

**T.C.  
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DİJİTAL HOMOLOJİ GRUPLARI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**EMİNE KÖSE**

**DENİZLİ, OCAK - 2020**

**T.C.  
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**DIJİTAL HOMOLOJİ GRUPLARI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**EMİNE KÖSE**

**DENİZLİ, OCAK - 2020**

**Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.**



**EMİNE KÖSE**

## ÖZET

**DİJİTAL HOMOLOJİ GRUPLARI  
YÜKSEK LİSANS TEZİ  
EMİNE KÖSE  
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**(TEZ DANIŞMANI:DR.ÖĞR. ÜYESİ GÜLSELI BURAK)**

**DENİZLİ, OCAK - 2020**

Dijital homoloji grupları görüntü analizi için ana araçlardan biridir. Çünkü iki farklı nesnenin izomorfik homoloji grubuna sahip olup olmadığını belirtmek, görüntü analizinde önemli bir rol oynar. Dijital homoloji grupları, dijital simpleksler kompleksi üzerine inşa edilmiştir. Dijital görüntülerin homoloji gruplarının hesaplanması, dijital topolojide önemli bir alana sahiptir. Bununla birlikte literatürdeki dijital görüntülerin homoloji grupları hakkında birçok teorik çalışma olmasına rağmen bilgisayar algoritması açısından çalışmalar yeterli değildir. Daha önceki çalışmalarda iki boyutlu algoritmalar ortaya konmuştur. Bu çalışmada öncelikli olarak üç boyutlu dijital görüntülerin homoloji gruplarını hesaplanması için bir algoritma oluşturulması hedeflenmiştir. Matrislerde normal form baz alınarak indirgeme algoritması kullanılıp, dijital görüntülerinin homoloji gruplarının hesaplanması ile ilgili çalışmalar yapılmıştır.

**ANAHTAR KELİMELELER:**Dijital Topoloji, Dijital Simpleksler, Homoloji Grupları, İndirgeme Algoritması.

# **ABSTRACT**

**DIGITAL HOMOLOGY GROUPS  
MSC THESIS  
EMİNE KÖSE  
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE  
MATHEMATICS**

**(SUPERVISOR:ASSOC. PROF. DR. GÜLSELİ BURAK)**

**DENİZLİ, JANUARY 2020**

Digital homology groups are one of the main tools for image analysis. Because specifying whether two different objects have isomorphic homology groups is a very effective tool for image analysis. Digital homology groups were built on digital simplicial complexes. The calculation of homology groups of digital images has an important place in digital topology. Although, there are many theoretical studies about homology groups of the digital images in the literature but computer algorithm are not enough. The previous studies, two-dimensional algorithms have been introduced. In this study is propose to form an algorithm for calculating the homology groups of three-dimensional digital images. In the matrices, reduction algorithm based on normal form was used and homology groups of digital images were calculated.

**KEYWORDS:**Digital Topology, Digital Simpleks, Homology Groups, Reduction Algorithm.

# İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT .....	ii
İÇİNDEKİLER .....	iii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
SEMBOL DİZİNİ .....	v
ÖNSÖZ.....	vi
<b>1. GİRİŞ.....</b>	<b>1</b>
<b>2. TEMEL TANIMLAR .....</b>	<b>2</b>
2.1 Dijital Homeomorfizma.....	6
2.2 Dijital Retrakt Olan Uzaylar .....	7
2.3 Dijital Homotopi .....	7
2.4 Dijital Büzülebilir Uzaylar .....	9
2.5 Dijital Yol ve Dijital Kapalı Yol.....	11
2.6 Dijital Basit Kapalı Eğri.....	11
2.7 Dijital Kapalı Yüzey .....	12
<b>3.DİJİTAL GÖRÜNTÜLERİN HOMOLOJİ GRUPLARI.....</b>	<b>14</b>
3.1 Dijital Simpleksler .....	14
3.2 Dijital Simpleksler Kompleksi .....	14
3.3 Sınır Homomorfizması .....	16
3.4 Simpleksler Homoloji Grupları .....	18
3.5 Euler Karakteristik.....	30
<b>4.HOMOLOJİ GRUPLARI İÇİN İNDİRGEME ALGORİTMASI.....</b>	<b>32</b>
4.1 İndirgeme Algoritması.....	33
4.2 İndirgeme Algoritmasının Uygulamaları.....	34
<b>5. SONUÇ VE ÖNERİLER .....</b>	<b>49</b>
<b>6. KAYNAKLAR.....</b>	<b>50</b>
<b>7. ÖZGEÇMİŞ.....</b>	<b>51</b>

## ŞEKİL LİSTESİ

### Sayfa

Şekil 2.1: 2-yakın .....	3
Şekil 2.2: 4-yakın ve 8-yakın. ....	3
Şekil 2.3: 6-yakın, 18-yakın ve 26-yakın .....	3
Şekil 2.4: $MSC_8, MSC_4, MSC'_8$ .....	11
Şekil 2.5: $MSS_{18}, MSS'_{18}, MSS_6$ .....	13
Şekil 3.1: Simpleksler .....	14
Şekil 3.2: $MSC'_8$ .....	16
Şekil 3.3: $(X, 8)$ .....	23
Şekil 3.4: $MSS'_{18}$ .....	25
Şekil 3.5: $MSS_{18}$ .....	29
Şekil 3.6: $MSS'_6$ .....	29
Şekil 4.1: Dijital homoloji gruplarını hesaplayan algoritma .....	38
Şekil 4.2: Matris indirgeme için akış diyagramı .....	39
Şekil 4.3: $MSS'_{18}$ .....	41

## SEMBOL DİZİNİ

- $\kappa$  : Yakınlık bağıntısı  
 $(X, \kappa)$  :  $\kappa$ -yakınlıklı dijital görüntü  
 $[a, b]_{\mathbb{Z}}$  :  $\kappa$ -yakınlıklı dijital görüntü  
 $(X, x_0)$  : Noktalı dijital görüntü  
 $N_{\kappa}(x_0, \varepsilon)$  :  $x_0$  noktasının  $\varepsilon$  yarıçaplı  $\kappa$ -komşuluğu  
 $Int(X)$  :  $X$  dijital görüntüsünün içi  
 $X \# Y$  :  $X$  ve  $Y$  dijital görüntülerinin bağlantılı toplamı  
 $f * g$  :  $f$  ve  $g$  dijital  $\kappa$ -yollarının çarpımı  
 $f'$  :  $f$   $\kappa$ -yolunun aşık genişlemesi  
 $[f]_X$  :  $X$  dijital görüntüsünde kapalı yol sınıfı  
 $\pi_1^{\kappa}(X, x_0)$  :  $(X, x_0)$  in  $\kappa$ -temel grubu  
 $C_q^{\kappa}(X)$  :  $X$  dijital görüntüsünde  $q$ -boyutlu simpleksler zincir grubu  
 $\partial_q$  : Sınır operatörü  
 $Z_q^{\kappa}(X)$  : Dijital simpleksler  $q$ -devirlerinin grubu  
 $B_q^{\kappa}(X)$  : Dijital simpleksler  $q$ -sınırlarının grubu  
 $H_q^{\kappa}(X)$  :  $q$ -boyutlu dijital simpleksler homoloji grubu



## ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının gerçekleştirilmesinde kıymetli bilgi, birikim ve tecrübelerini benimle paylaşan, bana her zaman yol gösterici olan, eğitimim boyunca insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim ve tecrübelerinden yararlanırken hiçbir zaman hoşgörü, sabır ve desteklerini esirgemeyen çok değerli hocam sayın Dr. Öğr. Üyesi Gülseli BURAK'a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca maddi manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme de teşekkür ederim.

Emine KÖSE

# 1. GİRİŞ

Homoloji teorisi, cebirsel topolojinin temel konularından biridir. Homoloji teorisindeki hesaplama yöntemleri, dijital görüntü analizi, geometrik modelleme, dinamik sistemlerle ilgili problemlerin çözümünde kolaylık sağlar.

Dijital görüntülerin simpleksler homoloji grubu Karaca, Arslan ve Öztel (2008) tarafından tanımlanarak,  $MSS_{18}$  in simpleksler homoloji grupları hesaplanmıştır.

Boxer, Karaca ve Öztel (2011), dijital görüntülerin simpleksler homoloji gruplarıyla ilgili çalışmalarını genişleterek, bazı dijital yüzeylerin Euler karakteristiğini hesaplamışlardır.

Ege ve Karaca (2013), dijital görüntülerin simpleksler homoloji grupları için Eilenberg-Steenrod aksiyomlarını ele almışlardır.

Demir ve Karaca (2013) çeşitli dijital basit kapalı yüzeylerin bağlantılı toplamlarının simpleksler homoloji gruplarını hesaplamışlardır.

Öztel, Akgül ve Aksu (2017), iki boyutlu dijital görüntülerin homoloji gruplarının hesaplanması için bir algoritma vermişlerdir.

Bu çalışmada, üç boyutlu dijital görüntülerin simpleksler homoloji gruplarının hesaplanması için bir algoritma oluşturularak ve bundan yararlanarak  $MSS_{18}$  ve  $MSS'_6$  dijital yüzeylerinin homoloji gruplarını hesaplanmıştır.

## 2. TEMEL TANIMLAR

$\mathbb{Z}$  tamsayılar kümesi olmak üzere  $\mathbb{Z}^n$ ,  $n$ -boyutlu Euclid uzayında kafes noktalarının kümesidir. Bir dijital görüntü ikilisi, yakınlık bağıntısı ile  $\mathbb{Z}^n$  nin sonlu alt kümesinden oluşur. Yakınlık bağıntısı dijital görüntülerin tanımlanmasında kullanılır.

**Tanım 2.1**  $1 < l < n$  olmak üzere  $l$  pozitif tam sayısı ve

$$p = (p_1, \dots, p_n), q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Z}^n$$

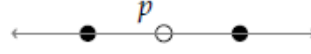
ayrık iki nokta için aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa  $p$  ve  $q$  ya  $\kappa_l$ -yakın denir;

- $|p_i - q_i| = 1$  olacak şekilde en çok  $l$  kadar  $i$  indisi vardır.
- $|p_j - q_j| \neq 1$  olacak şekilde diğer tüm  $j$  indisleri için  $p_j = q_j$  dir.

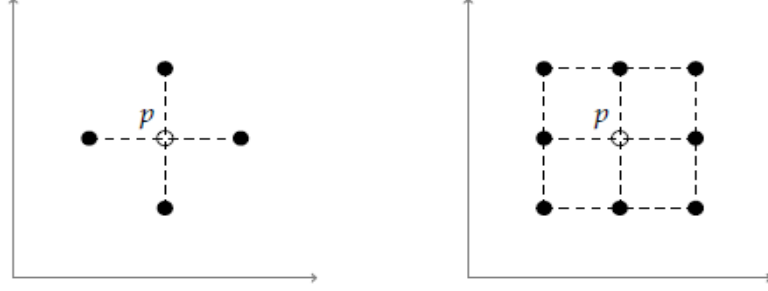
Buna göre  $\kappa_l$ , verilen bir  $p \in \mathbb{Z}^n$  noktasına yakın olan  $q \in \mathbb{Z}^n$  noktalarının sayısını gösterir. Tanım 2.1 den  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}^2$  ve  $\mathbb{Z}^3$  de yakınlıkları şu şekilde ifade edilebilir:

- $\mathbb{Z}$  de ayrık  $p$  ve  $q$  noktaları  $|p - q| = 1$  ise bu noktalara 2-yakındır denir.
- $\mathbb{Z}^2$  de ayrık  $p$  ve  $q$  noktaları, her bir koordinatında en fazla 1 farklı ise bu noktalara 8-yakındır denir.
- $\mathbb{Z}^2$  de ayrık  $p$  ve  $q$  noktaları 8-yakın ve sadece bir koordinatında farklı ise bu noktalara 4-yakındır denir.
- $\mathbb{Z}^3$  de ayrık  $p$  ve  $q$  noktaları, her bir koordinatlarında en fazla 1 farklı ise bu noktalara 26-yakındır denir.
- $\mathbb{Z}^3$  de ayrık  $p$  ve  $q$  noktaları 26-yakın ve en fazla iki koordinatında farklı ise bu noktalara 18-yakındır denir.
- $\mathbb{Z}^3$  de ayrık  $p$  ve  $q$  noktaları 18-yakın ve sadece bir koordinatında farklı ise bu noktalara 6-yakındır denir.

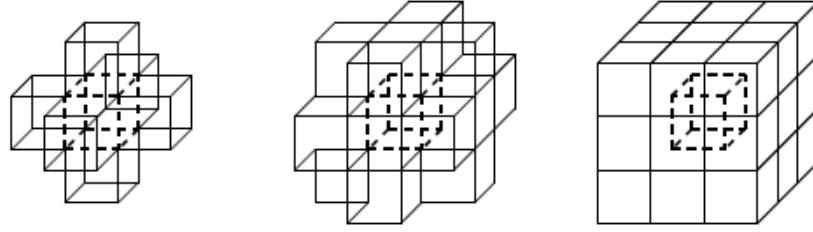
- $\kappa \in \{2, 4, 8, 6, 18, 26\}$  olsun. Bir  $p$  kafes noktasının  $\kappa$ -komşuluğu  $p$  ye  $\kappa$ -yakın olan noktalardan oluşur (Boxer 1994).



Şekil 2.1: 2-yakın



Şekil 2.2: 4-yakın ve 8-yakın



Şekil 2.3: 6-yakın, 18-yakın ve 26-yakın

**Tanım 2.2** Bir dijital aralık  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $a \leq b$  olmak üzere,

$$[a, b]_{\mathbb{Z}} = \{z \in \mathbb{Z} : a \leq z \leq b\}$$

şeklinde tanımlanır. Bir kafes noktasının  $\kappa$ -komşuluğu ise bu noktaya  $\kappa$ -yakın olan noktaların kümesi denir.  $(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^n$  dijital görüntüsü ve  $\varepsilon \in \mathbb{N}$  olsun. Dijital görüntünün  $x_0$  elemanının  $\varepsilon$  yarıçaplı  $\kappa$ -komşuluğu,  $l_{\kappa}(x_0, x)$ ,  $x_0$  dan  $x$  e en kısa basit  $\kappa$ -yolunun uzunluğu olmak üzere

$$N_{\kappa}(x_0, \varepsilon) = \{x \in X \mid l_{\kappa}(x_0, x) \leq \varepsilon\} \cup \{x_0\}$$

şeklinde tanımlanır.  $\mathbb{Z}^n$  de  $\kappa$ -yakınlık bağıntısı tanımlı ve  $X \subset \mathbb{Z}^n$   $\kappa$ -yakınlıklı bir dijital görüntü olsun.  $\forall x, y \in X, x \neq y$  için  $x = x_0, y = x_r$  ve  $i = 0, 1, \dots, r-1$  iken  $x_i$

ile  $x_{i+1}$   $\kappa$ -yakın olacak şekilde  $X$  bir  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  alt kümesi var ise  $X$  dijital görüntüsüne  $\kappa$ -bağlantılı denir (Boxer 1994).

