T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HOM-LİE-HOPF CEBİRLER

DOKTORA TEZİ

ADNAN KARATAŞ

DENİZLİ, EKİM - 2020

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HOM-LİE-HOPF CEBİRLER

DOKTORA TEZİ

ADNAN KARATAŞ

DENİZLİ, EKİM - 2020

KABUL VE ONAY SAYFASI

ADNAN KARATAŞ tarafından hazırlanan "**Hom-Lie-Hopf Cebirler**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 05.10.2020 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Doç. Dr. Serpil HALICI	....
Üye Doç. Dr. Serkan SÜTLÜ	....
Üye Doç. Dr. Murat BEŞENK	....
Üye Doç. Dr. Semra NURKAN	....
Üye Dr. Öğr. Üyesi Şahin CERAN	....

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ……………. tarih ve ……………. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....

Prof. Dr. Uğur YÜCEL

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

ADNAN KARATAŞ

ÖZET

HOM-LİE-HOPF CEBİRLER
DOKTORA TEZİ
ADNAN KARATAŞ
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI:DOÇ. DR. SERPİL HALICI)

DENİZLİ, EKİM - 2020

Bu tezde Hom-Lie-Hopf cebirler tanımlanmıştır ve bu cebir tanımında kullanılacak olan; Hom-cebir, Hom-eşcebir, Hom-Lie cebir, Hom-Bicebir, Hom-Hopf cebir tanımları verilmiştir. Ayrıca, etki ve eşetki yardımıyla cebirler ve eşcebirler üzerinde tanımlanan Hom-modül cebir, Hom-modül eşcebir, Hom-eşmodül cebir ve Hom-eşmodül eşcebir tanımları ve özellikleri üzerinde durulmuştur. Ek olarak, bir Hom-Lie cebirin evrensel zarflama cebirinin tanımı verilmiştir. Kullanılacak tanımlardan olan, iki Hom-Hopf cebir ve bunların aralarındaki etki ile oluşan çift çapraz çarpım Hom-Hopf cebir tanımı verilmiştir. Benzer olarak, iki Hom-Hopf cebir ve bunlar arasındaki etki ve eşetki ile oluşan ikili çapraz çarpım Hom-Hopf cebir tanımı verilmiştir. Son olarak, bahsedilen Hom-Hopf cebirlerde dual tanımına yer verilmiştir.

Hom-Lie-Hopf cebirler tanımlanırken yukarıdaki tanımlamalardan aşağıdaki gibi yararlanılmıştır. Hom-Lie-Hopf cebirler, eşlenmiş çift Hom-Lie cebir ikilisi olan $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ üzerinde tanımlanırlar. Belirtilen Hom-Lie cebirlerin evrensel zarflama cebirleri sırasıyla $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ ve $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ olan Hom-Hopf cebirlerdir. Evrensel zarflama cebiri olan $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ ve $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ eşlenmiş çift Hom-Hopf cebir ikilisini oluştururlar ve bu yapı sayesinde çift çapraz çarpım Hom-Hopf cebir olan $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \bowtie \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ yapısı elde edilir. Dualleme ile $\mathcal{U}(\mathfrak{h})^{\circ}$ yapısının da bir Hom-Hopf cebir olduğu gösterildikten sonra $\mathcal{U}(\mathfrak{h})^{\circ}$ ile $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ yapısının karşılıklı Hom-Hopf cebir çifti olduğu gösterilir. Elde edilen bu Hom-Hopf cebir çifti sayesinde ikili çapraz çarpım Hom-Hopf cebiri olan $\mathcal{U}(\mathfrak{h})^{\circ} \blacktriangleright\!\!\triangleleft \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ bulunur. Sonuç olarak elde edilen bu Hom-Hopf cebiri Hom-Lie-Hopf cebir olarak adlandırılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Hom-Hopf cebirler, Hom-Lie cebirler, çift çapraz çarpım, ikili çapraz çarpım.

ABSTRACT

HOM-LIE-HOPF ALGEBRAS
PH.D THESIS
ADNAN KARATAŞ
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS

(SUPERVISOR:ASSOC. PROF. DR. SERPİL HALICI)

DENİZLİ, OCTOBER 2020

In this thesis, the Hom-Lie-Hopf algebras are defined. In order to define the algebra, the definitions of Hom-algebra, Hom-coalgebra, Hom-bialgebra, Hom-Hopf algebra are given. In addition, the action and coaction over algebras and coalgebras are used to obtain Hom-module algebra, Hom-module coalgebra, Hom-comodule algebra, and Hom-comodule coalgebra and their properties are studied. Also, the definition of universal enveloping algebra of Hom-Lie algebra is given. The definition of double cross product of two Hom-Hopf algebras via actions are given. Furthermore, the definition of bicross product of two Hom-Hopf algebras via action and coaction are given. Finally, duality over the Hom-Hopf algebras are mentioned.

The Hom-Lie-Hopf algebras are defined with the help of definitions above as follows. Hom-Lie-Hopf algebras are defined over matched pair of Hom-Lie algebras $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. The universal enveloping algebras of them are Hom-Hopf algebras $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ and $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ respectively. The double cross product Hom-Hopf algebra $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \bowtie \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ is constructed via the universal enveloping algebras $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ and $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$. The Hom-Hopf algebra $\mathcal{U}(\mathfrak{h})^{\circ}$ is obtained with duality. The bicross product Hom-Hopf algebra is gained from the pair of Hom-Hopf algebras $\mathcal{U}(\mathfrak{h})^{\circ}$ and $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Hom-Hopf algebra $\mathcal{U}(\mathfrak{h})^{\circ} \blacktriangleright\!\!\vartriangleleft \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ is found from the mentioned pair. As the result, the Hom-Hopf algebra is named as Hom-Lie-Hopf algebra.

