silerek	Ortadan Silerek
2	1.2×10^{-2}	3.3×10^{-2}	2.5×10^{-2}	2.8×10^{-2}
4	1.3×10^{-3}	6.3×10^{-3}	2.8×10^{-3}	3.8×10^{-3}
6	3.9×10^{-4}	2.3×10^{-3}	7.1×10^{-4}	1.1×10^{-3}
8	1.8×10^{-4}	1.1×10^{-3}	2.5×10^{-4}	4.6×10^{-4}
10	1.0×10^{-4}	5.9×10^{-4}	1.1×10^{-4}	2.1×10^{-4}

5.3.1.8 Örnek Tam çözümü $y(x) = x^2 + x^3$ olan Caputo kesirli Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denklemi ele alalım:

$$D^{1.7}y(x) = g(x) + \int_0^x (x-t)y(t)dt + \int_0^1 (x+t)y(t)dt$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

Bu denklemdeki $g(x)$ fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$g(x) = \frac{2}{\Gamma(1.3)}x^{0.3} + \frac{6}{\Gamma(2.3)}x^{1.3} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{20} - \frac{9}{20} - \frac{7x}{12}.$$

Bu denkleme ve koşullara ait temel matris denklemleri aşağıdaki gibidir

$$\{\mathbf{X}_{1.7}\mathbf{L}\mathbf{S}_{1.7} - \mathbf{F} - \mathbf{V}\}\mathbf{A} = \mathbf{G}$$

$$\mathbf{U}_0\mathbf{A} = \mathbf{L}(0)\mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{U}_1\mathbf{A} = \mathbf{L}(0)\mathbf{M}\mathbf{A} = 0.$$

Burada, $N = 3$ için sıralama noktaları $x_0 = 0.25$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 0.75$, $x_3 = 1$ olarak bulunur. Bu sistem çözdürüldüğünde bilinmeyen Laguerre katsayıları $a_0 = 8$, $a_1 = -22$, $a_2 = 20$, $a_3 = -6$ şeklinde hesaplanır. Bu katsayıları (4.3) denkleminde yerine konulduğunda denklemin tam çözümü elde edilir.

Bu problemin yaklaşık çözümleri Meng ve diğ. (2015) tarafından Legendre dalgacık yöntemi ile bulunmuştur. Bu yöntem ile elde edilen yaklaşık çözümün maksimum hataları 16 terim için 5.3×10^{-2} , 32 terim için 2.7×10^{-2} , 64 terim için 1.2×10^{-2} ve 128 terim için 9.0×10^{-4} olarak verilmiştir. Ayrıca, bu problemin Genocchi polinomları tarafından bulunan yaklaşık çözümünün maksimum hatası $N = 8$ için 7.0×10^{-2} olarak verilmiştir (Loh ve diğ. 2017). Önerilen yöntemle $N = 3$ için tam çözüm bulunduğundan bu yöntem diğer yöntemlere göre daha hızlı, daha etkili ve daha doğrudur.

5.3.1.9 Örnek $y(0) = y(1) = 0$ sınır koşulları ile verilen kesirli aşağıdaki integro-diferansiyel denklemi ele alalım

$$y''(x) + \frac{1}{x}D^{\frac{1}{2}}y(x) + \frac{1}{x^2}y(x) = g(x) + \int_0^1 \cos(x-t)y(t)dt + \int_0^x \sin(x-t)y(t)dt$$

$$g(x) = \frac{2\sqrt{x}}{\Gamma(2.5)} - \frac{6x\sqrt{x}}{\Gamma(3.5)} - 13x - x^2 + x^3 + 5 + (4 - 4\sin 1 - 5\cos 1)\cos x \\ + (8 + 4\cos 1 - 5\sin 1)\sin x.$$

Yukarıdaki problemin verilen koşullar ile tam çözümü $y(x) = x^2 - x^3$ fonksiyonudur. Bu probleme temel matris denklemleri ve koşulların bağıntıları aşağıdaki gibidir:

$$\{\mathbf{X}_{-1/2}\mathbf{L}\mathbf{S}_{1/2} + \mathbf{L}\mathbf{M}^2 + \mathbf{X}_{-2}\mathbf{L} - \mathbf{F} - \mathbf{V}\}\mathbf{A} = \mathbf{G},$$

$$\mathbf{U}_0\mathbf{A} = \mathbf{L}(0)\mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{U}_1\mathbf{A} = \mathbf{L}(1)\mathbf{A} = 0.$$

Burada $N = 3$ alınırsa sıralama noktaları $x_0 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$, $x_3 = 1$ olur. Bu sistem çözdürüldüğünde bilinmeyen Laguerre katsayıları $a_0 = -4$, $a_1 = 14$, $a_2 = -16$, $a_3 = 6$ şeklinde hesaplanır. Bulunan katsayılar (4.3) denkleminde yerine konulduğunda denklemin tam çözümü elde edilir.

Bu problem daha önce sinc-sıralama yöntemi ile Alkan ve Hatipoğlu (2017) tarafından çözülmüştür. Bu çalışmada yaklaşık çözümün maksimum hataları $N = 4$ için 4.6×10^{-2} , $N = 8$ için 2.7×10^{-2} , $N = 16$ için 1.8×10^{-3} , $N = 32$ için 2.6×10^{-5} ve $N = 64$ için 3.9×10^{-7} olarak verilmiştir. Diğer taraftan, Bölüm 5.1’de önerilen yöntem ile $N = 3$ için Mathcad 15 programında sembolik hesaplama kullanılarak bu problemin tam çözümü elde edilmiştir. Açıkça görülüyor ki, önerilen yöntem diğer yöntemlerden daha doğru bir çözüm vermektedir.

5.3.1.10 Örnek Tam çözümü $y(x) = x^{\frac{7}{2}}$ olan aşağıdaki başlangıç koşulları ile verilen kesirli Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denklemi ele alalım

$$D^{2.3}y(x) = \frac{\Gamma(4.5)}{\Gamma(2.2)}x^{1.2} - \frac{x^{5.5}}{99} - \frac{x}{11} + \frac{1}{4} \int_0^x (x-t)y(t)dt + \frac{1}{2} \int_0^1 xty(t)dt$$

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$$

Bölüm 5.1’de anlatılan yöntemi uygulayarak bu denklem ve koşulları için temel matris denklemi aşağıdaki gibi bulunur

$$\left\{ \mathbf{X}_{2.3} \mathbf{L} \mathbf{S}_{2.3} - \frac{1}{2} \mathbf{F} - \frac{1}{4} \mathbf{V} \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G},$$

$$\mathbf{U}_0 \mathbf{A} = \mathbf{L}(0) \mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{U}_1 \mathbf{A} = \mathbf{L}(0) \mathbf{M} \mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{U}_2 \mathbf{A} = \mathbf{L}(0) \mathbf{M}^2 \mathbf{A} = 0.$$

