T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

İKİ DEĞİŞKENLİ BALANS POLİNOMLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERVE YAKAR

DENİZLİ, TEMMUZ - 2020

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

İKİ DEĞİŞKENLİ BALANS POLİNOMLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERVE YAKAR

DENİZLİ, TEMMUZ - 2020

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

MERVE YAKAR

ÖZET

İKİ DEĞİŞKENLİ BALANS POLİNOMLARI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MERVE YAKAR
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF.DR.MUSTAFA AŞCI)

DENİZLİ, TEMMUZ - 2020

Bu tez temel olarak dört ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Fibonacci ve Lucas sayılarının tanımları ve bu sayıları içeren temel teoremler verilmiştir. Bu sayıların indirgeme bağıntıları, Binet formülleri, üreteç fonksiyonları, Cassini özdeşliği ve kapalı formülleri verilmiştir.

İkinci bölümde Balans ve Kobalans sayıları incelenmiş ve bu sayılarla ilgili teoremler verilmiştir. Bu sayılar yardımıyla Lucas Balans ve Lucas Kobalans sayıları tanımlanarak incelenmiştir. Bu sayıların indirgeme bağıntıları, Binet formülleri ve üreteç fonksiyonları verilmiştir. Bu bölümde ayrıca bu sayıların Q matrisleri incelenmiş ve bu matrisler yardımıyla teoremlerin ispatları verilmiştir.

Üçüncü bölümde Balans polinomları incelenmiş ve bu polinomların rekürans bağıntısı, Binet formülü, matris gösterimi, Cassini özdeşliği, Catalan özdeşliği, türevleri ve bazı özellikleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde iki değişkenli balans polinomlarının tanımı yapılmıştır. Sonra iki değişkenli balans polinomlarının rekürans bağıntısı, Binet formülü, matris gösterimi, Cassini özdeşliği verilmiştir. Daha sonra iki değişkenli balans polinomları hakkında bazı özellikler verilmiştir. Son olarak ise iki değişkenli balans polinomlarının kısmi türevleri verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: İki değişkenli balans polinomları

ABSTRACT

BIVARIATE BALANCING POLINOMIALS
MSC THESIS
MERVE YAKAR
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATİCS
(SUPERVISOR: PROF. DR. MUSTAFA AŞCI)

DENİZLİ, JULY 2020

This thesis basically composed of four main chapters. In the first chapter, definitions of Fibonacci and Lucas numbers and basic theorems including these numbers are given. Recurrence relations of these numbers, Binet formula, generating functions, Cassini identity and closed formulas are given.

In the second chapter, the number of Balancing and Cobalancing are examined and theorems related to these numbers are given. With the help of these numbers, Lucas Balancing and Lucas Cobalancing numbers are defined and examined. The recurrence relation of these numbers, Binet formulas and generator functions are given. In this section, Q matrices of these numbers are also examined and proofs of theorems are given with the help of these matrices.

In the third chapter, the Balancing polynomials are examined and the general term, Binet formula, matrix notation, Cassini identity, Catalan identity, derivatives and some properties of these polynomials are given.

In the fourth chapter, the definition of bivariate balancing polynomials is made. The recurrence relation of bivariate balance polynomials, Binet formula, matrix notation, Cassini identity are given. Then, some properties are given about the bivariate balance polynomials. Finally, partial derivatives of bivariate balance polynomials are given.

KEYWORDS: Bivariate balancing polynomials

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TABLO LİSTESİ

SEMBOL LİSTESİ

$\boldsymbol{T_n}$	:	n. Üçgensel Sayı
$\boldsymbol{P_n}$	:	n. Pronik Sayı
$\boldsymbol{F_n}$	:	n. Fibonacci Sayısı
$\boldsymbol{L_n}$	:	n. Lucas Sayısı
g(x)	:	Fibonacci Sayı Dizinin Üreteç Fonksiyonu
h(x)	:	Lucas Sayı Dizisinin Üreteç Fonksiyonu
t(x)	:	Kobalans Sayı Dizisinin Üreteç Fonksiyonu
$\boldsymbol{B_n}$	:	n. Balans Sayısı
$\boldsymbol{C_n}$	:	n. Lucas Sayısı
$\boldsymbol{b_n}$	:	n. Kobalans Sayısı
$\boldsymbol{c_n}$	:	n. Lucas Kobalans Sayısı
$\boldsymbol{B_n(x)}$	:	n. Balans Polinomu
$\boldsymbol{B_n(x,y)}$	:	n. İki Değişkenli Balans Polinomu

ÖNSÖZ

Tez çalışmamım her aşamasında fikirleri ve yardımlarıyla yanımda olan, uzmanlık eğitimi boyunca sonsuz bilgi, sorumluluk ve deneyim şansı sunan, akademik çalışmalarımda bilgi ve tecrübelerini esirgemeyen, sabrı ve güler yüzüyle destek olup cesaretlendiren, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek aldığım çok değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mustafa AŞCI' ya bütün içtenliğimle ve saygılarımla teşekkürlerimi sunarım.

Hayat yolculuğumda varlıklarının benim için çok özel bir anlamı olan, bana kattıkları, öğrendiklerim ve beni bugün olduğum yere yönlendiren, hiçbir zaman maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, varlığımın her döneminde hep yanımda olan, bugünlere gelmemde büyük pay sahibi olan, her zaman bana güvenen, beni cesaretlendiren, varlıklarına şükrettiğim canım annem Necla YAKAR' a ve canım babam Hüsem Ali YAKAR' a sonsuz teşekkür ederim.

Lisans ve yüksek lisans öğrenimim boyunca engin bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım Pamukkale Üniversitesi Öğretim Üyelerine teşekkür ederim.

MERVE YAKAR

1. GİRİŞ

Orta çağın en büyük matematikçilerinden biri olan İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci 1170 yıllarında ticaretin merkezi olan Pisa'nın Bonacci ailesinde doğmuştur. Babası Guglielmo gümrük memuru olmasından dolayı çocukluğu birçok farklı ülkede geçmiştir. O dönemler Cezayir'de çalıştığı için çocukluğunun birçoğu orada geçmiştir. Cezayir'in Bejaja limanı ile İtalya'nın Bugia kenti arasında bir ticaret potasını idare eden babası, burada oğluna hesap öğretmesi için Arap bir hocadan matematik dersleri almaya başlar ve matematik ile ilk burada tanışır. Hint-Arap sayı sistemini öğrenen Fibonacci, Hint-Arap sayıları ile aritmetik işlemler yapmanın Roma rakamları ile hesap yapmaktan çok daha basit ve verimli olduğunu görmüştür.

Bütün Akdeniz Bölgesi'ni gezen Fibonacci, dönemin önde gelen Arap matematikçiler ile çalışma olanağı bulmuştur. 1201 yılında "Liber Abacci'' "Cebir Kitabı'' anlamına gelen bir matematik kitabı yazmıştır. Günümüzde Arap-Hint sayıları diye bilinen modern ticari defter tutma, ölçü birimlerini çevirme, faiz hesaplama, para bozma ve değiştirme vb. işlemlerde önemini göstermiştir. Kitap Avrupa'da tahsilli insanlar arasında hızlı bir şekilde yayılmış ve Avrupa'nın müspet bilimde ilerlemesine önemli etkileri olmuştur. Ayrıca bu kitap çok temel problemler içermektedir. En ünlüsü aşağıdaki tavşan problemidir.

Dört yanı duvarlarla çevrili bir yere doğmuş bir tavşan çifti (1 erkek, 1 dişi) konulmuştur.

i) Her tavşan çiftinin olgunlaşması 1 ayı aldığı,
ii) Olgunlaşan her tavşan çiftinin her ay 1 tavşan çifti doğurduğu,
iii) Hiçbir tavşanın ölmediği

varsayılırsa kaç ay sonunda dört duvarın arasında kaç çift tavşan olur ?

İlk tavşan çiftinin 1 Ocak'ta doğduğunu farzedelim. Bu ilk tavşan çiftinin olgunlaşması bir ay alır. Bu yüzden 1 Şubat'ta hala yalnız bir çift vardır. 1 Mart'ta bu tavşan çifti iki aylıktır. Ve yeni bir çift doğururlar. Toplamda 2 çift olur. Bu şekilde devam ederek, 1 Nisan'da 3 çift olacak, 1 Mayıs'ta 5 çift olacak ve böylece aşağıdaki tablo oluşacaktır:

Tablo 1.1: Aylara Göre Tavşan Çifleri Sayısı.

Çiftlerin Sayısı	**1.Ay**	**2.Ay**	**3.Ay**	**4.Ay**	**5.Ay**	...
Ergin	0	1	1	2	3	...
Yeni Doğan	1	0	1	1	2	...
Toplam	1	1	2	3	5	...

Bu şekilde devam edilirse oluşan toplam tavşan çiftlerinin sayısını bulmak mümkündür.

O halde tavşan çifti sayıları aylara göre $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, \ldots$ olacaktır. Buna göre belli bir aydaki çift sayısı önceki iki ayın toplamına eşittir. Bu diziye "Fibonacci Dizisi'' , bu sayılara da " Fibonacci Sayıları'' denir. Bu sayı dizisinin özelliği ise her sayının kendisinden önceki iki ardışık sayının toplamına eşit olmasıdır.

Eğer bu dizideki sayıları kendilerinden önceki sayıya bölecek olursak bölümün sürekli 1,618… sayısına yaklaştığını göreceğiz. Bu sayıda bize **Altın Oran'ı $(\mathbf{1,618\ldots})$** vermektedir. Altın oran, doğada, sanatta, mimaride, müzikte, ekonomide, mühendislikte ve daha birçok alanda bulunmaktadır.

Benzer şekilde Fransız matematikçi Edouord Lucas (1842-1891) tarafından, Lucas sayı dizisi tanımlanmıştır. Lucas sayı dizisinin Fibonacci sayı dizisi ile pek çok bağlantısı yapılan çalışmalar ortaya çıkarılmıştır. Böylece sayılar teorisinde indirgeme bağıntısı yardımıyla diziyi tüm terimleriyle incelemek mümkün olmuştur.

1999 yılında Behera ve Panda, Balans sayı kavramını tanımlamışlardır. Yapılan çalışmalarda Balans sayı dizisinin aynı Fibonacci ve Lucas sayı dizileri gibi indirgeme bağıntılarını ve binet formüllerini vermişlerdir. Böylelikle Balans sayı dizisinin genel özelliklerine ulaşmak mümkün olmuştur. Balans sayılarından başka

Lucas-Balans sayı dizisi, Kobalans sayı dizisi, Lucas-Kobalans sayı dizisi tanımları yapılarak birbirleriyle olan ilişkileri ortaya konmuştur.