KEYWORDS: Hom-Hopf algebras, Hom-Lie algebras, Double cross product, Bicross product.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\triangleright$	:	Soldan etki
$\triangleleft$	:	Sağdan etki
$\mathfrak{g}$	:	Lie cebir
$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$	:	$\mathfrak{g}$ Lie cebirinin evrensel zarflama cebiri
A°	:	A cebirinin kısıtlanmış duali
$\rtimes$	:	Sol çapraz çarpım cebir
$\blacktriangleright\!\!<$	:	Sağ eşçarpım eşcebir
$\bowtie$	:	Çift çapraz çarpım cebir
$\blacktriangleright\!\!\triangleleft$	:	İkili çapraz çarpım cebir
∇	:	Eşetki
$\mathbb{T}$	:	Tüm ağırlıklı n-ağaçların kümesinin ürettiği vektör uzayı

ÖNSÖZ

Tezimin konusunu seçmemde bana yardımcı olan ve bugüne kadar benden hiçbir yardımını esirgemeyen, bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan, sayın hocam Doç. Dr. Serpil HALICI ya teşekkür ederim.

Tez çalışmamın ilk gününden son gününe kadar her an sorularıma cevap verip sorunlarımı çözmeme yardım eden, çalışmalarımız için İstanbul dan gelme zahmetine katlanan TİK üyelerinden sayın hocam Doç. Dr. Serkan SÜTLÜ ye teşekkür ederim.

Lisansüstü eğitimim boyunca aynı ortamı ve aynı dertleri paylaştığımız arkadaşlarıma çok teşekkür ederim. Onlarla beraberken zorlar kolay, acılar tatlı oldu.

Ailemin emeklerinden ve varlıklarından elde ettiğim güçten hakkıyla bahsetmem mümkün değil, teşekkürler.

Son olarak, hayatı boyunca tüm olumsuzluklara rağmen çevresini olumlu yönde etkilemeye çalışan herkese, huzur ve mutluluk dolu güzel bir yaşam dilerim.

Adnan KARATAŞ

1. GİRİŞ

1.1 Giriş

Hopf cebirler ilk olarak Heinz Hopf tarafından 1940 yılında tanımlanmıştır. Uygun uzay ve monifoldlar da kohomoloji veya homoloji için kullanılmıştır. Hopf cebirlerin kullanım alanları çok çeşitlidir. Bunlardan bazıları şu şekilde sıralanabilir (Hazewinkel 2004, Günaydın ve Gürsey 1973).

- Homoloji,
- Kohomoloji,
- Topoloji,
- Mantık,
- Kombinatorik,
- Düzlemsel ağaçlar,
- Graf teori,
- Değişmesiz geometri,
- Cebirsel geometri,
- Kuantum kodlama teorisi.

Hopf cebirlerin önemli özelliklerinden birisi sonlu boyutlu olduğu durumlarda dualinin de bir Hopf cebir olmasıdır. Bu durumun sonsuz boyutlarda geçerli olabilmesi için kısıtlanmış dual tanımından yararlanılabilir. Bir diğer önemli özellik ise, bir Lie cebirin evrensel zarflama cebirinin oluşturduğu Hopf cebirin, tanımında faydalanılan Lie cebir ile aralarındaki ilişkidir. Bu ilişki sayesinde Hopf cebir üzerinde yapılacak incelemelerle Lie cebir ile ilgili bilgiler edinilebilir veya Lie cebirin özelliklerinden faydalanarak, oluşan Hopf cebir ile ilgili bilgiler edinilebilir. Bu konuda örnek olarak (Connes ve Moscovici 1998) ve (Connes ve Moscovici 2005) kaynaklarına bakılabilir.

Tezimizde özelikle Hom-Hopf cebir yapısı üzerinde duracağız. Bu yapının temel özelliklerini (Majid 2000) ve (Abe 2004) kaynaklarını temel kaynaklar olarak alarak inceleyip Hom-Lie-Hopf cebirini tanımlayacağız.

Hom-Lie-Hopf cebiri tanımını birkaç adımda gerçekleştireceğiz. İlk olarak temel tanımları vererek gerekli önbilgileri vereceğiz. Daha sonra, bu bilgileri kullanarak modül ve eşmodül yapılarını inceleyeceğiz. Ardından, duallik ile ilgili bazı tanımları vererek, Hom-yapılar arasında tanımlanan çift çapraz çarpım ve ikili çapraz çarpım tanımlarını yapacağız. Daha sonra Hom-Lie cebir çiftinin evrensel zarflama cebiri olan Hopf cebiri tanımlayarak tezimi tamamlayacağız.

Literatürde, tezimizde kullandığımız tanımlardan Hom-cebir, Hom-eşcebir gibi tanımların ilk çıkış noktası Lie cebirlerde olmuştur (Gelfand ve Fuks 1970, Yakovlev 1975). Lie cebirlerde Jacobi özdeşliğinin bir homomorfizma yardımıyla değiştirilmesi sonrasında ileride Hom-Lie cebirler olarak adlandırılacak yapılar oluşmuştur. Daha sonra, birleşme özelliğinin bir homomorfizma yardımıyla değiştirilmesi ile Hom-cebirler elde edilmiştir (Makhlouf ve Silvestrov 2008). Benzer şekilde eşbirleşmeliliğin homomorfizma yardımıyla değiştirilmesinden Hom-eşcebirler elde edilmiştir. Bu tanımlamalardan sonra ise Hom-bicebir (Makhlouf ve Silvestrov 2010) ve Hom-Hopf cebir tanımları yapılmıştır (Makhlouf ve Silvestrov 2009).

Daha önce yapılmış çalışmalardan farklı olarak, tezimizde tanımını yaptığımız Hom-bicebir veya Hom-Hopf cebir tanımlarında kullanılan cebir homomorfizması ve eşcebir homomorfizması birbiri ile ilişkili olmak zorunda değildirler. Literatürde, Hom-Hopf cebirler, (α, α) -Hopf cebirler ve (α, α^{-1}) -Hopf cebirler olarak tanımlanmış ve çalışılmıştır (Makhlouf ve Panaite 2015, Lu ve Wang 2016). Ancak tanımladığımız Hom-Hopf cebirler (α, β)-Hopf cebirlerdir ve β homomorfizmasının seçilimine göre diğer çalışmalarla uyumluluk gösterirler. Bizim (α, β)-Hopf cebirler üzerinde durmamızın sebebi ise herhangi bir $(\mathfrak{g}, \alpha)$ Hom-Lie cebirinin evrensel zarflama cebiri olan Hom-Hopf cebirinin eşcebir yapısının eşbirleşmeli olması yani (α, id)-Hopf cebir olmasıdır.