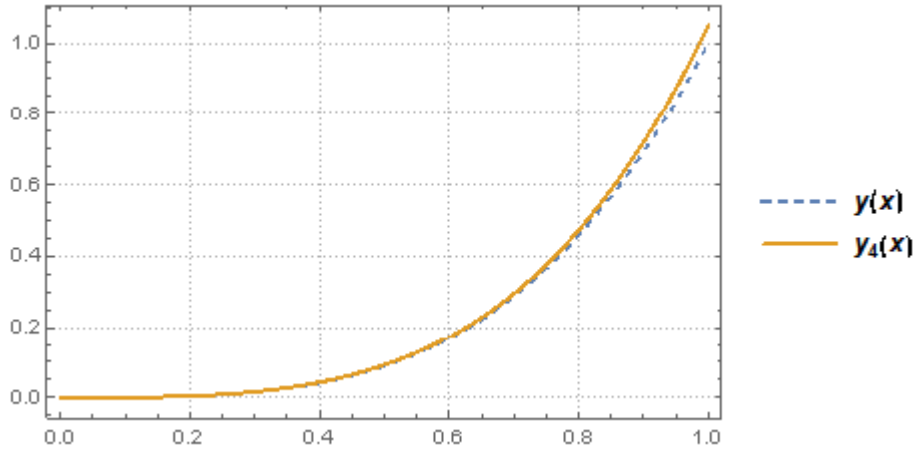
Formülü yukarıda verilen sıralama noktaları $N = 8$ ve $N = 9$ için kullanıldığında ortaya çıkan çözümün mutlak hatalarına Tablo 5.5’te yer verilmiştir. Bu problem daha önce Legendre dalgacık metodu (Meng ve diğ. 2015), Adomian ayrıştırma metodu (Meng ve diğ. 2015), kesirli mertebeden Bernoulli fonksiyonları (Rahimkhani ve diğ. 2017), Genocchi polinomları (Loh ve diğ. 2017) ve genelleştirilmiş hat fonksiyonları (Loh ve diğ. 2017) ile çözdürülmüş ve yaklaşık çözümler elde edilmiştir. Verilen yöntemin sonuçları ile diğer yöntemin sonuçlarının karşılaştırılması Tablo 5.5’te

verilmiştir. Tablodan açıkça görülüyor ki önerilen yöntem daha yararlı ve daha iyi sonuçlar ortaya koymuştur.

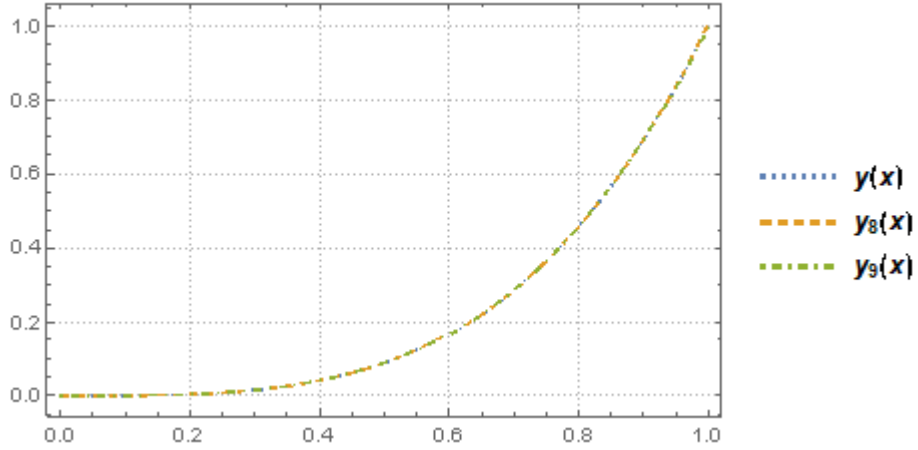
Tablo 5.5: Örnek 5.3.1.10 için mutlak hataların karşılaştırılması

x	LDM	AAM	KBF	GHF	GP	Önerilen yöntem	
	$k = 2, M = 5$	$n = 5$	$m = 8$	$n = 32$	$N = 9$	$N = 8$	$N = 9$
1/8	6.6×10^{-6}	1.0×10^{-5}	6.9×10^{-7}	4.2×10^{-6}	1.5×10^{-4}	1.3×10^{-10}	1.6×10^{-8}
2/8	4.5×10^{-5}	4.2×10^{-5}	3.5×10^{-7}	5.6×10^{-5}	6.3×10^{-4}	9.7×10^{-10}	6.3×10^{-9}
3/8	3.1×10^{-5}	9.2×10^{-5}	2.4×10^{-7}	6.2×10^{-5}	1.3×10^{-3}	7.0×10^{-9}	4.0×10^{-9}
4/8	7.4×10^{-5}	4.2×10^{-4}	2.3×10^{-7}	6.9×10^{-5}	2.0×10^{-3}	3.3×10^{-8}	9.1×10^{-11}
5/8	2.4×10^{-4}	8.1×10^{-4}	8.3×10^{-7}	3.2×10^{-4}	2.8×10^{-3}	1.0×10^{-7}	3.9×10^{-8}
6/8	3.8×10^{-4}	2.3×10^{-3}	2.3×10^{-7}	4.5×10^{-4}	3.7×10^{-3}	2.5×10^{-7}	1.2×10^{-7}
7/8	6.0×10^{-4}	8.1×10^{-3}	4.6×10^{-7}	6.2×10^{-4}	4.6×10^{-3}	5.0×10^{-7}	2.4×10^{-7}

Ayrıca, Mathematica 11.1 kullanılarak Şekil 5.4'te bu problemin gerçek çözümünün grafiği ile $N = 4$ için yaklaşık çözümünün grafiği verilmiştir. Ayrıca, Şekil 5.5'te gerçek çözüm ile $N = 8$ ve $N = 9$ için yaklaşık çözümlerinin grafikleri verilmiş ve her iki yaklaşık çözüm grafiğinin de gerçek çözüm grafiği ile uyum içinde olduğu gözlemlenmiştir.



Şekil 5.4: Gerçek çözüm ile $N=4$ için yaklaşık çözümün karşılaştırılması



Şekil 5.5: Gerçek çözüm ile $N=9$ için yaklaşık çözümün karşılaştırılması

5.3.2 Uyumlu Türevli Denklemler için Örnekler

Bu kısımda uyumlu kesirli türevli integro-diferansiyel denklemlerin uygulamalarına yer verilecektir. Uyumlu kesirli türevli integro-diferansiyel denklemlerin çözümü literatürde ilk defa tarafımızdan arandığı için bu örneklerde herhangi bir karşılaştırma yapılmamıştır.

5.3.2.1 Örnek $y(0) = 0$ başlangıç koşulu altında tam çözümünü $y(x) = x^2$ olan uyumlu kesirli türevli Fredholm integro-diferansiyel denklemini ele alalım

$$T^{\frac{1}{2}}y(x) = y(x) + 2x^{1.5} - x^2 - 9 + \int_0^3 y(t)dt.$$

Bölüm 5.2’de anlatılan yöntem kullanılarak denklem ve koşul için temel matris bağıntıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\{\mathbf{X}_0\mathbf{L}\tilde{\mathbf{S}} - \mathbf{L} - \mathbf{F}\}\mathbf{A} = \mathbf{G}, \quad \mathbf{U}_0\mathbf{A} = \mathbf{L}(0)\mathbf{A} = 0.$$

Burada, $N = 2$ için sıralama noktaları $x_0 = 0.25$, $x_1 = 0.75$, $x_2 = 1$ olarak hesaplanır. Bu noktalar için temel matris denklemindeki matrisler aşağıdaki gibidir

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} & \frac{17}{32} \\ 1 & \frac{1}{4} & -\frac{7}{32} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 3 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 3 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} -\frac{141}{16} \\ \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{153}{16} \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{L}(0) = [1 \quad 1 \quad 1].$$

Bu sistem koşul matrisini ekleyerek Mathcad 15 programında sembolik hesaplama ile çözdürüldüğünde bilinmeyen katsayılar $a_0 = 2$, $a_1 = -4$, $a_2 = 2$ olarak hesaplanır. Bulunan katsayıları (4.3) denkleminde yerine koyduğumuzda problemin tam çözümünü elde ederiz.

