T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

FİBONACCİ SAYILARI VE MANTIK DEVRELERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BURAK DEMİRCANLI

DENİZLİ, TEMMUZ - 2020

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

FİBONACCİ SAYILARI VE MANTIK DEVRELERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BURAK DEMİRCANLI

DENİZLİ, TEMMUZ - 2020

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

B. Demircanlı

BURAK DEMİRCANLI

ÖZET

FİBONACCİ SAYILARI VE MANTIK DEVRELERİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
BURAK DEMİRCANLI
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI:PROF.DR. MUSTAFA AŞCI)

DENİZLİ, TEMMUZ - 2020

Bu tez üç ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Fibonacci ve Lucas Sayılarının temel tanımları ve bu sayılar hakkında temel teoremler verilmiştir. Bu sayıların Binet formülleri ve üreteç fonksiyonları verilmiştir.

İkinci bölümün başında George Boole ve Boole Cebiri'nin tarihçesi verilmiştir. Önermeler Mantığı hakkında bilgi verilmiştir. Bağlaçlar ve bu bağlaçlara ait özellikler verilmiştir. Boole Cebiri tanımlanarak bu özellikler yardımıyla yeni bir cebirin ortaya çıktığı gösterilmiştir. Lojik Devrelerin bilimsel yorumu yapılmıştır. Tasarrufu yani minimum maliyet düşüncesini öne çıkaran ekonomik devre kavramı tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde Fibonacci Sayıları ve Lojik Devreler arasındaki ilişki verilmiştir. Boole Cebiri özelliklerinden yararlanarak Boole Fonksiyonları tanımlanmıştır. Boole Fonksiyonu türlerinin tanımları verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Fibonacci Sayıları, Önermeler Mantığı, Boole Cebiri, Boole Fonksiyonu, Mantık Devreleri

ABSTRACT

FIBONACCI NUMBERS AND LOGIC CIRCUITS
MSC THESIS
BURAK DEMİRCANLI
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATİCS

(SUPERVISOR:PROF.DR.MUSTAFA AŞCI)

DENİZLİ, JULY 2020

This thesis is composed of three main sections. In the first part, basic definitions of Fibonacci and Lucas Numbers and basic theorems about these numbers are given. Binet formulas and generating functions of these numbers are given.

At the beginning of the second chapter, the history of George Boole and Boolean Algebra is given. Information about the Propositional Logic is given. Conjunctions and their properties are given. Boolean Algebra is defined and a new algebra appears with the help of these features. Scientific interpretation of Logic Circuits has been made.The concept of economic circuit, which emphasizes saving, that is, the idea of minimum cost, has been introduced.

In the third chapter, the relationship between Fibonacci Numbers and Logic Circuits is given. Using Boolean Algebra features, Boolean Functions are defined. Definitions of Boolean Function types are given.

KEYWORDS: Fibonacci Numbers, Propositional Logic, Boolean Algebra, Boolean Function, Logic Circuits

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

TABLO LİSTESİ

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbf{F_n}$	:	n. Fibonacci Sayısı
$\mathbf{L_n}$	:	n. Lucas Sayısı
g(x)	:	Fibonacci Sayı Dizisinin Üreteç Fonksiyonu
h(x)	:	Lucas Sayı Dizisinin Üreteç Fonksiyonu
$\mathbf{a \mid b}$	:	a,b’yi böler
$\boldsymbol{\beta}$	:	Boole Cebiri
$\wedge$	:	ve
$\vee$	:	veya
$\veebar$	:	ya da
$\Rightarrow$	:	ise
$\Leftrightarrow$	:	ancak ve ancak
$\mid$	:	Bağdaşmazlık
$\Downarrow$	:	Birlikte Değilleme
$=$	:	Eşittir
$\neq$	:	Eşit değildir
$\equiv$	:	Denktir
$\not\equiv$	:	Denk Değildir
$\in$	:	Elemanıdır
$\sim$	:	Önermenin değili
$\otimes$	:	İkili işlem
$\oplus$	:	Birleşmişi ayırma
$\cap$	:	Kesişim
$\cup$	:	Birleşim

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın her aşamasında değerli bilgilerini benimle paylaşan, güler yüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen, gelecekteki meslek hayatımda da bana verdiği değerli bilgilerden faydalanacağım saygıdeğer danışman hocam Sayın Prof.Dr. Mustafa AŞCI'ya en içten teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her alanında olduğu gibi, tez çalışmamı hazırlarken de her aşamasında bana yardımcı olan, varlığını bilmenin bile beni ayakta tuttuğu sevgili eşim Ceren DEMİRCANLI'ya sonsuz teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini benden hiç esirgemeyen, bu günlere gelmemde en büyük pay sahipleri olan annem Sergül DEMİRCANLI'ya; babam Güngör DEMİRCANLI'ya ve abim Erdem DEMİRCANLI'ya teşekkürü bir borç bilirim.

Burak DEMİRCANLI

1. GİRİŞ

1170 yılında İtalya'nın Pisa kentinde doğan ve ortaçağın en büyük matematikçilerinden biri olarak gösterilen Leonardo Fibonacci, babasının işi sebebiyle birçok Arap ve Doğu şehrini gezme fırsatı bularak oralarda kullanılan Arap ve Hint sayı sistemlerini inceleme fırsatı bulmuştur. Bu sayı sistemlerinin İtalya'da kullanılan Roma rakamlarından daha kolay olduğunu görmüştür. Bu elde ettiği birikimlerden yararlanarak 1201 yılında "LİBER ABACCİ" isimli bir cebir kitabı yayınlamıştır. Bu kitapla bugün kullanılan sayı sisteminin tanıtımını yapmıştır. Ayrıca bu kitabında Fibonacci sayı dizisinin temelini oluşturan bir çift tavşanın doğum yaparak neslini artırmasını ele alan ünlü tavşan problemini de anlatıyor. Fibonacci problemi şu şekilde araştırıyor:

Bir çift (1 erkek 1 dişi) tavşanın bulunduğu bir çiftlikte tavşan çifti ilk iki ay doğum yapamazlar. Üçüncü aydan sonra her çift her ay bir çift yavru yapar. Çiftlikte bir çift tavşanla başladıktan kaç ay sonra kaç çift tavşan olur?

Tavşan çiftleriyle ilgili varsayımlar;

- ✓ İlk ay sadece bir yeni doğmuş çift var.
- ✓ Yeni doğan çiftler ikinci ayın sonunda yavrulamaya başlıyor.
- ✓ Her çift yavrulamaya başladığı aydan itibaren her ay 1 erkek 1 dişi olan bir çift yavru doğuruyor.
- ✓ Hiçbir tavşan asla ölmüyor.

1.Ay : 1 çift tavşanımız var.

2.Ay : Yeni yavrulama olmadığı için yine 1 çift tavşanımız var.

3.Ay : 2 çift tavşan (1.ve 2.ay toplamı)

4.Ay : 3 çift tavşan (2.ve 3.ay toplamı)

5.Ay : 5 çift tavşan (3.ve 4.ay toplamı)

6.Ay : 8 çift tavşan (4.ve 5.ay toplamı)

Örüntü bu şekilde devam ederek bize her ay için elde ettiğimiz tavşan çiftlerinin sayısını verir.

0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,…... dizisi **Fibonacci Dizisi**, bu sayılar da **Fibonacci Sayıları** olarak adlandırılır. Bu dizinin özelliği, dizinin her terimine bir önceki terim eklendiğinde bir sonraki terimin elde edilmesidir.

Dizi içinde bulunan bir sayıyı kendisinden önce gelen sayıya bölersek ulaşacağımız sonuç 1,618… sayısına sürekli yakınlaşacak şekilde oluşacaktır. Fibonacci dizisinde bulunan ardışık iki sayının oranı sayılar arttıkça **Altın Oran'a (1,618…)** yaklaşır. Altın oran mimaride, sanatta, resimde, müzik notalarında, doğada ve daha birçok alanda bulunmaktadır.

Fibonacci dizisine benzer şekilde Fransız matematikçi Eduard Lucas (1842-1891) da Lucas sayı dizisi tanımlamıştır. Lucas sayı dizisi ile Fibonacci sayı dizisi arasındaki bağlantı yapılan çalışmalarla ortaya çıkmıştır.