Kullandığımız bir başka tanım ise, çift çapraz çarpım ve ikili çapraz çarpım yapılardır. Bu yapılar ilk kez S. Majid'in doktora tezinde tanımlanmış olup ayrıntılı olarak (Majid 2000) kaynağında incelenmiştir. İkili ve çift çapraz çarpım Hopf cebir tanımları da belirtilen kaynakta incelenmiş olup Lie cebirlerinin evrensel zarflama cebiri olan Hopf cebirleri ve yarıdualleme ile verilen ikili çapraz çarpım Hopf cebir tanımı ilk kez (Moscovici ve Rangipour 2009) kaynağında verilmiştir. İkili çapraz çarpım Hopf cebirini, kendisini oluşturan cebirler üzerinden daha kolay bir şekilde çalışmak mümkün olmaktadır (Rangipour ve Sütlü 2012). Bu da bizi Hom-Lie-Hopf cebir tanımını yapmaya iten nedenlerden biridir.

1.2 Temel Tanım ve Kavramlar

Tez süresince tüm yapılar k cismi üzerinde tanımlanacak olup herhangi bir tanımda gerekli görülmediği sürece tekrar belirtilmeyecektir.

1.2.1. Tanım. V ve W vektör uzayları olsun. Bu uzaylar ile oluşturulan $(V \oplus W, +)$ uzay direk toplam uzayıdır. Vektör uzayının elemanları (v, w) şeklinde belirtilir ve bu uzayın temel özelliklerinden bazıları aşağıdaki gibidir:

$\forall\, v, x \in V;\ w, y \in W;\ \lambda \in k$ için

$$\lambda(v, w) = (\lambda v, \lambda w),$$

$$(v, w) + (x, y) = (v + x, w + y),$$

$$(v, 0) + (0, w) = (v, w).$$

1.2.2. Tanım. V ve W vektör uzayları olsun. Bu uzaylar ile oluşturulan $(V \otimes W, +)$ tensör çarpım vektör uzayının elemanları $(v, w) = v \otimes w$ ile gösterilir. Ayrıca, bu uzayın özellikleri aşağıdaki eşitlikler ile verilir:

$\forall\, v, x \in V;\ w, y \in W;\ \lambda \in k$ için

$$v \otimes w + x \otimes y = x \otimes y + v \otimes w,$$

$$\lambda v \otimes w = v \otimes \lambda w,$$

$$(v + x) \otimes w = v \otimes w + x \otimes w,$$

$$v \otimes (y + w) = v \otimes y + v \otimes w.$$

1.2.1. Lemma. k cismi üzerinde tanımlanmış herhangi bir vektör uzayı V olsun. Bu durumda

$$k \otimes V \cong V \cong V \otimes k$$

doğal izomorfizmaları mevcuttur.

1.2.3. Tanım. V vektör uzayı olsun. V üzerinde aşağıdaki ikili işlemi tanımlayalım.

$$.: V \times V \to V$$

$$(u, v) \to u. v$$

Bu işlem, aşağıdaki şartları sağlıyorsa V uzayına, k cismi üzerinde bir cebir denir.

i. $\forall\, a \in k$ ve $\forall\, u, v \in V$ için; $(au). v = a(u\,. v)$

ii. $\forall\, u, v, w \in V$ için; $u. (v + w) = (u. v) + (u. w)$

iii. $\forall\, u, v, w \in V$ için; $(u + v). w = (u. w) + (v. w)$.

Tanım 1.2.3 te cebir tanımı verilmiştir. Aşağıda ise eşcebir ile cebir arasındaki ilişkiyi daha rahat görebilmek adına cebir tanımı diyagramlar yardımıyla verilmiştir.

$(A, \cdot\,, \eta)$ cebiri olsun. Bu cebir üzerindeki dönüşümler aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$+ : A \otimes A \to A; \quad \cdot : A \otimes A \to A; \quad \eta : k \to A.$$

Bu cebir yapısı üzerinde çarpma işleminin sağlaması gereken birleşme özelliğinin diyagram ile ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{tikzcd} & A \otimes A \otimes A \arrow[dl, "\cdot \otimes id"'] \arrow[dr, "id \otimes \cdot"] & \\ A \otimes A \arrow[dr, "\cdot"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "\cdot"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

η ile ifade edilen birim dönüşümünün diyagramla ifadesi ise aşağıdaki gibidir:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[dr, "\cdot"] & \\ k \otimes A \arrow[u, "\eta \otimes id"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[dr, "\cdot"] & \\ A \otimes k \arrow[u, "id \otimes \eta"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & A \end{tikzcd}$$

A ve B iki cebir olsun. Bu cebirlerin vektör uzaylarının tensör çarpımları ile elde edilen $A \otimes B$ vektör uzayı üzerinde tanımlanan çarpım ise $\forall\, a, b \in A$ ve $\forall\, c, d \in B$ için

$$(a \otimes c)(b \otimes d) \coloneqq (ab \otimes cd)$$

olarak tanımlanır.

Tensör cebiri, yukarıda verilmiş olan tanıma örnek olarak verilebilir. $(T(V), +, \cdot)$ olarak ifade edilen tensör cebiri V vektör uzayı ile aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$T(V) \coloneqq k \oplus V \oplus V \otimes V \oplus V \otimes V \otimes V \oplus \dots .$$

Yani, tensör cebiri V vektör uzayının elemanlarının sonlu tensör çarpımlarının lineer bileşimlerinden oluşur.

1.2.4. Tanım. A ve B iki cebir olsun. $f: A \to B$ olarak tanımlanan dönüşüm $\forall\, a, b \in A$ için

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

$$f(1) = 1$$

şartlarını sağlasın. Bu durumda f dönüşümüne cebir dönüşümü denir.