5.3.2.2 Örnek $y(0) = 0$ başlangıç koşulu altında tam çözümünü $y(x) = x^2$ olan uyumlu kesirli türevli Volterra integro-diferansiyel denklemini ele alalım

$$T^{\frac{1}{2}}y(x) = y(x) + 2x^{1.5} - x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \int_0^x y(t)dt.$$

Bölüm 5.2’de anlatılan yöntem kullanılarak denklem ve koşul için temel matris bağıntıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\{\mathbf{X}_0\mathbf{L}\tilde{\mathbf{S}} - \mathbf{L} - \mathbf{V}\}\mathbf{A} = \mathbf{G}, \quad \mathbf{U}_0\mathbf{A} = 0.$$

Burada, $N = 2$ için sıralama noktaları $x_0 = 0.25$, $x_1 = 0.75$, $x_2 = 1$ olarak hesaplanır. Bu noktalar için temel matris denklemindeki matrisler aşağıdaki gibidir

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} & \frac{17}{32} \\ 1 & \frac{1}{4} & -\frac{7}{32} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{7}{32} & \frac{73}{384} \\ \frac{3}{4} & \frac{15}{32} & \frac{33}{128} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{35}{192} \\ \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{45}{64} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_0 = [1 \quad 1 \quad 1].$$

Bu sistem koşul matrisini ekleyerek Mathcad 15 programında sembolik olarak çözdürüldüğünde bilinmeyen katsayılar $a_0 = 2$, $a_1 = -4$, $a_2 = 2$ olarak hesaplanır. Bulunan katsayıları (4.3) denkleminde yerine koyduğumuzda problemin tam çözümünü elde ederiz.

5.3.2.3 Örnek Aşağıdaki uyumlu kesirli türevli Volterra integro-diferansiyel denklemini ele alalım.

$$T^{0.75}y(x) = y(x) + (x^{0.25} - x) \cos x + 2 \int_0^x \sin(t - x) y(t) dt, \quad 0 \leq x, t \leq 1.$$

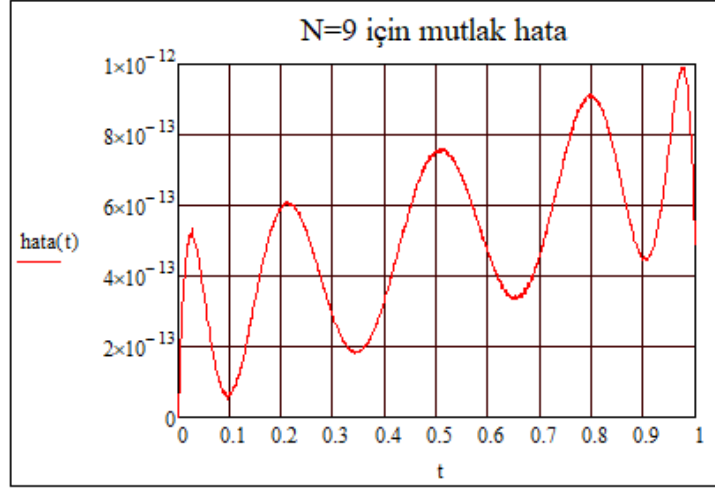
Bu denklemin $y(0) = 0$ başlangıç koşulu altında elde edilen tam çözümü $y(x) = \sin x$ trigonometrik fonksiyondur.

Verilen problemin tam çözümü polinom olmadığı için önerilen yöntem ile tam çözüm elde edilememiştir. Bu yüzden yaklaşık çözümler elde edilmiş ve tam çözüm ile bu yaklaşık çözümler arasındaki mutlak hatalar farklı N değerleri için Tablo 5.6'da verilmiştir. Bu tabloda verilen hatalar $N = 2, 4, 6, 8, 10$ için arttırılmış matris $[\mathbf{W}, \mathbf{G}]$ matrisinin son satırının arttırılmış matris $[\mathbf{U}_0, 0]$ ile yer değiştirmesi ile elde edilen hatalar, $N = 14$ ve $N = 16$ için $[\mathbf{U}_0, 0]$ matrisinin $[\mathbf{W}, \mathbf{G}]$ matrisine eklenmesiyle ortaya çıkan hatalardır.

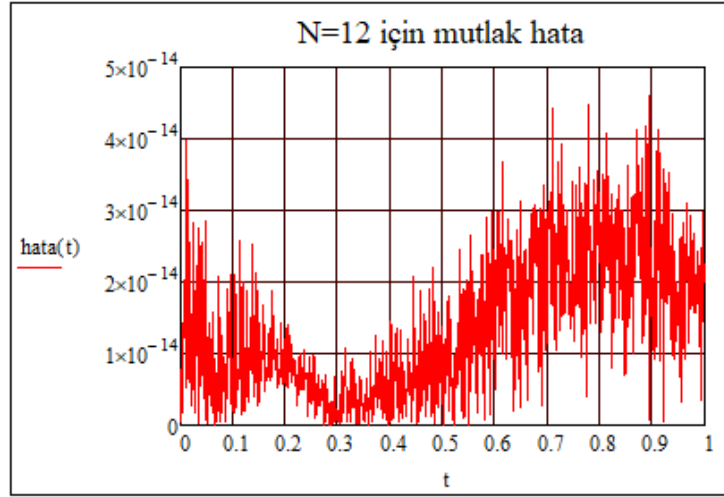
Tablo 5.6: Örnek 5.3.2.3'ün farklı N değerleri için mutlak hataları

x	$N = 2$	$N = 4$	$N = 6$	$N = 8$	$N = 10$	$N = 14$	$N = 16$
1/10	3.2×10^{-4}	8.6×10^{-7}	1.2×10^{-9}	1.0×10^{-12}	4.0×10^{-16}	6.6×10^{-16}	1.7×10^{-16}
2/10	1.2×10^{-3}	3.4×10^{-6}	4.7×10^{-9}	4.0×10^{-12}	2.2×10^{-15}	5.7×10^{-16}	2.0×10^{-17}
3/10	2.7×10^{-3}	7.3×10^{-6}	1.0×10^{-8}	8.6×10^{-12}	1.9×10^{-15}	6.0×10^{-16}	1.3×10^{-17}
4/10	4.6×10^{-3}	1.2×10^{-5}	1.7×10^{-8}	1.4×10^{-11}	5.4×10^{-15}	3.5×10^{-16}	1.7×10^{-17}
5/10	6.7×10^{-3}	1.8×10^{-5}	2.5×10^{-8}	2.1×10^{-11}	1.3×10^{-14}	4.9×10^{-16}	7.6×10^{-17}
6/10	9.0×10^{-3}	2.4×10^{-5}	3.3×10^{-8}	2.8×10^{-11}	1.4×10^{-14}	7.7×10^{-16}	1.7×10^{-17}
7/10	1.1×10^{-2}	2.9×10^{-5}	4.0×10^{-8}	3.4×10^{-11}	1.7×10^{-14}	5.3×10^{-16}	1.2×10^{-16}
8/10	1.3×10^{-2}	3.4×10^{-5}	4.6×10^{-8}	3.9×10^{-11}	2.1×10^{-14}	6.4×10^{-16}	1.5×10^{-16}
9/10	1.5×10^{-2}	3.7×10^{-5}	5.1×10^{-8}	4.2×10^{-11}	2.1×10^{-14}	9.2×10^{-16}	2.8×10^{-16}
1	1.6×10^{-2}	3.9×10^{-5}	5.3×10^{-8}	4.4×10^{-11}	2.2×10^{-14}	7.6×10^{-16}	3.0×10^{-16}