Bu tezde, öncelikle Fibonacci ve Lucas sayı dizileri, Balans ve Lucas-Balans sayı dizileri, Kobalans ve Lucas-Kobalans sayı dizileri, Balans polinomları tanımları verilmiştir. Daha sonra iki değişkenli balans polinomları tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir. Ayrıca üreteç fonksiyonu, Binet formülü, matris gösterimi, Cassini özdeşliği ve kısmi türevleri verilmiştir.

1.1 Temel Tanım ve Teoremler

Çalışmanın bu bölümünde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 1.1.1: $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ sonsuz bir dizi $k \in \mathbb{N}$ ve $f: \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^k \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Başlangıç değerleri $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k-1}$ ve $\forall\, n \geq k$ için ,

$$a_n = f(n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, \dots, a_{n-k}) \quad \cdots \ (1.1)$$

fonksiyonuna k. mertebeden indirgeme (rekürans) bağıntısı denir (Koshy, 2001).

Dizinin bütün elemanları (1.1) denklemi ve $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k-1}$ değerleri ile belirlenir.

Tanım 1.1.2: (a_n) sonsuz bir dizi, k € ℕ sabit, $f_0, f_1, f_2, \dots, f_k$, ℕ' den ℝ' ye tanımlı fonksiyonlar ve $f_k(n) \neq 0$ olmak üzere $\forall n \geq k$ için,

$$a_n = f_1(n)a_{n-1} + f_2(n)a_{n-2} + \cdots + f_k(n)a_{n-k} + f_0(n) \quad \cdots (1.2)$$

biçimindeki indirgeme bağıntısına k. mertebeden lineer indirgeme bağıntısı denir (Koshy, 2001).

Eğer (1.2)'deki $f_1, f_2, \dots, f_k$ foksiyonları; $f_i(n) = b_i$; $(1 \leq i < k)$ biçinde sabit fonksiyonlar ise,

$$a_n = b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + \cdots + b_k a_{n-k} + f_0(n)$$

ingirgeme bağıntısına sabit katsayılı indirgeme bağıntısı denir.

Eğer (1.2)'deki her $n \in \mathbb{N}$ için $f_0(n) = 0$ ise,

$$a_n = f_1(n)a_{n-1} + f_2(n)a_{n-2} + \cdots + f_k(n)a_{n-k}$$

indirgeme bağıntısına homojen indirgeme bağıntısı denir.

Teorem 1.1.1: $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ indirgeme bağıntısı olsun. Bu durumda indirgeme bağıntısının karakteristik denklemi;

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

ve kökleri α, β olmak üzere genel çözümü

$$a_n = c.\alpha^n + d.\beta^n$$

dir (Koshy, 2001).

Burada c ve d sabit sayılardır.

Tanım 1.1.3: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n.(n+1)}{2}$$

sayısına $n.$ üçgensel sayı denir.

Üçgensel sayılar: $1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, \ldots$ ' dır.

Tanım 1.1.4: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$P_n = n.(n+1)$$

formundaki sayılara Pronik sayı denir. $P_1 = 2,\ P_2 = 6,\ P_3 = 12$ sayıları birer Pronik sayıdır.

Tanım 1.1.5: $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ bir reel sayı dizisi olsun.

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^n + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

ifadesine $\{a_n\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu denir. Yani,

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

dir (Koshy,2001).

Tanım 1.1.6: Bir x reel sayısını x den büyük olmayan en büyük tamsayıya dönüştüren fonksiyona taban (floor) fonksiyonu denir ve $\lfloor x \rfloor$ ile gösterilir.

$$\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow n \leq x < n + 1$$

dir (Koshy, 2001).

Tanım 1.1.7: Bir x reel sayısını x den küçük olmayan en küçük tamsayıya dönüştüren fonksiyona tavan (ceeling) fonksiyonu denir ve $\lceil x \rceil$ ile gösterilir.

$$\lceil x \rceil = n \Leftrightarrow n - 1 < x \leq n$$

dir (Koshy, 2001).

Teorem 1.1.2: x herhangi bir reel sayı ve n herhangi bir tamsayı olmak üzere;

i) $\lfloor n \rfloor = n = \lceil n \rceil$

ii) $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$

iii) n tek bir tamsayı olmak üzere $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n-1}{2}$ dir.

iv) $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1,\ x \notin \mathbb{Z}$ için

v) $\lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n$

vi) n tek tamsayı olmak üzere $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \frac{n+1}{2}$ dir

(Koshy, 2001).

1.2 FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARI

Tanım 1.2.1: Fibonacci sayıları dizisi $\{F_n\}$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ koşulları ve $n \geq 0$ olmak üzere;

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

indirgeme bağıntısıyla tanımlıdır.

Fibonacci sayıları: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \ldots$' dır (Koshy, 2001).

Tanım 1.2.2: Lucas sayıları dizisi $\{L_n\}$, $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $n \geq 0$ olmak üzere;

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$$

indirgeme bağıntısıyla tanımlıdır.

Lucas sayıları: $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, \ldots$ dır (Koshy, 2001).

Örnek 1.2.1: Aşağıdaki tabloda Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin bazı elemanlarını yazalım.

Tablo 1.2.1: Fibonacci Sayıları

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	...

ve

Tablo 1.2.2: Lucas Sayıları

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	...

Teorem 1.2.1 (Fibonacci Ve Lucas Sayıları İçin Binet Formülleri): F_n , Fibonacci dizisinin n. terimi olmak üzere, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ indirgeme bağıntısının karakteristik denklemi ;

$$x^2 - x - 1 = 0$$

olup kökleri,

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ (\boldsymbol{Altın\ Oran})$$

$$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \ (\boldsymbol{G}\text{ü}\boldsymbol{m}\text{üş}\ \boldsymbol{Oran})$$

olmak üzere;

i) n. Fibonacci sayısının Binet Formülü;

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

ve

ii) n. Lucas sayısının Binet Formülü;

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

dir (Koshy, 2001).

İspat:

i) $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ indirgeme bağıntısının karakteristik denklemi,

$$x^2 - x - 1=0$$

dır. Bu denklemin kökleri

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

dir. O halde genel çözüm

$$F_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

şeklindedir. Fibonacci sayı dizisi için $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ başlangıç koşulları sağlatılırsa, $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ olur. O halde Fibonacci sayı dizisi için Binet Formülü,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

şeklinde olur. Burada $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ve $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

elde edilir.

ii) Benzer şekilde ispatlanır.

Teorem 1.2.2 (Fibonacci Sayı Dizisi İçin Üreteç Fonksiyonu):

$$F_0 = 0, F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

İndirgeme bağıntısı ile tanımlanmış Fibonacci sayı dizisinin elemanlarını üreten üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

dir (Koshy, 2001).

İspat: Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonunu $g(x)$ ile gösterecek olursak,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n$$

$$= F_1 x + F_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} F_n x^n$$

$$= F_1(x) + F_2x^2 + \sum_{n=3}^{\infty}(F_{n-1} + F_{n-2})x^n$$

$$= F_1x + F_2x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} F_{n-1}x^n + \sum_{n=3}^{\infty} F_{n-2}x^n$$

$$= x + x^2 + x\sum_{n=2}^{\infty} F_nx^n + x^2\sum_{n=1}^{\infty} F_nx^n$$

$$= x + x^2 + x\left(\sum_{n=1}^{\infty} F_nx^n - x\right) + x^2\sum_{n=1}^{\infty} F_nx^n$$

$$= x + x^2 + x(g(x) - x) + x^2g(x)$$

$$= x + x^2 + xg(x) - x^2 + x^2g(x)$$

elde edilen eşitlik düzenlenirse,

$$(1 - x - x^2)g(x) = x$$

$$g(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

elde edilir.

Şimdi ise üreteç foksiyon yardımıyla Fibonacci indirgeme bağıntısının genel çözümü olan Binet formulüne ulaşacağımızı görelim.

$$1 - x - x^2 = \left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)$$

$$= (1 - \alpha x)(1 - \beta x)$$

yazılabileceğinden,

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{c_1}{1 - \alpha x} + \frac{c_2}{1 - \beta x}$$

eşitliğinden $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ elde edilir ki

$$g(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1 - \alpha x} + \frac{-\frac{1}{\sqrt{5}}}{1 - \beta x}$$

terimlerin seri açılımları yazılırsa,

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n x^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n x^n$$

son olarak,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \right) x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) x^n$$

elde edilir (Koshy, 2001).

Teorem 1.2.3 (Lucas Sayı Dizisi İçin Üreteç Fonksiyonu):

$$L_1 = 1, L_2 = 3$$

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \quad (n \geq 3)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanış Lucas sayı dizisinin elemanlarını üreten üreteç fonksiyonu

$$h(x) = \frac{x + 2x^2}{1 - x - x^2}$$

şeklindedir (Koshy, 2001).

Teorem 1.2.4: Fibonacci ve Lucas sayıları için kapalı (explicite) formüller

$$F_{n+1} = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-i}{i}$$

ve

$$L_n = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-i}{i}$$

dir (Koshy, 2001).

Teorem 1.2.5: $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda,

$$Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

dir.

Teorem 1.2.6:

i) Fibonacci sayılarının Cassini Özdeşliği:

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

ii) Lucas sayılarının Cassini Özdeşliği:

$$L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = 5(-1)^{n+1}$$

(Koshy, 2001).

İspat:

i) İspatı tümevarım metodu ile gösterelim.

$n = 1$ için $F_0F_2 - F_1^2 = 0.1 - 1 = -1 = (-1)^1$ doğru olduğu görülür.

$n = k$ için $F_{k-1}F_{k+1} - F_k^2 = (-1)^k$ doğru olsun.

$n = k + 1$ için;

$$= F_k F_{k+2} - F_{k+1}^2 = (F_{k+1} F_{k-1}\ )(F_k F_{k+1}) - F_{k+1}^2$$

$$= F_k F_{k+1} + F_{k+1}^2 - F_k F_{k-1} - F_{k-1} F_{k+1} - F_{k+1}^2$$

$$= F_k F_{k+1} - F_k F_{k-1} - F_k^2 - (-1)^k$$

$$= F_k F_{k+1} - F_k (F_{k-1} + F_k) + (-1)^{k+1}$$

$$= F_k F_{k+1} - F_k F_{k+1} + (-1)^{k+1}$$

$$= (-1)^{k+1}$$

olduğu görülür.

ii) Benzer şekilde doğruluğu görülür.