1.2.5. Tanım. A bir cebir olsun. I, A nın alt uzayı olsun ve soldan çarpmaya göre kapalı olsun. Bu şartları sağlayan I, A cebirinin sol idealidir.

Sağ ideal tanımı da benzer şekilde yapılır. Bir ideal hem sağ hem sol ideal ise yalnızca ideal olarak adlandırılır. A cebir, I A nın ideali olsun. A/I yapısı da bir cebir yapısıdır.

Eşcebir tanımı ise cebir tanımındaki diyagramlara benzer diyagramlar kullanılarak aşağıdaki gibi verilebilir.

1.2.6. Tanım. (C, Δ, ϵ) eşcebir olsun. Eşcebirin dönüşümlerinden Δ ile gösterilen eşçarpım, C üzerinde tanımlıdır ve $\Delta: C \to C \otimes C$,

$$\Delta(\mathrm{c}) = \sum_i c_{i(1)} \otimes c_{i(2)}$$

olarak ifade edilir.

Eşbirleşmelilik diyagramlar yardımıyla aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\begin{tikzcd}
& C \otimes C \otimes C & \\
C \otimes C \arrow[ur, "\Delta \otimes id"] & & C \otimes C \arrow[ul, "id \otimes \Delta"'] \\
& C \arrow[ul, "\Delta"] \arrow[ur, "\Delta"'] &
\end{tikzcd}$$

Burada ifade edilen eşbirleşmeliliğin elemanlar ile gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$c_{(1)} \otimes c_{(2)(1)} \otimes c_{(2)(2)} = c_{(1)(1)} \otimes c_{(1)(2)} \otimes c_{(2)}.$$

Eşbirleşmeliliğin olduğu durumlarda alt indislerin

$$c_{(1)} \otimes c_{(2)(1)} \otimes c_{(2)(2)} = c_{(1)(1)} \otimes c_{(1)(2)} \otimes c_{(2)} = c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}$$

olarak tekrar isimlendirilmesi mümkündür.

Eşbirim ise $\epsilon: C \to k$ olarak tanımlıdır. Eşbirim için ise aşağıdaki diyagram yeterlidir:

$$\begin{tikzcd}
C \otimes C \arrow[d, "\epsilon \otimes id"'] & \\
k \otimes C \arrow[r, phantom, "\cong"] & C \arrow[ul, "\Delta"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \otimes C \arrow[d, "id \otimes \epsilon"'] & \\
C \otimes k \arrow[r, phantom, "\cong"] & C \arrow[ul, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

Tanımda verilmiş olan eşçarpım gösterimi yerine aynı anlamda olan aşağıdaki gösterim kullanılacaktır:

$$\Delta(\mathrm{c}) = \mathrm{c}_{(1)} \otimes c_{(2)}.$$

C ve D iki eşcebir olsun. Bu eşcebirlerin vektör uzaylarının tensör çarpımları ile elde edilen $C \otimes D$ vektör uzayı üzerinde tanımlanan eşçarpım ise $\forall\, c \in C$ ve $\forall\, d \in D$ için

$$\Delta(c \otimes d) \coloneqq c_{(1)} \otimes d_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes d_{(2)}$$

olarak tanımlanır.

1.2.7. Tanım. C ve D iki eşcebir olsun. $f: C \to D$ olarak tanımlanan dönüşüm $\forall\, c \in C$ için

$$(f \otimes f) \circ \Delta(c) = \Delta \circ f,$$

$$\epsilon \circ f = \epsilon$$

şartlarını sağlasın. Bu durumda f dönüşümü eşcebir dönüşümüdür.

1.2.8. Tanım. $(H,\ \cdot, \eta\,, \Delta\,, \epsilon\,)$ bicebir olsun. H bicebiri hem cebir hemde eşcebir yapılarına sahiptir ayrıca bu yapılar arasında $(\forall\ h, g \in H)$

$$\Delta(hg) = \Delta(h)\Delta(\mathrm{g}),\ \ \Delta(1) = 1 \otimes 1,\ \ \epsilon(hg) = \epsilon(h)\epsilon(g),\ \ \epsilon(1) = 1$$

şartlarını sağlanır.

Burada eşitlikler yerine "Çarpım ve birim dönüşümleri, eşcebir dönüşümleridir." ifadesi kullanılırsa aynı şartların sağladığı ifade edilmiş olur.

1.2.9. Tanım. $(H,\ \cdot, \eta\,, \Delta\,, \epsilon)$ bicebir ve $S: H \to H$ lineer antipot dönüşümü tanımlansın. Bu durumda $(H,\ \cdot, \eta\,, \Delta\,, \epsilon, S)$ Hopf cebirdir ve antipot aşağıdaki şartı sağlar:

$$\cdot\,(S \otimes id)o\Delta =\cdot\,(id \otimes S)o\Delta = \eta o\epsilon.$$

Ek olarak, antipot bir tektir ve aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$S(hg) = S(h)S(g),$$

$$S(1) = 1,$$

$$(S \otimes S) \text{ o } \Delta(h) = \tau\ o\ \Delta\ o\ S(h),$$

$$\epsilon S(h) = \epsilon(h).$$

Burada kullanılan τ dönüşümü $\tau: A \otimes B \to B \otimes A$ üzerinde

$$\tau(a, b) = (b, a)$$

olarak tanımlıdır.

Hopf cebir yapısını daha iyi anlatabilmek için Sweedler in 4 boyutlu Hopf cebir örneği verilebilir.

$\{1, x, g, g^{-1}\}$ kümesi ile üretilen vektör uzayı olsun. $r \in k$ tersi olan bir eleman olmak üzere çarpma işlemi aşağıdaki bağıntılar ile verilir:

$$gg^{-1} = 1 = g^{-1}\, g, \qquad xg = rgx, \qquad xg^{-1} = r^{-1}g^{-1}x.$$

Eşbirleşmeliliği sağlayan eşçarpım ve eşbirim aşağıdaki bağıntılarla verilir:

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + g \otimes x, \qquad \Delta(g) = g \otimes g, \qquad \Delta(\mathrm{g}^{-1}) = g^{-1} \otimes g^{-1},$$

$$\epsilon(x) \coloneqq 0, \qquad \epsilon(g) = \epsilon(g^{-1}) = 1.$$

Son olarak Hopf cebirin bicebirden en önemli ayrımı olan antipod aşağıdaki bağıntılarla verilir:

$$S(x) = -g^{-1}x, \qquad S(g) = g^{-1}, \qquad S(g^{-1}) = g.$$

Çalışmamızda kullanacağımız bir diğer önemli yapı ise Lie cebiridir. Lie cebirinin tanımı aşağıdaki gibi verilebilir.