**Örnek 2.3**  $X \subset \mathbb{Z}^2$  kümesi

$$X = \{x_0 = (1,1), x_1 = (2,1), x_2 = (3,2), x_3 = (3,0), x_4 = (4,0)\}$$

olsun.  $X$  dijital görüntüsünde  $x_1$  e 4-yakın olan sadece  $x_0$  olduğundan  $x_1$  in 4-komşuluğunda  $x_0$  vardır.  $x_1$  in 8-komşuluğunda bulunan noktalar ise  $x_0, x_2$  ve  $x_3$  dür (Boxer 1994).

**Tanım 2.4**  $X \subset \mathbb{Z}^{n_0}$ ,  $\kappa_0$ -yakınlıklı ve  $Y \subset \mathbb{Z}^{n_1}$ ,  $\kappa_1$ -yakınlıklı dijital görüntüler olsun.  $X$  in her  $\kappa_0$ -bağlantılı  $U$  alt kümesi için  $f(U)$ ,  $Y$  nin  $\kappa_1$ -bağlantılı alt kümesi ise  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonu  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -süreklidir denir (Boxer 1994).

**Örnek 2.5**  $X \subset \mathbb{Z}$  ve  $Y \subset \mathbb{Z}^2$  kümeleri

$$X = \{x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4\},$$

$$Y = \{y_0 = (0,0), y_1 = (1,1), y_2 = (2,0), y_3 = (3,1)\}$$

olsun.  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonu  $i = 0,1,2,3$  için  $f(x_i) = y_i$  şeklinde tanımlansın.  $X$  in her 2-bağlantılı  $U$  alt kümesi için  $f(U)$ ,  $Y$  nin 8-bağlantılı alt kümesi olduğundan dolayı  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonu  $(2,8)$ -süreklidir (Boxer 1999).

**Önerme 2.6**  $X \subset \mathbb{Z}^{n_0}$ ,  $\kappa_0$ -yakınlıklı ve  $Y \subset \mathbb{Z}^{n_1}$ ,  $\kappa_1$ -yakınlıklı dijital görüntüler olsun.  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonu  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -sürekliliği için gerek ve yeter şart  $X$  in her  $\kappa_0$ -yakın  $\{x_0, x_1\}$  noktaları için  $f(x_0) = f(x_1)$  veya  $f(x_0)$  ve  $f(x_1)$  in  $Y$  de  $\kappa_1$ -yakın olmasıdır (Boxer 1999).

**İspat:**  $f : X \rightarrow Y$ ,  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -sürekli olduğunda  $X$  in  $\kappa_0$ -bağlantılı  $\{x_0, x_1\}$  alt kümesi için  $\{f(x_0), f(x_1)\}$   $Y$  nin  $\kappa_1$ -bağlantılı alt kümesidir. Yani  $f(x_0)$  ile  $f(x_1)$ ,  $Y$  de  $\kappa_1$ -yakındır veya  $f(x_0) = f(x_1)$  dir.

Tersine  $\kappa_0$ -yakın  $x_0, x_1 \in X$  noktaları için yani  $X$  in  $\kappa_0$ -bağlantılı  $\{x_0, x_1\}$  alt kümesi için  $f(x_0) = f(x_1)$  veya  $f(x_0)$  ve  $f(x_1)$ ,  $Y$  de  $\kappa_1$ -yakın ise  $\{f(x_0), f(x_1)\}$   $Y$  nin  $\kappa_1$ -bağlantılı alt kümesidir. Bu durumda  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonu  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -sürekli dir.

Örneğin,  $\kappa$ ,  $Y$  dijital görüntüsü üzerinde bir yakınlık bağıntısı olsun.  $f : [a, b]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$  fonksiyonunun  $(2, \kappa)$ -sürekli olması için gerek ve yeter şart her  $c, c+1 \in [a, b]_{\mathbb{Z}}$  için  $f(c) = f(c+1)$  veya  $f(c)$  ile  $f(c+1)$  in  $Y$  de  $\kappa$ -yakın olmasıdır.

$X \subset \mathbb{Z}^{n_0}$ ,  $\kappa_0$ -yakınlıklı ve  $Y \subset \mathbb{Z}^{n_1}$ ,  $\kappa_1$ -yakınlıklı dijital görüntüler olsun.  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonu  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -sürekli ve biyektif,  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  fonksiyonu  $(\kappa_1, \kappa_0)$ -sürekli ise  $f$  fonksiyonuna  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -izomorfizm denir ve  $X \approx_{(\kappa_0, \kappa_1)} Y$  şeklinde gösterilir.

**Önerme 2.7**  $f : (X, \kappa_0) \rightarrow (Y, \kappa_1)$  dijital  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -sürekli ve  $g : (Y, \kappa_1) \rightarrow (Z, \kappa_2)$  dijital  $(\kappa_1, \kappa_2)$ -sürekli fonksiyonlar ise  $f \circ g : (X, \kappa_0) \rightarrow (Z, \kappa_2)$  bileşke fonksiyonu dijital  $(\kappa_0, \kappa_2)$ -sürekli dir (Boxer 1994).

## 2.1 Dijital Homeomorfizma

(Boxer 1994) ve (Boxer 1999) makalelerinde homeomorfizma kavramını " $f : (X, \kappa_0) \rightarrow (Y, \kappa_1)$  fonksiyonu dijital  $(\kappa_0, \kappa_1)$  -sürekli, bijektif ve  $f^{-1}$  dijital  $(\kappa_1, \kappa_0)$  -sürekli ise  $f$  ye dijital  $(\kappa_0, \kappa_1)$  -homeomorfizma denir." şeklinde tanımlanmıştır.

**Önerme 2.8** Dijital homeomorfizm dijital görüntüler arasında bir denklik bağıntısıdır. (Boxer 1994).

**İspat:** i) Her  $X$  dijital görüntüsünün  $1_x : X \rightarrow X$  birim dönüşümü ile kendisine dijital homeomorfik olduğu açıktır. Yani yansıma vardır.

ii)  $f : X \rightarrow Y$  bir dijital homeomorfizm olsun.  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  fonksiyonunda bir dijital homeomorfizm bağıntısı olduğu kolayca görülür. O zaman dijital homeomorfizma simetriktir.

iii)  $f : X \rightarrow Y$  ve  $g : Y \rightarrow Z$  dijital homeomorfizmalar olsunlar. Önerme 2.7 den  $g \circ f : X \rightarrow Z$  dijital homeomorfizmdir. O zaman dijital homeomorfizma geçişmelidir.

**Örnek 2.9**  $X = \{0, 2\} \subset \mathbb{Z}$  ve  $Y = \{0, 1\} \subset \mathbb{Z}$  olsun.  $f : X \rightarrow Y$ ,  $f(x) = \frac{x}{2}$  ile tanımlanmış bir fonksiyon olsun.  $f$ , dijital sürekli bijeksiyondur, fakat  $f^{-1}$  fonksiyonu dijital sürekli değildir. Böylece  $f$ , bir dijital homeomorfizm değil ve  $X$  ile  $Y$  de dijital homeomorfik değildir (Boxer 1994).

Dijital homeomorfizma topolojideki tanımıyla aynı şekilde tanımlanmış olsa da uygulamada farklılık göstermektedir.  $\mathbb{R}$  deki topolojide bütün kapalı aralıklar birbirine homeomorf iken  $\mathbb{Z}$  deki dijital topolojide dijital aralıklar dijital homeomorf değildir. Örneğin;

$$[1, 3]_{\mathbb{Z}} = \{1, 2, 3\} \text{ ve } [2, 5]_{\mathbb{Z}} = \{2, 3, 4, 5\}$$

dijital aralıkları birbirine  $(2, 2)$ -homeomorf değildir.

Bu nedenle (Boxer 2006) da dijital homeomorfizma kavramı yerine dijital izomorfizma kavramını kullanmayı önermiştir.

## 2.2 Dijital Retrakt Olan Uzaylar

**Tanım 2.10**  $\emptyset \neq A \subset X$  ve  $i : A \rightarrow X$   $\kappa_0$ -kapsama dönüşümü olsun.  $\forall a \in A$ ,  $r \circ i(a) = a$  olacak şekilde  $r : X \rightarrow A$  dijital  $\kappa_0$ -sürekli fonksiyonu varsa  $X$  e  $\kappa_0$ -retrakt denir (Boxer 1994).

**Teorem 2.11**  $X_0$ ,  $X$  in bir dijital retraktı ve  $f : X \rightarrow Y$  bir dijital homeomorfizm olsun. O zaman  $f(X_0)$  da  $Y$  nin bir dijital retraktıdır (Boxer 1999).

**İspat:**  $f : X \rightarrow X_0$  bir dijital retrakt fonksiyonu olsun. O zaman Önerme 2.7 den  $f \circ r \circ f^{-1} : Y \rightarrow f(X_0)$  bir dijital retrakt dönüşümüdür.

## 2.3 Dijital Homotopi

**Tanım 2.12**  $X \subset \mathbb{Z}^{n_0}$ ,  $\kappa_0$ -yakınlıklı ve  $Y \subset \mathbb{Z}^{n_1}$ ,  $\kappa_1$ -yakınlıklı dijital görüntüler olsun.  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonu  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -sürekli olsun. Pozitif bir  $m$  tam sayısı ve aşağıdaki özellikleri sağlayan  $H : X \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$  fonksiyonu varsa,  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarına  $Y$  de dijital  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -homotopik fonksiyonlar denir (Boxer 2005).

- $\forall x \in X$  için  $H(x, 0) = f(x)$  ve  $H(x, m) = g(x)$ ,
- $\forall x \in X$  için

$$H_x : [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y, \quad t \rightarrow H_x(t) = H(x, t)$$

şeklinde tanımlanan  $H_x$  indirgenmiş fonksiyonu  $(2, \kappa_1)$ -sürekli.

- $\forall t \in [0, m]_{\mathbb{Z}}$  için

$$H_t : X \rightarrow Y, \quad x \rightarrow H_t(x) = H(x, t)$$

şeklinde tanımlanan  $H_t$  indirgenmiş fonksiyonu  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -sürekli.



Burada  $H$  fonksiyonuna  $f$  ve  $g$  arasında dijital  $(\kappa_0, \kappa_1)$  -homotopi fonksiyonu denir.

$f$  ve  $g$  fonksiyonlarının  $Y$  de dijital  $(\kappa_0, \kappa_1)$  -homotopik olduğunu göstermek için

$$f \simeq_{(\kappa_0, \kappa_1)} g$$

notasyonu kullanılır.

**Önerme 2.13** Dijital  $(\kappa_0, \kappa_1)$  -homotopi, dijital sürekli fonksiyonlar arasında bir denklik bağıntısıdır (Boxer 1994).

**İspat:** Dijital homotopinin yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağladığını göstermeliyiz.

• Her  $(\kappa_0, \kappa_1)$  -sürekli  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonu ve her pozitif  $m$  tamsayısı için,

$H : X \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$  fonksiyonu her  $(x, t) \in X \times [0, m]_{\mathbb{Z}}$  için

$$H(x, t) = f(x)$$

şeklinde tanımlandığından  $f$  den  $f$  ye dijital  $(\kappa_0, \kappa_1)$  -homotopi olur. Bu durumda dijital homotopi yansıma özelliğini sağlar.

•  $H : X \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$  fonksiyonu  $f$  den  $g$  ye dijital  $(\kappa_0, \kappa_1)$  -homotopi ve

$G : X \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$  fonksiyonu her  $(x, t) \in X \times [0, m]_{\mathbb{Z}}$  için

$$G(x, t) = H(x, m - t)$$

şeklinde tanımladığımızda  $g$  den  $f$  ye dijital  $(\kappa_0, \kappa_1)$  -homotopi olur. Bu durumda dijital homotopi simetri özelliğini sağlar.

•  $H : X \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$  fonksiyonu  $f$  den  $g$  ye dijital  $(\kappa_0, \kappa_1)$  -homotopi ve

$G : X \times [0, m_0]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$  fonksiyonu  $g$  den  $h$  a dijital  $(\kappa_0, \kappa_1)$  -homotopi olsun.

$F : X \times [0, m + m_0]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$  fonksiyonu

$$F(x,t) = \begin{cases} H(x,t), & (x,t) \in X \times [0,m]_{\mathbb{Z}} \\ G(g(x),t-m), & (x,t) \in X \times [m,m+m_0]_{\mathbb{Z}} \end{cases}$$

şeklinde tanımlandığında  $f$  den  $h$  a dijital  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -homotopi olsun. Bu durumda dijital homotopi geçişme özelliğini sağlar.

**Tanım 2.14**  $f : (X, \kappa_0) \rightarrow (Y, \kappa_1)$  dijital  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -süreklili fonksiyonu eğer  $Y$  de bir sabit fonksiyona dijital homotopik ise  $f$ ,  $Y$  de dijital nullhomotopiktir denir (Boxer 1999).

**Tanım 2.15**  $X \subset \mathbb{Z}^{n_0}$ ,  $\kappa_0$ -yakınlıklı ve  $Y \subset \mathbb{Z}^{n_1}$ ,  $\kappa_1$ -yakınlıklı dijital görüntüler olsun.  $f : X \rightarrow Y$   $(\kappa_0, \kappa_1)$ -süreklili fonksiyonu için

$$g \circ f \simeq_{(\kappa_0, \kappa_0)} 1_X$$

$$f \circ g \simeq_{(\kappa_1, \kappa_1)} 1_Y$$

olacak şekilde  $g : Y \rightarrow X$ ,  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -süreklili fonksiyonu varsa  $f$  fonksiyonuna  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -homotopi denklik denir ve  $X$  ile  $Y$ ,  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -homotopi denktir denir (Boxer 2005).

## 2.4 Dijital Büzülebilir Uzaylar

**Tanım 2.16**  $(X, \kappa_0)$  bir dijital görüntü olsun.  $(X, \kappa_0)$  üzerindeki birim dönüşüm sabit dönüşüme  $(\kappa_0, \kappa_0)$ -homotopik ise  $X$  e  $\kappa_0$ -büzülebilir denir (Boxer 1999).