Bu bölümde Fibonacci ve Lucas Sayıları dizisi tanımlanmıştır.

1.1 Fibonacci ve Lucas Sayıları

Tanım 1.1.1 : Fibonacci sayıları dizisi $\{F_n\}$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $n \geq 0$ olmak üzere;

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

indirgeme bağıntısıyla tanımlıdır. Fibonacci sayıları 0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,…dir (Koshy, 2001).

Tanım 1.1.2 : Lucas sayıları dizisi $\{L_n\}$, $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $n \geq 0$ olmak üzere;

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$$

indirgeme bağıntısıyla tanımlıdır. Lucas sayıları 2,1,3,4,7,11,18,29,47,76,123,…dir(Koshy, 2001).

Teorem 1.1.1 (Binet Formülü) : $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ indirgeme bağıntısının karakteristik denklemi $x^2 - x - 1 = 0$ ve çözüm kümesi

$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **Altın Oran**

$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ **Gümüş Oran**

ve n.Fibonacci sayısı ve Lucas sayısının Binet Formülleri

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

eşitlikleriyle elde edilir(Koshy, 2001).

Tanım 1.1.3 : a_0, a_1, a_2,... bir reel sayı dizisi olsun.

$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ ... ifadesine $\{a_n\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu denir.

Teorem 1.1.2 :

(i) Fibonacci sayı dizisinin üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

(ii) Lucas sayı dizisinin üreteç fonksiyonu

$$h(x) = \frac{2x}{1 - x - x^2}$$

Teorem 1.1.3 :

$n \geq 1$ için,

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots F_n = F_{n+2} - 1 \qquad \text{(Koshy, 2001)}$$

Teorem 1.1.4 :

$n \geq 1$ olmak üzere Fibonacci dizisi için

$$(F_n , F_{n+1}) = 1 \qquad \text{(Koshy, 2001)}$$

İspat : d >1 sayısı F_n ve F_{n+1} i böldüğünü kabul edelim. O halde onların farkı olan $F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$ sayısı da d tarafından bölünür. Buradan ve $F_n - F_{n-1} = F_{n-2}$ bağıntısından $d \mid F_{n-2}$ elde edilir. Benzer şekilde devam edilerek $d \mid F_{n-3}$, $d \mid F_{n-4}$ … ve sonunda $d \mid F_1$ olduğu görülür. Fakat $F_1 = 1$ olduğundan herhangi bir d >1 sayısı tarafından bölünemez. Böylece çelişki edilerek ispat tamamlanır.■

Teorem 1.1.5 :

$n \geq 1$ için Fibonacci ve Lucas sayıları arasında

$$L_{n-1} + L_{n+1} = 5\,F_n$$

bağıntısı vardır(Koshy, 2001).

2. BOOLE CEBİRİ

Bu bölümde Yavuz Aksoy’un “Boole Cebiri ve Lojik Devre Sentezi” kitabından yararlanarak Önermeler Mantığı ve Boole Cebiri arasındaki ilişki incelenmiştir. Önermeler Mantığı ve Boole Cebiri’nin en önemli uygulamalarından olan Lojik Devreler tanımlanmıştır.

2.1 Tarihçe ve George Boole

İrlanda'nın yetiştirdiği en ünlü matematikçilerden William Rowan HAMILTON (1805-1865) ile yumuşak karakterli insan ilişkileriyle tanınan, sevilen, sayılan ve Modern Mantığın ortaya çıkmasında öncülerden olan De MORGAN (1806-1871) arasında yaşanan çekişme yepyeni bir mantığın doğmasına neden olmuştur.

Hamilton, De Morgan hakkında iftirada bulunarak aralarında önemli bir tartışma başlamıştır. Hamilton, De Morgan'ı kopyacılıkla suçlamıştır. De Morgan tartışmayı büyütmemek için alçakgönüllü davranmış olsa da Hamilton aksine olayı körüklüyordu.

Bu tartışmayı izleyen George Boole tam bu sıralarda bir lisede matematik öğretmenidir. De Morgan'ın haklı olduğunu görmektedir ve O'nun alttan alışını da kabul etmemektedir. Konuya oldukça hakimdir ve artık bu olayın hakemliğine soyunma zamanı gelmiştir. Bu düşüncelerle, karşı fikri oluşturmak üzere ciddi olarak çalışmalara başlar. The Mathematical Analysis Of Logic (Mantığın Matematiksel Analizi) adını verdiği kitabını bir yıl sonra tamamlar ve yayımlar. Böylece Boole hakemlik görevini tamamlar ve De Morgan'ın haklılığını kanıtlar. Bu yaşananlar sanki kişiler arasında sıkışmış gibi görülmesine karşın, yepyeni bir mantığın ortaya çıkmasına ve adeta bir devrim yaşanmasına neden olmuştur. Bu Modern Mantığın kuruluş çalışması ve aşamasıdır. (Aksoy, 2015)

Boole Cebiri, İngiliz matematikçi George Boole tarafından 1850 yıllarında Aristoteles'in mantık bilimine sembolik şekil verme isteği sonucunda ortaya çıkmıştır. Aristoteles mantığında "her insan ölümlüdür", "Aristoteles bir insandır" öyleyse "Aristoteles ölümlüdür" gibi akıl yürütmeler; cümleler daha karmaşık hale geldiğinde sonuç çıkarmak daha zor olur. Fakat Boole cebiri zor cümleleri basit cebirsel ifadeler şeklinde yazıp toplama, çıkarma ve çarpma gibi işlemler uygulayarak sadeleştiren bir sistemdir. "Her insan ölümlüdür" cümlesine Boole cebirinde "ölümlüler" ve "insanlar" kümeleri olarak bakılır. İnsanlar kümesinin ölümlüler kümesinin bir alt kümesi olduğunu söylemek için, insanlar kümesini temsil eden bir harf ile ölümlüler kümesini temsil eden bir harf çarpılır ve bu çarpım sonucunun insanları temsil eden harfe eşit olduğu yazılır. Böylece basit bir denklem kurulmuş olur. (Sertöz, 2015)

Boole'un dönemine gelene kadar cebirsel ifadelerdeki harfler sadece sayıları ve geometrik kavramları temsil ediyordu. İlk defa Boole'un sistematiğiyle matematikçiler küme şeklinde ifade edilebilecek her kavramı harflerle temsil etmeye ve bunlar üzerinde cebirsel işlemler yapmaya başladı.

George Boole "Mantığın Matematiksel Analizi" adlı kitabındaki fikirleri geliştirerek 1854 yılında "Düşüncenin Kurallarının Araştırılması" adlı bir kitap yazar. Bu kitapta "VE", "VEYA", "DEĞİL" gibi kavramlarla kurulan ifadelerin doğruluğunu ve yanlışlığını belirlemeye yarayacak bir cebir geliştirir. İşte bilgisayar çağını başlatan ve bugün Boole Cebiri dediğimiz çalışma budur.

1947 yılında William Shockley, Walter Brattain ve John Barden transistörü buldu. Artık basit bir enerji ile büyük enerjilere ulaşma imkanı vardı ve oldukça kolay ve ucuz bir şekilde elde edilebiliyordu. Bu buluşları onlara birer Nobel Fizik Ödülü kazandırdı.

Teknolojinin hızı gözle görülür bir biçimde değişerek enerjinin yönlendirilebilmesi ve kontrolü nedeniyle elektronik dünyasında yeni bir devir başladı. Önce masaüstü bilgisayarlar sonra diz üstü bilgisayarlar derken, Steve Jobs dünyaya akıllı telefonlar satmaya başladı. Bütün bunlar George Boole'un yazdığı "Mantığın Matematiksel Analizi" adlı bir kitapla başladı. Kuramsal olarak Boole Cebiri gerekli olan matematiği verdi ve teknoloji de bu mantığa dayalı dijital sistem üzerine oturan teknolojiyi sürdürerek geliştirdi. Bunun sonuçları ve ürünleri çok kısa sürede ortaya çıkarak çok duyarlı ve ömürlü aletler ve cihazlar üretilebilmiştir. Bu üretim için gerekli alt yapıyı bilim ve felsefe düzeyinde Boole Cebiri sağlamıştır.

Boole Cebiri'nin temel taşı ikili (dual) yapıdır. Her kuram ve her yaklaşım bu sistem üzerine oturtulmuştur. Matematiksel bazı kurallar olabilecek iki değerle sınırlanarak (1 ve 0 - doğru ya da yanlış) yeniden kodlandı.