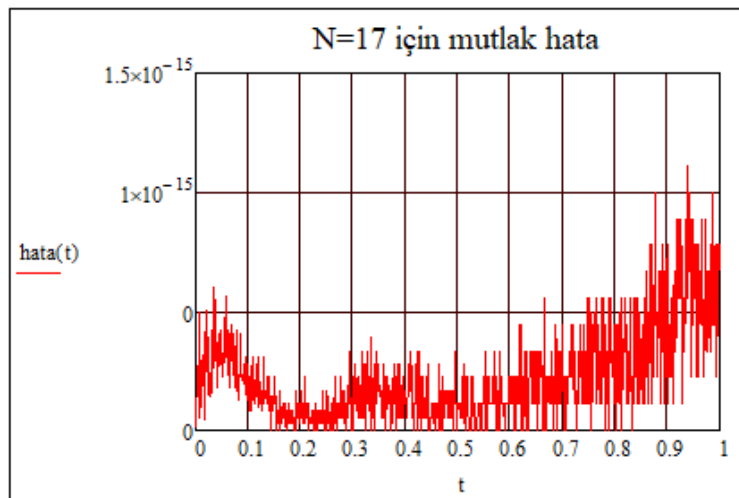
Şekil 5.5, Şekil 5.6 ve Şekil 5.7'de sunulan yöntem ile verilen sıralama noktaları üzerinde sondan silerek ekleme tekniği kullanılarak farklı N değerleri için elde edilen mutlak hata sonuçları verilmektedir.



Şekil 5.6: Örnek 5.3.2.3 için $N=9$ için mutlak hata sonuçları



Şekil 5.7: Örnek 5.3.2.3 için $N=12$ için mutlak hata sonuçları



Şekil 5.8: Örnek 5.3.2.3 için $N=17$ için mutlak hata sonuçları

5.3.2.4 Örnek Aşağıdaki uyumlu kesirli türevli Volterra integro-diferansiyel denklemini ele alalım

$$T^{\frac{1}{3}}y(x) = x^{\frac{2}{3}}y(x) + \cos x + \sin x - e^x + 2 \int_0^x \sin(x-t) y(t) dt, \quad 0 \leq x, t \leq 1.$$

Bu denklemin $y(0) = 1$ koşulu altındaki tam çözümü $y(x) = e^x$ üstel fonksiyonudur.

Verilen problemin tam çözümü üstel fonksiyon olduğu için önerilen yöntem ile tam çözüm elde edilememiştir. Bu yüzden yaklaşık çözümler elde edilmiş ve tam çözüm ile bu yaklaşık çözümler arasındaki mutlak hatalar farklı N değerleri için Tablo 5.7'da verilmiştir. Bu tabloda verilen hatalar $N = 2, 4, 6, 8, 12$ için arttırılmış matris $[\mathbf{W}, \mathbf{G}]$ matrisinin son satırının arttırılmış matris $[\mathbf{U}_0, 1]$ ile yer değiştirmesi ile elde edilen hatalar, $N = 10$ ve $N = 14$ için $[\mathbf{U}_0, 1]$ matrisinin $[\mathbf{W}, \mathbf{G}]$ matrisine eklenmesiyle ortaya çıkan hatalardır.

Tablo 5.7: Örnek 5.3.2.4'ün farklı N değerleri için mutlak hataları

x	$N = 2$	$N = 4$	$N = 6$	$N = 8$	$N = 10$	$N = 12$	$N = 14$
1/10	4.2×10^{-4}	1.3×10^{-6}	2.0×10^{-9}	1.7×10^{-12}	2.7×10^{-14}	4.8×10^{-14}	2.4×10^{-14}
2/10	1.6×10^{-3}	5.2×10^{-6}	7.7×10^{-9}	6.6×10^{-12}	2.1×10^{-14}	1.8×10^{-14}	2.7×10^{-15}
3/10	3.6×10^{-3}	1.1×10^{-5}	1.7×10^{-8}	1.4×10^{-11}	2.4×10^{-15}	2.5×10^{-14}	5.6×10^{-15}
4/10	6.0×10^{-3}	1.9×10^{-5}	2.8×10^{-8}	2.4×10^{-11}	1.6×10^{-13}	1.6×10^{-15}	1.1×10^{-14}
5/10	8.8×10^{-3}	2.8×10^{-5}	4.0×10^{-8}	3.5×10^{-11}	5.2×10^{-14}	3.4×10^{-14}	2.1×10^{-14}
6/10	1.2×10^{-2}	3.6×10^{-5}	5.3×10^{-8}	4.6×10^{-11}	1.1×10^{-13}	1.6×10^{-15}	1.8×10^{-14}
7/10	1.5×10^{-2}	4.4×10^{-5}	6.5×10^{-8}	5.6×10^{-11}	1.5×10^{-13}	6.0×10^{-14}	8.9×10^{-16}
8/10	1.7×10^{-2}	5.1×10^{-5}	7.4×10^{-8}	6.4×10^{-11}	4.2×10^{-14}	5.1×10^{-14}	1.8×10^{-15}
9/10	1.9×10^{-2}	5.6×10^{-5}	8.0×10^{-8}	7.0×10^{-11}	1.8×10^{-13}	2.5×10^{-14}	1.6×10^{-14}
1	2.0×10^{-2}	5.8×10^{-5}	8.4×10^{-8}	7.1×10^{-11}	1.4×10^{-13}	9.9×10^{-15}	1.8×10^{-14}

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında asıl amaç; kesirli lineer Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için Laguerre polinomları yardımı ile sıralama yöntemleri geliştirmektir. Bu çalışmada özellikle Caputo kesirli türevli ve uyumlu kesirli türevli denklemlerin çözümü araştırılmıştır. Bunun için öncelikle üçüncü bölümde Laguerre polinomlarının Caputo kesirli türevi ile Laguerre polinomları arasındaki ilişkiyi veren bağıntılar elde edilip ispatlanmıştır. Bu bağıntılar literatürdeki bağıntılardan farklı olarak yaklaşık olarak değil tam olarak ilişkiyi vermektedir, üstelik onlara göre çok daha basit şekilde ortaya konulmuştur. Bunun yanı sıra Laguerre polinomlarının uyumlu kesirli türevi ile Laguerre polinomları arasındaki ilişki de literatürde ilk defa ele alınmış ve bu ilişkiyi veren bağıntılar da ilk defa elde edilip ispatlanmıştır. Ayrıca, bu ilişki kullanılarak elde edilen matris bağıntıları kullanılan sıralama yönteminde esas rol oynamıştır.