**Örnek 2.17** Her  $[0, m]_{\mathbb{Z}}$  dijital aralığı dijital büzülebilirdir.

$$H : [0, m]_{\mathbb{Z}} \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow [0, m]_{\mathbb{Z}}$$

homotopi fonksiyonu  $H(x, t) = \max\{0, x - t\}$  şeklinde tanımlandığında,  $1_{[0, m]_{\mathbb{Z}}}$  birim dönüşümü ile  $\bar{0}$  sabit dönüşümü homotopik olur (Boxer 1994).

**Önerme 2.18**  $m > 0$  için  $I_m$  dijital büzülebilirdir (Boxer 1994).

**İspat:**  $F : I_{m+1} \rightarrow I_m$  fonksiyonu

$$F(x_1, \dots, x_m, t) = (M(x_1, t), \dots, M(x_m, t))$$

ile tanımlandığında büzülebilirlik kolayca görülür. Burada

$$M(x, t) = \max\{0, x - t\}.$$

**Önerme 2.19**  $X$  dijital bağlantılı olmayan bir dijital görüntü ise  $X$  dijital büzülebilir değildir (Boxer 1994).

**İspat:**  $X$  in dijital büzülebilir olduğunu kabul edelim, yani  $F : X \times [0, p]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$  bir dijital homotopi her  $x \in X$  ve  $x_0 \in X$  için  $F(x, 0) = x$  ve  $F(x, p) = x_0$  olsun.  $y \in X$  noktası ile  $x_0$ ,  $X$  in aynı dijital bileşeninde olmasın. O zaman öyle bir  $t \in [1, p]_{\mathbb{Z}}$  vardır ki  $F(y, t-1)$  ve  $F(y, t)$ ,  $X$  in farklı bileşenlerindedir. Böylece  $F(y, t-1)$  ve  $F(y, t)$  komşu değildir. Bu durum  $F$  nin dijital sürekliliği ile çelişir.

**Teorem 2.20**  $X$  dijital büzülebilir ve  $Y$ ,  $X$  in dijital retraktı ise  $Y$  dijital büzülebilirdir (Boxer 1994).

Aşağıda verilen örnek ile dijital büzülebilirliğin, Euclidean büzülebilirliğin bir benzerliği olmadığını göstereceğiz. Euclidean uzay  $\mathbb{R}^k$  nin kapalı ve sınırlı bir  $X$  alt kümesi büzülebilir ve lokal büzülebilir (her  $x \in X$  ve  $x$  in her  $U$  komşuluğu için  $x$  in öyle bir  $U_0 \subset U$  komşuluğu vardır ki  $i : U_0 \rightarrow U$  kapasama dönüşümü  $U$  da bir sabit fonksiyona homotoptur) ise,  $X$ ,  $\mathbb{R}^k$  nin bir retraktıdır (Borsuk 1967).

**Örnek 2.21**  $U \subset I_2$  ve  $U = (\{0,2\} \times I_1) \cup \{(1,0)\}$  olsun. O zaman  $U$  dijital büzülebilir fakat  $I_2$  nin bir retraktı değildir (Boxer 1994).

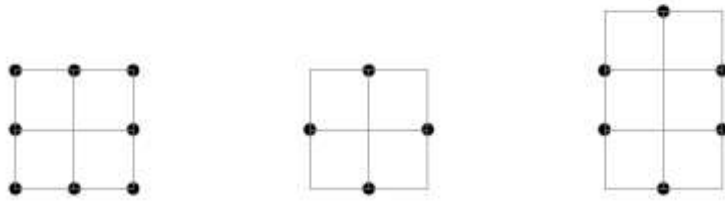
## 2.5 Dijital Yol ve Dijital Kapalı Yol

**Tanım 2.22**  $(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^n$  dijital görüntüsünde  $x$  noktasından  $y$  noktasına bir dijital  $\kappa$ -yolu,  $f : [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ ,  $f(0) = x$ ,  $f(m) = y$  olacak şekilde dijital  $(2, \kappa)$ -sürekli fonksiyonudur. Eğer ilave olarak  $f(0) = f(m)$  ise  $f$  ye dijital  $\kappa$ -loop denir ve  $p = f(0)$  noktası  $f$  loopunun baz noktasıdır. Eğer  $f$  bir sabit fonksiyon ise aşikar loop denir (Khalimsky 1987).

## 2.6 Dijital Basit Kapalı Eğri

**Tanım 2.23**  $X \subset \mathbb{Z}^n$ ,  $\kappa$ -yakınlık bağıntısı ile bir dijital görüntü olsun. Eğer öyle  $m > 3$  için aşağıdaki koşulları sağlayan bir  $f : [0, m-1]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$   $(2, \kappa)$ -sürekli fonksiyon var ise  $X$  e bir dijital basit kapalı  $\kappa$ -eğri denir (Boxer 2005).

- $f$  bire bir ve örten;
- $f(0)$  ve  $f(m-1)$   $\kappa$ -yakın;
- Her  $t \in [0, m-1]_{\mathbb{Z}}$  için,  $f(t)$  nin  $f([0, m-1]_{\mathbb{Z}})$  de  $\kappa$ -komşuları sadece  $f((t-1) \bmod(m))$  ve  $f((t+1) \bmod(m))$  dir.



**Şekil 2.4:**  $MSC_4$ ,  $MSC_8$  ve  $MSC_8$ ,  $\mathbb{Z}^2$  de minimal basit kapalı eğrilerdir

$X \subset \mathbb{Z}^n$  bir dijital görüntü olsun.  $x, y, z \in X$  ve  $y$  ile  $z$  birbirine  $\kappa$ -yakın olsun.  $x$  noktası sadece  $y$  ve  $z$  noktalarına  $\kappa$ -yakın ise  $x$  noktasına  $\kappa$ -köşe noktası denir.  $y$  ve  $z$ ,  $\kappa$ -köşe noktaları değil ve  $x$  noktası  $y$  ve  $z$  nin her ikisinde  $\kappa$ -yakın olan tek nokta ise  $x$ ,  $\kappa$ -köşe noktasına basittir denir.  $X$  dijital görüntüsünün tüm basit  $\kappa$ -köşeleri çıkartıldığında bir basit kapalı  $\kappa$ -eğri elde ediliyorsa  $X$  e genelleştirilmiş basit kapalı  $\kappa$ -eğri denir (Han 2006)

## 2.7 Dijital Kapalı Yüzey

**Tanım 2.24**  $X \subset \mathbb{Z}^n$ ,  $n \geq 3$  dijital görüntü ve  $\bar{X} = \mathbb{Z}^n - X$  olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa  $X$  e bir kapalı  $\kappa$ -yüzey denir (Han 2006).

1.  $(\kappa, \bar{\kappa}) \in \{(\kappa, 2n), (2n, 3^n - 1)\}$   $x \in X$  ve  $\kappa \neq 3^n - 2^n - 1$  için;

- Her  $x \in X$  için  $|X|^x := N_{2\kappa}(x, 1) - \{x\}$  kümesi  $x$  e  $\kappa$ -yakın olan bir tane eleman içerir.
- $|\bar{X}|^x$ ,  $x$  e  $\bar{\kappa}$ -yakın iki tane  $\bar{\kappa}$  bileşene sahiptir. (Bu bileşenleri  $C^{xx}$  ve  $D^{xx}$  ile gösterelim.)
- Her  $y \in N_\kappa \cap X$  için  $N_{\bar{\kappa}} \cap C^{xx} \neq \emptyset$  ve  $N_{\bar{\kappa}} \cap D^{xx} \neq \emptyset$  dir.

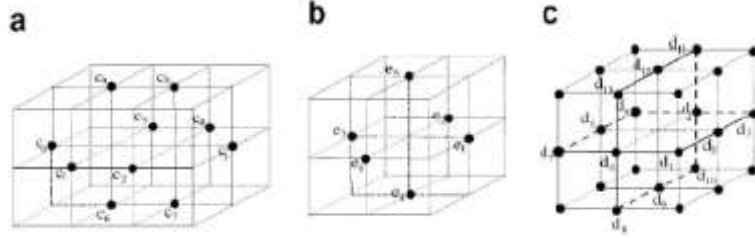
Ayrıca  $X$  kapalı  $\kappa$ -yüzeyi için,  $X$  basit  $\kappa$ -noktaya sahip değil ise  $X$  e basit kapalı  $\kappa$ -yüzey denir.

2.  $(\kappa, \bar{\kappa}) = (3^n - 2^n - 1, 2n)$  için;

- $X$ ,  $\kappa$ -bağlantılı.
- Her  $x \in X$  için  $|X|^x$  genelleştirilmiş basit kapalı eğri

Ayrıca  $|X|^x$  basit kapalı  $\kappa$ -eğri ise  $X$  e basit kapalı  $\kappa$ -yüzey denir. Bilinen dijital basit kapalı yüzeyler Şekil 2.5 de verilmiştir.

**Tanım 2.25**  $\bar{S}_k$  ile  $S_k$ , kapalı  $\kappa$ -yüzeylerin  $\mathbb{Z}^n$  deki kapanışını gösterelim. Eğer bir  $x \in S_k$  noktası  $S_k$  nin bir sınırlı  $\bar{\kappa}$ -bağlantılı bileşenine ait ise  $x$ 'e  $S_k$  'nin içindedir denir. Diğer durumda  $S_k$  'nin dışındadır denir.  $S_k$  'nin tüm iç noktalarının kümesini  $IntS_k$  ile tüm dış noktalarının kümesini  $ExtS_k$  ile gösterilir (Han 2006).



**Şekil 2.5:** a)  $MSS_{18}$  b)  $MSS'_{18}$  c)  $MSS_6$

Şimdi  $MSC_\kappa$ ,  $S_k$ ,  $SS_k$  ve  $MSS_\kappa$  ile  $n \geq 3$  için  $\mathbb{Z}^n$  'de sırasıyla minimal basit kapalı  $\kappa$ -eğri, kapalı  $\kappa$ -yüzey, basit kapalı  $\kappa$ -yüzey ve minimal basit kapalı  $\kappa$ -yüzeyi göstereceğiz.

**Teorem 2.26** (Han 2006).

1.  $MSS_6$ , 18-büzülebilirdir.
2.  $MSS_6$ , 6-büzülebilir değildir.
3.  $MSS_{18}$ , 18-büzülebilir değildir.

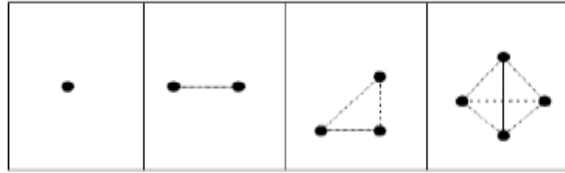
### 3. DİJİTAL GÖRÜNTÜLERİN HOMOLOJİ GRUPLARI

#### 3.1 Dijital Simpleksler

**Tanım 3.1**  $P = \{p_0, p_1, \dots, p_m\} \subset (\mathbb{Z}^n, \kappa)$  da dijital bir görüntü olsun. Eğer

- $\sum_{i=0}^m t_i p_i = 0$  ve  $\sum_{i=0}^m t_i = 0$  ise  $t_0 = \dots = t_m = 0$ .
- Her  $i, j \in \{0, 1, \dots, m\}$ ,  $i \neq j$  için  $p_i$  ve  $p_j$   $\kappa$ -yakın ise  $P$  ye dijital  $(\kappa, m)$ -simpleks denir ve  $P = \langle p_0, p_1, \dots, p_m \rangle$  ile gösterilir.  $m$  ye de simplekslerin boyutu denir (Arslan ve diğ. 2008).

Bu durumda bazı simpleksler Şekil 3.1 da (ki bütün noktalar birbirine sırasıyla 2,2,8,26-yakın olmak üzere ) gösterilmiştir.



Şekil 3.1: Sırasıyla  $(2,0), (2,1), (8,2), (26,3)$ -simpleksler

#### 3.2 Dijital Simpleksler Kompleksi

**Tanım 3.2**  $P = \{p_0, p_1, \dots, p_m\} \subset (\mathbb{Z}^n, \kappa)$  da dijital  $(\kappa, m)$ -simplekslerinin sonlu koleksiyonu olsun. Eğer

- $s \in K$  ise  $s$  nin yüzüde bu simpleksler kompleksine ait,
- $s, t \in K$  iken  $s \cap t$  boş yada  $s$  ve  $t$  nin ortak bir dijital simpleksi var ise  $K$  ya dijital simpleksler kompleksi denir (Arslan ve diğ. 2008).

**Tanım 3.3** Dijital simpleksler kompleks  $(K, \kappa)$  ya ait köşeler üzeride bir sıralama var ise  $(K, \kappa)$  ya yönlü dijital simpleksler kompleksi denir (Arslan ve diğ. 2008).

**Tanım 3.4**  $(K, \kappa)$  bir dijital simpleksler kompleksin geometrik gerçekleştirilirliliği  $|K|$ , tüm dijital simplekslerin birleşimi olarak tanımlanır. Yani

$$|K| = \bigcup_{s \in K} s.$$

Dijital görüntüler aynı zamanda  $(\kappa, 0)$  -simplekslerin birleşimi gibi düşünülebilir. Bu durumda her dijital görüntü bir dijital simpleksler kompleksidir (Arslan ve diğ. 2008).

**Tanım 3.5**  $(X, \kappa_0)$  bir dijital görüntü olsun. Bir simpleksler kompleksi  $(X, \kappa_1)$  ve  $h: |K| \rightarrow X$   $(\kappa_0, \kappa_1)$  -izomorfizması varsa  $X$  dijital görüntüsü çok yüzlüdür denir.

Bu durumda dijital görüntülerin çok yüzlüsü yerine kendisiyle doğrudan çalışılabilir (Arslan ve diğ. 2008).

**Önerme 3.6**  $P \subset (\mathbb{Z}^{n_0}, \kappa_0)$ ,  $Q \subset (\mathbb{Z}^{n_1}, \kappa_1)$  sırasıyla dijital  $(\kappa_0, m)$  ve  $(\kappa_1, m)$  simpleksler olsun. O zaman  $P$  ve  $Q$  dijital  $(\kappa_0, \kappa_1)$  -izomorfiktirler (Arslan ve diğ. 2008).

**İspat:**  $P = \{p_0, p_1, \dots, p_m\}$  ve  $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_m\}$  olsun.

$$h: (P, \kappa_0) \rightarrow (Q, \kappa_1), \quad p_i \rightarrow h(p_i) = q_i$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm her  $p_i \in P$  için dijital  $(\kappa_0, \kappa_1)$  -izomorfizmdir. O halde elimizdeki simpleks yapısı ile serbest değişmeli grupları inşa edebiliriz.

**Tanım 3.7**  $C_q^\kappa(K)$ , dijital simpleksler kompleksi  $(K, \kappa)$  daki dijital  $(\kappa, q)$  -simpleksleri baz kabul eden serbest değişmeli gruptur (Arslan ve diğ. 2008).