2.2 Önermeler Mantığı

2.2.1 Önerme ve Önermesel

Tanım 2.2.1.1 : Bir iddia içeren ve sadece doğru ya da yanlış olarak değerlendirilebilen cümlelere önerme denir. Eğer bu iddianın doğru ya da yanlış olarak değerlendirileceği kesin olmakla birlikte, başlangıçta buna karar verilemiyorsa bu cümleler önermesel adını alır. Önerme veya önermeseller p, q, r gibi harflerle gösterilirler.

Örnek 2.2.1.1 :

p : İstanbul, Türkiye'nin başkentidir.

q : $5>3$

r : Ceren öğretmendir.

s : Kitap okumayı çok seviyorum.

t : Beni seviyor musun?

Bu verilenlerden p , q ile gösterilenlerin birer önerme olduğu görülmektedir. p , Yanlış ; q , Doğru olan birer önermedir. Ancak r ile gösterilen önerme, bir iddia olmakla birlikte, Ceren'in kim olduğu tanımlanmadığından, bu iddianın doğru ya da yanlış olarak değerlendirilmesi Ceren tanındıktan sonra kesinleşecektir. Ama yine de doğru ya da yanlış olacağı bilinmektedir. İşte bu nedenle r bir önerme değil bir önermeseldir.

Önermeler mantığının esas amacı önermeselleri incelemek olduğu için, genelde önerme deyimi, bu açıklamalar ışığında önermeselleri de kapsayacaktır. Yani önerme denilince, önermeselleri de birlikte düşündüğümüz anlaşılacaktır. Yukarıda verilen örnekler için ; p = D , q = Y yazılacaktır. r nin değerlendirilmesi ise daha farklı olur. r için durum tablosu adı verilen değerlendirme yöntemini kullanacağız.

Tablo 2.1: r'nin doğruluk durum tablosu.

r
D
Y

s ile gösterilen ifadede ise bir istek belirtilmiş, bir iddia ortaya konulmamıştır. t ile bir soru yöneltilmiş yine bir iddia oluşmamıştır. Öyleyse bu ifadeler, bir iddia içermedikleri için bir doğruluk değeri de olmayacaktır. Yani bunlar bir önerme değildir. (Aksoy, 2015)

Tanım 2.2.1.2 : p önermesinin değili denilince, p önermesi D değerinde olunca Y değerini alan, Y değerinde olunca D değerinde olan bir önerme anlaşılır ki buna p önermesinin değili denir. Modern mantıkta ~*p* olarak kullanılmakla birlikte, Boole Cebiri konusu işlenirken *p'* gösterimin kullanılması daha uygun olmaktadır.

Tablo 2.2: Önermenin değili.

p	**~p**
D	Y
Y	D

2.2.2 Bağlaçlar

Bağlaçlar bileşik önermelerin oluşmasında önermeleri birbirine bağlayarak, onlara mantıksal boyut ve anlam kazandırırlar. Modern mantığın temeli olan bağlaçlar “Ve” ile “Veya” dır. Bunların dışında “Ya da” , “Gerektirme” , “Çift Gerektirme”, “Bağdaşmazlık” ve “Birlikte Değilleme” bağlaçlarının varlığından söz edilebilir. Bu bağlaçları tek tek inceleyelim. (Aksoy, 2015)

2.2.2.1 Ve Bağlacı

p ile q önermelerinin VE ' li bileşimi $\wedge$ sembolü kullanılarak p $\wedge$ q şeklinde gösterilir ve “p ve q” diye okunur. VE bağlacı tanımlanırken " Sadece her iki önerme de doğru ise VE ' li bileşim doğru ; diğer durumlarda yanlıştır. " şeklinde bir genelleme yapılabilir. (Aksoy, 2015)

Tablo 2.3: “ve” Bağlacı.

p	**q**	**p ∧ q**
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	Y

2.2.2.2 Veya Bağlacı

p ile q önermelerinin VEYA ' lı bileşimi $\vee$ sembolü kullanılarak p $\vee$ q şeklinde gösterilir ve “p veya q” diye okunur. Aşağıdaki tablo yardımıyla VEYA bağlacı için " Sadece her iki önerme de yanlış ise VEYA ' lı bileşim yanlış; diğer durumlarda doğrudur." şeklinde bir genelleme yapabiliriz. (Aksoy, 2015)

Tablo 2.4: “veya” Bağlacı.

p	**q**	**p ∨ q**
D	D	D
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y

2.2.2.3 Ya Da Bağlacı

p ile q önermelerinin YA DA ' lı bileşimi $\veebar$ sembolü kullanılarak p $\veebar$ q ile gösterilir ve "p ya da q" diye okunur. VEYA tablosundan farkı, birinci durumdan kaynaklanmaktadır. Bu tablo VEYA' nın tanım tablosuyla karşılaştırılırsa, ilk durum dışında birbirinin aynı olduğu görülecektir. İşte birbirine uymayan bu ilk durum nedeniyle farklı bir bağlaç olarak incelenmektedir. (Aksoy, 2015)

Tablo 2.5: "ya da" Bağlacı.

p	**q**	**p $\veebar$ q**
D	D	Y
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y

Örnek 2.2.2.3.1 : "Okul müdür yardımcısı, sınıf başkanı ya da sınıf başkan yardımcısını odasına çağırdı." ifadesindeki olası durumları değerlendirelim.

- ✓ 1.durum: Sınıf başkanının gitmesi başkan yardımcısının gitmemesi doğru bir ifade belirtir.
- ✓ 2.durum: Sınıf başkan yardımcısının gitmesi başkanın gitmemesi doğru bir ifade belirtir.
- ✓ 3.durum: Hem başkan hem başkan yardımcısının gitmesi yanlış bir ifade belirtir.
- ✓ 4.durum: Her ikisinin de gitmemesi yanlış bir ifade belirtir.

Buradan çıkarılan sonuç, yalnız birinin gitmesi durumunda ifade doğru olur.

2.2.2.4 Gerektirme (İse Bağlacı)

p ile q önermelerinin koşullu bileşimi ⇒ sembolü kullanılarak p ⇒ q şeklinde gösterilir ve " p gerektirir q " diye okunur. Bu ifade, p ise q şeklinde de okunabilmektedir.

Tablo 2.6: “ise” Bağlacı.

p	**q**	**p ⇒ q**
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	Y	D

Bu tanım tablosu bir kabul sonucu elde edilmiştir. Doğruluğu sezgisel olarak bulunan ikinci durum dışında diğer durumları bu şekilde değerlendirebiliriz. Bu nedenle gerektirme, diğerlerine göre daha farklı özellikleri olan bir bağlaçtır.

$p \Rightarrow q$ standart biçimi aynı zamanda bir teoremin mantıksal modelini oluşturur. Bu karşıtı doğru olmayan bir teoremdir. Burada p hipotez , q ise hüküm adını alır. Göreceğiz ki $p \Rightarrow q \neq q \Rightarrow p$ dir. Burada p , q için yeter koşul, q ise p için gerek koşul olmaktadır.

$p \Rightarrow q$ var olduğu için, ayrıca aşağıdaki bileşim şekilleri de tanımlanmıştır:

- **Karşıt Önerme :** $q \Rightarrow p$ şeklinde oluşan önermedir
- **Ters Önerme :** $\sim p \Rightarrow \sim q$ şeklinde oluşan önermedir
- **Karşıt-Ters Önerme :** $\sim q \Rightarrow \sim p$ şeklinde oluşan önermedir. Özellikle bu önerme için:

  $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$ yazılabilir. (Aksoy, 2015)

2.2.2.5 Çift Gerektirme (Ancak ve Ancak Bağlacı)

p ile q önermelerinin karşılıklı koşullu bileşimi ⇔ sembolü kullanılarak $p \Leftrightarrow q$ şeklinde gösterilir ve “p çift gerektirir q” diye okunur. (Aksoy, 2015)

Tablo 2.7: "ancak ve ancak" Bağlacı.

p	**q**	**p ⇔ q**
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	D

2.2.2.6 Bağdaşmazlık

p ile q önermelerinin bağdaşmaz oluşları ⎮ sembolü kullanılarak p ⎮ q yazılarak gösterilir ve "p ile q bağdaşmazdır" diye okunur. Bağdaşmazlık iki doğruluk değerinin D olması halinde gerçekleşir. (Aksoy, 2015)

Tablo 2.8: Bağdaşmazlık.

p	**q**	**p ⎮ q**
D	D	Y
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	D

2.2.2.7 Birlikte Değilleme

p ile q önermelerinin birlikte değillenmesi ⇓ sembolü kullanılarak p ⇓ q şeklinde gösterilir ve "p birlikte değillenmiştir q" diye okunur. Sadece her iki doğruluk değeri de yanlış ise doğru, diğer durumlarda yanlıştır. (Aksoy, 2015)

Tablo 2.9: Birlikte Değilleme.

p	**q**	**p ⇓ q**
D	D	Y
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	D

2.2.2.8 Bağlaçlara Ait Özellikler

De Morgan Özelliği:

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

Diğer bir adıyla "değilleme yasası" olarak kabul edilir. De Morgan özelliğiyle $\wedge$ ile $\vee$ bağlaçları arasında daha kolay ilişki kurulabilir.