Sonuç 1.2.1:

i) $n \geq 1, m \geq 1$ için, $F_{n+m} = F_{n-1} F_m + F_n F_{m+1}$

ii) $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$

iii) $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 F_n^2$

iv) $n \geq 2$ için, $L_{n+1}^2 - L_n^2 = L_{n-1} L_{n+2}$

v) $F_{2n} = F_n L_n$

vi) $F_{2n} - F_{n+1} = L_n$

vii) $n > 1$ için $F_{n-1} + F_{n+1} = L_n$

viii) $n > 2$ için, $F_{n+2} - F_{n-2} = L_n$

ix) $L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$

2. BALANS VE KOBALANS SAYILARI

Balans sayıları ilk kez A.Behera ve G.K.Panda tarafından 1999 yılında Diophantine denklemleri çalışılırken bulunmuştur.

İlk olarak; Balans sayıları için rekürans bağıntısını tanımlamışlardır. Daha sonra yapılan çalışmalarda Balans sayı dizisinin aynı Fibonacci ve Lucas sayı dizileri gibi indirgeme bağıntısına, binet formülüne ulaşmışlardır. Böylelikle Balans sayı dizisinin genel özelliklerine ulaşmak mümkün olmuştur.

Daha sonra Balans sayılarından başka Lucas-Balans sayı dizisi, Kobalans sayı dizisi, Lucas-Kobalans sayı dizisi tanımları da yapılarak birbirleriyle olan ilişkileri ortaya konulmuştur.

Bu bölümde, P.Kumar Ray'ın 2009 yılında Balans ve Kobalans sayılarını çalıştığı tez çalışması incelenmiştir. Ayrıca G.K.Panda ve P.K.Ray 2005, G.K.Panda 2006, T.Szakacs 2011, G.K.Panda ve P.K.Ray 2011, P.K.Ray 2012, P.K.Ray 2013, P.K.Ray ve G.K.Panda 2015, P.K.Ray 2017 makaleleri incelenmiştir.

2.1 BALANS SAYILARI

Tanım 2.1.1: Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+r) \quad (2.1)$$

eşitliğinde n doğal sayısına Balans Sayısı ve buna karşılık gelen r doğal sayısına da balansır denir.

Balans sayıları: $1,6,35,204,1189, \ldots$

Örnek 2.1.1: $B_2 = 6$ balans sayısına karşılık gelen balansır 2'dir.

$n = 6$ için:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = (6 + 1) + (6 + 2)$$

$$\frac{5.6}{2} = 7 + 8$$

$$15 = 15$$

olduğundan $r = 2$ dir.

Tanım 2.1.2: n. üçgensel sayı $T_n = \frac{n.(n+1)}{2}$ olmak üzere;

(2.1) eşitliğinde,

$$T_{n-1} + T_n = T_{n+r}$$

ilişkisi mevcuttur. Yani, ardışık iki üçgensel sayının toplamı yine bir üçgensel sayıdır.

Örnek 2.1.2: $n = 6$ için,

$$T_5 + T_6 = \frac{5.6}{2} + \frac{6.7}{2}$$

$$= 15 + 21$$

$$= 36$$

$$= T_8$$

dir.

Ardışık iki üçgensel sayının toplamı bir tam kare sayı olduğundan (2.1) eşitlliğinin her iki yanına n eklenirse,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = n + (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+r)$$

$$\frac{n.(n+1)}{2} = \left(r.\frac{2n+r-1}{2}\right) + (n+r)$$

$$n^2 + n = 2nr + r^2 - r + 2n + 2r$$

eşitliğin her iki tarafına n^2 eklenirse,

$$2n^2 = (r + n)^2 + (n + r)$$

$$2n^2 = (r + n)(r + n + 1)$$

$$n^2 = \frac{(n + r)(n + r + 1)}{2} \quad (2.2)$$

elde edilir. Burada n bilinirse r elde edilebilir.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) = (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (n + r)$$

$$\frac{(n - 1).n}{2} = n.r + \frac{r.(r + 1)}{2}$$

$$= \frac{2nr + r^2 + r}{2}$$

$$n^2 - n = 2nr + r^2 + r \ \Rightarrow \ r^2 + 2nr + n + r - n^2 = 0$$

$$r^2 + (2n + 1)r + (n - n^2) = 0$$

eşitliğinde,

$$\triangle = (2n + 1)^2 - 4.1.(n - n^2) = 8n^2 + 1$$

$$r_{1,2} = \frac{-(2n + 1) \pm \sqrt{8n^2 + 1}}{2}$$

olup; $r > 0$ olduğundan,

$$r = \frac{-(2n + 1) + \sqrt{8n^2 + 1}}{2} \quad (2.3)$$

bulunur.

Teorem 2.1.1: n nin bir balans sayısı olması için gerek ve yeter şart $8n^2 + 1$ ifadesinin tam kare bir doğal sayı olmasıdır.

Örnek 2.1.3: İkinci balans sayısı $B_2 = 6$ ve buna karşılık gelen balansır 2' dir.

O halde;

$$r = \frac{-(2.6 + 1) + \sqrt{8.6^2 + 1}}{2}$$

$$r = \frac{-13 + \sqrt{289}}{2}$$

$$r = 2$$

olmak üzere burada 289, tam karesel bir sayıdır.

Teorem 2.1.2: (2.2) ifadesinden görüleceği üzere, n bir Balans sayısı ise karesi üçgensel bir sayı olmak zorundadır.

Teorem 2.1.3: m. üçgensel sayı bir tam karesel doğal sayı ise, n balans sayısı olmak üzere bu durumda n. Balans sayısına karşılık gelen balansır $(m - n)$ dir.

Teorem 2.1.4 (Rekürans Bağıntısı): Başlangıç koşulları $B_1 = 1$, $B_2 = 6$ olmak üzere $n \geq 2$ için,

$$B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1}$$

dir. Bu rekürans bağıntısı 2. dereceden, lineer ve homojen bir rekürans bağıntısıdır.

Teorem 2.1.5 (Binet Formülü): $B_1 = 1,\ B_2 = 6, n \geq 2$ için,

$$\alpha = 1 + \sqrt{2}$$

$$\beta = 1 - \sqrt{2}$$

olmak üzere n. Balans sayısının Binet Formülü:

$$B_n = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}}$$

biçimindedir.

İspat: Balans sayılarının indirgeme bağıntısı

$$B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1}$$

olduğundan karakteristik denklemi,

$$r^2 - 6r + 1 = 0$$

dir ve kökleri, $\lambda_1 = 3 + \sqrt{8}$, $\lambda_2 = 3 - \sqrt{8}$ bulunur.

Genel çözümü:

$$B_n = c_1.(3 + \sqrt{8})^n + c_2.(3 - \sqrt{8})^n$$

dir.

$B_1 = 1, B_2 = 6$ başlangıç koşulları sağlatılırsa,

$$1 = c_1.\left(3 + \sqrt{8}\right) + c_2.(3 - \sqrt{8})$$

$$6 = c_1.(3 + \sqrt{8})^2 + c_2.(3 - \sqrt{8})^2$$

denklemleri çözülürse, $c_1 = \frac{1}{2\sqrt{8}}, c_2 = -\frac{1}{2\sqrt{8}}$ bulunur. Buradan genel çözüm:

$$B_n = \frac{(3 + \sqrt{8})^n - (3 - \sqrt{8})^n}{2\sqrt{8}}$$

bulunur.

$\lambda_1 = 3 + \sqrt{8}$ ise $\lambda_1 = (1 + \sqrt{2})^2 = \alpha^2$

$\lambda_2 = 3 - \sqrt{8}$ ise $\lambda_2 = (1 - \sqrt{2})^2 = \beta^2$

olduğundan,

$$B_n = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}}$$

elde edilir.

Teorem 2.1.6 (Rekürans Bağıntısı): Balans sayıları için Binet formülü;

$B_n = \frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{4\sqrt{2}}$, $\alpha = 1 + \sqrt{2}$, $\beta = 1 - \sqrt{2}$ olmak üzere,

$$B_{n+1} + B_{n-1} = \frac{\alpha^{2n+2} - \beta^{2n+2}}{4\sqrt{2}} + \frac{\alpha^{2n-2} - \beta^{2n-2}}{4\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\alpha^{2n}(\alpha^2 + \beta^2) - \beta^{2n}(\alpha^2 + \beta^2)}{4\sqrt{2}}$$

$$= (\alpha^2 + \beta^2)\frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}}$$

$$= 6B_n, \qquad n \geq 2.$$

Balans sayıları için rekürans bağıntısı;

$B_1 = 1, B_2 = 6$ ve $n \geq 2$ için,

$$B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1}$$

bulunur.

Sonuç 2.1.1: Her n pozitif tamsayısı için, B_n, n. Balans sayısı olmak üzere,

i) $B_{2n-1} = B_n^2 - B_{n-1}^2$
ii) $B_{2n} = B_n(B_{n+1} - B_{n-1})$
iii) $B_1 + B_3 + \cdots + B_{2n-1} = B_n^2$
iv) $B_2 + B_4 + \cdots + B_{2n} = B_n^2 B_{n-1}$

v) $n \geq 2$ için, $B_n^2 = 1 + B_{n-1}B_{n+1}$

dir.

Teorem 2.1.7: B_n, n. Balans sayısı ve $n \geq 2$ olmak üzere,

$$B_n^2 = 1 + B_{n-1}B_{n+1}$$

dir.

İspat: Tümevarım yöntemini kullanırsak,

$n = 2$ için;

$$B_2^2 = 6^2 = 1 + 1.35$$

$$= 1 + B_1B_3$$

olduğundan doğrudur.

$n = k$ için;

$$B_k^2 = 1 + B_{k-1}B_{k+1}$$

eşitliğinin sağlandığını kabul edelim.

$n = k + 1$ için;

$$B_{k+1}^2 = B_{k+1}B_{k+1}$$

$$= (6B_k - B_{k-1})B_{k+1}$$

$$= 6B_kB_{k+1} - B_{k-1}B_{k+1}$$

$$= 6B_kB_{k+1} - (B_k^2 - 1)$$

$$= B_k(6B_{k+1} - B_k) + 1$$

$$= B_kB_{k+2} + 1$$

olduğundan teorem $n = k + 1$ için doğrulanır.