Dördüncü bölümde kesirli lineer Fredholm integro-diferansiyel denklemler için bir sıralama yöntemi geliştirilmiştir. Bu yöntemde integralin çekirdeği Laguerre serisine açılmış, bu noktadan sonra sıralama noktaları kullanılarak integro-diferansiyel denklem cebirsel denklem sistemine dönüştürülmüştür. Beşinci bölümde ise kesirli lineer Fredholm-Volterra denklemler için integrallerin çekirdeği Laguerre serisine açılmadan sıralama noktaları kullanılmış ve bu denklem cebirsel denklem sistemine dönüştürülmüştür. İki yöntem karşılaştırıldığında dördüncü bölümde geliştirilen yöntem çekirdeğin Laguerre serisine açılabilme şartı taşıdığı için beşinci bölümde geliştirilen yöntemle göre uygulama alanının daha sınırlı olduğu görülmüştür. Ayrıca, ilk yöntem sadece kesirli Fredholm integro-diferansiyel denklemler için geliştirilmiş olmasına rağmen bahsedilen ikinci yöntem kesirli Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denklemler için üretildiğinden ilk yöntemden farklı olarak kesirli Volterra integro-diferansiyel denklemlerin ve kesirli Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılabilir.

Bu çalışmada üretilen Laguerre polinomlarına dayalı sıralama yöntemi diğer yöntemler ile karşılaştırıldığında uygulanabilirliği daha kolaydır, bilgisayar ortamında kolay hesaplanabilir ve zamandan tasarruf sağlar.

Bu tezde yapılan çalışmalar, çeşitli uluslararası konferanslarda sunulmuş, uluslararası dergilerde yayınlanmıştır.

Sonuç olarak, lineer kesirli Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denklemler için geliştirilen bu yöntem lineer olmayan kesirli Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denklemler için de geliştirilebilir. Ayrıca, Caputo kesirli türev ve uyumlu kesirli türev dışındaki kesirli türevlere sahip denklemler için de Laguerre polinomlarına dayalı bir sıralama yöntemi üzerine çalışmalar yapılabilir. Bunların dışında Laguerre polinomları kullanılarak geliştirilen bu yöntemlere ek olarak Chebyshev polinomları da kullanılarak yöntemlerin geliştirilmesi planlanmaktadır.

7. KAYNAKLAR

Abbasbandy, S., Hashemi, M. S. and Hashim, I., “On convergence of homotopy analysis method and its application to fractional integro-differential equations”, *Quaestiones Mathematicae*, 36 (1), 93-105, (2013).

Abdeljawad, T., “On conformable fractional calculus”, *J. Comput. Appl. Math.*, 279, 57-66, (2015).

Abdelkawy, M. A. and Taha, T. M., “An operational matrix of fractional derivatives of Laguerre polynomials”, *WJST*, 11 (12), 1041-1055, (2014).

Aboelenen, T., Bakr, S. A. and El-Hawary, H. M., “Fractional Laguerre spectral methods and their applications to fractional differential equations on unbounded domain”, *Int. J. Comput. Math.*, 94 (3), 570-596, (2017).

Abramovitz, M. and Stegun, I., *Handbook of Mathematical Functions*, Washington, DC: Applied Math. Series, National Bureau of Standards, US Government Printing Office, (1965).

Al-Jamal, M. F. and Rawashdeh, E. A., “The approximate solution of fractional integro-differential equations”, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 4 (22), 1067-1078, (2009).

Al-Zubaidy, K. A., “A numerical solution of parabolic-type Volterra partial integro-differential equations by Laguerre collocation method”, *International Journal for Sciences and Technology*, 8 (4), 51-55, (2013).

Alkan, S. and Hatipoğlu, V. F., “Approximate solutions of Volterra-Fredholm integro-differential equations of fractional order”, *Tbilisi Mathematical Journal*, 10 (2), 1-13, (2017).

Arikoglu, A. and Ozkol, I., “Solution of fractional integro-differential equations by using fractional differential transform method”, *Chaos Solitons Fractals*, 40, 521–529, (2009).

Awawdeh, F., Rawashdeh, E. A. and Jaradat, H. M., “Analytic solution of fractional integro-differential equations”, *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*, 38 (1), 1-10, (2011).

Baleanu, D., Bhrawy, A. H. and Taha, T. M., “Two efficient generalized Laguerre spectral algorithms for fractional initial value problems”, *Abstr. Appl. Anal.*, Article ID 546502, (2013a).

Baleanu, D., Bhrawy, A. H. and Taha, T. M., “A modified generalized Laguerre spectral method for fractional differential equations on the half line”, *Abstr. Appl. Anal.*, Article ID 413529, (2013b).

Baykus Savaseneril, N., Sezer, M., “Laguerre polynomial solution of high-order linear Fredholm integro-differential equations”. *New Trends in Math. Sci.*, 4 (2), 273-284 (2016).

Bell, W. W., *Special Functions for Scientists and Engineers*, London: D. Van Nostrand Company, (1968).

Bhrawy, A. H., Alghamdi, M. M. and Taha, T. M., “A new modified generalized Laguerre operational matrix of fractional integration for solving fractional differential equations on the half line”, *Adv. Differ. Equ.*, 2012 (1), 179, (2012).

Bhrawy, A. H. and Alghamdi, M. A., “The operational matrix of Caputo fractional derivatives of modified generalized Laguerre polynomials and its applications”, *Adv. Differ. Equ.*, 2013 (1), 307, (2013).

Bhrawy, A. H., Baleanu, D., Assas, L. M. and Tenreiro Machado, J. A., “On a generalized Laguerre operational matrix of fractional integration”, *Math. Probl. Eng.*, Article ID 569286, (2013).

Bhrawy, A. H., Alhamed, Y., Baleanu, D. and Al-Zahrani, A., “New spectral techniques for systems of fractional differential equations using fractional-order generalized Laguerre orthogonal functions”, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 17 (4), 1137-1157, (2014c).

Bhrawy, A. H., Al-Zahrani, A. A., Alhamed, Y. A. and Baleanu, D., “A new generalized Laguerre-Gauss collocation scheme for numerical solution of generalized fractional pantograph equations”, *Rom. J. Phys.*, 59 (7-8), 646-657, (2014a).

Bhrawy, A. H., AlZahrani, A., Baleanu, D. and Alhamed, Y., “A modified generalized Laguerre-Gauss collocation method for fractional neutral functional-differential equations on the half-line”, *Abstr. Appl. Anal.*, Article ID 692193, (2014b).

Bhrawy, A. H. and Taha, T. M., “An operational matrix of fractional integration of the Laguerre polynomials and its application on a semi-infinite interval”, *Mathematical Sciences*, 6 (1), 41, (2012).

Bhrawy, A. H., Baleanu, D. and Assas, L. M., “Efficient generalized Laguerre-spectral methods for solving multi-term fractional differential equations on the half line”, *J. Vib. Control*, 20 (7), 973-985, (2013a).