Bağlaçların Temel Bağlaçlar Cinsinden İfadeleri:

Burada temel bağlaçlar ile belirtilen bağlaçlar VE ile VEYA'dır. Çünkü bu iki bağlacın, dual sistem içinde özel bir yerleri olduğu gibi bu iki bağlaç yardımıyla diğer tüm bağlaçları ifade etmek mümkündür. (Aksoy, 2015)

$$p \veebar q \equiv (p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$$

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$$

$$p \mid q \equiv p \Rightarrow \sim q \equiv \sim p \vee \sim q \equiv \sim (p \wedge q) \text{ (De Morgan)}$$

$$p \Downarrow q \equiv \sim p \wedge \sim q \equiv \sim (p \vee q) \text{ (De Morgan)}$$

Değişme Özelliği:

$\Rightarrow$ bağlacı dışında kalan diğer bağlaçlarda değişme özelliği vardır.

$$p \wedge q \equiv q \wedge p \qquad p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \veebar q \equiv q \veebar p \qquad p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p$$

$$p \Rightarrow q \not\equiv q \Rightarrow p$$

Birleşme Özelliği:

$\Rightarrow$ bağlacı dışında kalan diğer bağlaçlarda birleşme özelliği vardır.

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge q \wedge r$$

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \equiv p \vee q \vee r$$

$$p \veebar (q \veebar r) \equiv (p \veebar q) \veebar r \equiv p \veebar q \veebar r$$

$$p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r) \equiv (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r \equiv p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow r$$

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \not\equiv (p \Rightarrow q) \Rightarrow r$$

Dağılma Özelliği:

Bu özellik sadece ve ile veya bağlaçları arasında bulunur. Bunlardan birincisine ve'nin veya üzerine dağılımı; ikincisine ise veya'nın ve üzerine dağılımı denilir.

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Dağılma özelliğinin daha özel bir durumuna Soğurma Özelliği denir ve aşağıdaki denkliklerle ifade edilir. Bu denkliklerde p ye soğuran, q ya da soğurulan denir.

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p \qquad\qquad p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

Denk Güçlülük Özelliği:

Bağlaçlardan ve ile veya bağlaçlarının denk güçlülük özelliği vardır.

$$p \wedge p \equiv p \qquad\qquad p \vee p \equiv p$$

2.3 Boole Cebiri

Boole Cebiri’nin temel olarak kullandığı mantık, tamamen önermeler mantığı ve kümeler kuramı ile özdeşleşmiştir. Dual Sistemin mantıktaki karşılığı, cebirsel yapı olarak tam anlamıyla Boole Cebiri'nde görülmektedir. Boole Cebiri için gerekli olan sayı sistemi rakamları 0 ve 1’den ibaret iki tabanlı sayı sistemidir. 0 ve 1 rakamlarının tekrarlı varyasyonlarıyla elde edilen sayılar, Binary Sayı Sistemi olarak da adlandırılan bu sistemin sayılarını oluştururlar. (Aksoy, 2015)

Tanım 2.3.1: Yalnızca iki değer alabilen uygun bir nicelik basit boolien nicelik olarak adlandırılır. Basit boolien nicelik 0 ve 1 değerlerini alacaktır.

0 ve 1, ß ile göstereceğimiz Boole Cebiri'nin de rakamları olacaktır.

Basit boolien nicelikler sabitler ile değişkenlerin alabileceği değerler olup, ß sınıfı içinde, sabitler a, b, c gibi alfabenin ilk harfleri ile, değişkenler ise x, y, z gibi alfabenin son harfleri ile gösterilecektir.

Kümeler teorisinde iki temel işlem, kesişim ve bileşim' dir. Buna benzer olarak, Boole Cebiri’nin tanımına geçmeden önce, ikili işlem (dualite) diye adlandırılan ve incelenmesi gerekli olan kavramları inceleyelim. $\otimes$ sembolü ile herhangi bir ikili işlem gösterilecektir. Bunun özel iki durumu toplama ve çarpma olabilir. Toplama ve çarpma, alışılmış semboller kullanılarak, sırasıyla + ve . ile gösterilecektir. (Aksoy, 2015)

Tanım 2.3.2: M kümesi üzerinde $\otimes$ ikili işlemi : (a,b) elemanının $c = a \otimes b$ olacak şekilde M kümesinin bir c elemanını belirtmesidir. (Aksoy, 2015)

Tanım 2.3.3: M kümesi üzerinde tanımlanan $\otimes$ ikili işlemi ve her $a,b,c \in M$ için,

$$a \otimes [b \otimes c] = [a \otimes b] \otimes c$$

Buna birleşme özelliği denir. Burada $\otimes$ ikili işlemi, toplama ve çarpma için değiştirilirse:

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad\qquad a \,.\, (b \,.\, c) = (a \,.\, b) \,.\, c$$

Tanım 2.3.4: M kümesi üzerinde tanımlanan $\otimes$ ikili işlemi, her $a,b \in M$ için,

$$a \otimes b = b \otimes a$$

özelliğini sağlıyorsa M üzerinde değişme özelliği vardır denir. Burada $\otimes$ ikili işlemi, toplama ve çarpma için değiştirilirse:

$$a + b = b + a \qquad\qquad a \,.\, b = b \,.\, a$$

Tanım 2.3.5: $\otimes$ ve $\oplus$, M kümesi üzerinde tanımlı iki farklı ikili işlem ise, her $a,b,c \in M$ için,

$$a \otimes [b \oplus c] = [a \otimes b] \oplus [a \otimes c]$$

sağlanıyorsa, $\otimes$ işlemi $\oplus$ işlemi üzerine dağılmalıdır denir. Bu özellik dağılma özelliği olarak adlandırılır.

Dağılma özelliğinin toplam ve çarpım işlemleri için özel durumları incelenirse:

Çarpımın toplam üzerine dağılımı: $a \,.\, (b + c) = (a \,.\, b) + (a \,.\, c)$

Toplamın çarpım üzerine dağılımı: $a + (b \,.\, c) = (a + b) \,.\, (a + c)$

Toplamın çarpım üzerine dağılımı, diğer cebirlerde olmayan bir özellik olarak görülmektedir. Bu özelliğin Boole Cebiri'ne özgü bir yapısı vardır. (Aksoy, 2015)

Tanım 2.3.6: M kümesinde tanımlı ikili işleme göre, her $a \in M$ için,

$$a \otimes e = e \otimes a = a$$

özelliğini sağlayan bir e elemanı varsa buna birim eleman denir. Toplama işlemi için birim eleman 0; çarpma işlemi için birim eleman 1'dir. Bunu,

$$a + 0 = a \qquad\qquad a \,.\, 1 = a$$

yazarak gösteririz. Böylece toplama işlemi için e = 0; çarpma işlemi için e = 1 olur. (Aksoy, 2015)

Tanım 2.3.7: Boole Cebiri'nin çeşitli tanımları arasından seçilen ve 1904 yılında Huntington tarafından yapılan aksiyomatik tanımı şu şekildedir:

Bir ß sınıfı, + ve . ikili işlemlerine göre, aşağıdaki postulatları sağlıyorsa, ß ye Boole Cebiri denir.

<u>Postulat 1. (P1) :</u> + ve . değişmelidir.