**Sonuç 3.8**  $(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^n$  de  $m$  boyutlu bir dijital simpleksler kompleksi olsun.

Her  $q > m$  için,  $C_q^\kappa(K)$  bir aşık grup tur ( Arslan ve diğ. 2008).

**İspat:**  $X$ ,  $m$  boyutlu bir dijital simpleksler kompleksinde  $q > m$  için  $(\kappa, q)$ -simpleks mevcut olmadığından  $C_q^\kappa(K) = \{0\}$  dir.

### 3.3 Sınır Homomorfizması

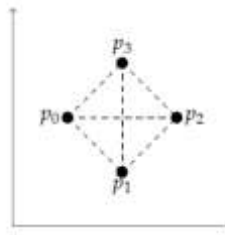
**Tanım 3.9**  $(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^n$  da  $m$  boyutlu yönlü dijital simpleksler kompleksi olsun.  $\hat{p}_i, p_i$  elemanlarının simplekslerden çıkarılması olmak üzere;

$$\partial_q : C_q^\kappa(K) \rightarrow C_{q-1}^\kappa(K)$$

$$\partial_q(\langle p_0, p_1, \dots, p_q \rangle) = \begin{cases} \sum_{i=0}^q (-1)^i \langle p_0, p_1, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_q \rangle, & m \geq q \text{ ise} \\ 0 & , m < q \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan homomorfizmaya sınır homomorfizması denir (Arslan ve diğ. 2008).

**Örnek 3.10**  $MSC'_8$  dijital görüntüsünü ele alalım.



**Şekil 3.2:**  $MSC'_8$

$$MSC'_8 = \{p_0 = (1,2), p_1 = (2,1), p_2 = (3,2), p_3 = (2,3)\} \subset \mathbb{Z}^2 \text{ ve}$$

$p_0 < p_1 < p_3 < p_2$  olsun. 0-simpleksler

$$\langle p_0 \rangle, \langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle, \langle p_3 \rangle$$

ve 1-simpleksler

$$e_0 = \langle p_0 p_3 \rangle, e_1 = \langle p_3 p_2 \rangle, e_2 = \langle p_1 p_2 \rangle, e_3 = \langle p_0 p_1 \rangle$$

şeklindedir. 1-simplekslere sınır operatörünü uygularsak

$$\partial(e_0) = \langle p_3 \rangle - \langle p_0 \rangle$$

$$\partial(e_1) = \langle p_2 \rangle - \langle p_3 \rangle$$

$$\partial(e_2) = \langle p_2 \rangle - \langle p_1 \rangle$$

$$\partial(e_3) = \langle p_1 \rangle - \langle p_0 \rangle$$

elde edilir (Arslan ve diğ. 2008).

**Önerme 3.11** Her  $1 \leq q \leq m$  için  $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$  dır (Arslan ve diğ. 2008).

**İspat:**  $\langle p_0, p_1, \dots, p_q \rangle \in C_q^k(X)$  için

$$\begin{aligned} \partial_{q-1} \circ \partial_q \left( \langle p_0, p_1, \dots, p_q \rangle \right) &= \partial_{q-1} \left( \sum_{i=0}^q (-1)^i \langle p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_q \rangle \right) \\ &= \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j \left( \sum_{i=0}^q (-1)^i \langle p_0, \dots, \hat{p}_j, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_q \rangle \right) \\ &= \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \left( \langle p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, \hat{p}_j, \dots, p_q \rangle \right) \\ &\quad + \sum_{j \leq i} (-1)^{i+j} \left( \langle p_0, \dots, \hat{p}_j, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_q \rangle \right) \end{aligned}$$

$$\sum_{j \leq i} (-1)^{i+j} \left( \langle p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, \hat{p}_j, \dots, p_q \rangle \right) = \sum_{k < l} (-1)^{k+l+1} \left( \langle p_0, \dots, \hat{p}_k, \dots, \hat{p}_l, \dots, p_q \rangle \right)$$

olduğundan

$$\partial_{q-1} \circ \partial_q \left( \langle p_0, p_1, \dots, p_q \rangle \right) = 0$$

elde edilir.

**Sonuç 3.12**  $(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^n$  de  $m$  boyutlu dijital simpleksler kompleksi olsun.

$$C_*^\kappa(X) : 0 \xrightarrow{\partial_{m+1}} C_m^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_m} C_{m-1}^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_{m-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

bir zincir kompleks olur (Arslan ve diğ. 2008).

### 3.4 Simpleksler Homoloji Grupları

Şimdi dijital görüntüler için homoloji gruplarını tanımlayabiliriz.

**Tanım 3.13**  $(X, \kappa)$ , dijital simpleksler kompleksi olsun.

- $Z_q^\kappa(X) = \text{Ker} \partial_q$  grubuna dijital simpleksler  $q$ -devirlerin grubu denir.
- $B_q^\kappa(X) = \text{Im} \partial_{q+1}$  grubuna dijital simpleksler  $q$ -sınırların grubu denir.
- $H_q^\kappa(X) = Z_q^\kappa(X) / B_q^\kappa(X)$  bölüm grubuna  $q$ . Dijital simpleksler homoloji grubu denir (Arslan ve diğ. 2008).

**Tanım 3.14**  $\varphi : (X, \kappa_0) \rightarrow (Y, \kappa_1)$  dijital görüntüler arasında bir fonksiyon olsun.  $X$  de  $\kappa_0$ -yakınlıklı her  $P$  dijital  $(\kappa_0, m)$ -simpleksi için  $\varphi(P)$ ,  $n \leq m$  için  $Y$  de  $(\kappa_1, n)$ -simpleks ise  $\varphi$  ye dijital simpleksler dönüşümü denir (Boxer ve diğ. 2011).

**Tanım 3.15**  $\varphi : (X, \kappa_0) \rightarrow (Y, \kappa_1)$  dijital simpleksler dönüşüm olsun.  $q \geq 0$  için  $\varphi_\# : C_q^{\kappa_0}(X) \rightarrow C_q^{\kappa_1}(Y)$  homomorfizmi

$$\varphi_\#(\langle p_0, p_1, \dots, p_q \rangle) = \langle \varphi(p_0), \dots, \varphi(p_q) \rangle$$

şeklinde tanımlanır (Boxer ve diğ. 2008).

Böylece cebirsel topolojide artık aksiyom haline gelmiş teoremlerin dijitaldeki karşılıklarını inceleyebiliriz:

**Teorem 3.16**  $f : K \rightarrow L$  dijital  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -izomorfizm ise  $\forall m \geq q$  için

$$H_q^{\kappa_0}(K) \cong H_q^{\kappa_1}(L)$$

dir (Arslan ve diğ. 2008).

**İspat:**  $f : K \rightarrow L$  bir dijital  $(\kappa_0, \kappa_1)$ -izomorfik dönüşüm olsun. Bu durumda,  $f$  bijeksiyon ve Önerme 2.7 den “ $k_1, k_2 \in K$ ,  $k_1$  ve  $k_2$ ,  $\kappa_0$ -yakın olması için gerek ve yeter şart  $f(k_1)$  ve  $f(k_2)$   $\kappa_1$ -yakın ya da  $f(k_1) = f(k_2)$ ” koşulunu sağlar.  $m \geq q \geq 0$  olsun.

$$\langle p_0, p_1, \dots, p_m \rangle \in C_q^{\kappa_0}(K)$$

için;

$$\varphi : C_q^{\kappa_0}(K) \rightarrow C_q^{\kappa_1}(L), \quad \varphi(\langle p_0, \dots, p_q \rangle) = \langle f(p_0), \dots, f(p_q) \rangle$$

şeklinde tanımlansın.  $\varphi$  dönüşümü  $f$  nin tanımından dolayı iyi tanımlı ve bijeksiyondur. Böylece

$$C_q^{\kappa_0}(K) \cong C_q^{\kappa_1}(L)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$H_q^{\kappa_0}(K) \cong H_q^{\kappa_1}(L).$$

**Teorem 3.17**  $(X, \kappa)$  tek noktalı dijital görüntü ise

$$H_q^\kappa = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ 0, & q > 0 \end{cases}$$

dir (Arslan ve diğ. 2008).

**İspat:**  $X = \{x_0\}$  olsun.  $m \geq q > 0$  için  $X$  in içerdiği dijital  $(\kappa, q)$ -simpleks mevcut olmadığından  $C_q^\kappa(X) = 0$  dir. Böylece, tüm  $m \geq q > 0$  için  $H_q^{\kappa_0}(X) = 0$  dir.  $q = 0$  olsun.  $C_0^\kappa(X)$ , dijital  $(\kappa, 0)$ -simpleks bazlı serbest değişmeli grup olduğundan  $C_0^\kappa(X) \cong \mathbb{Z}$  dir.

$$0 \xrightarrow{\partial_1} C_0^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

kısa dizisinde  $Im\partial_1 = 0$  ve  $Ker\partial_0 \cong \mathbb{Z}$  dir. Böylece

$$H_0^{\kappa_0}(K) \cong \mathbb{Z}$$

dir.

**Teorem 3.18**  $X$  dijital basit kapalı  $\kappa$ -eğri ise

$$H_q^\kappa = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, 1 \\ 0, & q \neq 0, 1 \end{cases}$$

dır (Arslan ve diğ. 2008).

**İspat:**  $X = \{x_0, x_1, \dots, x_q\} \subset \mathbb{Z}^2$  bir dijital basit kapalı  $\kappa$ -eğri olsun. Bu durumda,  $x_i$  ve  $x_j$ ,  $\kappa$ -yakındır gerek ve yeter şart  $i = j \pm 1 \pmod{q}$  dur.

$$C_0^\kappa(X) = \{\langle x_0 \rangle, \langle x_1 \rangle, \dots, \langle x_q \rangle\} \cong \mathbb{Z}^{q+1}$$

$$C_1^\kappa(X) = \{\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \dots, \langle x_q, x_0 \rangle\} \cong \mathbb{Z}^{q+1}$$

dir.  $m > q > 1$  için  $C_q^\kappa(X) = 0$  olduğundan  $H_q^\kappa(X) = 0$  dır.

$$0 \xrightarrow{\partial_2} C_1^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

kısa dizisinden  $Im\partial_2 = 0$  ve  $Ker\partial_0 \cong \mathbb{Z}^{q+1}$  bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \partial_1(n_0 \langle x_0, x_1 \rangle + n_1 \langle x_1, x_2 \rangle + \dots + n_q \langle x_q, x_0 \rangle) = \\ n_0(x_1 - x_0) + n_1(x_2 - x_1) + \dots + n_q(x_0 - x_q) \end{aligned}$$

eşitliğinden  $Im\partial_1 = \mathbb{Z}^q$  dur.

$$\begin{aligned}\partial_1(n_0\langle x_0, x_1\rangle + n_1\langle x_1, x_2\rangle + \dots + n_q\langle x_q, x_0\rangle) &= 0 \\ n_0(x_1 - x_0) + n_1(x_2 - x_1) + \dots + n_q(x_0 - x_q) &= 0 \\ (n_q - n_0)x_0 + (n_0 - n_1)x_1 + \dots + (n_{q-1} - n_q)x_q &= 0\end{aligned}$$

eşitliği çözüldüğünde  $n_0 = n_1 = \dots = n_q = n$  olur. Buradan  $\text{Ker}\partial_1 \cong \mathbb{Z}$  dir. Sonuç olarak

$$H_1^\kappa(X) = \mathbb{Z} = H_0^\kappa(X)$$

elde edilir.

**Teorem 3.19**  $(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^n$  dijital görüntüsü  $\kappa$ -yol bağlantılı ise

$$H_0^\kappa(X) \cong \mathbb{Z}$$

dir ( Arslan ve diğ. 2008).

**İspat:**  $X$  in 0-simplekslerinin  $\langle p_0 \rangle, \langle p_1 \rangle, \dots, \langle p_n \rangle$  olduğunu kabul edelim.

$$\dots \xrightarrow{\partial_2} C_1^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

dizisi elde edilir.  $\partial_0$  sıfır homomorfizmi olduğundan

$$\mathbb{Z}_0^\kappa(X) = \text{Ker}\partial_0 = C_0^\kappa(X)$$

olur.  $C_0^\kappa(X)$  in elemanları  $\sum_{i=0}^n k_i p_i, k_i \in \mathbb{Z}$  şeklindedir. İddia ediyoruz ki

$$B_0^\kappa(X) = \left\{ \sum_{i=0}^n k_i p_i \in C_0^\kappa(X) \mid \sum k_i = 0 \right\}$$

dır. İddiamız doğruysa,

$$\varphi: Z_0^\kappa(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$\sum k_i p_i \rightarrow \sum k_i$$

dönüşümü örtendir ve çekirdeği  $B_0^\kappa(X)$  dir. Birinci izomorfizma teoreminden  $H_0^\kappa(X) \cong \mathbb{Z}$  olur. (3.19) eşitliğini göstermek için çift taraflı kapsamayı gösterelim.

$$\gamma = \sum_{i=0}^n k_i p_i \in C_0^\kappa(X) \quad \text{ve} \quad \sum k_i = 0$$

olsun. Herhangi bir  $p \in X$  seçersek  $X$ ,  $\kappa$ -yol bağlantılı olduğundan her  $p_i \in X$  için  $p$  den  $p_i$  ye bir  $\kappa$ -yol vardır.  $\sigma_i$ ,  $p$  den  $p_i$  ye olan  $\kappa$ -yolu oluşturan dijital 1-simplekslerin kümesi olsun.  $\partial_1(\sigma_i) = p_i - p$  olduğu açıktır.

$$\sum_{i=0}^n k_i \sigma_i \in C_1^\kappa(X)$$

dir ve

$$\partial_1\left(\sum_{i=0}^n k_i \sigma_i\right) = \sum_{i=0}^n k_i \partial_1(\sigma_i) = \sum k_i (p_i - p) = \sum k_i p_i - \left(\sum k_i\right)p$$

olur.  $\sum k_i = 0$  olduğundan

$$\gamma = \sum_{i=0}^n k_i p_i = \partial_1\left(\sum k_i \sigma_i\right) \in B_0^\kappa(X)$$

dır. Tersine  $\gamma \in B_0^\kappa(X)$  ise  $\gamma = \partial_1\left(\sum k_i e_i\right)$ ,  $e_i \in C_1^\kappa(X)$  yani  $e_i$ , 1-simplekstir ve  $e_i = \langle p_{r_i}, p_{s_i} \rangle$  şeklindedir. Böylece

$$\gamma = \sum k_i \partial_1(e_i) = \sum k_i \partial_1(\langle p_{r_i}, p_{s_i} \rangle) = \sum k_i (p_{s_i} - p_{r_i}) = \sum k_i p_{s_i} - \sum k_i p_{r_i}$$

olur.  $k_i$  iki kez ve zıt işaretli olarak tekrarlandığından  $\sum k_i = 0$  dır. Böylece

$$H_0^\kappa(X) = Z_0^\kappa(X) / B_0^\kappa(X) \cong \mathbb{Z}$$

elde edilir.