Teorem 2.1.8 (Balans Sayılarını Üreten Fonsiyonlar):

x herhangi bir balans sayısı olmak üzere;

$$f(x) = 2x\sqrt{8x^2 + 1}$$

$$g(x) = 3x + \sqrt{8x^2 + 1}$$

$$h(x) = 17x + 6\sqrt{8x^2 + 1}$$

$$p(x) = 6x\sqrt{8x^2 + 1} + 16x^2 + 1$$

$f(x),\ g(x),\ h(x)$ ve $p(x)$ de birer balans sayısıdır.

İspat: x, bir balans sayısı olduğundan $8x^2 + 1$ bir tam karesel doğal sayıdır ve

$$\frac{8x^2(8x^2 + 1)}{2} = 4x^2(8x^2 + 1)$$

ifadesi tam karesel ve üçgensel sayıdır.

$f(x) = 2x\sqrt{8x^2 + 1}$ bir balans sayısıdır ki

$$g[g(x)]^2 + 1 = \left(8x + 3\sqrt{8x^2 + 1}\right)^2$$

ifadesi de $g(x)$' in bir balans sayısı olduğunu gösterir.

$g(g(x)) = h(x)$ ve g$g\big(f(x)\big) = p(x)$ olup; $h(x)$ ve $p(x)$ de birer balans sayısıdır.

Teorem 2.1.9: Herhangi bir x Balans sayısı için ;

x'ten sonraki balans sayısı: $g(x) = 3x + \sqrt{8x^2 + 1}$

x'ten önceki balans sayısı: $g'(x) = 3x - \sqrt{8x^2 + 1}$ dir.

Teorem 2.1.10 (Üreteç Fonsiyonu): B_n, n. Balans sayısı olmak üzere, Balans sayıları için üreteç fonksiyonu $g(x)$ olsun.

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$$

olmak üzere,

$$g(x) = \frac{x}{1 - 6x + x^2}$$

dir.

İspat: $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ Balans sayı dizisinin üreteç fonksiyonu olmak üzere,

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots + B_n x^n + \cdots \qquad (2.5)$$

(2.5) eşitliğini $6x$ ile çarpalım.

$$6x.\,g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 6B_n x^{n+1} = 6B_0 x + 6B_1 x^2 + 6B_2 x^3 + \cdots + 6B_n x^{n+1} + \cdots \qquad (2.6)$$

(2.5) eşitliğini x^2 ile çarpalım.

$$x^2.\,g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^{n+2} = B_0 x^2 + B_1 x^3 + B_2 x^4 + \cdots + B_n x^{n+2} + \cdots \quad (2.7)$$

(2.5) ile (2.7) eşitliklerini toplayıp, (2.6) eşitliğini çıkaralım;

$$\begin{aligned} &g(x) - 6xg(x) + x^2 g(x) \\ &\qquad = x.(B_1 - 6B_0) + x^2(B_2 - 6B_1 + B_0) + x^3(B_3 - 6B_2 + B_1) + \cdots \end{aligned}$$

$B_0 = 0, B_1 = 1$ ve $n \geq 2$ için $B_{n+1} - 6B_n - B_{n-1} = 0$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$g(x)[1 - 6x + x^2] = x$$

$$g(x) = \frac{x}{1 - 6x + x^2}$$

bulunur.

2.2 LUCAS-BALANS SAYILARI

Tanım 2.2.1: B_n, n. Balans sayısı olmak üzere,

$$C_n = \sqrt{8B_n^2 + 1}$$

eşitliğini sağlayan C_n sayısına n. Lucas-Balans sayısı denir.

Teorem 2.2.1 (Rekürans Bağıntısı): Lucas Balans sayıları için rekürans bağıntısı başlangıç koşulları,

$$C_1 = 3, C_2 = 17, n \geq 2$$

olmak üzere;

$$C_{n+1} = 6C_n - C_{n-1}$$

ile tanımlıdır.

Lucas balans sayıları: $3,17,99,577,3363,\ldots$ dır.

İspat: Lucas-Balans sayı tanımından,

$$C_{n+1} = \sqrt{8B_{n+1}^2 + 1}$$

$$C_{n+1}^2 = 8B_{n+1}^2 + 1$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$C_{n+1}^2 = 8\left(3B_n + \sqrt{8B_n^2 + 1}\right)^2 + 1$$

$$= \left(3\sqrt{8B_n^2+1}+8B_n\right)^2$$

elde edilir. Yine Lucas-Balans sayı tanımı dikkate alınırsa,

$$C_{n+1}^2 = (3C_n + 8B_n)^2$$

$$C_{n+1} = 3C_n + 8B_n \qquad (2.8)$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$C_{n-1} = 3C_n - 8B_n \qquad (2.9)$$

eşitliğini de yazabiliriz. (2.8) ve (2.9) eşitlikleri toplanarak,

$$C_{n+1} = 6C_n - C_{n-1}$$

elde edilir.

Teorem 2.2.2 (Binet Formülü): C_n, n. Lucas-Balans sayısı ve $\alpha = 1+\sqrt{2}$, $\beta = 1-\sqrt{2}$ olmak üzere, Lucas- Balans sayıları için Binet formülü;

$$C_n = \frac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}}{2}$$

dir.

Teorem 2.2.3: B_n, B_m balans sayıları ve C_n, C_m Lucas balans sayıları olmak üzere;

i) m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere;

$$B_{m+n} = B_m C_n + C_m B_n$$

ii) m ve n iki doğal sayı olmak üzere;

$$C_{m+n} = C_m C_n + 8B_m B_n$$

iii) n pozitif tam sayı olmak üzere;

$$B_{2n} = 2B_nC_n$$

$$C_{2n} = C_n^2 + 8B_n^2$$

iv) m ve n pozitif tam sayılar, $m > n$ için;

$$B_{m-n} = B_mC_n - C_mB_n$$

$$C_{m-n} = C_mC_n - 8B_mB_n$$

v) n ve r doğal sayılar, $n > r$ olmak üzere;

$$B_{n+r}B_{n-r} = (B_n + B_r)(B_n - B_r)$$

dir.

2.3 KOBALANS SAYILARI

Tanım 2.3.1: $n,\ r \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (n + r) \qquad (2.10)$$

eşitliğinde,

n doğal sayısına Kobalans sayısı ve n doğal sayısına karşılık gelen r doğal sayısına da kobalansır denir.

İlk üç kobalans sayısı $2, 14$ ve 84'tür ve bu kobalans sayılarına karşılık gelen kobalansırlar sırasıyla $1, 6$ ve 35'tir.

Örnek 2.3.1:

i) $1 + 2 = 2 + 1$ olup burada $2 \in \mathbb{N}$ Kobalans iken, $1 \in \mathbb{N}$ kobalansırdır.

ii) $1 + 2 + 3 + \cdots + 14 = (14 + 1) + (14 + 2) + \cdots + (14 + 6)$

burada 14 € ℕ Kobalans sayısı ve bu Kobalans sayısına karşılık gelen kobalansır ise 6 ∈ ℕ’dir.

(2.10) ifadesinin her iki yanına $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ eklenirse,

$$n(n+1) = \frac{(n+r)(n+r+1)}{2}$$

olur ve buradan

$$r = \frac{-(2n+1) + \sqrt{8n^2 + 8n + 1}}{2}$$

elde edilir.

Teorem 2.3.1: n’ nin bir Kobalans sayısı olması için gerek ve yeter şart $8n^2 + 8n + 1$’ in tam karesel bir doğal sayı olmasıdır.

Teorem 2.3.2 (Kobalans Sayılarını Üreten Fonksşiyonlar): x bir kobalans sayısı olmak üzere;

i) $f(x) = 3x + \sqrt{8x^2 + 8x + 1} + 1$

ii) $g(x) = 17x + \sqrt{8x^2 + 8x + 1} + 8$

fonksiyonları da birer kobalans sayısıdır.

Teorem 2.3.3: x bir kobalans sayısı olmak üzere,

i) x’ ten sonra gelen kobalans sayısı: $f(x) = 3x + \sqrt{8x^2 + 8x + 1} + 1$

ii) x’ten önce gelen kobalans sayısı: $f(x)' = 3x - \sqrt{8x^2 + 8x + 1} + 1$

dir.

Teorem 2.3.3 (Rekürans Bağıntısı): $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, Kobalans sayı dizisi başlangıç koşulları $b_1 = 0, b_2 = 2$ olmak üzere

$$b_{n+1} = 6b_n - b_{n-1} + 2 \qquad (n \geq 2)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlıdır.

Kobalans sayıları: $0,2,14,84,492,2870, \ldots$ şeklindedir

İspat: $n \geq 2$ için,

$$b_{n+1} = 3b_n + \sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1} + 1$$

$$b_{n-1} = 3b_n - \sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1} + 1$$

eşitlikleri yazılacağından buradan bu iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa,

$$b_{n+1} = 6b_n - b_{n-1} + 2$$

elde edilir.

Teorem 2.3.4 (Binet Formülü): b_n, n. Kobalans sayısı $n = 1,2,3, \ldots$ ve $\alpha = 1 + \sqrt{2}$, $\beta = 1 - \sqrt{2}$ olmak üzere, Kobalans sayı dizisi için Binet formülü:

$$b_n = \frac{\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1}}{\alpha^2 - \beta^2} - \frac{1}{2}$$

dir.

Teorem 2.3.5 (Üreteç Fonksiyonu): Kobalans sayı dizisi: başlangıç koşulları, $b_1 = 0, b_2 = 2$ olmak üzere;

$$b_{n+1} = 6b_n - b_{n-1} + 2, \qquad n \geq 2$$

ile tanımlıdır.

Kobalans sayılarının üreteç fonksiyonu;

$$t(x) = \frac{2x^2}{(1-x)(1-6x+x^2)}$$

dir.

İspat:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

olsun.

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots + b_n x^n + \cdots \qquad (2.11)$$

Yukarıdaki eşitliğini sırasıyla $6x$ ve x^2 ile çarpalım;

$$6xg(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 6b_n x^{n+1}$$
$$= 6b_0 x + 6b_1 x^2 + 6b_2 x^3 + 6b_3 x^4 + \cdots + 6b_n x^{n+1} + \cdots \qquad (2.12)$$

$$x^2 g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+2}$$
$$= b_0 x^2 + b_1 x^3 + b_2 x^4 + b_3 x^5 + b_4 x^6 \ldots + b_n x^{n+2} + \cdots \qquad (2.13)$$

(2.11) eşitliğinden (2.12) eşitliğini çıkararıp (2.13) eşitliğini toplarsak,

$$g(x)[1 - 6x + x^2]$$
$$= b_0 + x(b_1 + 6b_0) + x^2(b_2 - 6b_1 + b_0) + x^3(b_3 - 6b_2 + b_1) + \cdots$$

$$g(x)[1 - 6x + x^2] = 2x^2(1 + x + x^2 + \cdots)$$

$$g(x)[1 - 6x + x^2] = 2x^2 \left[\frac{1}{1 - x}\right] \Rightarrow g(x) = \frac{2x^2}{(1 - x)(1 - 6x + x^2)}$$

elde edilir.