1.2.10. Tanım. V vektör uzayı olsun. Bu uzay üzerinde tanımlı alterne bilineer dönüşüm $[.,.] : V \otimes V \to V$, Jacobi özdeşliğini sağlıyorsa, bu yapıya Lie cebri denir.

Jacobi özdeşliği ise her x, y, z elemanı için

$$\big[x, [y, z]\big] + \big[z, [x, y]\big] + \big[y, [z, x]\big] = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Modül tanımı içerisinde kullanılacak olan sol etki tanımı aşağıdaki gibidir. Sağ etki tanımı da benzer şekildedir.

1.2.11. Tanım. G grup ve M bir küme olsun. G grubunun M kümesine soldan etkisi,

$$G \otimes M \to M; \quad (g, x) = g \rhd x$$

etkisi yardımıyla tanımlanır. Bu etki

i. $1_G \rhd x = x$
ii. $(g_1.g_2) \rhd x = g_1 \rhd (g_2 \rhd x)$

şartlarını sağlar.

1.2.12. Tanım. R halka ve $(G, +)$ değişmeli grup olsun. R halkasının G grubuna soldan etkisi $\cdot\ : R \otimes M \rightarrow M$ dönüşümü ile tanımlansın. Bu etki

i. $rm \in M$
ii. $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$
iii. $(r + s)m = rm + sm$
iv. $(rs)m = r(sm)$

şartlarını sağlar ise bu yapıya R-modül denir.

Aşağıda, Hom-Lie-Hopf cebir tanımı ve özelliklerinin incelenmesi için kullanılan tanımlardan ve teoremlerden bazıları verilmiştir.

1.2.13. Tanım. $\mathfrak{g}$ bir Lie cebiri ve $\otimes\ \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin tensör cebiri olsun. Her $x, y \in \otimes\ \mathfrak{g}$ için

$$x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$$

formundaki elemanların ürettiği $\mathcal{J}$ ideali $\otimes\ \mathfrak{g}$ cebirinin (sağ ve sol) idealidir. O zaman $\otimes\ \mathfrak{g}/\mathcal{J}$ yapısına, $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin evrensel zarflama cebiri denir ve $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ ile gösterilir. Ayrıca $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin evrensel zarflama cebiri

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cong \otimes\ \mathfrak{g}/\mathcal{J}$$

olarak ifade edilebilir.

Evrensel zarflama cebirinin önemi, birleşmesiz olan Lie cebirinden birleşmeli olan cebir yapısına geçmek ve etki özelliklerinin bozulmamasını sağlamasıdır (Bekaert 2005).

Aşağıdaki önerme yardımıyla, zarflama cebirleri ile ilgili önemli bir özellik ifade edilmiştir.

1.2.1. Önerme. $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots, \mathfrak{g}_n$ Lie cebirler ve $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 \times \cdots \times \mathfrak{g}_n$ olmak üzere,

$$f\ :\ \mathcal{U}(\mathfrak{g}_1) \times \mathcal{U}(\mathfrak{g}_2) \times \cdots \times \mathcal{U}(\mathfrak{g}_n) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g});\quad f(u_1, u_2, \dots, u_n) \rightarrow u_1 u_2 \dots u_n$$

lineer dönüşümü yardımıyla $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_1) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}_2) \otimes \cdots \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}_n) \cong \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ izomorfizması vardır (Dixmier 1977).

Aşağıda konvolüsyon çarpım, cebir ve eşcebir arasındaki ilişki verilmiştir.

(C, Δ, ε), k cismi üzerinde tanımlı bir eşcebir olsun ve (A, μ, η), k cismi üzerinde birleşmeli bir cebir olsun. Dual vektör uzayı $C^* = Hom(C, k)$ nın konvolüsyon çarpımı ile bir cebir olduğu gösterilmiştir.

1.2.14. Tanım. C^* üzerinde konvolüsyon çarpımı aşağıdaki gibi tanımlıdır: (Abe 2004).

$$f * g = \mu\big(f(c_1), g(c_2)\big)$$

Öncelikle konvolüsyon çarpımının birleşmeli olduğunu görelim:

$$\big((f * g) * h\big)(c) = \mu\left(\mu\big(f(c_1), g(c_2)\big), h(c_3)\right)$$

ve

$$\big(f * (g * h)\big)(c) = \mu\left(f(c_1), \mu\left(\big(g(c_2), h(c_3)\big)\right)\right)$$

olduğundan ve A cebir çarpımı μ birleşmeli olduğundan

$$\big((f * g) * h\big) = \big(f * (g * h)\big)$$

olur. Dolayısıyla, konvolüsyon çarpımı birleşmelidir. Konvolüsyon çarpımının birimi ise, $\eta\varepsilon$ dur. Dolayısıyla, herhangi bir eşcebirin duali de cebirdir.

Akla gelebilecek ilk soru, herhangi bir cebirin dualinin eşcebir olup olmadığıdır. Cebir sonlu boyutlu ise, duali eşcebirdir (Majid 2000). Ancak sonlu boyutlu olmadığı durumlarda kısıtlanmış dual tanımından faydalanılır.

Kullanılacak diğer bir tanım olan kısıtlanmış dual tanımı aşağıdaki gibidir.

1.2.15. Tanım. A herhangi bir cebir olsun. A cebirinin kısıtlanmış duali aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$A^\circ = \{f \in Hom(A, k) \mid \exists\, I \in \ker(f), I \trianglelefteq A \; ve \dim(A/I) < \infty\}.$$

Tanım 1.2.12 den Tanım 1.2.15 e kadar olan kısımda tezimizde kullanılacak olan temel bazı kavramlara yer verilmiştir. Buradaki tanım ve sonuçlar Majid (2000) kaynağından alınmıştır.