**Teorem 3.20**  $(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^m$  bir dijital görüntü ve  $\{X_\lambda : \lambda \in \wedge\}$   $X$  in  $\kappa$  -yol bileşenlerinin koleksiyonu olsun. O zaman

$$\text{rank}(H_0^\kappa(X)) = \text{card } \wedge$$

dır (Arslan ve diğ. 2008) de Teorem 3.18' in bir sonucudur.

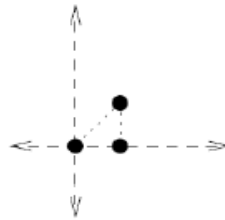
**Örnek 3.21**  $X, Y$  ye dijital homotopi denk iken  $H_0^{\kappa_0}(X)$  ve  $H_0^{\kappa_1}(Y)$  izomorf olmayabilir.

$$MSC'_8 = \{(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)\}$$

dijital görüntüsünü ele alalım.  $MSC'_8$  dijital basit kapalı 8-eğri ve 8-büzülebilir bir eğridir. Bu nedenle tek noktalı uzaya dijital  $(8,8)$ -homotopi denktir. Teorem 3.17 ve 3.18 den  $H_1^8(MSC'_8) = \mathbb{Z}$  ve  $H_1^8(\{*\}) = 0$  dır.

Sonuç olarak  $MSC'_8 \simeq_{(8,8)} \{*\}$  iken  $H_1^8(MSC'_8)$  ve  $H_1^8(\{*\})$  izomorf değildir. (Arslan ve diğ. 2008).

**Örnek 3.22**  $X = \{p_0 = (0,0), p_1 = (1,0), p_2 = (1,1)\}$  ve  $(X, 8)$ , Şekil 3.3 de  $(p_0 < p_1 < p_2)$  ile sıralanmıştır.



Şekil 3.3:  $(X, 8)$

O zaman  $C_0^8(X), C_1^8(X)$  ve  $C_2^8(X)$  sırayla

$$\{\langle p_0 \rangle, \langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle\}, \{\langle p_0 p_1 \rangle, \langle p_1 p_2 \rangle, \langle p_0 p_2 \rangle\}$$



$$\{\langle p_0 p_1 p_2 \rangle\}$$

bazları ile üretilmiş serbest abel gruplardır. Böylece,

$$H_0^8(X) = \mathbb{Z} \text{ ve } H_q^8(X) = 0, q \neq 0$$

(Arslan ve diğ. 2008).

**Teorem 3.23**  $MSC'_8 = \{(-1,0), (0,-1), (0,1), (1,0)\}$  nün simpleksler homoloji grubu,

$$H_q^8(MSC'_8) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0,1 \\ 0, & q \neq 0,1 \end{cases}$$

dır (Boxer ve diğ. 2008).

**İspat:**  $MSC'_8 = \{c_0 = (-1,0), c_1 = (0,-1), c_2 = (0,1), c_3 = (1,0)\}$  (Şekil 2.4) ve sıralama bağlantısı ile yönlendirilmiştir.  $C_q^8(MSC'_8) = 0$ ,  $q > 1$ .  $C_1^8(MSC'_8)$  ve  $C_0^8(MSC'_8)$  sırasıyla;

$$\{\langle c_0 c_1 \rangle, \langle c_1 c_3 \rangle, \langle c_2 c_3 \rangle, \langle c_0 c_2 \rangle\}$$

ve

$$\{\langle c_0 \rangle, \langle c_1 \rangle, \langle c_2 \rangle, \langle c_3 \rangle\}$$

ile üretilmiş serbest abel gruplardır. Böylece

$$Ker \partial_1 \cong \mathbb{Z}, Im \partial_1 \cong \mathbb{Z}^3, Ker \partial_0 \cong \mathbb{Z}^4 \text{ ve}$$

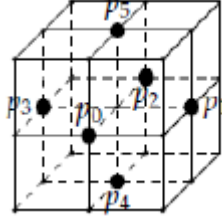
$$H_q^8(MSC'_8) = \mathbb{Z}, q = 0,1 \text{ ve } H_q^8(MSC'_8) = 0, q \neq 0,1.$$

elde edilir. (Arslan, Karaca ve Öztel 2008).

**Teorem 3.24**  $MSS'_{18}$  nün dijital simpleksler homoloji grupları

$$H_q^{18}(MSS'_{18}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, 2 \\ 0, & q \neq 0, 2 \end{cases}$$

dır (Boxer ve diğ. 2008).



Şekil 3.4:  $MSS'_{18}$

**İspat:**  $MSS'_{18}$  nün noktalarını  $\{p_0 = (1,1,0), p_1 = (0,0,2), p_2 = (-1,1,0), p_3 = (0,0,0), p_4 = (0,1,-1), p_5 = (0,1,1)\} \subset \mathbb{Z}^3$  olarak gösterelim ve bu noktaları  $p_2 < p_3 < p_4 < p_5 < p_1 < p_0$  şeklinde sözlük sıralamasına göre sıralandığını kabul edelim.  $MSS'_{18}$  dijital görüntüsünde  $q > 3$  için

$$H_q^{18}(MSS'_{18}) = \{0\}$$

dır.  $C_0^{18}(MSS'_{18}), C_1^{18}(MSS'_{18}), C_2^{18}(MSS'_{18})$  bazları sırasıyla

0-simpleksler  $\langle p_0 \rangle, \langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle, \langle p_3 \rangle, \langle p_4 \rangle, \langle p_5 \rangle$

1-simpleksler  $e_0 = \langle p_2 p_1 \rangle, e_1 = \langle p_2 p_3 \rangle, e_2 = \langle p_2 p_4 \rangle, e_3 = \langle p_2 p_5 \rangle, e_4 = \langle p_4 p_1 \rangle,$

$e_5 = \langle p_3 p_4 \rangle, e_6 = \langle p_4 p_0 \rangle, e_7 = \langle p_5 p_1 \rangle, e_8 = \langle p_3 p_5 \rangle, e_9 = \langle p_5 p_0 \rangle,$

$e_{10} = \langle p_1 p_0 \rangle, e_{11} = \langle p_3 p_0 \rangle$

2-simpleksler  $\sigma_0 = \langle p_2 p_4 p_1 \rangle, \sigma_1 = \langle p_4 p_1 p_0 \rangle, \sigma_2 = \langle p_3 p_4 p_0 \rangle, \sigma_3 = \langle p_2 p_3 p_4 \rangle,$

$\sigma_4 = \langle p_2 p_5 p_1 \rangle, \sigma_5 = \langle p_2 p_3 p_5 \rangle, \sigma_6 = \langle p_5 p_1 p_0 \rangle, \sigma_7 = \langle p_3 p_5 p_0 \rangle$

şeklinde olan serbest abel gruplardır. Böylece

$$0 \xrightarrow{\partial_3} C_2^{18}(MSS'_{18}) \xrightarrow{\partial_2} C_1^{18}(MSS'_{18}) \xrightarrow{\partial_1} C_0^{18}(MSS'_{18}) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

kısa dizisi elde edilir.  $Im\partial_3 = B_2^{18}(MSS'_{18}) = \{0\}$  dır. Ayrıca

$$\begin{aligned} \partial_2 \left( \sum_{i=0}^7 n_i \sigma_i \right) &= n_0 \partial_2(\sigma_0) + n_1 \partial_2(\sigma_1) + n_2 \partial_2(\sigma_2) + n_3 \partial_2(\sigma_3) + n_4 \partial_2(\sigma_4) + n_5 \partial_2(\sigma_5) \\ &\quad + n_6 \partial_2(\sigma_6) + n_7 \partial_2(\sigma_7) \\ &= n_0(e_4 - e_0 + e_2) + n_1(e_{10} - e_6 + e_4) + n_2(e_6 - e_{11} + e_5) + n_3(e_5 - e_2 + e_1) \\ &\quad + n_4(e_7 - e_0 + e_3) + n_5(e_8 - e_3 + e_1) + n_6(e_{10} - e_9 + e_7) + n_7(e_8 - e_3 + e_1) \\ &= e_0(-n_0 - n_4) + e_1(n_3 + n_5) + e_2(n_0 - n_3) + e_3(n_4 - n_5) + e_4(n_0 + n_1) \\ &\quad + e_5(n_2 + n_3) + e_6(-n_1 + n_2) + e_7(n_4 + n_6) + e_8(n_5 + n_7) + e_9(-n_6 + n_7) \\ &\quad + e_{10}(n_1 + n_6) + e_{11}(-n_2 - n_7) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} &e_0(-n_0 - n_4) + e_1(n_3 + n_5) + e_2(n_0 - n_3) + e_3(n_4 - n_5) + e_4(n_0 + n_1) + e_5(n_2 + n_3) \\ &+ e_6(-n_1 + n_2) + e_7(n_4 + n_6) + e_8(n_5 + n_7) + e_9(-n_6 + n_7) + e_{10}(n_1 + n_6) \\ &+ e_{11}(-n_2 - n_7) = 0 \end{aligned}$$

denklemini çözümlerse

$$-n_0 = n_1 = n_2 = -n_3 = n_4 = n_5 = -n_6 = -n_7 = n$$

bulunur. Bu durumda

$$Z_2^{18}(MSS'_{18}) = Ker\partial_2 = \{n(-\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 - \sigma_6 - \sigma_7) \mid n \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$$

elde edilir. Böylece

$$H_2^{18}(MSS'_{18}) = Z_2^{18}(MSS'_{18}) / B_2^{18}(MSS'_{18}) \cong \mathbb{Z}$$

dır.

$$\begin{aligned}
\partial_1 \left( \sum_{i=0}^{11} k_i e_i \right) &= k_0 \partial_1(e_0) + k_1 \partial_1(e_1) + k_2 \partial_1(e_2) + k_3 \partial_1(e_3) + k_4 \partial_1(e_4) + k_5 \partial_1(e_5) \\
&\quad + k_6 \partial_1(e_6) + k_7 \partial_1(e_7) + k_8 \partial_1(e_8) + k_9 \partial_1(e_9) + k_{10} \partial_1(e_{10}) + k_{11} \partial_1(e_{11}) \\
&= k_0(p_1 - p_2) + k_1(p_3 - p_2) + k_2(p_4 - p_2) + k_3(p_5 - p_2) \\
&\quad + k_4(p_1 - p_4) + k_5(p_4 - p_3) + k_6(p_0 - p_4) + k_7(p_1 - p_5) \\
&\quad + k_8(p_5 - p_3) + k_9(p_0 - p_5) + k_{10}(p_0 - p_1) + k_{11}(p_0 - p_3) \\
&= p_0(k_6 + k_9 + k_{10} + k_{11}) + p_1(k_0 + k_4 + k_7 + k_{10}) \\
&\quad + p_2(-k_0 - k_1 - k_2 - k_3) + p_3(k_1 - k_5 - k_8 - k_{11}) \\
&\quad + p_4(k_2 - k_4 + k_5 - k_6) + p_5(k_3 - k_7 + k_8 - k_9)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
&= p_0(k_6 + k_9 + k_{10} + k_{11}) + p_1(k_0 + k_4 + k_7 + k_{10}) + p_2(-k_0 - k_1 - k_2 - k_3) \\
&\quad + p_3(k_1 - k_5 - k_8 - k_{11}) + p_4(k_2 - k_4 + k_5 - k_6) + p_5(k_3 - k_7 + k_8 - k_9) = 0
\end{aligned}$$

denklemini çözümlürse

$$k_3 = -k_0 - k_1 - k_2$$

$$k_6 = k_2 - k_4 + k_5$$

$$k_9 = -k_0 - k_1 - k_2 - k_7 + k_8$$

$$k_{10} = k_0 + k_4 + k_7$$

$$k_{11} = k_1 - k_5 - k_8$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
Z_1^{18}(MSS'_{18}) &= Ker \partial_1 = \{k_0 e_0 + k_1 e_1 + k_2 e_2 + (-k_0 - k_1 - k_2) e_3 + k_4 e_4 + k_5 e_5 \\
&\quad + (k_2 - k_4 + k_5) e_6 + k_7 e_7 + k_8 e_8 + (-k_0 - k_1 - k_2 - k_7 + k_8) e_9 \\
&\quad + (k_0 + k_4 + k_7) e_{10} + (k_1 - k_5 - k_8) e_{11} \mid k_i \in \mathbb{Z}, i = 0, 1, 2, 4, 5, 7, 8\} \\
&\cong \mathbb{Z}^7
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
B_1^{18}(MSS'_{18}) &= Im\partial_2 = \{t_0e_0 + t_1e_1 + t_2e_2 + (-t_0 - t_1 - t_2)e_3 + t_4e_4 + t_5e_5 \\
&\quad + (t_2 - t_3 + t_4)e_6 + t_5e_7 + t_6e_8 + (-t_0 - t_1 - t_2 - t_5 + t_6)e_9 \\
&\quad + (t_0 + t_3 + t_5)e_{10} + (-t_1 + t_4 + t_6)e_{11} \mid t_i \in \mathbb{Z}, i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\
&\cong \mathbb{Z}^7
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$H_1^{18}(MSS'_{18}) = Z_1^{18}(MSS'_{18})/B_1^{18}(MSS'_{18}) \cong \{0\}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
B_0^{18}(MSS'_{18}) &= Im\partial_1 = \{h_0\langle p_0 \rangle + h_1\langle p_1 \rangle + h_2\langle p_2 \rangle + h_3\langle p_3 \rangle + h_4\langle p_4 \rangle \\
&\quad + (-h_0 - h_1 - h_2 - h_3 - h_4)\langle p_5 \rangle \mid i = 0, 1, 2, 3, 4 \forall h_i \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^5
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
Z_0^{18}(MSS'_{18}) &= \{n_0\langle p_0 \rangle + n_1\langle p_1 \rangle + n_2\langle p_2 \rangle + n_3\langle p_3 \rangle + n_4\langle p_4 \rangle + n_5\langle p_5 \rangle \\
&\quad \mid i = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \forall n_i \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^6
\end{aligned}$$

olduğu için

$$H_0^{18}(MSS'_{18}) = Z_0^{18}(MSS'_{18})/B_0^{18}(MSS'_{18}) \cong \mathbb{Z}^6$$

bulunur. Böylece

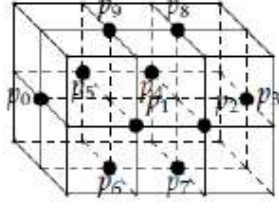
$$H_q^{18}(MSS'_{18}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, 2 \\ 0, & q \neq 0, 2 \end{cases}$$

elde edilir.