- Boyadjiev, L., Kalla, S. L. and Khajah, H. G., “Analytical and numerical treatment of a fractional integro-differential equation of Volterra-type”, *Math. Comput. Model.*, 25 (12), 1-9, (1997).
- Boyadjiev, L., Dobner, H. J. and Kalla, S. L., “A fractional integro-differential equation of Volterra-type”, *Math. Comput. Model.*, 28 (10), 103-113, (1998).
- Bushnaq, S., Momani, S. and Zhou, Y., “A reproducing kernel Hilbert space method for solving integro-differential equations of fractional order”, *J. Optim. Theory Appl.*, 156, 96–105, (2013).
- Cuesta, E. and Palencia C., “A Fractional trapezoidal rule for integro-differential equations of fractional order in Banach spaces”, *Appl. Numer. Math.*, 45, 139-159, (2003).
- Elbeleze, A. A., Kılıçman, A. and Taib, B. M., “Approximate solution of integro-differential equation of fractional (arbitrary) order”, *JKSUS*, 28 (1), 61-68, (2016).
- Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., and Tricomi, F. G., *Higher Transcendental Functions*, 2, New York: McGraw-Hill, (1953).
- Ertürk, V. S. and Momani, S., “On the generalized differential transform method: Application to fractional integro-differential equations”, *Studies in Nonlinear Sciences*, 1 (4), 118-126, (2010).
- Eslahchi, M. R., Dehghan, M. and Parvizi, M., “Application of the collocation method for solving nonlinear fractional integro-differential equations”, *J. Comput. Appl. Math.*, 257, 105-128, (2014).
- Golbabai, A., Ahmadian, D. and Milev, M., “Radial basis functions with application to finance: American put option under jump diffusion”, *Math. Comput. Model.*, 55, 1354-1362, (2012).
- Gülsu, M., Öztürk, Y. and Anapalı, A., “Numerical approach for solving fractional Fredholm integro-differential equation”, *Int. J. Comput. Math.*, 90 (7), 1413-1434, (2013).
- Gürbüz, B. and Sezer, M., “A new computational method based on Laguerre polynomials for solving certain nonlinear partial integro differential equations”, *Acta Phys. Polon. A*, 132 (3), 561-563 (2017a).
- Gürbüz, B. and Sezer, M., “A numerical solution of parabolic-type Volterra partial integro-differential equations by Laguerre collocation method”, *International Journal of Applied Physics and Math.*, 7 (1), 49-58 (2017b).

Gürbüz, B. and Sezer, M., “Laguerre polynomial solutions of a class of delay partial functional differential equations”, *Acta Phys. Polon. A*, 132 (3), 558-560, (2017c).

Gürbüz, B., Sezer, M. and Güler, C., “Laguerre collocation method for solving Fredholm integro-differential equations with functional arguments”, *J. Appl. Math.*, Article ID 682398, 1-12, (2014).

Huang, C., Zhang, Z. and Song, Q., “Spectral methods for substantial fractional differential equations”, *J. Sci. Comput.*, 74, 1554-1574, (2018).

Huang, L., Li, X., Zhao, Y. and Duan, X., “Approximate solution of fractional integro-differential equations by Taylor expansion method”, *Comput. Math. Appl.*, 62, 1127-1134, (2011).

Iqbal, M. A., Saeed, U. and Mohyud-Din, S. T. “Modified Laguerre wavelets method for delay differential equations of fractional-order”, *Egypt. J. Basic Appl. Sci.*, 2, 50, (2015).

Irandoost-pakchin, S., and Abdi-mazraeh, S., “Exact solutions for some of the fractional integro-differential equations with the nonlocal boundary conditions by using the modification of He's variational iteration method”, *Int. J. Adv. Math. Sci.*, 1 (3), 139-144, (2013).

Irandoost-pakchin, S., Kheiri, H. and Abdi-mazraeh, S., “Chebyshev cardinal functions: An effective tool for solving nonlinear Volterra and Fredholm integro-differential equations of fractional order”, *Iran. J. Sci. Technol. A*, A1, 53-62, (2013).

Ismaelpour, T., Hemmat, A. A. and Saeedi, H., “B-spline operational matrix of fractional integration”, *Optik*, 130, 291-305, (2017).

Jaradat, I., Al-Dolat, M., Al-Zoubi, K. and Alquran, M., “Theory and applications of a more general form for fractional power series expansion”, *Chaos Solitons Fractals*, 108, 107-110, (2018).

Jiang, W. and Tian, T., “Numerical solution of nonlinear Volterra integro-differential equations of fractional order by the reproducing kernel method”, *Appl. Math. Model.*, 39, 4871–4876, (2015).

Karimi Vanani, S. and Aminataei, A., “Operational Tau approximation for a general class of fractional integro-differential equations”, *Comput. Appl. Math.*, 30 (3), 655–674, (2011).

Karimi Vanani, S. and Aminataei, A., "A numerical algorithm for the space and time fractional Fokker-Planck equation", *Int. J. Numer. Method H.*, 22 (8), 1037-1052, (2012).

Khader, M. M., "The use of generalized Laguerre polynomials in spectral methods for solving fractional delay differential equations", *J. Comput. Nonlin. Dyn.*, 8 (4), 041018, (2013a).

Khader, M. M., "An efficient approximate method for solving linear fractional Klein-Gordon equation based on the generalized Laguerre polynomials", *Int. J. Comput. Math.*, 90 (9), 1853-1864, (2013b).

Khader, M. M., Mahdy, A. M. S. and Mohamed, E. S., "On approximate solutions for fractional Riccati differential equation", *Int. J. Eng.*, 4 (9), 8269, (2014).

Khader, M. M., El Danaf, T. S. and Hendy, A. S., "Efficient spectral collocation method for solving multi-term fractional differential equations based on the generalized Laguerre polynomials", *J. Fractional Calc. Appl.*, 3 (13), 1-14, (2012).

Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A. and Sababbeh, M., "A new definition of fractional derivative", *J. Comput. Appl. Math.*, 264, 65-70, (2014).

Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. and Trujillo, J. J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier Science Limited, (2006).

Kobayashi, R., Konuma, M. and Kumano, S., "FORTRAN program for a numerical solution of the nonsinglet Altarelli-Parisi equation", *Comput. Phys. Commun.*, 86, 264-278, (1995).

Kumano, S. and Nagai, T. H., "Comparison of numerical solutions for Q^2 evolution equations", *J. Comput. Phys.*, 201 (2), 651-664, (2004).

Kumar, K., Pandey, R. K. and Sharma, S., "Comparative study of three numerical schemes for fractional integro-differential equations", *J. Comput. Appl. Math.*, 315, 287-302, (2017).

Kurulay, M. and Secer, A., "Variational iteration method for solving nonlinear fractional integro-differential equations", *International Journal of Computer Science & Emerging Technologies*, 2 (1), 18-20, (2011).

Lebedev N. N., *Special Functions and Their Applications*, New York: Dover Publications, (1972).

Lepik, Ü., “Solving fractional integral equations by the Haar wavelet method”, *Appl. Math. Comput.*, 214, 468-478, (2009).

Li, B., “Numerical solution of fractional fredholm-volterra integro-differential equations by means of generalized hat functions method”, *CMES*, 99 (2), 105-122, (2014).

Loh, J. R., Phang, C. and Isah, A., “New operational matrix via Genocchi polynomials for solving Fredholm-Volterra fractional integro-differential equations”, *Adv. Math. Phys.*, Article ID 3821870, (2017).