1.2.16. Tanım. H bir Hopf cebir olsun ve A sol H-modül cebir olsun. $A \otimes H$ yapısı üzerinde tanımlı olan

$$(a \otimes h)(b \otimes g) = a\big(h_{(1)} \triangleright b\big) \otimes h_{(2)}g$$

çarpıma sol çapraz çarpım cebir denir ve $A \rtimes H$ ile gösterilir. Bu cebrin birimi ise, $1 \otimes 1$ ile gösterilir.

Eşcebir için benzer bir tanım ise, Tanım 1.2.13 de verilmiştir.

1.2.17. Tanım. H bir Hopf cebir olsun ve C sağ H-eşmodül eşcebir olsun. $H \otimes C$ yapısı üzerinde tanımlanan

$$\Delta(h \otimes c) = h_{(1)} \blacktriangleright\!\!< c_{(1)<0>} \otimes h_{(2)}\, c_{(1)<1>} \blacktriangleright\!\!< c_{(2)}, \qquad \varepsilon(h \otimes c) = \varepsilon(h)\varepsilon(c).$$

çarpıma sağ çapraz eşçarpım eşcebiri denir ve $H \blacktriangleright\!\!< C$ ile gösterilir.

1.2.18. Tanım. U, F Hopf cebirler olsun. Eğer F bir U-modül cebir, U da bir F-eşmodül eşcebir iken

$$\varepsilon(u \triangleright f) = \varepsilon(u)\varepsilon(f), \qquad \Delta(u \triangleright f) = u_{(1)<0>} \triangleright f_{(1)} \otimes u_{(1)<1>}\big(u_{(2)} \triangleright f_{(2)}\big),$$

$$\nabla(1) = 1 \otimes 1, \qquad \nabla(uu') = u_{(1)<0>}u'_{<0>} \otimes u_{(1)<1>}\big(u_{(2)} \triangleright u'_{<1>}\big),$$

$$u_{(2)<0>} \otimes \big(u_{(1)} \triangleright f\big)u_{(2)<1>} = u_{(1)<0>} \otimes u_{(1)<1>}(u_{(2)} \triangleright f)$$

şartları sağlanıyorsa, (F, U) yapısına bir karşılıklı Hopf cebir çifti denir.

1.2.1. Sonuç. Eğer, (F, U) bir karşılıklı Hopf cebir çifti ise, o zaman $F \blacktriangleright\!\!\triangleleft U \coloneqq F \otimes U$ aşağıda verilen çarpma ve eşçarpma işlemlerine göre bir Hopf cebir olur:

$$(f \otimes u)(f' \otimes u') = f\big(u_{(1)} \triangleright f'\big) \otimes u_{(2)}u',$$

$$\Delta(f \otimes u) = f_{(1)} \blacktriangleright\!\!< u_{(1)<0>} \otimes f_{(2)}\, u_{(1)<1>} \blacktriangleright\!\!< u_{(2)}, \qquad \epsilon(f \otimes u) = \epsilon(f)\epsilon(u).$$

Bu cebirinin antipotu ise

$$S(f \otimes u) = (1 \otimes S(u_{<0>}))(S(fu_{<1>}) \otimes 1)$$

olarak tanımlıdır.

1.2.19. Tanım. U ve V iki Hopf cebir olsun. V sağ U-modül eşcebir, U sol V-modül eşcebir iken

$$v \triangleright (uu') = \left(v_{(1)} \triangleright u_{(1)}\right)\left(\left(v_{(2)} \triangleleft u_{(2)}\right) \triangleright u'\right), \tag{1}$$

$$1 \triangleleft u = \epsilon(u),$$

$$(vv') \triangleleft u = \left(v \triangleleft \left(v'_{(1)} \triangleright u_{(1)}\right)\right)\left(v'_{(2)} \triangleleft u_{(2)}\right), \tag{2}$$

$$v \triangleleft 1 = \epsilon(v),$$

$$v_{(1)} \triangleleft u_{(1)} \otimes v_{(2)} \triangleright u_{(2)} = v_{(2)} \triangleleft u_{(2)} \otimes v_{(1)} \triangleright u_{(1)} \tag{3}$$

eşitliklerini sağlayan (U, V) ikilisine, eşlenmiş Hopf cebir çifti denir. Ayrıca, $U \otimes V$ üzerinde

$$(u \bowtie v)(u' \bowtie v') = u(v_{(1)} \triangleright u'_{(1)}) \bowtie \left(v_{(2)} \triangleleft u'_{(2)}\right)v'$$

$$\Delta(u \otimes v) = u_{(1)} \otimes v_{(1)} \otimes u_{(2)} \otimes v_{(2)}$$

işlemleri ile tanımlanan yapıya da çift çapraz çarpım Hopf cebir denir. Tanımlanan Hopf cebir, $U \bowtie V$ sembolüyle gösterilir.

Çift çapraz çarpım Hopf cebiri olan $U \bowtie V$ yapısı, eşcebir olarak $U \otimes V$ yapısına izomorftur. Ayrıca, bu yapının çarpımsal birimi, $1 \bowtie 1$ iken antipot tanımı aşağıdaki gibi verilir:

$$S(u \bowtie v) = S\left(v_{(1)}\right) \triangleright S\left(u_{(1)}\right) \bowtie S\left(v_{(2)}\right) \triangleleft S\left(u_{(2)}\right).$$

Tanıma göre U ve V, $U \bowtie V$ yapısının Hopf altcebirleri olur. Tersine, U ve V Hopf cebirler iken $U \bowtie V$ yapısı da bir Hopf cebir olur.

Bu bölümde değindiğimiz tanım ve teoremler (Abe 2004, Majid 2000) kaynaklarından alınmıştır ve ileriki bölümlerde tanımlayacağımız tanım ve teoremlerin temelini oluşturması açısından önemlidir.