**Teorem 3.25**  $MSS_{18}$  in dijital simpleksler homoloji grupları

$$H_q^{18}(MSS_{18}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ \mathbb{Z}^3, & q = 1 \\ 0, & q \neq 0, 1 \end{cases}$$

dır (Boxer ve diğ. 2008).

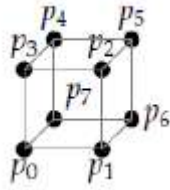


Şekil 3.5:  $MSS_{18}$

**Teorem 3.26**  $MSS'_6$  in dijital simpleksler homoloji grupları

$$H_q(MSS'_6) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ \mathbb{Z}^5, & q = 1 \\ 0, & q \neq 0, 1 \end{cases}$$

dır (Boxer, Karaca ve Öztel 2008).



Şekil 3.6:  $MSS'_6$

### 3.5 Euler Karakteristik

**Tanım 3.27**  $(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^n$  bir dijital görüntü ve  $q \geq 0$  için  $\alpha_q$ ,  $(X, \kappa)$  daki dijital  $q$ -simplekslerin sayısı olsun.  $(X, \kappa)$  nin Euler karakteristiği;

$$\chi(X, \kappa) = \sum_{q=0}^n (-1)^q \alpha_q$$

şeklinde tanımlanır (Boxer ve diğ. 2008).

**Teorem 3.28** Bir  $(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^m$  bir dijital görüntüsü için

$$\chi(X, \kappa) = \sum_{q=0}^n (-1)^q \text{rank} H_q^\kappa(X)$$

dir (Boxer ve diğ. 2008).

**İspat:**

$$0 \xrightarrow{\partial_{m+1}} C_m^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_m} C_{m-1}^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_{m-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

zincir kompleksini göz önüne alalım. Her bir  $C_q^\kappa(X)$  rankı  $\alpha_q$  olan bir serbest değişmeli gruptur. Ayrıca

$$H_q^\kappa(X) = Z_q^\kappa(X) / B_q^\kappa(X) = \ker \partial_q / \text{Im} \partial_{q+1}$$

olduğundan  $\text{rank} H_q^\kappa(X) = \text{rank} Z_q^\kappa(X) - \text{rank} B_q^\kappa(X)$  olur. Her  $q \geq 0$  için

$$0 \rightarrow Z_q^\kappa(X) \rightarrow C_q^\kappa(X) \rightarrow B_{q-1}^\kappa(X) \rightarrow 0$$

kısa tam dizisi vardır. Buradan

$$\alpha_q = \text{rank} C_q^\kappa(X) = \text{rank} Z_q^\kappa(X) + \text{rank} B_{q-1}^\kappa(X)$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} \chi(X, \kappa) &= \sum_{q=0}^m (-1)^q \alpha_q = \sum_{q=0}^m (-1)^q (\text{rank} Z_q^\kappa(X) + \text{rank} B_{q-1}^\kappa(X)) \\ &= \sum_{q=0}^m (-1)^q \text{rank} Z_q^\kappa(X) + \sum_{q=0}^m (-1)^q \text{rank} B_{q-1}^\kappa(X) \end{aligned}$$

bulunur.  $rankB_{-1}^{\kappa}(X) = 0 = rankB_m^{\kappa}(X)$  olduğundan  $q-1$  yerine  $q$  alabiliriz.

$$\begin{aligned}\chi(X, \kappa) &= \sum_{q=0}^m (-1)^q rankZ_q^{\kappa}(X) + \sum_{q=0}^m (-1)^{q+1} rankB_q^{\kappa}(X) \\ &= \sum_{q=0}^m (-1)^q (rankZ_q^{\kappa}(X) - rankB_q^{\kappa}(X)) \\ &= \sum_{q=0}^m (-1)^q rankH_q^{\kappa}(X)\end{aligned}$$

elde edilir.

**Teorem 3.29**  $(X, \kappa_0) \subset \mathbb{Z}^{n_0}$  ve  $(Y, \kappa_1) \subset \mathbb{Z}^{n_1}$ ,  $(\kappa_0, \kappa_1)$  -izomorf iki dijital görüntü olsun. Bu durumda

$$\chi(X, \kappa_0) = \chi(X, \kappa_1)$$

dir (Boxer ve diğ. 2008).

**İspat:**  $X$  ve  $Y$  dijital görüntüleri arasında  $(\kappa_0, \kappa_1)$  -izomorfizm varsa Teorem 3.16 dan

$$H_q^{\kappa_0}(X) \cong H_q^{\kappa_1}(Y)$$

olur. Teorem 3.29 den ispat elde edilir.

**Örnek 3.30**  $MSS_{18}$  in Euler karakteristiğini hesaplayalım (Khalimsky 1987).

$$\chi(MSS_{18}, 18) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 10 - 20 + 8 = -2$$

Teorem 3.29 i kullanarak hesaplasak yine aynı sonucu elde ederiz:

$$\chi(MSS_{18}, 18) = rankH_0^{18}(MSS_{18}) - rankH_1^{18}(MSS_{18}) = 1 - 3 = -2$$

**Örnek 3.31**  $MSS'_{18}$  in Euler karakteristiğini hesaplayalım (Khalimsky 1987).

$$\begin{aligned}\chi(MSS'_{18}, 18) &= rankH_0^{18}(MSS'_{18}) - rankH_1^{18}(MSS'_{18}) + rankH_2^{18}(MSS'_{18}) \\ &= 1 - 0 + 1 = 2.\end{aligned}$$



## 4. HOMOLOJİ GRUPLARI İÇİN İNDİRGEME ALGORİTMASI

Bu bölümde homoloji gruplarının hesaplaması için bir algoritma sunulacaktır. İlk olarak, sonlu üretilmiş serbest abel gruplarının homomorfizmaları için bir "Normal Form" veren temel teorem ispatlanacaktır. İlk sonuç, serbest abel gruplarının alt grupları hakkında teoremdir. İkinci bir sonuç, serbest zincir kompleksleri için standart bazlarla ilgili bir teoremdir. Üçüncü bir sonuç, sonlu bir kompleksin homoloji gruplarını hesaplamak için istenen algoritmamızı verecektir.

**Lemma 4.32**  $A$  rankı  $n$  olan serbest abel grup olsun.  $B$ ,  $A$  nın alt grubu ise  $B$  rankı  $r \leq n$  olan serbest abel gruptur (Munkres 1984).

**Lemma 4.33**  $A$  serbest abel grup ise,  $A$  nın herhangi bir  $B$  alt grubu da serbesttir (Munkres 1984).

**Tanım 4.34**  $G$  ve  $G'$  sırasıyla  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ve  $a'_1, a'_2, \dots, a'_m$  bazlarına sahip serbest abel grupları olsun.  $f : G \rightarrow G'$  homomorfizm ise farklı  $\lambda_{ij}$  tamsayıları için

$$f(a_j) = \sum_{i=1}^m \lambda_{ij} a'_i$$

olur.  $(\lambda_{ij})$  matrisi,  $G$  ve  $G'$  için verilen bazlara göre  $f$  nin matrisi olarak adlandırılır (Munkres 1984).

**Teorem 4.35**  $G$  ve  $G'$  sırasıyla  $n$  ve  $m$  rankına sahip serbest abel grupları ve  $f : G \rightarrow G'$  bir homomorfizm olsun.  $G$  ve  $G'$  için bazlar vardır öyle ki bu bazlara göre  $f$  nin matrisi

$$B = \left[ \begin{array}{cc|c} b_1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_l \\ \hline & 0 & 0 \end{array} \right]$$

olarak gösterilir. Burada  $b_i \geq 1$  ve  $b_1 | b_2 | \dots | b_l$  dir. Bu matris aslında  $f$  tarafından tek türlü bir şekilde belirlenir (bazları olmasada). Bu matrise  $f$  nin matrisi için bir Normal Form denir (Munkres 1984).

İndirgeme algoritmasına başlamadan önce  $c$ ,  $A$  matrisinin her girdisini bölen bir tamsayı ve  $B$  bu temel işlemlerden herhangi birini uygulayarak  $A$  dan elde edilmiş ise o zaman  $c$ ,  $B$  nin her girdisini böler.

#### 4.1 İndirgeme Algoritması

Tamsayıların sıfırdan farklı bir  $A = (a_{ij})$  matrisi için  $\alpha(A)$ ,  $|a_{ij}|$  sayılarının sıfırdan farklı elemanlarının en küçüğünü gösterir. Eğer  $|a_{ij}| = \alpha(A)$  ise  $a_{ij}$  ye  $A$  nın minimum girdisi denir. İndirgeme işlemi iki adımdan oluşur: Birincisi matrisi  $\alpha(A)$  nın mümkün olduğu kadar küçük olduğu forma getirir. İkincisi ilgili matrisin boyutlarını azaltır.

**1.Adım**  $\alpha$  fonksiyonun değerini azaltmak için matrisi temel işlemlerle değiştirmeye çalışıyoruz. İspatını aşağıda veriyoruz; Eğer  $\alpha(A)$  sayısı bir  $A$  girdisini bölmez ise temel işlemleri  $A$  ya uygulayarak  $\alpha$  değeri azaltılabilir. Eğer  $\alpha(A)$  sayısı bir  $A$  girdisini bölerse, o zaman  $A$  temel işlemler uygulanarak elde edilen  $B$  matrisinin her girdisini böler.

**2.Adım** Bu adımın başında minimum girdisi  $A$  nın her girdisini bölen bir  $A$  matrisine sahibiz.  $A$  nın minimum bir girdisini matrisin sol üst köşesine getirmek ve pozitif yapmak için temel işlemler uygulanır. Satır ve sütundaki tüm girdileri bölmesi için, satır ve sütundaki diğer tüm girdileri sıfır yapan temel işlemler uygulanabilir.

Bu işlemin sonunda, sol üst köşedeki girdi, matrisin tüm girdilerini böler. Şimdi bir kez daha 1.Adımdan başlayarak matrisimizin ilk satırını ve ilk sütununu yok sayarak elde edilen daha küçük matrise uygulanır.

**3.Adım** Algoritma küçük matris sıfır matris olduğunda ya da kaybolduğunda sona erer. Bu noktada matrisimiz normal formdadır. Tek sorun, köşegen girdilerin  $b_1, \dots, b_l$  birbirini ardışık olarak bölüp bölmediğidir. Ancak bunu 2.Adımda sol üst köşedeki  $b_1$  girdisinin matrisin tüm girdilerini böldüğünü belirttik. Temel işlemler uygulamaya devam ettikçe bu durum devam eder. Algoritma sona erdiğinde  $b_1, (b_2, \dots, b_l)$  nin her birini bölmek zorundadır. Benzer olarak  $b_2$  de  $(b_3, \dots, b_l)$  nin her birini böler ve bu şekilde devam eder. Böylece  $b_1, \dots, b_l$  sayıları  $f$  homomorfizmi tarafından tek türlü olarak belirlenir.

Matristeki sıfır olmayan girdilerin sayısı  $l$ ,  $f(G) \subset G'$  serbest abel grubunun rankıdır ve 1 den büyük olan bu  $b_i$  sayıları,  $G'/f(G)$  bölüm grubunun burulma katsayıları  $t_1, \dots, t_k$  dır (Munkres 1984).

## 4.2 İndirgeme Algoritmasının Uygulamaları

**Teorem 4.36**  $F$  serbest abel grup olsun.  $R$ ,  $F$  nin bir alt grubu ise  $R$  serbest abel gruptur.  $F$  nin rankı  $n$  ise  $R$   $r \leq n$  rankına sahiptir, ayrıca  $F$  nin  $e_1, \dots, e_n$  bazları ve  $t_i > 1$  için  $t_1, \dots, t_k$  tamsayıları vardır öyle ki

- 1)  $t_1 e_1, \dots, t_k e_k, e_{k+1}, \dots, e_r$ ,  $R$  nin bir bazıdır.
- 2)  $t_1 | t_2 | \dots | t_k$  dir. Yani her  $i$  için  $t_i$  böler  $t_{i+1}$  dir.

$t_1, \dots, t_k$  tamsayıları  $e_1, \dots, e_n$  nin bazları olmamasına rağmen  $F$  ve  $R$  tarafından tek türlü belirlenir (Munkres 1984).

**İspat:**  $F$  serbest abel grubunun rankı  $n$  ise  $R$   $r \leq n$  rankına sahiptir.  $j: R \rightarrow F$  kapsama homomorfizmini göz önünde alınır ve  $j$  matrisinin normal

matris formunda olduğu  $R$  için  $a_1, \dots, a_r$ ,  $F$  için  $e_1, \dots, e_n$  bazları seçelim.  $j$  bir monomorfizm olduğundan, bu normal formda sıfır sütun yoktur. Böylece  $i=1, \dots, r$  için  $b_i \geq 1$  ve  $b_1 | b_2 | \dots | b_r$  olmak üzere  $j(a_i) = b_i e_i$  dir.  $j(a_i) = a_i$  olduğu için  $b_1 e_1, \dots, b_r e_r$   $R$  için baz oluşturur.

Şimdi serbest zincir kompleksler için “Standart Baz Teoremini” ispatlayalım.

**Teorem 4.37**  $\{C_p, \partial_p\}$  bir zincir kompleks olsun, her bir  $C_p$  grubunun sonlu ranklı olduğunu varsayalım. Her  $p$  için

$$C_p = U_p \oplus V_p \oplus W_p$$

olacak şekilde  $C_p$  nin  $U_p, V_p, W_p$  alt grupları vardır. Burada  $\partial_p(U_p) \subset W_{p-1}$ ,  $\partial_p(V_p) = 0$  ve  $\partial_p(W_p) = 0$  dir. Ayrıca  $\partial_p : U_p \rightarrow W_{p-1}$  nin  $U_p$  ve  $W_{p-1}$  bazlarına sahip

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_l \end{bmatrix}$$

formunda bir matrisi vardır, burada  $b_i \geq 1$  ve  $b_1 | b_2 | \dots | b_l$  (Munkres 1984).

### İspat:

**1.Adım**  $Z_p = \ker \partial_p$  ve  $B_p = \text{im} \partial_{p+1}$  olsun.  $W_p$ ,  $C_p$  nin tüm  $c_p$  elemanlarından oluşuyor, öyle ki sıfır olmayan bazı  $c_p$  ler  $B_p$  ye aittir.  $C_p$  alt gruptur ve zayıf sınırlar grubu olarak adlandırılır. Açık olarak  $B_p \subset W_p \subset Z_p \subset C_p$ .