<u>Postulat 2. (P2) :</u> ß sınıfında farklı iki birim eleman vardır. Bunlar toplamaya göre 0, çarpmaya göre 1 dir.

<u>Postulat 3. (P3) :</u> Bu işlemlerden biri diğeri üzerine dağılımlıdır.

<u>Postulat 4. (P4) :</u> ß sınıfının her a elemanı için, yine ß sınıfında olan öyle bir a' elemanı vardır ki

$$a + a' = 1 \quad \text{ve} \quad a \,.\, a' = 0 \quad \text{olur.}$$

Bu ikili işlemleri sadece + ve . ile gösterme zorunluluğu yoktur. Bunların yerine yine aynı işlemleri belirtecek herhangi iki sembolün kullanılması da mümkündür. Bir küme $\otimes$ ve $\oplus$ işlemlerine veya $\cap$ ve $\cup$ işlemlerine göre benzer postulatları sağlarsa da Boole Cebiri tanımlanmış olur.

Bu açıklama ve tanımdan çıkarılabilecek ilk sonuç, kümeler cebirinin bu postulatları sağlayan bir Boole Cebiri olduğudur. İşte bu özelliği nedeniyledir ki kümeler cebiri, Boole Cebiri ile tam bir uyum içinde bulunmaktadır. (Aksoy, 2015)

2.3.1 Boole Cebiri'nde İşlemler

Bu bölümde Boole Cebiri'nde çeşitli işlemler tanımlanıp özelliklerinden söz edilerek, modern mantıktaki karşılıkları görülecektir.

<u>Bütünleyici:</u> Bir basit boolien nicelik x olsun. Bunun bütünleri ya da bütünleyicisi olarak adlandırılan eleman x' ile gösterilir ; (P4) postulatında a ile gösterilen basit boolien nicelik için ifade edilen tanımdan,

$$x + x' = 1 \quad \text{ve} \quad x \, . \, x' = 0$$

Bütünler kavramı, modern mantığın değilleme kavramıyla kıyaslanabilir. Modern mantığın ikili işlemleri olarak tanımlanan $\wedge$ ile $\vee$ işlemleri arasında şu ilişki vardır:

$$p \vee \sim p \equiv D \qquad p \wedge \sim p \equiv Y$$

Modern Mantık ile Boole Cebiri'nin birebir kesiştiği bu özellikte görülmektedir.

Toplama İşlemi: Her x,y ∈ ß için x ve y boolien niceliklerinin toplamı x + y ile gösterilir ve aşağıdaki tablo ile tanımlanır:

Tablo 2.10: Toplama işlemi.

x	**y**	**x+y**
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Bu tablonun, modern mantıkta "veya" bağlacı için düzenlenen tabloyla tamamen aynı olduğu söylenebilir. Buradaki x ve y boolien niceliklerini p ve q önermeleri olarak görür, 1 yerine D, 0 yerine de Y olduğu düşünülürse, bu tablodan $\vee$ bağlacının tanım tablosu ortaya çıkar. (Aksoy, 2015)

Çarpma İşlemi: Her x,y ∈ ß için x ve y boolien niceliklerinin çarpımı x.y veya xy ile gösterilir ve aşağıdaki tablo ile tanımlanır:

Tablo 2.11: Çarpma işlemi.

x	**y**	**x.y**
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Bu tablonun, modern mantıkta "ve" bağlacı için düzenlenen tabloyla tamamen aynı olduğu söylenebilir. Buradaki x ve y boolien niceliklerini p ve q önermeleri olarak görür, 1 yerine D, 0 yerine de Y olduğu düşünülürse, bu tablodan $\wedge$ bağlacının tanım tablosu ortaya çıkar. (Aksoy, 2015)

De Morgan Formülleri: x ve y boolien nicelikler ve bunların bütünleyenleri x ' ve y ' olduklarına göre,

$$(x + y)' = x'.y'$$

$$(x.y)' = x' + y'$$

ifadelerine De Morgan Formülleri denir.

x ile y ye karşılık p ve q önermeleri, x ' ile y ' ye karşılık ~p ile ~q, ayrıca ikili işlemlerin karşılığı olarak + ya karşı $\vee$, . ya karşılık $\wedge$ bağlaçları kullanılırsa

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

denklikleri bulunur ve bunlar Modern Mantık'ta görmüş olduğumuz De Morgan denklikleridir. (Aksoy, 2015)

Birleşmişi Ayırma İşlemi: x ile y birer boolien nicelik olmak üzere, bunlar arasında $\oplus$ sembolüyle bir işlem tanımlayarak x $\oplus$ y işlemine, birleşmişi ayırma işlemi denir ve bu işlem aşağıdaki tablo ile tanımlanır:

Tablo 2.12: Birleşmişi ayırma işlemi.

x	**y**	**x⊕y**
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Bu işlem, Modern Mantık'taki "ya da" bağlacının karşılığıdır. (Aksoy, 2015)

2.3.2 Mantık ve Boole Cebiri Arasındaki Benzerlikler

Tablo 2.13: Mantık ve Boole Cebiri Arasındaki Benzerlikler.(Aksoy, 2015)

Mantıkta	Boole Cebirinde
D	1
Y	0
p, q, r , ...	x, y, z , ...
P, Q, R , …	X, Y, Z , ...
~ p	x '
$\vee$	+
$\wedge$	.
$\veebar$	$\oplus$
$p \vee q$	x + y
$p \wedge q$	x.y
$p \veebar q$	$x \oplus y$
$D \vee D \equiv D$	1 + 1 = 1
$D \vee Y \equiv D$	1 + 0 = 1
$Y \vee D \equiv D$	0 + 1 = 1
$Y \vee Y \equiv Y$	0 + 0 = 0
$D \wedge D \equiv D$	1.1 = 1
$D \wedge Y \equiv Y$	1.0 = 0
$Y \wedge D \equiv Y$	0.1 = 0
$Y \wedge Y \equiv Y$	0.0 = 0
$\sim D \equiv Y$	1 ' = 0
$\sim Y \equiv D$	0 ' = 1
$p \vee \sim p \equiv D$	x + x ' = 1
$p \wedge \sim p \equiv Y$	x.x ' = 0
$p \vee p \equiv p$	x + x = x
$p \wedge p \equiv p$	x.x = x
$\sim (\sim p) \equiv p$	(x ') '= x
$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$	(x + y) ' = x ' .y '
$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$	(x .y) ' = x ' + y '

p ∨ q ≡ q ∨ p	x + y = y + x
p ∧ q ≡ q ∧ p	x .y = y .x
p∨(q∨r) ≡(p∨q)∨r ≡ p ∨ q ∨ r	x+(y+z) = (x+y)+z = x + y + z
p∧(q∧r) ≡(p∧q)∧r ≡ p ∧ q ∧ r	x .(y.z) = (x.y) .z = x .y.z
p ∨ (q ∧ r) ≡ (p ∨ q) ∧ (p ∨ r)	x+(y.z) = (x.y)+(x.z)
p ∧ (q ∨ r) ≡ (p ∧ q) ∨ (p ∧ r)	x.(y+z) = (x.y)+(x.z)
p ∨ (p ∧ q) ≡ p	x + (x .y) = x
p ∧ (p ∨ q) ≡ p	x .(x + y) = x
D ∨ p ∨ q ∨ r ≡ D	1 + x + y + z = 1
Y ∧ p ∧ q ∧ r ≡ Y	0.x.y.z = 0
p ∨ Y ≡ p	x + 0 = x
p ∧ D ≡ p	x .1 = x

2.4 Lojik Devreler

Modern Mantık ve Boole Cebiri en önemli uygulamalarını Lojik Devreler üzerinde göstermektedir. Bu tür devrelerin mantık yasaları yardımıyla incelenmesi ve bunlara özgü matematiğin ortaya çıkmasıyla, ne kadar uyumlu bir yapılaşma olduğu görülecektir. Modern Mantık ve buna dayalı olarak ortaya çıkan Boole Cebiri, bir başka boyutta teknolojinin bir sınıfının matematiğini oluşturmaktadır.

Örneğin Boole Cebiri'nde bulunan 1 ve 0, bir A anahtarının kapalı ya da açık oluşunu temsil eder. Anahtar açık ise akım geçmemektedir ve sembolü 0'dır. Anahtar kapalı ise akım geçmektedir ve sembolü 1'dir.