2. HOM-YAPILAR

2.1 Hom-Hopf Cebirler

Daha önce belirttiğimiz gibi Hom-cebir, Hom-eşcebir, Hom-Hopf cebir gibi tanımların yapılmasında öncülük eden ilk çalışmalar Lie cebirlerde yapılmıştır (Gelfund ve Fuks 1970, Jakovlev 1975). Daha sonra bir dizi çalışma sonucunda Hom-Hopf cebire kadar tüm tanımlar verilmiştir (Makhlouf ve Silvestrov 2008, Makhlouf ve Silvestrov 2009, Makhlouf ve Silvestrov 2010).

Bu bölümde, Hom-cebir, Hom-eşcebir, Hom-bicebir, Hom-eşcebir tanımlarını verdikten sonra bu yapıların dualleri ile ilgili tanım ve önermelerimizi vereceğiz.

2.1.1. Tanım. A birleşmeli bir cebir olsun. A üzerinde, $\alpha: A \to A$ dönüşümü tanımlansın, $\forall\, x, y, z \in A$ için

$$\big(\alpha(x) \cdot (y \ \cdot z)\big) = \big((x \ \cdot y) \ \cdot \alpha\,(z)\big)$$

şartı sağlanıyorsa, α homomorfizması ile değiştirilmiş Hom-birleşme özelliğine sahip olan A cebirine Hom-birleşmeli cebir denir.

A cebiri üzerinde tanımlı bu Hom-birleşmeli cebir yapısını göstermek için $(A, \cdot\,, \eta, \alpha)$ gösterimi kullanılır. Tezin devamında, Hom-cebir ifadesi, Hom-birleşmeli cebir ifadesi anlamında kullanılacaktır.

2.1.2. Tanım. $(A, \mu\,, \eta, \alpha)$ Hom-cebir olsun. Hom-terslenebilir eleman olan x, $n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki şartı sağlar:

$$(\alpha^n o\, \mu)(x\ o\ x^{-1}) = (\alpha^n o\, \mu)(x^{-1}\ o\ x\ ) = \eta(1).$$

2.1.3. Tanım. $(A, \mu\,, \eta, \alpha)$ Hom-cebir ve M vektör uzayı olsun. $\rho: A \otimes M \to M$ ve $\gamma: M \to M$ lineer dönüşümler olsun.

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes M \arrow[r, "\mu o \gamma"] \arrow[d, "\alpha \otimes \rho"] & A \otimes M \arrow[d, "\rho"] \\ A \otimes M \arrow[r, "\rho"] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, "\rho"] & \\ k \otimes M \arrow[r, "\eta \otimes id"] & A \otimes M \end{tikzcd}$$

Diyagramlar ile ifade edilen şartlara sahip (M, ρ, γ) modülüne, A Hom-cebir üzerinde (sol) Hom-modül denir.

2.1.4. Tanım. (A, μ, η, α) Hom-cebir üzerinde iki Hom-modül (M, ρ, γ) ve (M', ρ', γ') olsun. $f: M \to M'$ dönüşümü $f \ o \ \gamma = \gamma' o \ f$ şartını sağlıyorsa ve

$$\begin{tikzcd}
A \otimes M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "id \otimes f"] & M \arrow[d, "f"] \\
A \otimes M' \arrow[r, "\rho'"] & M'
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli ise f dönüşümü, Hom-modül dönüşümüdür.

2.1.5. Tanım. (C, Δ, ϵ) eşcebiri üzerinde tanımlı $\beta: C \to C$, dönüşümü

$$(\Delta \otimes \beta)\Delta = (\beta \otimes \Delta)\Delta$$

şartını sağlıyorsa bu yapıya Hom-eşcebir denir ve $(C, \Delta, \epsilon, \beta)$ ile gösterilir.

2.1.6. Tanım. $(C, \Delta, \epsilon, \beta)$ Hom-eşcebir, M vektör uzayı olsun. $\nabla: M \to M \otimes C$ ve $\theta: M \to M$ lineer dönüşümler olsunlar. Aşağıdaki değişmeli diyagrama sahip (M, ∇, θ) yapısına C Hom-eşcebir üzerinde (sağ) Hom-eşmodül denir:

$$\begin{tikzcd}
M \otimes C \otimes C \arrow[r, "\nabla \otimes \beta"] \arrow[d, "\theta \otimes \Delta"] & M \otimes C \arrow[d, "\nabla"] \\
M \otimes C \arrow[r, "\nabla"] & M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[d, "\theta"] \arrow[dr, "\nabla"] & \\
M \otimes k & M \otimes C. \arrow[l, "id \otimes \varepsilon"']
\end{tikzcd}$$

2.1.7. Tanım. $(C, \Delta, \epsilon, \beta)$ Hom-eşcebir üzerinde iki Hom-eşmodül (M, ∇, θ) ve (M', ∇', θ') olsun. $f: M \to M'$ dönüşümü $f \ o \ \theta = \theta' o \ f$ şartını sağlıyorsa ve

$$\begin{tikzcd}
M' \otimes C \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "f \otimes id"] & M' \arrow[d, "f"] \\
M \otimes C \arrow[r, "\nabla"] & M
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli ise f dönüşümü Hom-eşmodül dönüşümüdür.