Sonuç 2.3.1:

$$b_n = 2(B_1 + B_2 + \cdots + B_{n-1})$$

$teorem$ (2.3.5)' ten

$$f(x)=\frac{2x^2}{(1-x)(1-6x+x^2)}$$

$$=\frac{2x}{1-x}.\frac{x}{1-6x+x^2}$$

dır.

Ayrıca Balans sayıları için üreteç fonksiyon, $t(x)=\frac{x}{1-6x+x^2}$ olduğundan,

$$f(x)=\frac{2x}{1-x}.t(x)$$

$$=2(x+x^2+\cdots).t(x)$$

elde edilir ki $f(x)=2(x+x^2+\cdots).t(x)$ eşitliğinin her iki yanındaki aynı dereceli x^n 'in katsayıları kıyaslanırsa, $f(x)$ ' den b_nx^n şeklindeyken $2(x+x^2+\cdots).$

$t(x)$ ifadesinden,

$$\sum_{k=1}^{n-1}(2x^k)(B_{n-k}x^{n-k})$$

şeklinde olacaktır. O halde,

$$b_n=2(B_1+B_2+\cdots+B_{n-1})$$

dir.

Teorem 2.3.6: Kobalans sayıları, ikinci mertebeden lineer olmayan

$$b_{n-1}^2=1+b_{n-1}b_{n+1},\ \ n>2$$

bağıntısını sağlar.

2.4 LUCAS-KOBALANS SAYILARI

Tanım 2.4.1: b bir balans sayısı ise $8b^2 + 8b + 1$ bir tam karesel sayı olduğundan,

$$c = \sqrt{8b^2 + 8b + 1}$$

sayısına n. Lucas-Kobalans sayısı denir.

Teorem 2.4.1: Lucas-Kobalans sayı dizisi başlangıç koşulları $c_1 = 1$ ve $c_2 = 7$ olmak üzere,

$$c_{n+1} = 6c_n - c_{n-1}, \quad n \geq 2$$

dir.

Lucas-Kobalans sayıları: $1, 7, 41, 1393, 8119, \ldots$' dır.

İspat:

$$c_{n+1}^2 = 8b_{n+1}^2 + 8b_{n+1} + 1$$

$$= 8.\left(3b_n + \sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1} + 1\right)^2 + 8b_{n+1} + 1$$

$$= \left(3\sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1} + 8b_n + 4\right)^2$$

$$= (3c_n + 8b_n + 4)^2$$

$$c_{n+1} = 3c_n + 8b_n + 4 \qquad (2.14)$$

$c_{n-1}^2 = 8b_{n-1}^2 + 8b_{n-1} + 4$ olduğundan benzer şekilde;

$$c_{n-1} = 3c_n - 8b_n - 4 \qquad (2.15)$$

(2.16) ve (2.17) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa;

$$c_{n+1} + c_{n-1} = 6c_n$$

elde edilir ki buradan;

$$c_{n+1} = 6c_n - c_{n-1}, \quad n \geq 2$$

yazılır.

Teorem 2.4.2 (Binet Formülü): Başlangıç koşulları; $c_1 = 1, c_2 = 7$ olmak üzere $c_{n+1} = 6c_n - c_{n-1}$, $n \geq 2$ rekürans bağıntısının α_1 ve α_2 kökleri için binet formülü:

$$c_n = \frac{\alpha_1^{2n-1} + \alpha_2^{2n-1}}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

dir.

Teorem 2.4.3:

i) Her balansır bir kobalans sayısıdır.
ii) Her kobalansır bir balans sayısıdır.

İspat:

$R_n, n.$ balansır,

$b_n, n.$ kobalans sayısı

$r_{n+1}, (n+1).$ Kobalansır

$B_n, n.$ balans sayısı olmak üzere;

$$R = \frac{-(2B+1) + \sqrt{8B^2+1}}{2} \tag{2.16}$$

$$R_{n+1} = \frac{-(2B_{n+1}+1) + \sqrt{8B_{n+1}^2+1}}{2} \tag{2.17}$$

$$R_{n-1} = \frac{-(2B_{n-1}+1) + \sqrt{8B_{n-1}^2+1}}{2} \tag{2.18}$$

$$B_{n+1} = 3B_n + \sqrt{8B_n^2 + 1} \qquad (2.19)$$

$$B_{n-1} = 3B_n - \sqrt{8B_n^2 + 1} \qquad (2.20)$$

(2.19) ve (2.20) numaralı denklemleri (2.17) ve (2.18) numaralı denklemlerde yerine yazıp, (2.17) ve (2.18)' u taraf tarafa toplarsak,

$$R_{n+1} = \frac{2B_n + \sqrt{8B_n^2 + 1} - 1}{2}$$

$$R_{n-1} = \frac{-14B_n + 5\sqrt{8B_n^2 + 1} - 1}{2}$$

$$R_{n+1} + R_{n-1} = \frac{-12B_n + 6\sqrt{8B_n^2 + 1} - 2}{2}$$

$$= 6.\frac{-(2B+1) + \sqrt{8B^2 + 1}}{2} + 2$$

$$= 6.R_n + 2$$

dolayısıyla

$$R_{n+1} = 6R_n - R_{n-1} + 2$$

elde edilir.

Burada $R_1 = b_1 = 0$, $R_2 = b_2 = 2$' dir. Yani $R_n = b_n$'dir.

Teorem 2.4.4: Her kobalans sayısı çifttir.

İspat: Tümevarım yöntemini kullanırsak;

ilk iki kobalans sayısı $b_1 = 0$ ve $b_2 = 2$ olup çifttirler.

Varsayalım ki b_n çift olsun. Bu durumda,

$n \leq k$ için; $b_{n+1} = 6b_n - b_{n-1} + 2$ olduğundan b_{k+1}' de çifttir.

2.5 MATRİS GÖSTERİMLERİ

Teorem 2.5.1: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ olmak üzere;

$$A^n = \begin{bmatrix} -B_{n-1} & B_n \\ -B_n & B_{n+1} \end{bmatrix}, n = 1, 2, 3, \ldots$$

dir.

Teorem 2.5.2: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ olmak üzere;

$$A^n . B = \begin{bmatrix} -B_n & 2b_{n+1} + 1 \\ -B_{n+1} & 2b_{n+2} + 1 \end{bmatrix}, n = 1, 2, 3, \ldots$$

dir.

Teorem 2.5.3: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ ve $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$A^n . C = \begin{bmatrix} C_{n-1} & C_n \\ C_n & C_{n+1} \end{bmatrix}, n = 1, 2, 3, \ldots$$

dir.

Teorem 2.5.4: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ olmak üzere;

$$A^n . D = \begin{bmatrix} c_n & c_{n+1} \\ c_{n+1} & c_{n+2} \end{bmatrix}, n = 1, 2, 3, \ldots$$

dir.

3. BALANS POLİNOMLARI VE TÜREVLERİ

Bu bölümde P.K.Ray (2017)'in makalesi çalışılmıştır.

3.1 BALANS POLİNOMLARI

Tanım 3.1.1: Balans polinomları dizisi

$$B_{n+1}(x) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 6x, & n = 1 \\ 6xB_n(x) - B_{n-1}(x), & n > 1 \end{cases} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Bazı balans polinomları aşağıdaki gibidir:

$$B_0(x) = 0$$

$$B_1(x) = 1$$

$$B_2(x) = 6x$$

$$B_3(x) = 36x^2 - 1$$

$$B_4(x) = 216x^3 - 12x$$

$$B_5(x) = 1296x^4 - 108x^2 + 1$$

.

.

.

$\forall\, j$ için, $B_J(1) = B_J$' dir.

Teorem 3.1.1: Balans polinomlarının genel terimi:

$$B_{n+1}(x)=\sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}(-1)^j\binom{n-j}{j}(6x)^{n-2j}$$

şeklindedir.

Teorem 3.1.2 (Binet Formülü): (3.1) denklemin kökleri $\lambda_1(x)=3x+\sqrt{9x^2-1}$ ve $\lambda_2=3x-\sqrt{9x^2-1}$ olmak üzere Balans polinomları için Binet formülü,

$$B_n(x)=\frac{\lambda_1^n(x)-\lambda_2^n(x)}{\lambda_1(x)-\lambda_2(x)}$$

dir. Burada $9x^2-1\geq 0$' dır.

Teorem 3.1.3: $B_n(x), n.$ Balans polinomu olmak üzere $x>\frac{1}{3}$ için,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{B_{n+1}(x)}{B_n(x)}=\lambda_1(x)$$

dir.

Özellik 3.1.1: $B_n(x)$ Balans polinomları olmak üzere, 1 ile $n-1$ arasında yer alan bir r tam sayısı için;

$$B_{n+1}(x)=B_r(x)B_{n-(r-2)}(x)-B_{r-1}(x)B_{n-(r-1)}(x)$$

dir.

Özellik 3.1.2: $B_n, n.$ Balans polinomu, m ve n herhangi iki tam sayı olmak üzere,

$$B_{m+n}(x)=B_{m+1}(x)B_n(x)-B_m(x)B_{n-1}(x) \qquad (3.2)$$

dir.

Burada $m=n-1$ ve $m=n$ için sırasıyla

$$B_{2n-1}(x)=B_n^2(x)-B_{n-1}^2(x) \qquad (3.3)$$

$$B_{2n}(x)=B_n(x)[B_{n+1}(x)-B_{n-1}(x)] \qquad (3.4)$$

elde edilir. Ya da (3.4) denkleminin eş değeri,

$$B_{2n}(x) = \frac{B_{n+1}^2(x) - B_{n-1}^2(x)}{6x}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.4: $N = \begin{bmatrix} 6x & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$N^n = \begin{bmatrix} B_{n+1}(x) & -B_n(x) \\ B_n(x) & -B_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

dir.