Ma, X. and Huang, C., “Numerical solution of fractional integro-differential equations by a hybrid collocation method”, *Appl. Math. Comput.*, 219, 6750–6760, (2013).

Ma, X. and Huang, C., “Spectral collocation method for linear fractional integro-differential equations”, *Appl. Math. Model.*, 38, 1434-1448, (2014).

Mahdy, A. M. S. and Shwayyea, R. T., “Numerical solution of fractional integrodifferential equations by least squares method and shifted Laguerre polynomials pseudo-spectral method”, *Int. J. Sci. Eng. Res.*, 7 (4), 1589-1596, 2016).

Meng, Z., Wang, L., Li, H. and Zhang, W. “Legendre wavelets method for solving fractional integro-differential equations”, *Int. J. Comput. Math.*, 92 (6), 1275-1291, (2015).

Miller, K.S. and Ross, B., *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, New York: John Wiley & Sons, (1993).

Mittal, R. C. and Nigam, R., “Solution of fractional integro-differential equations by Adomian decomposition method”, *Int. J. of Appl. Math. and Mech.*, 4 (2), 87-94, (2008).

Mohammed, D. Sh., “Numerical solution of fractional integro-differential equations by least squares method and shifted Chebyshev polynomial”, *Math. Probl. Eng.*, Article ID 431965, 1-5, (2014).

Mokhtary, P., “Reconstruction of exponentially rate of convergence to Legendre collocation solution of a class of fractional integro-differential equations”, *J. Comput. Appl. Math.*, 279, 145–158, (2015).

Mokhtary, P., “Discrete Galerkin method for fractional integro-differential equations”, *Acta Math. Sci*, 36 (B2), 560-578, (2016).

Mokhtary, P. and Ghoreishi, F., “The L^2 -convergence of the Legendre spectral Tau matrix formulation for nonlinear fractional integro-differential equations”, *Numer. Algor.*, 58, 475–496, (2011).

Momani, S. and Noor, M. A., “Numerical methods for fourth-order fractional integro-differential equations”, *Appl. Math. Comput.*, 182, 754-760, (2006).

Nawaz, Y., “Variational iteration method and homotopy perturbation method for fourth-order fractional integro-differential equations”, *Comput. Math. Appl.*, 61, 2330-2341, (2011).

Nazari, D. and Shahmorad S., “Application of the fractional differential transform method to fractional-order integro-differential equations with nonlocal boundary conditions”, *J. Comput. Appl. Math.*, 234, 883-891, (2010).

Nazari Susahab, D., Shahmorad S. and Jahanshahi, “Efficient quadrature rules for solving nonlinear fractional integro-differential equations of the Hammerstein type”, *Appl. Math. Model.*, 39, 5452–5458, (2015).

Nemati, S. and Lima, P. M., “Numerical solution of nonlinear fractional integro-differential equations with weakly singular kernels via a modification of hat functions”, *Appl. Math. Comput.*, 327, 79-92, (2018).

Nemati, S., Sedaghat, S. and Mohammadi, I., “A fast numerical algorithm based on the second kind Chebyshev polynomials for fractional integro-differential equations with weakly singular kernels”, *J. Comput. Appl. Math.*, 308, 231-242, (2016).

Ordokhani, Y. and Dehestani, H., “Numerical solution of linear Fredholm-Volterra integro-differential equations of fractional order”, *World Journal of Modelling and Simulation*, 12 (3), 204-216 (2016).

Oyedepo, T., Taiwo, O. A., Abubakar, J. U. and Ogunwobi, Z. O., “Numerical studies for solving fractional integro-differential equations by using least squares method and Bernstein polynomials”, *Fluid Mechanics: Open Access*, 3 (3), 1000142, (2016).

Parand, K. and Nikarya, M., “Application of Bessel functions for solving differential and integro-differential equations of the fractional order”, *Appl. Math. Model.*, 38, 4137-4147, (2014).

Pashayi, S., Hashemi, M. S. and Shahmorad, S., “Analytical Lie group approach for solving fractional integro-differential equations”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 51, 66-77, (2017).

Podlubny, I., *Fractional Differential Equations*, San Diego: Academic Press, (1999).

Rahimkhani, P., Ordokhani, Y. and Babolian, E., “Fractional-order Bernoulli functions and their applications in solving fractional Fredholm–Volterra integro-differential equations”, *Appl. Numer. Math.*, 122, 66-81, (2017).

Rawashdeh, E. A., “Legendre wavelets method for fractional integro-differential equations”, *Appl. Math. Sci.*, 5 (50), 2467-2474, (2011).

Rawashdeh, E. A., “Numerical solution of fractional integro-differential equations by collocation method”, *Appl. Math. Comput.*, 176, 1-6, (2006).

Rezaei, B. and Boroun, G. R., “Analytical solution of the longitudinal structure function F_L in the leading and next-to-leading-order analysis at low x with respect to Laguerre polynomials method”, *Nucl. Phys. A*, 857, 42-47, (2011).

Saadatmandi, A. and Dehghan, M., “A Legendre collocation method for fractional integro-differential equations”, *J. Vib. Control*, 17 (13), 2050-2058, (2011).

Saeedi, H., “Application of Haar wavelets in solving nonlinear fractional Fredholm integro-differential equations”, *Journal of Mahani Mathematical Research Center*, 2 (1), 15-28, (2013).

Saeedi, H., Moghadam, M. M., Mollahasani, N. and Chuev, G. N., “A CAS wavelet method for solving nonlinear fredholm integro-differential equations of fractional order”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 16, 1154–1163, (2011).

Sahu, P. K. and Saha Ray, S., “A novel Legendre wavelet Petrov–Galerkin method for fractional Volterra integro-differential equations”, *Comput. Math. Appl.*, (in press) (2016).

Sayevand, K., “Analytical treatment of volterra integro-differential equations of fractional order”, *Appl. Math. Model.*, 39, 4330–4336, (2015).

Sayevand, K., Fardi, M., Moradi, E. and Hemati Boroujeni, F., “Convergence analysis of homotopy perturbation method for Volterra integro-differential equations of fractional order”, *Alexandria Eng. J.*, 52, 807-812, (2013).

Schoeffel, L., “An elegant and fast method to solve QCD evolution equations. Application to the determination of the gluon content of the Pomeron”, *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A*, 423, 439-445 (1999).

Setia, A., Liu, Y., and Vatsala, A. S., “Solution of linear fractional Fredholm integrodifferential equation by using second kind Chebyshev wavelet”, *11th International Conference on Information Technology: New Generations*, (2014a).