(İkinci ekleme,  $C_p$  nin burulma-serbest olduğu gerçeğini kullanır. Böylece  $mc_p = \partial_{p+1} d_{p+1}$  denklemi  $\partial_p c_p = 0$  anlamına gelir.)  $W_p$  nin  $Z_p$  de direkt toplam olduğunu gösteriyoruz. Doğal izdüşüm düşünün

$$Z_p \rightarrow H_p(\mathcal{C}) \rightarrow H_p(\mathcal{C})/T_p(\mathcal{C})$$

Burada  $T_p(\mathcal{C})$ ,  $H_p(\mathcal{C})$  nin burulma alt grubudur. Bu izdüşümün çekirdeği  $W_p$  ; bu nedenle  $Z_p/W_p \cong H_p/T_p$  dır. İkinci grup sonlu üreteçli ve burulmasız olduğundan serbesttir. Eğer  $c_1+W_p, \dots, c_k+W_p$ ,  $Z_p/W_p$  için baz ve  $d_1, \dots, d_l$ ,  $W_p$  için baz oluşturuyorsa  $c_1, \dots, c_k, d_1, \dots, d_l$  nin  $Z_p$  için baz olup olmadığını kontrol edilebilir.  $Z_p = V_p \oplus W_p$  dır, burada  $c_1, \dots, c_k$ ,  $V_p$  grubunun bazıdır.

**2.Adım:**  $e_1, \dots, e_n$ ,  $C_p$  nin bazları ve  $e'_1, \dots, e'_m$   $C_{p-1}$  in bazları olsun.  $\partial_p : C_p \rightarrow C_{p-1}$  matrisinin normal formu,  $b_i \geq 1$  ve  $b_1 | b_2 | \dots | b_l$  olmak üzere

$$\begin{array}{c} e_1 \quad \cdots \quad e_l \quad e_{l+1} \quad \cdots \quad e_n \\ \begin{array}{c} e'_1 \\ \vdots \\ e'_l \\ e'_{l+1} \\ \vdots \\ e'_m \end{array} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} b_1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & 0 \\ 0 & & b_l & & & \\ \hline & & & & & \\ & 0 & & & 0 & \\ & & & & & \end{array} \right] \end{array}$$

şeklindedir . O zaman

- (1)  $e_{l+1}, \dots, e_n$ ,  $Z_p$  için bir baz
- (2)  $e'_1, \dots, e'_l$ ,  $W_{p-1}$  için bir baz
- (3)  $b_1 e'_1, \dots, b_l e'_l$ ,  $B_{p-1}$  için bir baz oluşturur.

Bu sonuçları ispatlayalım.  $c_p$ , genel  $p$ -zincirine sınır operatörünü uygulayalım.

$$c_p = \sum_{i=0}^n a_i e_i \quad \text{ise} \quad \partial_p c_p = \sum_{i=0}^l a_i b_i e'_i$$

dır. (1) i ispatlamak için  $b_i \neq 0$  olduğundan  $c_p$ ,  $p$ -zincirinin bir devir olması için gerek ve yeter şart  $i=1, \dots, l$  için  $a_i = 0$  olmasıdır. (3) ü ispatlamak için herhangi bir  $\partial_p c_p$ ,  $p-1$  sınırı,  $b_i \neq 0$  ve bu elemanlar bağımsız olduğundan  $b_1 e'_1, \dots, b_l e'_l$  tarafından üretilen gruptadır. Son olarak (2) ispatlıyoruz. İlk olarak her bir  $e'_1, \dots, e'_l$

$W_{p-1}$  e aittir çünkü  $b_i e'_i = \partial e_i$  dır. Tersine

$$c_{p-1} = \sum_{i=1}^m d_i e'_i$$

bir  $p-1$  zincir olsun ve  $c_{p-1} \in W_{p-1}$  olduğunu kabul edelim. Dolayısıyla

$$\lambda c_{p-1} = \partial_p c_p = \sum_{i=1}^l a_i b_i e'_i$$

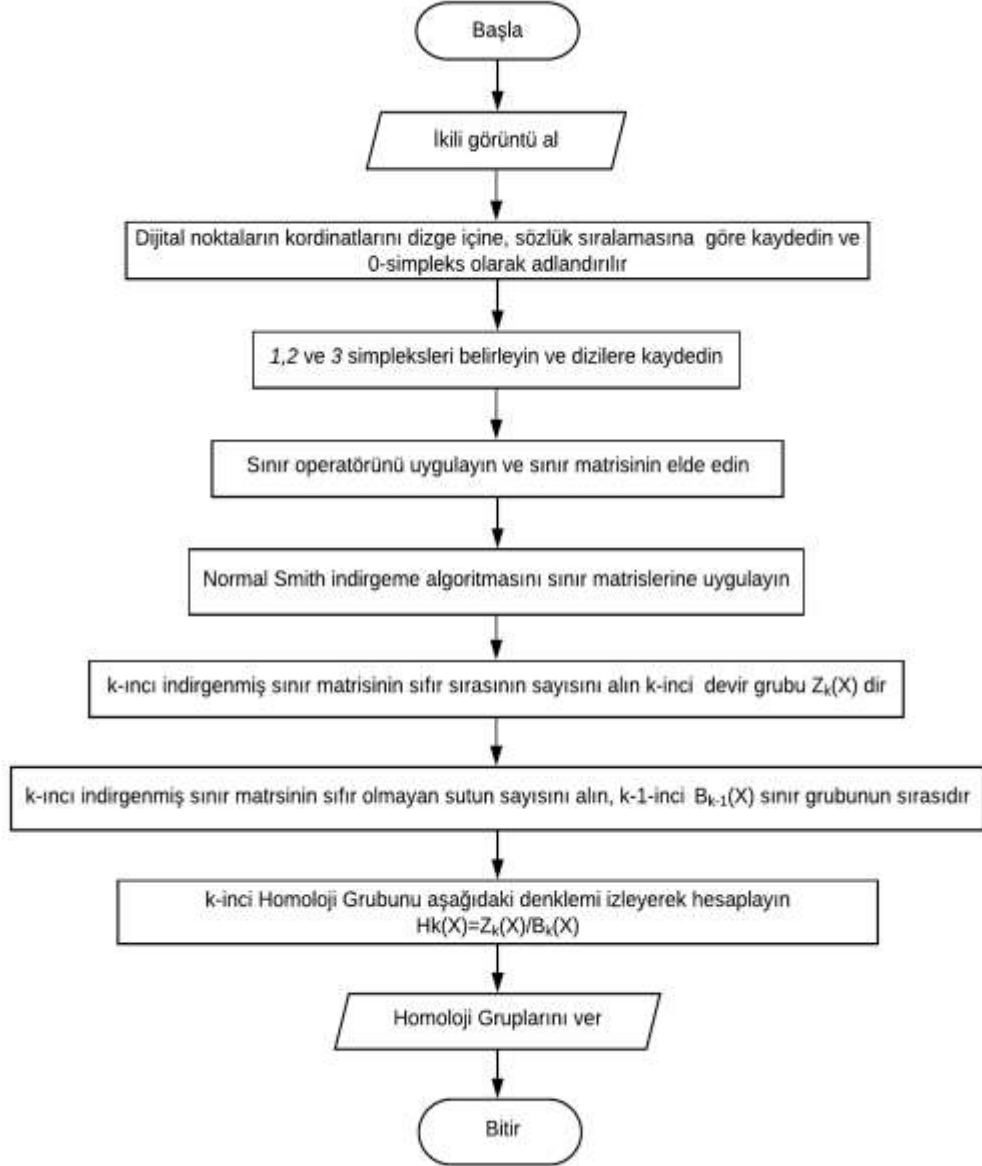
formunda bir denklemi sağlar. Denklem katsayıları  $i > l$  için  $d_i = 0$  olduğundan  $\lambda d_i = 0$ ,  $i > l$  dır. Böylece  $e'_1, \dots, e'_l$ ,  $W_{p-1}$  için baz oluşturur.

**3.Adım** Teoremi ispat etmek için 2. Adımdaki gibi  $C_p$  ve  $C_{p-1}$  bazlarını seçelim.  $U_p$ ,  $e'_1, \dots, e'_l$  tarafından üretilmiş grup olarak tanımlanır;

$$C_p = U_p \oplus Z_p$$

olur. 1.Adımdan  $Z_p = V_p \oplus W_p$  olacak şekilde  $V_p$  yi seçelim. Öyleyse  $C_p$ ,  $\partial_p(V_p) = 0$  ve  $\partial_p(W_p) = 0$  olacak şekilde ayrışır.  $U_p$  ve  $W_{p-1}$  için istenen bazlar, 2.Adımdan sonra elde edilir. Bununla birlikte  $W_p$  ve  $Z_p = V_p \oplus W_p$  nin tek türlü şekilde  $C_p$  nin alt grupları olduğuna dikkat edin.  $U_p$  ve  $V_p$  alt grupları tek türlü biçimde belirlenmemiştir.

Dijital görüntülerin homoloji gruplarını hesaplamak için algoritmanın akış diyagramını Şekil 4.1 gösterilmiştir.

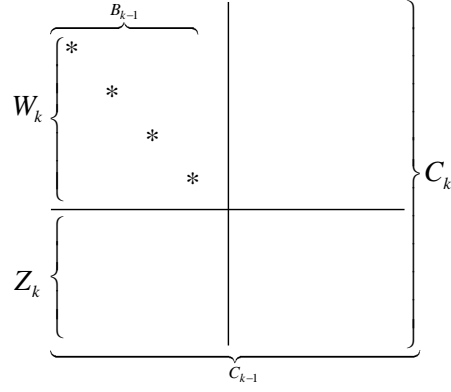


Şekil 4.1: Dijital homoloji gruplarını hesaplayan algoritma (Öznel ve diğ. 2017).

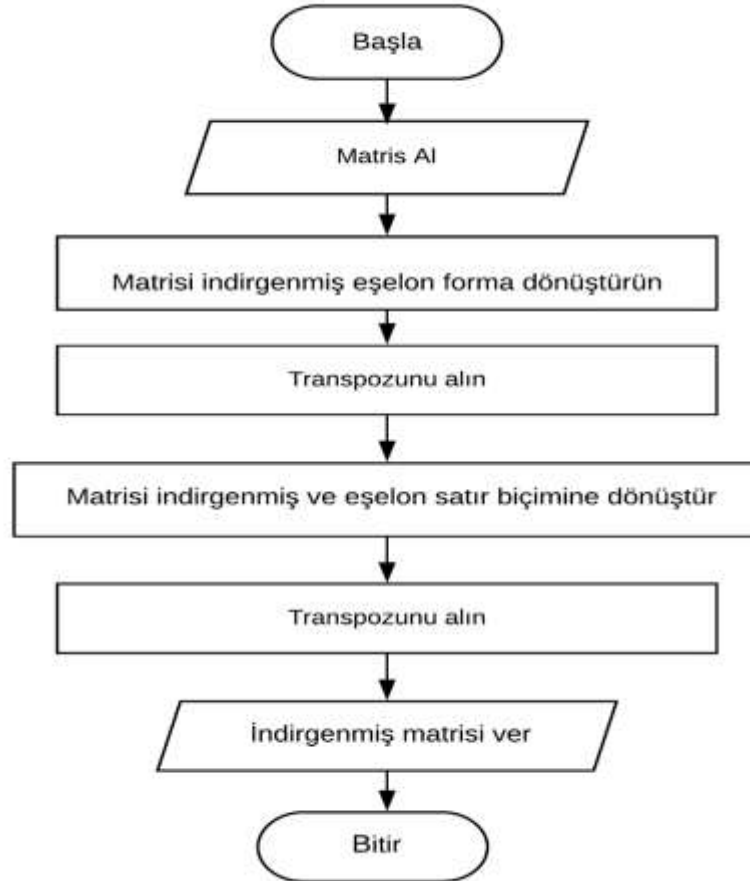
Algoritmamızın en önemli kısmı sınır matrisi  $\tilde{\partial}_k$  nın indirgenmesidir.

$$\tilde{\partial}_k = \left[ \begin{array}{c|c} \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_m) & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$$

Smith Normal Form Matrisi  $\tilde{d}_k$  nin yapısı



Matris indirgeme için Şekil 4.2 de verilen basit algoritma kullanılır.



Şekil 4.2: Matris indirgeme için akış diyagramı (Ozgel ve diğ. 2017).



**Örnek 4.38**  $MSC'_8 = \{(-1,0), (0,-1), (0,1), (1,0)\}$  nün simpleksler homoloji grubu

$$H_0^8(MSC'_8) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0,1 \\ 0, & q \neq 0,1 \end{cases}$$

olduğunu indirgeme algoritmasını kullanarak hesaplayalım.

$MSC'_8$  in noktaları  $c_0 = (-1,0), c_1 = (0,-1), c_2 = (0,1), c_3 = (1,0)$  olarak adlandırırsak, simpleks kümelerini aşağıdaki gibi oluştururuz;

$$C_0^8(MSC'_8) = \{\langle c_0 \rangle, \langle c_1 \rangle, \langle c_2 \rangle, \langle c_3 \rangle\}$$

$$C_1^8(MSC'_8) = \{\langle c_0c_1 \rangle, \langle c_1c_3 \rangle, \langle c_2c_3 \rangle, \langle c_0c_2 \rangle\}$$

Böylece aşağıdaki zincir kompleksi

$$0 \longrightarrow C_1^\kappa(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0^\kappa(X) \longrightarrow 0$$

elde edilir. Buna göre sınır operatörü  $\partial_1$  in matrisi aşağıdaki gibidir;

$$\partial_1 = \begin{array}{c} c_0c_1 \\ c_1c_3 \\ c_2c_3 \\ c_0c_2 \end{array} \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

İndirgeme işlemi  $\tilde{\partial}_1$  uygulandığında, indirgenmiş matris elde edilir;

$$\tilde{\partial}_1 = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Bu matraste hesaplamalar yapılırsa

$$Z_1^8(MSC'_8) = \ker \partial_1 = \mathbb{Z} \quad B_0^8(MSC'_8) = \text{Im } \partial_1 = \mathbb{Z}^3$$

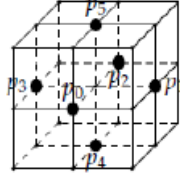
$$Z_0^8(MSC'_8) = \ker \partial_0 = \mathbb{Z}^4, \quad B_1^8(MSC'_8) = \text{Im } \partial_2 = 0$$

$$H_0^8(MSC'_8) = \frac{Z_0^8(MSC'_8)}{B_0^8(MSC'_8)} = \frac{\mathbb{Z}^4}{\mathbb{Z}^3} = \mathbb{Z}, \quad H_1^8(MSC'_8) = \frac{Z_1^8(MSC'_8)}{B_1^8(MSC'_8)} = \frac{\mathbb{Z}}{0} = \mathbb{Z}$$

**Örnek 4.39**  $MSS'_{18}$  nün dijital simpleksler homoloji grupları

$$H_q^{18}(MSS'_{18}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, 2 \\ 0, & q \neq 0, 2 \end{cases}$$

dır. İndirgeme algoritması kullanarak bunu hesaplayalım.