Sonuç 3.1.1 (Cassini Formülü): $detN = 1$ ve $detN^n = (detN)^n = 1$ olduğundan, Balans polinomları için Cassini formülü,

$$B_n^2(x) - B_{n-1}(x)B_{n+1}(x) = 1$$

dir.

Teorem 3.1.5: $B_n(x)$, n. Balans polinomu olmak üzere,

$$B_{-n}(x) = -B_n(x)$$

dir.

Özellik 3.1.3 (Catalan Özdeşliği): B_n, n. Balans polinomu, n ve r iki tam sayı olmak üzere, $n > r$ için, Balans polinomları için Catalan özdeşliği:

$$B_{n-r}(x)B_{n+r}(x) - B_n^2(x) = -B_r^2(x)$$

şeklidedir.

Sonuç 3.1.2: $B_n(x), n.$ Balans polinomu olmak üzere,

$$B_{2n}(x) = [B_{2n}(x) + B_{6n}(x)] = B_{4n}^2(x)$$

ve

$$B_{2n}(x)B_{2n+2r}(x)+B_r^2(x)=B_{2n+r}^2(x)$$

dir.

Özellik 3.1.4: $B_n(x), n.$ Balans polinomu, n, r, a, b, c ve d birer tam sayı ve $a+b=c+d$ olmak üzere,

$$B_a(x)B_b(x)-B_c(x)B_d(x)=B_{a-r}(x)B_{b-r}(x)-B_{c-r}(x)B_{d-r}(x)$$

dir.

İspat: n, h ve k tam sayı olmak üzere Binet formülünden

$$B_{n+h}(x)B_{n+k}(x)-B_n(x)B_{n+h+k}(x)=B_h(x)B_k(x)$$

eşitliği kolayca doğrulabilir.

Bu eşitlikte $n=c, h=a-c$ ve $k=b-c$ alınırsa,

$$B_a(x)B_b(x)-B_c(x)B_{a+b-c}(x)=B_{a-c}(x)B_{b-c}(x)$$

elde edilir.

Ve yine aynı eşitlikte $n=c-r, h=a-c$ ve $k=b-c$ alınırsa,

$$B_{a-r}(x)B_{b-r}(x)-B_{c-r}(x)B_{a+b-c-r}(x)=B_{a-c}(x)B_{b-c}(x)$$

Bu iki eşitlikten ve $a+b-c=d$ alınarak ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.3: n ve m pozitif tam sayı ve $n \leq m$ olmak üzere,

$$B_{m-n}(x)=B_{n+1}(x)B_m(x)-B_n(x)B_{m+1}(x)$$

dir.

Teorem 3.1.6: $B_n(x)$, n. Balans polinomu olmak üzere,

$$B_n(x)=\prod_{1\leq l\leq n-1}\left[6x-2\cos\frac{l\pi}{n}\right]$$

dir.

İspat: $n \geq 1$ için $B_n(x)$ Balans polinomunun derecesi $n-1$’ dir. B_n’ nin sıfırları için formül belirlemek için binet formülünü kullanarak $B_n(x)$ ’ i hiperbolik fonksiyonlar cinsinden ifade ederiz.

$3x = \cosh z$ alınırsa,

$$\lambda_1(x) = \cosh z + \sinh z = e^z$$

ve

$$\lambda_2(x) = \cosh z - \sinh z = e^{-z}$$

olmak üzere buradan

$$B_n(x) = \frac{e^{nz} - e^{-nz}}{e^z - e^{-z}} = \frac{\sinh(nz)}{\sinh z}$$

elde edilir.

$i = \sqrt{-1}$ olmak üzere $z = u + iv$ olsun. $\sinh z \neq 0$ olduğundan

$B_n(x) = 0 \Leftrightarrow \sinh(nz) = 0$ $(e^{2nz} = 1)$ olmasıdır.

$$e^{2nu}(\cos 2nv + i \sin 2nv) = 1$$

buradan $u = 0$’ dır. Bu yüzden

$$\sinh(inv) = i \sin nv = 0$$

dır. l tamsayısı için $v = \frac{l\pi}{n}$ ve $z = i\frac{l\pi}{n}$’ dir. Sonuç olarak l tam sayısı için

$$3x = \cosh\left(i\frac{l\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{l\pi}{n}\right)$$

elde edilir.

3.2 BALANS POLİNOMLARININ TÜREVLERİ

Balans polinomları, $B_{n+1}(x) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 6x, & n = 1 \\ 6xB_n(x) - B_{n-1}(x), & n > 1 \end{cases}$ şeklinde tanımlı idi. Buradan,

Balans polinomlarının x' e göre türevi,

$B_0'(x) = 0, B_1'(x) = 0$ olmak üzere

$$B_n'(x) = \sum_{j=0}^{2\left\lfloor\frac{n-2}{2}\right\rfloor} (-1)^j (n-1-2i) \binom{n-1-j}{j} (6x)^{n-2j-2} \tag{3.2}$$

dır.

Balans polinomlarının x' e göre bazı türevleri,

$$B_1'(x) = 0$$

$$B_2'(x) = 6$$

$$B_3'(x) = 72x$$

$$B_4'(x) = 648x^2 - 12$$

$$B_5'(x) = 5184x^3 - 216x$$

.

.

.

şeklindedir.

Örnek 3.2.1: Balans polinomlarının x değişkeni yerine değişik tamsayılar yazılarak farklı türlerde sayısal diziler üretilebilir.

$$\{B'_n(1)\} = \{0, 6, 72, 636, 4968, \dots\}$$

$$\{B'_n(2)\} = \{0, 6, 144, 2580, 41040, \dots\}$$

$$\{B'_n(3)\} = \{0, 6, 216, 5820, 139320, \dots\}$$

$$\{B'_n(4)\} = \{0, 6, 288, 10356, 323612, \dots\}$$

dir.

Sonuç 3.2.1: $B_n(x)$ Balans polinomunun 1. türevi $B'_n(x)$ olmak üzere; $x \neq \mp\frac{1}{3}$ için,

$$B'_n(x) = \frac{3nB_{n+1}(x) - 18xB_n(x) - 3nB_{n-1}(x)}{2(9x^2 - 1)}$$

dir.

İspat: $\lambda_1(x)\lambda_2(x) = 1$ olmak üzere $\lambda_1(x) = 3x + \sqrt{9x^2 - 1}$ ve $\lambda_2(x) = 3x - \sqrt{9x^2 - 1}$'dir. Türevleri sırasıyla;

$$\lambda'_1(x) = \frac{6\lambda_1(x)}{\triangle}, \lambda'_2(x) = -\frac{6\lambda_2(x)}{\triangle}$$

Burada $\triangle = 2\sqrt{9x^2 - 1}$'dir. O halde Binet formülünden;

$$B'_n(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{\lambda_1^n(x) - \lambda_2^n(x)}{\triangle}\right]$$

$$= \frac{6n \triangle \left[\frac{\lambda_1^n(x) + \lambda_2^n(x)}{\triangle}\right] - 36x \left[\frac{\lambda_1^n(x) - \lambda_2^n(x)}{\triangle}\right]}{\triangle^2}$$

$$= \frac{6n \left[\frac{\lambda_1^n(x)\{\lambda_1(x) - \lambda_2(x)\} + \lambda_2^n(x)\{\lambda_1(x) - \lambda_2(x)\}}{\triangle}\right] - 36xB_n(x)}{\triangle^2}$$

$$= \frac{6n \left[\frac{\lambda_1^{n+1}(x) - \lambda_2^{n+1}(x)}{\triangle} - \frac{\lambda_1^{n-1}(x) - \lambda_2^{n-1}(x)}{\triangle}\right] - 36xB_n(x)}{\triangle^2}$$

$$= \frac{3nB_{n+1}(x) - 18xB_n(x) - 3nB_{n-1}(x)}{2(9x^2-1)}$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.2: $B_n, n.$ Balans polinomu olmak üzere, $B_1'(x) = 0$ ve $n > 1$ için

$$B_n'(x) = \sum_{j=1}^{n-1} 6B_j(x)B_{n-j}(x)$$

dir.

Sonuç 3.2.3: $B_n, n.$ Balans polinomu olmak üzere $n \geq 1$ için,

$$B_n'(x) = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} 6(n-2j)B_{n-2j} \qquad (3.3)$$

dir.

İspat: Tümevarım ile gösterelim. $n = 1$ için doğrudur. Çünkü;

$$B_1'(x) = \sum_{j=0}^{0} 6(1-j)B_{1-j} = 6$$

dır.

(3.3) denklemini $k \leq n-1$ için doğru kabul edelim. O halde

$$B_n'(x) = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor} 6(n-1-2j)B_{n-1-2j}$$

ve

$$B_{n+1}'(x) = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} 6(n-2j)B_{n-2j}$$

$B_{n+2}(x) = 6xB_{n+1}(x) - B_n(x)$ Balans polinomları için rekürans bağıntısının türevini alarak, hipotezi kullanarak ve gerekli cebirsel işlemler yapılarak, $n+1$ için sonuç kolayca doğrulanır.

Sonuç 3.2.4: $n \geq 1$ için,

$$B_n(x) = \frac{1}{6n}\left[B'_{n+1}(x) - B'_{n-1}(x)\right]$$

dir.

İspat:

(3.2) eşitliğin sağ tarafındaki ifadeyi aşağıdaki gibi indirgersek;

$$\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(-1)^j\binom{n-j}{j}(6x)^{n-2j} - \sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n-2}{2}\right\rfloor}(-1)^j\binom{n-2-j}{j}(6x)^{n-2-2j}$$

$$= (6x)^n + \sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(-1)^j\left[\binom{n-j}{j} + \binom{n-1-j}{j-1}\right](6x)^{n-2j}$$

$$= B_{n+1}(x) - B_{n-1}(x) = (6x)^n + n\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(-1)^j\binom{n-1-j}{j-1}\frac{1}{j}(6j)^{n-2j}$$

$$= B'_{n+1}(x) - B'_{n-1}(x) = 6n(6x)^{n-1} + 6n\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(-1)^j\binom{n-1-j}{j-1}\frac{n-2i}{j}(6x)^{n-1-2j}$$

$$= \frac{B'_{n+1}(x) - B'_{n-1}(x)}{6n} = \sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}(-1)^j\binom{n-1-j}{j-1}(6x)^{n-1-2j} = B_n(x)$$

elde edilir.