Anahtara A demek, bunu bir p önermesi ya da x ∈ ß olmak üzere bir Boole değişkeni ile göstermek anlamına gelir. Tek başına bu ifade basit boolien niceliktir. Eğer anahtar sayısı artarsa, bunlar arasındaki ilişkiler de artacaktır. Bu kez aralarında oluşan bu ilişkiye göre bir takım modeller geliştirilerek buna özgü bir matematik oluşturulacaktır. (Aksoy, 2015)

2.4.1 Ve Devresi (Seri Bağlama)

A B

________/ _________/ ________

Şekil 2.1: Seri Bağlama.

Yukarıdaki şekil her iki anahtarı sembolik olarak göstermektedir. A ve B anahtarlarının farklı durumları tablo ile şu şekilde gösterilir:

Tablo 2.14:”ve” devresi.

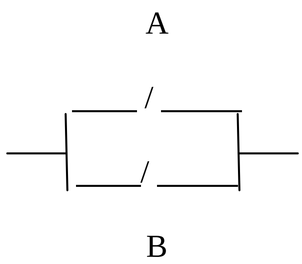
A	**B**	**A ∧ B**
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Böylece olası dört durumun neler olabileceği bu tabloda görülmektedir. Tablo, aşağıda açıklanan değerlendirme ile oluşturulmuştur:

- ✓ 1.durum : A ve B anahtarlarının her ikisinden de akım geçiyor. A = 1, B = 1. Öyleyse bu devreden akım geçer; A ∧ B = 1.
- ✓ 2.durum : A’dan akım geçiyor ; B den akım geçmiyor. A = 1 , B = 0 . Öyleyse bu devreden akım geçmez; A ∧ B = 0.
- ✓ 3.durum : A’dan akım geçmiyor ; B den akım geçiyor.A = 0 , B = 1 . Öyleyse bu devreden akım geçmez; A ∧ B = 0.
- ✓ 4.durum : A’dan ve B den akım geçmiyor. A = 0, B = 0. Öyleyse bu devreden akım geçmez; A ∧ B = 0.

Bu seri bağlı devrelerin tablosunda 1 ve 0’ların yerlerine D ve Y konulduğunda “ve” bağlacına ait tablo oluşur. Bu nedenle iki anahtarın devrede bu şekilde bir düzen içinde bulunmasıyla oluşan lojik devreye “ve devresi” adı verilir. (Aksoy, 2015)

2.4.2 Veya Devresi (Paralel Bağlama)



Şekil 2.2: Paralel Bağlama.

Yukarıdaki şekil her iki anahtarı sembolik olarak göstermektedir. A ve B anahtarlarının farklı durumları tablo ile şu şekilde gösterilir:

Tablo 2.15:”veya” devresi.

A	**B**	**A ∨ B**
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Böylece olası dört durumun neler olabileceği bu tabloda görülmektedir. Tablo, aşağıda açıklanan değerlendirme ile oluşturulmuştur:

- ✓ 1.durum : A ve B anahtarlarının her ikisinden de akım geçiyor. A = 1, B = 1. Öyleyse bu devreden akım geçer; A ∨ B = 1.
- ✓ 2.durum: A’dan akım geçiyor; B den akım geçmiyor. A = 1, B = 0. Öyleyse bu devreden akım geçer; A ∨ B = 1.
- ✓ 3.durum: A’dan akım geçmiyor; B den akım geçiyor. A = 0, B = 1. Öyleyse bu devreden akım geçer; A ∨ B = 1.
- ✓ 4.durum: A’dan ve B den akım geçmiyor: A = 0, B = 0. Öyleyse bu devreden akım geçmez; A ∨ B = 0.

Bu paralel bağlı devrelerin tablosunda 1 ve 0’ların yerlerine D ve Y konulduğunda “veya” bağlacına ait tablo oluşur. Bu nedenle iki anahtarın devrede bu şekilde bir düzen içinde bulunmasıyla oluşan lojik devreye “veya devresi” adı verilir. (Aksoy, 2015)

2.4.3 Çarpma Devresi

VE bağlacı ile tanımlanan önerme Boole Cebirinde çarpma işleminin karşılığı olmaktadır. Bu ilişki, lojik devrelerde anahtarların seri bağlanmasıyla da ilgili olduğu söylenebilecektir. Sonuç olarak, bir VE ' li bileşim bir çarpma devresini temsil etmektedir. (Aksoy, 2015)

Tablo 2.16: Çarpma devresi.

		Önermeler Mantığı	**Boole Cebiri**	**Lojik Devreler**
A	**B**	**A ∧ B**	**A.B**	**A.B**
1	1	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	0	0	0

2.4.4 Toplama Devresi

VEYA bağlacı ile tanımlanan önerme Boole Cebirinde toplama işleminin karşılığı olmaktadır. Bu ilişki, lojik devrelerde anahtarların paralel bağlanmasıyla da ilgili olduğu söylenebilecektir. Sonuç olarak, bir VEYA ' lı bileşim bir toplama devresini temsil etmektedir. (Aksoy, 2015)

Tablo 2.17: Toplama devresi.

		Önermeler Mantığı	**Boole Cebiri**	**Lojik Devreler**
A	**B**	**A ∨ B**	**A+B**	**A+B**
1	1	1	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	0	0	0

2.4.5 Ekonomik Devreler

Lojik devrelerin düzenlenmesinde en önemli hedeflerden biri ekonomik devreyi tasarlamak ve uygulamaya koymaktır. Ekonomik devre kavramı tasarrufu yani minimum maliyet düşüncesini öne çıkarmaktadır. Lojik devrenin teknolojik sürecinde, bir imalat süreci bulunur ve bu da bir maliyeti gerektirir. Bir lojik devrede en küçük bir basitleştirmenin bile maliyeti düşürücü yönde büyük bir etkisi vardır. Bir anahtarın bile daha eksik olduğu bir lojik devre, daha ekonomik sayılacaktır. Aynı işi yapan ancak en az eleman içerecek şekilde tasarlanan bir lojik devre, ekonomik devre olacaktır. Bir devrenin kullanıldığı ortamda, ne kadar az tel, araç, ara malzeme, işçilik ve enerji kullanılmış olursa, maliyetin o kadar çok azalacağı düşünülebilir. Buradan ekonomik devre kavramına ulaşılmış olur. (Aksoy, 2015)

Örnek 2.4.5.1: Bir şirketin hissedarları üç kişidir. Bunların şirkete katkıları oranında değişik oy hakları vardır. Bunlardan birinin 5, bir diğerinin 3 ve geriye kalanının ise 2 oy hakkı bulunmaktadır. Şirketin yönetiminde bu üç kişi yetkili ve sorumlu olup, şirketle ilgili kararlar oyçokluğuyla alınmaktadır. Oyların eşit olması halinde, başkanın oy verdiği taraf kazanmış sayılmaktadır. Başkan 5 oyu olan hissedardır. Hissedarlar oylarını bir düğmeye basarak belirtmektedirler. Çekimser oy kullanmak yoktur. Oylanacak öneriyi benimseyenler düğmeye basarak oyunun olumlu olduğunu belirtecek, olumsuz oy veren düğmeye basmayacaktır. Öyle bir lojik devre kurunuz ki yukarıda tanımlanan olaya ilişkin oylama sonucunu bir biçimde belirtmiş olsun. Bundan hareketle daha ekonomik olan denk devreyi de bulunuz. (Aksoy, 2015)

Hissedarların adları A, B, C olsun. A'nın 5 hissesi, B'nin 3 hissesi ve C'nin de 2 hissesi olduğuna göre, şirket $A + B + C = 5 + 3 + 2 = 10$ hisse üzerinden karar oluşturuyor demektir. Bu verilere göre doğruluk değer tablosu aşağıda olduğu gibi gerçekleşir : [1 = geçerli karar; 0 = geçersiz karar]

Tablo 2.18: Lojik Devre Problemi.