**Şekil 4.3:**  $MSS'_{18}$

**İspat:**  $MSS'_{18}$  nün noktalarını  $\{p_0 = (1,1,0), p_1 = (0,0,2), p_2 = (-1,1,0), p_3 = (0,0,0), p_4 = (0,1,-1), p_5 = (0,1,1)\} \subset \mathbb{Z}^3$  olarak ifade edelim ve bu noktaları  $p_2 < p_3 < p_4 < p_5 < p_1 < p_0$  şeklinde sözlük sıralamasına göre sıralandığını kabul edelim.  $MSS'_{18}$  dijital görüntüsünde  $q > 3$  için

$$H_q^{18}(MSS'_{18}) = \{0\}$$

dır.  $C_0^{18}(MSS'_{18}), C_1^{18}(MSS'_{18}), C_2^{18}(MSS'_{18})$  bazları sırasıyla

$$0\text{-simpleksler } \langle p_0 \rangle, \langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle, \langle p_3 \rangle, \langle p_4 \rangle, \langle p_5 \rangle$$

$$1\text{-simpleksler } e_0 = \langle p_2 p_1 \rangle, e_1 = \langle p_2 p_3 \rangle, e_2 = \langle p_2 p_4 \rangle, e_3 = \langle p_2 p_5 \rangle, e_4 = \langle p_4 p_1 \rangle,$$

$$e_5 = \langle p_3 p_4 \rangle, e_6 = \langle p_4 p_0 \rangle, e_7 = \langle p_5 p_1 \rangle, e_8 = \langle p_3 p_5 \rangle, e_9 = \langle p_5 p_0 \rangle,$$

$$e_{10} = \langle p_1 p_0 \rangle, e_{11} = \langle p_3 p_0 \rangle$$

$$2\text{-simpleksler } \sigma_0 = \langle p_2 p_4 p_1 \rangle, \sigma_1 = \langle p_4 p_1 p_0 \rangle, \sigma_2 = \langle p_3 p_4 p_0 \rangle, \sigma_3 = \langle p_2 p_3 p_4 \rangle,$$

$$\sigma_4 = \langle p_2 p_5 p_1 \rangle, \sigma_5 = \langle p_2 p_3 p_5 \rangle, \sigma_6 = \langle p_5 p_1 p_0 \rangle, \sigma_7 = \langle p_3 p_5 p_0 \rangle$$

şeklinde olan serbest abel gruplardır. Böylece

$$0 \xrightarrow{\partial_3} C_2^{18}(MSS'_{18}) \xrightarrow{\partial_2} C_1^{18}(MSS'_{18}) \xrightarrow{\partial_1} C_0^{18}(MSS'_{18}) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

kısa dizisi elde edilir.  $Im\partial_3 = B_2^{18}(MSS'_{18}) = \{0\}$ ,  $Z_0^{18}(MSS'_{18}) = \mathbb{Z}^6$  dir. Ayrıca

$$\partial_1 = \begin{array}{c} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \\ e_9 \\ e_{10} \\ e_{11} \end{array} \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{\partial}_1 = \left[ \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

İndirgeme işlemi  $\tilde{\partial}_1$  uygulandığında, indirgenmiş matris elde edilir;

$$Z_1^{18}(MSS'_{18}) = Ker\tilde{\partial}_1 = \mathbb{Z}^7, B_0^{18}(MSS'_{18}) = Im\tilde{\partial}_1 = \mathbb{Z}^5$$

$$\partial_2 = \begin{matrix} & e_0 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} & e_{11} \\ \sigma_0 & \left[ \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sigma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \sigma_3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \sigma_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right. \end{matrix}$$

$$\tilde{\partial}_2 = \left[ \begin{array}{cccccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$Z_2^{18}(MSS'_{18}) = Ker \partial_2 = \mathbb{Z}, \quad B_1^{18}(MSS'_{18}) = Im \partial_2 = \mathbb{Z}^7$$

elde edilir. Böylece

$$H_2^{18}(MSS'_{18}) = \frac{Z_2^{18}(MSS'_{18})}{B_2^{18}(MSS'_{18})} = \frac{\mathbb{Z}}{0} = \mathbb{Z},$$

$$H_1^{18}(MSS'_{18}) = \frac{Z_1^{18}(MSS'_{18})}{B_1^{18}(MSS'_{18})} = \frac{\mathbb{Z}^7}{\mathbb{Z}^7} = 0$$

$$H_0^{18}(MSS'_{18}) = \frac{Z_0^{18}(MSS'_{18})}{B_0^{18}(MSS'_{18})} = \frac{\mathbb{Z}^6}{\mathbb{Z}^5} = \mathbb{Z}$$

dır.

**Örnek 4.40**  $MSS_{18}$  in dijital simpleksler homoloji grupları

$$H_q^{18}(MSS_{18}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ \mathbb{Z}^3, & q = 1 \\ 0, & q \neq 0,1 \end{cases}$$

dır. İndirgeme algoritması kullanarak bunu hesaplayalım.

**İspat:**  $MSS_{18}$  nün noktalarını

$$\{p_0 = (0,0,1), p_1 = (1,1,1), p_2 = (1,2,1), p_3 = (0,3,1), p_4 = (-1,2,1), p_5 = (-1,1,1), \\ p_6 = (0,1,0), p_7 = (0,2,0), p_8 = (0,2,2), p_9 = (0,1,2)\} \subset \mathbb{Z}^3$$

olarak ifade edelim ve bu noktaları  $p_5 < p_4 < p_0 < p_6 < p_9 < p_7 < p_8 < p_3 < p_1 < p_2$  şeklinde sözlük sıralamasına göre sıralandığını kabul edelim.  $MSS_{18}$  dijital görüntüsünde  $q > 3$  için  $H_q^{18}(MSS_{18}) = \{0\}$  dır.

$C_0^{18}(MSS_{18}), C_1^{18}(MSS_{18}), C_2^{18}(MSS_{18})$  bazları sırasıyla

0-simpleksler  $\langle p_0 \rangle, \langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle, \langle p_3 \rangle, \langle p_4 \rangle, \langle p_5 \rangle$

1-simpleksler  $e_0 = \langle p_0 p_1 \rangle, e_1 = \langle p_0 p_9 \rangle, e_2 = \langle p_5 p_0 \rangle, e_3 = \langle p_0 p_6 \rangle, e_4 = \langle p_9 p_8 \rangle,$

$$e_5 = \langle p_9 p_1 \rangle, e_6 = \langle p_5 p_9 \rangle, e_7 = \langle p_6 p_1 \rangle, e_8 = \langle p_1 p_2 \rangle, e_9 = \langle p_5 p_6 \rangle,$$

$$e_{10} = \langle p_6 p_7 \rangle, e_{11} = \langle p_3 p_4 \rangle, e_{12} = \langle p_8 p_2 \rangle, e_{13} = \langle p_4 p_8 \rangle, e_{14} = \langle p_8 p_3 \rangle,$$

$$e_{15} = \langle p_4 p_3 \rangle, e_{16} = \langle p_4 p_7 \rangle, e_{17} = \langle p_3 p_2 \rangle, e_{18} = \langle p_7 p_2 \rangle, e_{19} = \langle p_7 p_3 \rangle$$

2-simpleksler  $\sigma_0 = \langle p_0 p_9 p_1 \rangle, \sigma_1 = \langle p_0 p_6 p_1 \rangle, \sigma_2 = \langle p_5 p_0 p_6 \rangle, \sigma_3 = \langle p_5 p_0 p_9 \rangle,$

$$\sigma_4 = \langle p_4 p_8 p_3 \rangle, \sigma_5 = \langle p_4 p_7 p_3 \rangle, \sigma_6 = \langle p_8 p_3 p_2 \rangle, \sigma_7 = \langle p_7 p_3 p_2 \rangle$$

şeklinde olan serbest abel gruplardır. Böylece



$$\partial_2 = \left[ \begin{array}{cccccccc|cccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$Z_2^{18}(MSS_{18}) = Ker \partial_2 = 0, \quad B_1^{18}(MSS_{18}) = Im \partial_2 = \mathbb{Z}^8$$

elde edilir. Böylece

$$H_2^{18}(MSS_{18}) = \frac{Z_2^{18}(MSS_{18})}{B_2^{18}(MSS_{18})} = \frac{0}{0} = 0,$$

$$H_1^{18}(MSS_{18}) = \frac{Z_1^{18}(MSS_{18})}{B_1^{18}(MSS_{18})} = \frac{\mathbb{Z}^{11}}{\mathbb{Z}^8} = \mathbb{Z}^3$$

$$H_0^{18}(MSS_{18}) = \frac{Z_0^{18}(MSS_{18})}{B_0^{18}(MSS_{18})} = \frac{\mathbb{Z}^{10}}{\mathbb{Z}^9} = \mathbb{Z}$$

**Örnek 4.41**  $MSS'_6$  in dijital simpleksler homoloji grupları

$$H_q^6(MSS'_6) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ \mathbb{Z}^5, & q = 1 \\ 0, & q \neq 0, 1 \end{cases}$$

dır.

**İspat:**  $MSS'_6$  nün noktalarını  $\{p_0=(1,0,0), p_1=(1,1,0), p_2=(1,1,1), p_3=(1,0,1), p_4=(0,0,1), p_5=(0,1,1), p_6=(0,1,0), p_7=(0,0,0)\} \subset \mathbb{Z}^3$  olarak ifade edelim ve bu noktaları  $p_7 < p_4 < p_6 < p_5 < p_0 < p_3 < p_1 < p_2$  şeklinde sözlük sıralamasına göre sıralandığını kabul edelim.  $MSS'_6$  dijital görüntüsünde  $q > 3$  için  $H_q^6(MSS'_6) = \{0\}$  dir.  $C_0^6(MSS'_6), C_1^6(MSS'_6)$  bazları sırasıyla

0-simpleksler  $\langle p_0 \rangle, \langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle, \langle p_3 \rangle, \langle p_4 \rangle, \langle p_5 \rangle, \langle p_6 \rangle, \langle p_7 \rangle$

1-simpleksler  $e_0 = \langle p_0 p_1 \rangle, e_1 = \langle p_0 p_3 \rangle, e_2 = \langle p_1 p_2 \rangle, e_3 = \langle p_6 p_1 \rangle, e_4 = \langle p_5 p_2 \rangle,$

$e_5 = \langle p_3 p_2 \rangle, e_6 = \langle p_4 p_3 \rangle, e_7 = \langle p_7 p_4 \rangle, e_8 = \langle p_4 p_5 \rangle, e_9 = \langle p_6 p_5 \rangle,$

$e_{10} = \langle p_7 p_6 \rangle, e_{11} = \langle p_7 p_0 \rangle$

şeklinde olan serbest abel gruplardır. Böylece

$$0 \xrightarrow{\partial_2} C_1^6(MSS'_6) \xrightarrow{\partial_1} C_0^6(MSS'_6) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

kısa dizisi elde edilir.  $Im \partial_2 = B_1^6(MSS'_6) = \{0\}$ ,  $Z_0^{18}(MSS_{18}) = \mathbb{Z}^8$  dir.

İndirgeme işlemi  $\tilde{\partial}_1$  uygulandığında, indirgenmiş matris elde edilir;

$$\tilde{\partial}_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 \end{array} \\ \begin{array}{l} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \\ e_9 \\ e_{10} \\ e_{11} \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \tilde{\partial}_1 = \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



$$Z_1^6(MSS'_6) = \text{Ker}\partial_1 = \mathbb{Z}^5, \quad B_0^6(MSS'_6) = \text{Im}\partial_1 = \mathbb{Z}^7$$

elde edilir. Böylece

$$H_1^6(MSS'_6) = \frac{Z_1^6(MSS'_6)}{B_1^6(MSS'_6)} = \frac{\mathbb{Z}^5}{0} = \mathbb{Z}^5$$

$$H_0^6(MSS'_6) = \frac{Z_0^6(MSS'_6)}{B_0^6(MSS'_6)} = \frac{\mathbb{Z}^8}{\mathbb{Z}^7} = \mathbb{Z}$$

olduğu görülür.

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada cebirsel topolojideki bazı özelliklerin dijital topolojideki karşılıkları ifade edildi. İlk olarak dijital topolojinin temel kavramları verildi. Sonra dijital simpleksler homoloji grubu tanımlanarak, çeşitli dijital görüntülerin homoloji grupları belirlendi. Ayrıca Euler karakteristiği ve homoloji için çeşitli sonuçlara ulaşıldı. Daha sonra İndirgeme Algoritması tanımlanarak, iki ve üç boyutlu dijital homoloji gruplarının hesaplanması için algoritma önerilmiştir. Son olarak İndirgeme Algoritması kullanılarak bilinen bazı dijital görüntülerin homoloji gruplarının hesaplanması yapılmıştır.

## 6. KAYNAKLAR

Arslan, H., Karaca, I., Oztel., A. “A. Homology groups of n-dimensional digital images”, *XXI Turkish National Mathematics Symposium*, B1-13, Turkey, (2008).

Borsuk, K., *Theory of Retracts*, Polish Scientific Publishers, Warsaw, (1967).

Boxer, L., “Digitally Continuous Functions”, *Pattern Recognition Letters*, 15, 833-839, (1994).

Boxer, L., “A Classical Construction for the Digital Fundamental Group”, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 10, 51-62, (1999).

Boxer, L., “Properties of Figital Homotopy” *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 22, 19-26, (2005).

Boxer, L., Karaca, I., Oztel, A., “Topological Invariants in Digital Images”, *Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications*, 11(2), 109-140, (2011).

Han, S.E., “Connected Sum of Digital Closed Surfaces”, *Information Sciences*, 176, 332-348, (2006).

Khalimsky, E., “Motion, Deformation, and Homotopy in Finite Spaces”, *Proceedings IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, 227-234, (1987).

Munkres, J.R., *Elements of Algebraic Topology*, Perseus Books Publishing, 53-60 (1984).

Oztel, A., Akgül, B., Aksu, S. “A New Algorithm for Calculating Homology Groups of 2-D Digital Images”, *Applied Algebraic Topology*, P-20, Japan, (2017).

## 7. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Emine KÖSE  
Doğum Yeri ve Tarihi : İZMİR/26.11.1993  
Lisans Üniversite : Pamukkale Üniversitesi  
Elektronik posta : ekose22@gmail.com