Balans polinomlarının genel teriminden x' e göre 2. türevi alırsak;

$n \geq 2$ ile $B_1''(x) = 0$ ve $B_2''(x) = 0$ olmak üzere,

$$B_n''(x) = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor} (-1)^j 6^{n-1-2j} (n-1-2j)(n-2j-2) \binom{n-1-j}{j} x^{n-2j-3}$$

elde edilir.

$B_n(x), n.$ Balans polinomuolmak üzere x' e göre bazı 2. türevler,

$$B_1''(x) = 0$$

$$B_2''(x) = 0$$

$$B_3''(x) = 72$$

$$B_4''(x) = 1296x$$

$$B_5''(x) = 15552x^2 - 216$$

.

.

.

şeklindedir.

Örnek 3.2.2: Balans polinomlarının x değişkeni yerine değişik tam sayılar yazılarak farklı türlerde sayısal diziler türetilebilir.

$$\{B_n''(1)\} = \{0, 6, 72, 1296, 15336, \dots\}$$

$$\{B_n''(2)\} = \{0, 0, 72, 2592, 61992, \dots\}$$

$$\{B_n''(3)\} = \{0, 0, 72, 3888, 139752, \dots\}$$

$$\{B_n''(4)\} = \{0, 0, 72, 5184, 248832, \dots\}$$

şeklindedir.

2. türev bağıntısını farklılaştırarak aşağıdaki tekrarlama ilişkisini elde ederiz.

$$B_{n+1}^{(r)}(x) = \begin{cases} 0, & n < r \\ 6^r r!, & n = r \\ \dfrac{1}{n-r}\left[6nxB_n^{(r)}(x) - (n+r)B_{n-1}^{(r)}(x)\right], & n > r \end{cases}$$

‘dir.

4. İKİ DEĞİŞKENLİ BALANS POLİNOMLARI VE KISMİ TÜREVLERİ

Bu bölümde iki değişkenli balans polinomlarını tanımlanmıştır. Daha sonra binet formülü, üreteç fonksiyonu, matris gösterimi ve kısmi türevleri ile ilgili çeşitli sonuçlar bulunmuştur.

4.1 İKİ DEĞİŞKENLİ BALANS POLİNOMLARI

Tanım 4.1.1: $B_n(x,y)$ iki değişkenli Balans polinomu olmak üzere, iki değişkenli Balans polinomlarının dizisi;

$$B_n(x,y) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 6x, & n = 2 \\ 6xB_{n-1}(x,y) - yB_{n-2}(x,y), & n > 2 \end{cases} \tag{4.1}$$

dir.

Her $B_n(1,1) = B_n$ için bazı iki değişkenli balans polinomları:

$$B_0(x,y) = 0$$

$$B_1(x,y) = 1$$

$$B_2(x,y) = 6x$$

$$B_3(x,y) = 36x^2 - y$$

$$B_4(x,y) = 216x^3 - 12xy$$

$$B_5(x,y) = 1296x^4 - 108x^2y + y^2$$

.

.

.

şeklindedir.

Teorem 4.1.1: $B_n(x, y)$ iki değişkenli balans polinomu ve $m(t)$ iki değişkenli balans polinomlarının üreteç fonksiyonu olmak üzere;

$$\mathrm{m(t)} = \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \mathrm{B_n(x,y)t^n} = \frac{t}{1 - 6xt + yt^2}$$

dir.

İspat: $B_n(x, y)$ iki değişkenli balans polinomu ve $m(t)$ iki değişkenli balans polinomlarının üreteç fonksiyonu olsun. O halde

$$\begin{aligned} & m(t) - 6xtm(t) + yt^2 m(t) \\ & \quad = B_0(x, y) + tB_1(x, y) - 6xtB_0(x, y) \\ & \quad + \sum_{n=2}^{\infty} t^n [B_n(x, y) - 6xB_{n-1}(x, y) + yB_{n-2}(x, y)] \\ & \quad = t. \end{aligned}$$

Buradan

$$\mathrm{m(t)} = \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \mathrm{B_n(x,y)t^n} = \frac{t}{1 - 6xt + yt^2}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.2:$B_n(x, y)$ iki değişkenli balans polinomu olmak üzere genel terimi;

$$B_{n+1}(x, y) = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (-1)^j \binom{n-j}{j} (6x)^{n-2j} y^j \tag{4.2}$$

dir.

(4.1) denklemi çözüldüğünde kökleri; $\lambda_1(x,y) = 3x + \sqrt{9x^2 - y}$ ve $\lambda_2(x,y) = 3x - \sqrt{9x^2 - y}$' dir. Burada $9x^2 - y \geq 0$'dır.

O halde $x = 1, y = 1$ için Balans sayılarının kökleri olan $\lambda_1 = 3 + \sqrt{8}$ ve $\lambda_2 = 3 - \sqrt{8}$ gelir.

Teorem 4.1.3 (Binet Formülü): $B_n(x,y)$ iki değişkenli balans polinomu, $\lambda_1(x,y) = 3x + \sqrt{9x^2 - y}$, $\lambda_2(x,y) = 3x - \sqrt{9x^2 - y}$ ve $9x^2 - y \geq 0$ olmak üzere Binet formülü;

$$B_n(x,y) = \frac{\lambda_1^n(x,y) - \lambda_2^n(x,y)}{\lambda_1(x,y) - \lambda_2(x,y)}$$

dir.

İspat: Tümevarım yöntemiyle gösterelim.

$n = 1$ için,

$$B_1(x,y) = \frac{\lambda_1^1(x,y) - \lambda_2^1(x,y)}{\lambda_1(x,y) - \lambda_2(x,y)}$$

$$1 = \frac{3x + \sqrt{9x^2 - y} - 3x + \sqrt{9x^2 - y}}{3x + \sqrt{9x^2 - y} - 3x + \sqrt{9x^2 - y}}$$

$$1 = 1$$

olduğundan doğrudur.

$i = 1, 2, 3, \ldots, k$ için

$$B_i(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{9x^2 - y}}\left(\lambda_1^i(x,y) - \lambda_2^i(x,y)\right)$$

olsun. O halde

$$B_{k+1}(x,y) = 6xB_k(x,y) - yB_{k-1}(x,y)$$

$$= 6x\left[\frac{1}{2\sqrt{9x^2-y}}\left(\lambda_1^k(x,y)-\lambda_2^k(x,y)\right)\right]-\frac{1}{2\sqrt{9x^2-y}}y\left(\lambda_1^{k-1}(x,y)-\lambda_2^{k-1}(x,y)\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{9x^2-y}}\left[\left(6x\lambda_1^k(x,y)-y\lambda_1^{k-1}(x,y)\right)-\left(6x\lambda_2^k(x,y)-y\lambda_2^{k-1}(x,y)\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{9x^2-y}}\left(\lambda_1^{k+1}(x,y)-\lambda_2^{k+1}(x,y)\right)$$

dir. Burada $9x^2-y\geq 0$ olmak üzere $\lambda_1(x,y)=3x+\sqrt{9x^2-y}$ ve $\lambda_2(x,y)=3x-\sqrt{9x^2-y}$' dir.

Teorem 4.1.4: $B_n(x,y), n.$ iki değişkenli Balans polinomu olmak üzere $x>\frac{\sqrt{y}}{3}$ için,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{B_{n+1}(x,y)}{B_n(x,y)}=\lambda_1(x,y)$$

dir.

İspat: Binet formülünü kullanarak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{B_{n+1}(x,y)}{B_n(x,y)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_1^{n+1}(x,y)-\lambda_2^{n+1}(x,y)}{\lambda_1^n(x,y)-\lambda_2^n(x,y)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_1(x,y)-\left(\frac{\lambda_2(x,y)}{\lambda_1(x,y)}\right)^n\lambda_2(x,y)}{1-\left(\frac{\lambda_2(x,y)}{\lambda_1(x,y)}\right)^n}$$

$$=\lambda_1(x,y)$$

elde edilir.

$\lambda_2(x,y)<\lambda_1(x,y)$ olduğundan, her $x>\frac{\sqrt{y}}{3}$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\lambda_2(x,y)}{\lambda_1(x,y)}\right)^n=0$$

elde edilir.

Teorem 4.1.5: $x = -\frac{\sqrt{y}}{3}$ ya da $x = \frac{\sqrt{y}}{3}$ için;

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{B_{n+1}}{B_n}\right| = 1$$

ve $x < -\frac{\sqrt{y}}{3}$ için;

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{B_{n+1}}{B_n}\right| = \lambda_1(x,y)$$

dir. Fakat $-\frac{\sqrt{y}}{3}$ ve $\frac{\sqrt{y}}{3}$ arasındaki x' ler için limit mevcut değildir.

Teorem 4.1.6: $B_n, n.$ iki değişkenli Balans polinomu olmak üzere, iki değişkenli Balans polinomlarının 2. dereceden rekürans bağıntısı:

$$B_n^2(x,y) = y^{n-1} + B_{n-1}(x,y)B_{n+1}(x,y)$$

dir.

İspat: Tümevarım yöntemiyle ispatlayalım.

$n = 1$ için,

$$B_1^2(x,y) = y^0 + B_0(x,y)B_2(x,y)$$

$$1 = 1$$

olduğundan doğruluğu açıktır.

$n = k$ için,

$$B_k^2(x,y) = y^{k-1} + B_{k-1}(x,y)B_{k+1}(x,y)$$

doğru olsun.

$n = k + 1$ için,

$$B_{k+1}^2(x,y) = [6xB_k(x,y) - yB_{k-1}(x,y)].B_{k+1}(x,y)$$

$$6xB_k(x,y)B_{k+1}(x,y) - yB_{k-1}(x,y)B_{k+1}(x,y)$$

$$= 6xB_k(x,y)B_{k+1}(x,y) - y(B_k^2(x,y) - y^{k-1})$$

$$= 6xB_k(x,y)B_{k+1}(x,y) - yB_k^2(x,y) + y^k$$

$$= B_k(x,y)[6xB_{k+1}(x,y) - yB_k(x,y)] + y^k$$

$$= B_k(x,y)B_{k+2}(x,y) + y^k$$

olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.7: $B_n(x,y)$ n. iki değişkenli Balans polinomu olmak üzere

$$N = \begin{bmatrix} 6x & -y \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olsun. Bu durumda n herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere;

$$N^n = \begin{bmatrix} B_{n+1}(x,y) & -yB_n(x,y) \\ B_n(x,y) & -yB_{n-1}(x,y) \end{bmatrix}$$

dir.

İspat: Tümevarım yöntemiyle gösterelim.