A	B	C	Oy Toplamı	Karar	Temel Bileşenler
1	1	1	10	1	$A \wedge B \wedge C$
1	1	0	8	1	$A \wedge B \wedge \sim C$
1	0	1	7	1	$A \wedge \sim B \wedge C$
1	0	0	5	1	$A \wedge \sim B \wedge \sim C$
0	1	1	5	0	-
0	1	0	3	0	-
0	0	1	2	0	-
0	0	0	0	0	-

Tablodan hareketle, temel bileşenler esas alınarak, bunların $\vee$ lı bileşimi oluşturulursa, problemin öngördüğü lojik devre ortaya çıkmış olacaktır. Bu ise,

$$(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \sim C) \vee (A \wedge \sim B \wedge C) \vee (A \wedge \sim B \wedge \sim C)$$

şeklinde bir standart biçim oluşturacaktır.

Problemin ikinci kısmı ile ilgili olarak, buna denk olan ve sonuçta ekonomik olan bir lojik devre ise şu şekilde bulunur:

$$(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \sim C) \vee (A \wedge \sim B \wedge C) \vee (A \wedge \sim B \wedge \sim C)$$

$$= [(A \wedge B) \wedge (C \vee \sim C)] \vee [(A \wedge \sim B) \wedge (C \vee \sim C)]$$

$$= [(A \wedge B) \wedge 1] \vee [(A \wedge \sim B) \wedge 1]$$

$$= (A \wedge B) \vee (A \wedge \sim B) = A \wedge (B \vee \sim B) = A \wedge 1 = A$$

Böylece aynı işi yapan ancak en az eleman içeren (A) lojik devresi ekonomik devre olacaktır. (Aksoy, 2015)

3. FİBONACCİ VE BOOLE FONKSİYONLARI

Bu bölümde Chris Kaltwasser'ın 1994 yılında yapmış olduğu "Computing Fibonacci Numbers with Gates" makalesi incelenmiştir. 2.Bölümde verilen Boole Cebiri özelliklerinden yararlanarak Boole Fonksiyonları tanımlanmıştır.

3.1 Boole Fonksiyonları

Herhangi tek bir sembol veya belirli tek bir eleman için "sabit" ifadesi kullanılır. Örneğin, 0 ve 1 sabitlerdir. "Değişkenler" ise belirli olmayan herhangi bir eleman yerine kullanılır ve x, y, z ile gösterilir. Boole Fonksiyonu ise, sonlu sayıdaki semboller kümesinin toplama (+) , çarpma (.) , bütünleyen (') işlemleriyle olan bileşimi şeklinde ifade edilir.

Örneğin, yukarıda verdiğimiz tanıma uyan bir Boole fonksiyonu,

$$(a + b).c' + a'.b.x + 0$$

$$(x' + y).(y' + z)$$

$$(x + z') + x.y.z$$

gibi örnekler olabilir. Bu örneklerde, x,y,z değişkenler; a, b, c bilinmeyen sabitler ve 0 da bilinen bir sabittir.

Boole Fonksiyonları, bu örneklerin dışında, düzenli formlar oluşturularak incelenir. Bu fonksiyonların standart biçimleri; Ayırıcı Normal Formda Fonksiyon ve Birleştirici Normal Formda Fonksiyon olarak adlandırılır. (Aksoy, 2015)

3.1.1 Ayırıcı Normal Form

Boole sınıfında, x_j ve x_j ' elemanlarından oluşan,

$$\sum_{i=1}^{m} f_i \left[\prod_{j=1}^{n} x_{j\,,} x_j\,' \right]$$

şeklindeki fonksiyona ayırıcı normal form denir. Bu tür fonksiyonlar, **dnf** (Disjunctive Normal Form) sembolüyle de gösterilmektedirler. Ayırıcı normal form gösteriminden anlaşılacağı gibi çarpımların toplamı şeklinde ifade edilir.

n tane değişken için yazılmış olan bir fonksiyonda her terimde her değişken, kendisiyle ya da bütünleriyle temsil ediliyorsa bu özellikteki bir fonksiyona da Tam Ayırıcı Normal Formda Fonksiyon ya da Fonksiyonun Birinci Kanonik Şekli denir. (Aksoy, 2015)

Örnek 3.1.1.1: F = (x y ' + x z) ' + x ' fonksiyonu verilsin. Fonksiyonu ayırıcı normal formda ifade ediniz.

F = (x y ' + x z) ' + x ' (De Morgan)

= (x y ') ' .(x z) ' + x ' (De Morgan)

= [x ' + (y ') '][x ' + z '] + x ' (Çift Değilleme)

= [x ' + y][x ' + z '] + x ' (Dağılma Özelliği)

= x ' x ' + x ' z ' + y x ' + y z ' + x ' (Değişme Özelliği ve x.x = x den)

=x ' + x ' + x ' y + x ' z ' + y z ' (x + x = x den)

= x ' + x ' y + x ' z ' + y z '

Bulunan ifade çarpımların toplamı şekline geldiğinden ayrıştırıcı normal formdadır. (Aksoy, 2015)

3.1.2 Birleştirici Normal Form

Boole sınıfında, x_j ve x_j ' elemanlarından oluşan,

$$\prod_{i=1}^{m} f_i \left[\sum_{j=1}^{n} x_{j\,,} x_j\,' \right]$$

şeklindeki fonksiyona birleştirici normal form denir. Bu tür fonksiyonlar, **cnf** (Conjunctive Normal Form) sembolüyle de gösterilmektedirler. Birleştirici normal form gösteriminden anlaşılacağı gibi toplamların çarpımı şeklinde ifade edilir.

n tane değişken için yazılmış olan bir fonksiyonda her terimde her değişken, kendisiyle ya da bütünleriyle temsil ediliyorsa bu özellikteki bir fonksiyona da Tam Birleştirici Normal Formda Fonksiyon ya da Fonksiyonun İkinci Kanonik Şekli denir. (Aksoy, 2015)

Örnek 3.1.2.1: F = (x y ' + x z) ' + x ' fonksiyonunu birleştirici normal formda yazınız.

F = (x y ' + x z) ' + x ' (De Morgan)

= [(x y ') ' .(x z) '] + x '

= [x ' + (y ') '][x ' + z '] + x ' (Çift Değilleme)

= [x ' + y][x ' + z '] + x ' (Dağılma Özelliği)

= [x ' + x ' + y][x ' + x ' + z '] (x ' + x ' = x ' den)

= [x ' + y][x ' + z ']

Bulunan ifade toplamların çarpımı şekline geldiğinden birleştirici normal formdadır. (Aksoy, 2015)

3.1.3 Fonksiyonun Bütünleyeni

Bir f fonksiyonunun bütünleyeni f ' ya da $\bar{f}$ ile gösterilir. Buna Bütünler Fonksiyon da denilebilir.

Terimlerin katsayılarının 1 ya da 0 oluşuna göre, terimlerin bir kısmı görülecek bir kısmıysa görülmeyecektir. Görülen terimler f fonksiyonuna ait ise, görünmeyen terimler fonksiyonun bütünleyenini oluşturacaklardır. (Aksoy, 2015)

Örnek 3.1.3.1: F = x y z ' + x y ' z ' + x ' y ' z ' fonksiyonunun bütünleyenini bulunuz.

Tablo 3.1: Fonksiyon durum tablosu

Terimler	F de Olanlar	F de Olmayanlar (F ' de Bulunacaklar)
x y z	-	x y z
x y z '	x y z '	-
x y ' z	-	x y ' z
x y ' z '	x y ' z '	-
x ' y z	-	x ' y z
x ' y z '	-	x ' y z '
x ' y ' z	-	x ' y ' z
x ' y ' z '	x ' y ' z '	-

F ' = x y z + x y ' z + x ' y z + x ' y z ' + x ' y ' z bulunur. (Aksoy, 2015)

3.1.4 Boole Fonksiyonları Tanım Tablosu

Boole fonksiyonunun tanımlanmasında tanım tablosundan yararlanılır.