- Setia, A., Liu, Y., and Vatsala, A. S., “Numerical solution of Fredholm-Volterra fractional integro-differential equations with nonlocal boundary conditions”, *J. Fractional Calc. & Appl.*, 5(2), 155-165, (2014b).
- Sharma, S., Pandey, R. K. and Kumar, K., “Collocation method with convergence for generalized fractional integro-differential equations”, *J. Comput. Appl. Math.*, 342, 419-430, (2018).
- Sweilam, N. H. and Khader, M. M., “A Chebyshev pseudo-spectral method for solving fractional-order integro-differential equations”, *ANZIAM J.*, 51, 464–475, (2010).
- Sweilam, N. H., Khader, M. M. and Adel, M., “Numerical solution for the fractional wave equation using pseudo-spectral method based on the generalized Laguerre polynomials”, *Applied Mathematics*, 6 (04), 647, (2015).
- Taheri, Z., Javadi, S. and Babolian, E., “Numerical solution of stochastic fractional integro-differential equation by the spectral collocation method”, *J. Comput. Appl. Math.*, 321, 336-347, (2017).
- Tang, X. and Xu, H., “Fractional pseudospectral integration matrices for solving fractional differential, integral, and integro-differential equations”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 30, 248-267, (2016).
- Wang, Y. and Zhu, L., “SCW method for solving the fractional integro-differential equations with a weakly singular kernel”, *Appl. Math. Comput.*, 275, 72-80, (2016).
- Wang, Y. and Zhu, L., “Solving nonlinear Volterra integro-differential equations of fractional order by using Euler wavelet method”, *Adv. Differ. Equ.*, 2017 (1), 27, (2017).
- Yang, Y., “Jacobi spectral Galerkin methods for fractional integro-differential equations”, *Calcolo*, 52 (4), 519-542, (2015).
- Yang, Y., Chen, Y. and Huang, Y., “Convergence analysis of the Jacobi spectral-collocation method for fractional integro-differential equations”, *Acta Math. Sci.*, 34 (B3), 673–690, (2014).
- Yang, Y. and Ma, H., “Fractional collocation methods for multi-term linear and nonlinear fractional differential equations with variable coefficients on the half line”, *Int. J. Comput. Math.*, 1-18, (2018).

Yi, M. and Huang, J., “CAS wavelet method for solving the fractional integro-differential equation with a weakly singular kernel”, *Int. J. Comput. Math.*, 92 (8), 1715-1728, (2015).

Yi, M., Wang, L. and Huang, J., “Legendre wavelets method for the numerical solution of fractional integro-differential equations with weakly singular kernel”, *Appl. Math. Model.*, 40 (4), 3422-3437, (2016).

Yüzbaşı Ş., “Laguerre approach for solving pantograph-type Volterra integro-differential equations”, *Appl. Math. Comput.*, 232, 1183–1199, (2014).

Zaky, M. A., Doha, E. H., Taha, T. M. and Baleanu, D., “New recursive approximations for variable-order fractional operators with applications”, *Math. Model. Anal.*, 23 (2), 227-239, (2018).

Zhang, X., Tang, B. and He, Y., “Homotopy analysis method for higher order fractional integro-differential equations”, *Comput. Math. Appl.*, 62, 3194-3203,(2011).

Zhao, J., Xiao, J. and Ford, N. J., “Collocation methods for fractional integro-differential equations with weakly singular kernels”, *Numer. Algor.*, 65 (4), 723-743, (2014).

Zhu, L. and Fan, Q., “Numerical solution of nonlinear fractional-order Volterra integro-differential equations by SCW”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 18, 1203-1213, (2013).

Zhu, L. and Fan, Q., “Solving Fractional Nonlinear Fredholm Integro-differential Equations by the Second Kind Chebyshev Wavelet”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 17, 2333-2341, (2012).

8. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Dilek VAROL BAYRAM
Doğum Yeri ve Tarihi	: 15.02.1987
Lisans Üniversite	: Orta Doğu Teknik Üniversitesi
Y. Lisans Üniversite	: Dokuz Eylül Üniversitesi
Medeni Hali	: Evli ve 1 çocuklu
İş Deneyimi	: Araştırma Görevlisi (İzmir Yüksek Teknoloji Üniversitesi Matematik Bölümü, 11.01.2012-08.02.2014) Araştırma Görevlisi (Pamukkale Üniversitesi Matematik Bölümü, 08.02.2014- ...)
Elektronik posta	: dvarol@pau.edu.tr
İletişim Adresi	: Pamukkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi D Blok Kat:3 Matematik Bölümü Kınıklı Kampüsü Pamukkale / DENİZLİ

Yayın Listesi :

• Daşcıoğlu, A., Çulha, S. and Varol Bayram, D., “New analytical solutions of the space fractional KdV equation in terms of Jacobi elliptic functions”, *New Trends in Mathematical Sciences*, 5 (4) 232-241, (2017).

• Varol Bayram, D. and Daşcıoğlu, A., “A method for fractional Volterra integro-differential equations by Laguerre polynomials”, *Advances in Difference Equations*, 2018: 466, (2018).

• Daşcıoğlu, A. and Varol Bayram, D., “Solving Fractional Fredholm Integro-Differential Equations By Laguerre Polynomials”, *Sains Malaysiana*, 48 (1), (2019).

• ulha, S., Daşcıoğlu, A. and Varol Bayram, D., “Jacobi elliptic function solutions of the space-time fractional symmetric regularized long wave equation”, *Filomat*, (2019, in press).

Konferans listesi :

• Dilek Varol Bayram, Sevil ulha, Ayşegöl Daşcıoğlu, “Jacobi elliptic function solutions of the space-time fractional symmetric regularized long wave equation”, International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM-2017), Aydın, TÜRKİYE, 2017.

• Sevil ulha, Dilek Varol Bayram, Ayşegöl Daşcıoğlu, “Jacobi elliptic function solutions of time-fractional KdV-Zakharov-Kuznetsov equation”, International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM-2017), Aydın, TÜRKİYE, 2017.

• Dilek Varol Bayram, Sevil ulha, Ayşegöl Daşcıoğlu, “New analytical solutions of the space fractional Korteweg-de Vries equation by Jacobi elliptic function expansion method”, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM-2017), İstanbul, TÜRKİYE, 2017.

• Sevil ulha, Dilek Varol Bayram, Ayşegöl Daşcıoğlu, “New analytical solutions of the time-fractional Phi-4 equation”, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM-2017), İstanbul, TÜRKİYE, 2017.

• Dilek Varol Bayram, Sevil ulha, Ayşegöl Daşcıoğlu, “The Analytical Solutions of the Space-time Fractional Modified Kawahara Equation”, 6th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2017), Budapeşte, MACARİSTAN, 2017.

• Dilek Varol Bayram, Ayşegöl Daşcıoğlu, “An Approximation Method for the Fractional Linear Fredholm Integrodifferential Equations by Laguerre Polynomials”,

6th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2017), Budapeşte, MACARİSTAN, 2017.

- Dilek Varol Bayram, Ayşegül Daşcıoğlu, “Solution Of The Fractional Volterra Integrodifferential Equations By Laguerre Polynomials”, 5th International Congress on Fundamental and Applied Sciences (ICFAS2018), Üsküp, MAKEDONYA, 2018.

- Dilek Varol Bayram, Ayşegül Daşcıoğlu, “A Method For Conformable Fractional Fredholm Integrodifferential Equations”, 5th International Congress on Fundamental and Applied Sciences (ICFAS2018), Üsküp, MAKEDONYA, 2018.

- Dilek Varol Bayram, Ayşegül Daşcıoğlu, “A Method for Conformable Fractional Volterra Integrodifferential Equations”, International Conference on Applied Analysis Mathematical Modelling (ICAAMM 2018), İstanbul, 2018.

- Dilek Varol Bayram, Ayşegül Daşcıoğlu, “Solution of the Fractional Fredholm Integrodifferential Equations by Chebyshev Polynomials”, International Conference on Applied Analysis Mathematical Modelling (ICAAMM 2018), İstanbul, 2018.