$n = 1$ için,

$$N^1 = \begin{bmatrix} B_2(x,y) & -yB_1(x,y) \\ B_1(x,y) & -yB_0(x,y) \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 6x & -y \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & -y \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan doğrudur.

$n = k$ için,

$$N^k = \begin{bmatrix} B_{k+1}(x,y) & -yB_k(x,y) \\ B_k(x,y) & -yB_{k-1}(x,y) \end{bmatrix}$$

doğru olsun. O halde

$n = k + 1$ için,

$$N^{k+1} = N.N^k = \begin{bmatrix} 6x & -y \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} B_{k+1}(x,y) & -yB_k(x,y) \\ B_k(x,y) & -yB_{k-1}(x,y) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6xB_{n+1}(x,y) - yB_n(x,y) & -6xyB_n(x,y) + y^2B_{n-1}(x,y) \\ B_{n+1}(x,y) & -yB_n(x,y) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} B_{n+2}(x,y) & -yB_{n+1}(x,y) \\ B_{n+1}(x,y) & -yB_n(x,y) \end{bmatrix}$$

olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.8 (Cassini Özdeşliği): $B_n(x,y)$ n. iki değişkenli Balans polinomu olmak üzere, iki değişkenli Balans polinomları için Cassini Formülü:

$$yB_n^2(x,y) - yB_{n-1}(x,y)B_{n+1}(x,y) = y^n$$

dir.

İspat: $detN = \begin{vmatrix} 6x & -y \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

$$= y$$

$$detN^n = \begin{vmatrix} B_{n+1}(x,y) & -yB_n(x,y) \\ B_n(x,y) & -yB_{n-1}(x,y) \end{vmatrix}$$

elde edilir. Buradan $teorem$ 4.1.5 kullanılırsa,

$$B_n^2(x,y) - yB_{n-1}(x,y)B_{n+1}(x,y) = y^n$$

elde edilir.

Teorem 4.1.9: $B_n(x,y)$, n. iki değişkenli Balans polinomu ve n pozitif tamsayı olmak üzere;

$$-y^n B_{-n}(x,y) = B_n(x,y)$$

dir.

İspat:

$$N^{-n} = \begin{bmatrix} B_{-n+1}(x,y) & -yB_{-n}(x,y) \\ B_{-n}(x,y) & -yB_{-n-1}(x,y) \end{bmatrix}$$

$$(N^n)^{-1} = \frac{1}{y^n}\begin{bmatrix} -yB_{n-1}(x,y) & yB_n(x,y) \\ -B_n(x,y) & B_{n+1}(x,y) \end{bmatrix}$$

$$-y^n B_{-n}(x,y) = B_n(x,y)$$

elde edilir.

Teorem 4.1.10: M_n, $n \times n$ tipinde tridiagonal bir matris olsun. $n \geq 1$ için,

$$M_n = \begin{bmatrix} 6x & -iy & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ i & 6x & -iy & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & i & 6x & -iy & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & i & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & -iy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 6x \end{bmatrix}$$

dir. O halde $B_{n+1}(x,y)$ iki değişkenli Balans polinomu olmak üzere $n \geq 0$ için,

$$detM_n = B_{n+1}(x,y)$$

dir.

Teorem 4.1.11: m ve n herhangi iki tamsayı olmak üzere,

$$B_{m+n}(x,y) = B_{n+1}(x,y)B_m(x,y) - yB_n(x,y)B_{m-1}(x,y)$$

dir.

İspat: $n = 1$ için doğruluğu açıktır.

$n \leq k$ için,

$$B_{m+n+1}(x,y) = 6xB_{m+k}(x,y) - yB_{m+k-1}(x,y)$$

$$= B_m(x,y)[6xB_{k+1}(x,y) - yB_k(x,y)] - B_{m-1}(x,y)[6xB_n(x,y) - yB_{k-1}(x,y)]$$

$$= B_m(x,y)B_{k+2}(x,y) - B_{m-1}(x,y)B_{k+1}(x,y)$$

dir.

Bu bölümde iki değişkenli Balans polinomlarının kısmi türevlerini vereceğiz.

4.2 İKİ DEĞİŞKENLİ BALANS POLİNOMLARIN KISMİ TÜREVLERİ

Teorem 4.2.1: $B_n(x,y)$ iki değişkenli balans polinomu olmak üzere genel terimi; $B_{n+1}(x,y) = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (-1)^j \binom{n-j}{j} (6x)^{n-2j} y^j$ şeklinde tanımlanmıştı. Bu denklemin x' e göre kısmi türevini alırsak,

$$\frac{\partial B_0(x,y)}{\partial x} = 0 \text{ ve } \frac{\partial B_1(x,y)}{\partial x} = 0$$

olmak üzere,

$$\frac{\partial B_n(x,y)}{\partial x} = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor} (-1)^j (n-1-2j) \binom{n-1-j}{j} (6x)^{n-2-2j} 6y^j$$

dir.

Bazı iki değişkenli Balans polinomlarının x' e göre kısmi türevleri:

$$\frac{\partial B_1(x,y)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial B_2(x,y)}{\partial x} = 6$$

$$\frac{\partial B_3(x,y)}{\partial x} = 72x$$

$$\frac{\partial B_4(x,y)}{\partial x} = 648x^2 - 12y$$

$$\frac{\partial B_5(x,y)}{\partial x} = 5184x^3 - 216xy$$

$$\vdots$$

şeklindedir.

(4.3) denkleminin y' ye göre kısmi türevini alırsak,

$$\frac{\partial B_0(x,y)}{\partial y} = 0 \text{ ve } \frac{\partial B_1(x,y)}{\partial y} = 0$$

olmak üzere,

$$\frac{\partial B_n(x,y)}{\partial y} = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} (-1)^j (j) \binom{n-1-j}{j} (6x)^{n-1-2j} y^{j-1}$$

dir.

Bazı iki değişkenli Balans polinomlarının y' ye göre kısmi türevleri:

$$\frac{\partial B_1(x,y)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial B_2(x,y)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial B_3(x,y)}{\partial y} = -1$$

$$\frac{\partial B_4(x,y)}{\partial y} = -12x$$

$$\frac{\partial B_5(x,y)}{\partial y} = -108x^2 + 2y$$

.

.

.

şeklindedir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde Fibonacci ve Lucas sayıları için var olan indirgeme bağıntıları, Binet formülleri ve üreteç fonksiyonları verilmiştir. Balans ve Kobalans sayıları için rekürans bağıntıları, Binet formülleri verilmiştir. Var olan Balans polinomları tanımı verilmişir ve bu polinomların türevleri incelenmiştir. İki değişkenli balans polinomları elde edildi ve bu polinomların kısmi türevleri verilmiştir..

Öneri olarak, Tribonacci Balans Polinomları, order-k polinomları tanımlanabilir. İki değişkenli Balans polinomlarının q- benzerleri tanımlanabilir. Dahası bu tür polinomların genel terimi, üreteç fonksiyonları ve bazı cebirsel özellikleri bulunabilir.

6. KAYNAKLAR

Behera, A., and Panda, G.K., “ On the square root of triangular numbers ”, *The Fibonacci Quart*, 37(2):98-105, (1999).

Berczes, A., Liptai, K., Pink, I., “ On generalized balancing numbers ”, *Fibonacci Quart*,, 48(2010), 121-128.

Horadam, A. F., “ A Generalized Fibonacci Sequence ” *American Math. Monthly*, 68(1961):455-459.

Jordan, J. H. , “ Gaussian Fibonacci and Lucas numbers ” , *Fibonacci Quart*. 3(1965), 315-318.

Koshy, T. , “ Fibonacci and Lucas Numbers with Applications ” , A Wiley-Interscience Publication (2001)

Kovacs, T. , Liptai, K. , Olajos, P. , “ On (a,b)- balancing numbers ” , *Publ. Math. Debrecen*, 77(2010), 485-498.

Liptai, K. , “ Fibonacci balancing numbers ” . *The Fibonacci Quarterly*. 2004. 42(4):330-340.

Liptai, K. , “ Lucas balancing numbers ” , *Acta Math. Univ. Ostrav.* , 14 No. 1(2006), 43-47.

Olajas, P. , “ Properties of balancing, cobalancing and generalized balancing numbers ” , *Annales Mathematicae et Informaticae*, 37(2010), 125-138.

Panda, G. K. , Ray P. K. , “ Cobalancing numbers and cobalancers ” *, Int. J. Math. Sci.* , 8(2005):1189-1200.

Panda, G. K. , “ Sequence balancing and cobalancing numbers ” , *Fibonacci Quarterly*, 45(2007), 265-271.

Panda, G. K. , “ Some Fascinating Properties of Balancing Numbers ” , *Proceedings of the Eleventh International Conference on Fibonacci Numbers and their Applications. Cong. Numer*. 194(2009), 185-189.

Panda, G.K. , Ray, P.K. , “ Some links of balancing and cobalancing numbers and with Pell and associated Pell numbers ” , *(oral communication)*.

Ray, P.K. , " Application of Chybeshev polynomials in factorization of balancing and Lucas-balancing numbers" , *Bol.Soc. Paran. Mat*. 2012. 30(2):49-56.

Ray, P.K. , " Balancing and Cobalancing Numbers " , Ph.D Thesis, Department of Mathematics National Institute of Technology Rourkela, India (2009)

Ray, P.K. , " Balancing polynomials and their derivatives " *Ukrainian Mathematical Journal*, 69 (2017), 646-663.

Ray, P.K. , " Certain matrices associated with balancing and Lucas-balancing numbers " , *Matematika* 28 (2012), 1, 15, 22.

Rout, S.S. , " Some Generalizations and Properties of Balancing Numbers " , *Ph.D Thesis, Department of Mathematics National Institute of Technology Rourkela, Rourkela, India* (2015).

Szakacs, T. , " Multiplying balancing number " , *Acta. Univ. Sapientiae, Mathematica*, 3, 1, (2011), 90-96.

7. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	MERVE YAKAR
Doğum Yeri ve Tarihi	:	DENİZLİ / 20.03.1994
Lisans Üniversite	:	PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
Elektronik posta	:	myakar13@posta.pau.edu.tr
İletişim Adresi	:	DENİZLİ, TÜRKİYE

Yayın Listesi :

Mustafa A. and Merve Y. " Bivariate Balancing Polynomials " , JP Journal Algebra Number Theory and Applications 97-108 (2020)

Konferans listesi :

Mustafa AŞCI, Merve YAKAR " International Congress of Academic Reserch- ICAR 2020 " 17-19 Şub, 2020, BOLU, TURKEY