Tam Ayırıcı Normal Formda Fonksiyonlar için iç işlem çarpmadır. Çarpmanın birim elemanı 1'dir. O zaman tabloda f(x,y,z) = 1 olan satırlar seçilerek ve x,y,z değişkenleri için sıralanan değerlere bakılarak, bu satırlardaki 1'ler için değişkenin kendisi, 0'lar için değişkenin bütünleyeni alınarak bunların çarpımları oluşturulacaktır. Bu işlem 1 olan her satır için yapıldıktan sonra, bu şekilde elde edilen çarpanların toplamı fonksiyonu verecektir. (Aksoy, 2015)

Tam Birleştirici Normal Formda Fonksiyonlar için iç işlem toplamadır. Toplamanın birim elemanı 0'dır. O zaman tabloda f(x,y,z) = 0 olan satırlar seçilerek ve x,y,z değişkenleri için sıralanan değerlere bakılarak, bu satırlardaki 0'lar için değişkenin kendisi, 1'ler içinse değişkenin bütünleyeni alınarak bunların toplamları oluşturulacaktır. Bu işlem 0 olan her satır için yapıldıktan sonra oluşan terimler, çarpanlar halinde ifade edilerek fonksiyon ortaya konmuş olacaktır. (Aksoy, 2015)

Örnek 3.1.4.1: $f(x,y,z) = x(y' + z) + z'$ fonksiyonu veriliyor. Tanım tablosundan yararlanarak dnf ve cnf biçiminde ifade ediniz.

Değişkenler x,y,z olarak n = 3 olduğundan, $2^3 = 8$ durum vardır. Bunların her biri için fonksiyon şu şekilde hesaplanır:

$$f(x,y,z) = f(1,1,1) = 1(1' + 1) + 1' = 1(0 + 1) + 0 = 1 + 0 = 1$$

$$f(x,y,z) = f(1,1,0) = 1(1' + 0) + 0' = 1(0 + 0) + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$f(x,y,z) = f(1,0,1) = 1(0' + 1) + 1' = 1(1 + 1) + 0 = 1 + 0 = 1$$

$$f(x,y,z) = f(1,0,0) = 1(0' + 0) + 0' = 1(1 + 0) + 1 = 1 + 1 = 1$$

$$f(x,y,z) = f(0,1,1) = 0(1' + 1) + 1' = 0(0 + 1) + 0 = 0 + 0 = 0$$

$$f(x,y,z) = f(0,1,0) = 0(1' + 0) + 0' = 0(0 + 0) + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$f(x,y,z) = f(0,0,1) = 0(0' + 1) + 1' = 0(1 + 1) + 0 = 0 + 0 = 0$$

$$f(x,y,z) = f(0,0,0) = 0(0' + 0) + 0' = 0(1 + 0) + 1 = 0 + 1 = 1$$

bulunur ve bu sonuçlara göre düzenlenmiş tanım tablosu şu şekildedir:

Tablo 3.2: Tanım Tablosu

x	**y**	**z**	**f (x,y,z)**
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

Tablodan faydalanarak fonksiyon istenilen formlarda ifade edilebilir.

Ayırıcı normal form(dnf) bulmak için, tabloda 1 değerinin bulunduğu satırlara bakarak;

$f(x,y,z) = xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + x'yz' + x'y'z'$

Birleştirici normal form(cnf) bulmak için, tabloda 0 değerinin bulunduğu satırlara bakarak;

$f(x,y,z) = (x + y' + z')(x + y + z')$ bulunacaktır.

3.2 Fibonacci Sayıları ve Lojik Devreler

Bu bölümde amacımız, Fibonacci Sayılarını minimum sayıda eleman ile hesaplayacak bir devre ailesi aramaktır. Dolayısıyla, Fibonacci sayıları ne kadar az sayıda eleman ile hesaplanırsa o kadar avantaj sağlanır.

Örnek 3.2.1 : $f_{0\ldots}f_n$ ‘yi en az sayıda devre elemanı ile hesaplamak için n=3 ve n=7 durumları ele alınsın. (Kaltwasser, 1994)

n = 3 için, çıkış sayısının olduğu gibi giriş sayısının da 2 olmasından dolayı, bu tür herhangi bir fonksiyon iki veya daha az sayıda devre elemanı ile uygulanabilir.

Tablo 3.3 : n=3 için Doğruluk Tablosu

x_1	x_0	F_1	F_0
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

$F_0 = x_0 \oplus x_1 \qquad F_1 = x_0.x_1$

ifadelerine karşılık gelir. Bu ifadelerin her biri bağımsız olduğundan n=3 için minimum devre elemanı kullanılır.

n = 7 için devrenin 4 çıkışa sahip olması gerekir.

Tablo 3.4 : n=7 için Doğruluk Tablosu

x_2	x_1	x_0	F_3	F_2	F_1	F_0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	0	1

$$F_0 = x_0 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_0.x_2 \oplus x_0.x_1.x_2$$

$$F_1 = x_0.x_1 \oplus x_2 \oplus x_0.x_2 \oplus x_1.x_2$$

$$F_2 = x_0.x_2$$

$$F_3 = x_1.x_2$$

Fibonacci sayıları ne kadar az sayıda eleman ile hesaplanırsa o kadar az devre elemanı kullanılacağından dolayı daha avantajlı olur. (Kaltwasser, 1994)

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde Fibonacci ve Lucas Sayıları'nın temel tanımları, Binet formülleri ve üreteç fonksiyonları verilmiştir. George Boole'un Boole Cebiri'ni oluşturmasına etki eden faktörler verilmiştir. Önermeler Mantığı'nda karşımıza çıkan bağlaçlar ve bu bağlaçlara ait özellikler verilmiştir. Boole Cebiri'nin tanımı yapılarak yeni bir cebirin nasıl ortaya çıktığı gösterilmiştir. Modern Mantık ve Boole Cebiri'nin uygulamalarını en iyi gösteren Lojik Devreler mantık yasaları yardımıyla incelenmiştir. Minimum maliyet ile oluşturulan ekonomik devre kavramı tanıtılmıştır. Fibonacci Sayıları ve Lojik Devreler arasında bulunan ilişki verilmiştir. Boole Fonksiyonları tanımlanarak fonksiyon türlerinin tanımları verilmiştir.

Öneri olarak, bu yapılan çalışmalar Pell ve Pell-Lucas sayılarına aktarılabilir. Bu sayıları minimum sayıda eleman ile hesaplayacak bir devre ailesi aranabilir.

5. KAYNAKLAR

Aksoy, Y., *Boole Cebiri ve Lojik Devre Sentezi*, Yıldız Teknik Üniversitesi Yayını, (2015).

Aksoy, Y., *Modern Mantık(Sembolik Mantık)*, Yıldız Teknik Üniversitesi Yayını, (1995).

Cahill, N. C., D'Ericco, J. R., And Spance, J. P., “Complex factorizations of the Fibonacci and Lucas numbers”, *The Fibonacci Quart*, 41, 1, 13-19, (2003).

Çallıalp, F., *Örneklerle Soyut Matematik*, Birsen Yayınevi, (2005).

El Naschie, M. S., “Notes on super at rings and the infinite sums of Fibonacci and Lucas numbers”, *Chaos, Solitons&Fractals*, 12, 1937-1940, (2001).

Harmancı, E., *Lojik Devreleri ve Dersleri*, İstanbul Teknik Üniversitesi Yayını, (1984).

Hoggat, V. E., *Fibonacci and Lucas numbers*, Palo Alto, California, Houghton-Mifflin, (1969).

Horadam, A. F., "A Generalized Fibonacci Sequence", *American Math. Monthly*, 68, 455-459, (1961).

Kaltwasser, C., “Computing Fibonacci Numbers With Gates”, *In Proceedings of the Research Experience for Undergraduates Program in Mathematics*, Oregon State University, 68-83, (1994)

Karaçay, T., *Soyut Matematiğe Giriş*, Milli Eğitim Basımevi, (1975).

Koshy, T., *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, A Wiley-Interscience Publication, (2001).

Kutlu, S. N., Kutlu, B., *Temel Matematik (Soyut Matematiğe Giriş)*, Fil Yayınevi, (1990).

Sertöz, A. S., "Önce Matematik Vardı:George Boole", *Bilim ve Teknik Dergisi*, 577, 72-77, (2015).

Özer, O., Çoker, D., Taş, K., *Soyut Matematik,* Bilim Yayıncılık, (2009).

Vajda, S., *Fibonacci and Lucas Numbers, and the Golden SectionTheory and Applications*, Ellis Harwood Limitted, (1989).

6. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Burak DEMİRCANLI
Doğum Yeri ve Tarihi	: Bandırma – 02.03.1990
Lisans Üniversite	: Hacettepe Üniversitesi
Elektronik posta	: burakdemircanli@hotmail.com
İletişim Adresi	: Sarayköy Anadolu Lisesi Trafo Mahallesi Babadağ Yolu Caddesi No:66 Sarayköy/DENİZLİ