2.1.1. Önerme. $(C, \Delta, \epsilon, \beta)$ Hom-eşcebir, β dönüşümü izomorfizma ve (A, μ, η, α) Hom-cebir olsun. Bu durumda, $\mathrm{Hom}(C, A)$ aşağıdaki işlemlerle Hom-cebirdir: $(\forall f, g \in \mathrm{Hom}(C, A)$ ve $\forall\, c \in C)$

$$\mu^{\star}(f \otimes g)(c) \coloneqq \mu\left(f\big(\beta^{-2}(c_{<1>})\big) \otimes g\big(\beta^{-2}(c_{<2>})\big)\right), \qquad \alpha^{\star}(f) \coloneqq \alpha\ o\ f\ o\ \beta^{-1}.$$

Ayrıca belirtilen yapılar birimli ise dualleri de birimlidir ve aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$\eta^{\star}: k \to \mathrm{Hom}(C, A), \qquad \eta^{\star}(1) \coloneqq \eta\ o\ \varepsilon.$$

İspat. Herhangi $f, g \in \mathrm{Hom}(C, A)$ ve $c \in C$ için

$$\mu^{\star}\big(\alpha^{\star}(f) \otimes \mu^{\star}(g \otimes h)\big)(c)$$

$$= \mu\left(\alpha^{\star}(f)\big(\beta^{-2}(c_{<1>})\big) \otimes \mu^{\star}\,(g \otimes\ h)\big(\beta^{-2}(c_{<2>})\big)\right)$$

$$= \mu\left(\alpha\left(f\big(\beta^{-3}(c_{<1>})\big)\right) \otimes \mu\left(\ g\big(\beta^{-4}(c_{<2><1>})\big) \otimes\ h\big(\beta^{-4}(c_{<2><2>})\big)\right)\right)$$

$$= \mu\left(\alpha\left(f\big(\beta^{-4}(c_{<1><1>})\big)\right) \otimes \mu\left(\ g\big(\beta^{-4}(c_{<1><2>})\big) \otimes\ h\big(\beta^{-3}(c_{<2>})\big)\right)\right)$$

$$= \mu\left(\mu\left(f\big(\beta^{-4}(c_{<1><1>})\big) \otimes g\big(\beta^{-4}(c_{<1><2>})\big)\right) \otimes \alpha\left(h\big(\beta^{-3}(c_{<2>})\big)\right)\right)$$

$$= \mu^{\star}\big(\mu^{\star}(f \otimes\ g) \otimes \alpha^{\star}\,(h)\big)(c)$$

eşitliği bulunur. Böylece $(\mathrm{Hom}(C, A), \mu^{\star}, \alpha^{\star})$ nin Hom-cebir olduğu görülür. Birim ise

$$\mu^{\star}(\eta^{\star}(1) \otimes f)(c) = \mu^{\star}(\eta\ o\ \varepsilon \otimes f)(c)$$

$$= \mu\left(\eta\left(\varepsilon\big(\beta^{-2}(c_{<1>})\big)\right) \otimes f\big(\beta^{-2}(c_{<2>})\big)\right) = \mu\left(\eta(1) \otimes f\big(\beta^{-1}(c)\big)\right)$$

$$= \alpha\left(f\big(\beta^{-1}(c)\big)\right) = \alpha^{\star}(f)(c)$$

eşitlikleri yardımıyla ispatlanır. Sonuç olarak, $(\mathrm{Hom}(C, A), \mu^{\star}, \eta^{\star}, \alpha^{\star})$ birimli Hom-cebirdir.

2.1.1. Sonuç. (C, Δ, β) Hom-eşcebir, β dönüşümü izomorfizma olsun. Bu durumda, Hom(C, k) aşağıdaki işlemlerle Hom-cebirdir: $\forall f, g \in \mathrm{C}^\star$ ve $\forall\, c \in C$ için

$$\mu^\star(f \otimes g)(c) := f\big(\beta^{-2}(c_{<1>})\big) g\big(\beta^{-2}(c_{<2>})\big)$$

eşitliği vardır. Hom-cebirin dönüşümü ise

$$\alpha^\star(f) \coloneqq f\ o\ \beta^{-1}$$

şeklindedir. Ayrıca, yapı birimli ise dual birim

$$\eta^\star : k \to C^\star, \qquad \eta^\star(1) \coloneqq \varepsilon$$

olarak tanımlıdır.

Dual yapısı üzerinde tanımlamaları verirken ihtiyacımız olan bir diğer tanım ise Hom-cebir ve Hom-eşcebir yapılarında kısıtlanmış dualdir. Kısıtlanmış dual ile ilgili temel tanım ve bazı özellikler için (Abe 2004, Hassanzadeh ve diğ. 2015) kaynaklarına müracaat edilebilir.

2.1.2. Önerme. (A, μ, α) çarpımsal Hom-cebir olsun. Bu durumda, $(A^*, (\alpha^{-1})^*)$ ikilisi aşağıdaki etki ile sol Hom-A-modül olur:

$$\rho_L : A \otimes A^* \to A^*, \qquad \rho_L(a \otimes f)(a') \coloneqq f\left(\alpha^{-2}\big(\mu(a' \otimes a)\big)\right).$$

Benzer şekilde, $(A^*, (\alpha^{-1})^*)$ ikilisi aşağıdaki etki ile sağ Hom-A-modül olur:

$$\rho_R : A^* \otimes A \to A^*, \qquad \rho_R(f \otimes a)(a') \coloneqq f\left(\alpha^{-2}\big(\mu(a \otimes a')\big)\right).$$

İspat. İspat sadece sol modül aşağıdaki gibidir. İşlemler açısından kolaylık olması adına $\forall\, a \in A$ ve $\forall f \in A^*$ için

$$a \rhd f \coloneqq \rho_L(a \otimes f)$$

gösterimini kullanılırsa

$$\big(\alpha(a) \rhd (a' \rhd f)\big)(a'') = (a' \rhd f)\left(\alpha^{-2}\big(a'' \bullet \alpha(a)\big)\right)$$

$$= (a' \rhd f)(\alpha^{-2}(a'') \bullet \alpha^{-1}(\,a)) = f(\alpha^{-2}\big([(\alpha^{-2}(a'') \bullet \alpha^{-1}(a)] \bullet a'\big))$$

$$= f(\big[(\alpha^{-4}(a'') \bullet \alpha^{-3}(\,a)] \bullet \alpha^{-2}(a')\big)$$

$$= f(\alpha^{-3}(a'') \bullet [(\alpha^{-3}(a) \bullet \alpha^{-3}(a')])$$

$$= f(\alpha^{-3}(a'' \bullet (a \bullet a')))$$

$$= (\alpha^{-1})^*(f)\left(\alpha^{-2}\left(a''\bullet (a \bullet a')\right)\right)$$

$$= (a \bullet a') \rhd \left((\alpha^{-1})^*(f)\right)(a'').$$

eşitlikleri elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sıradaki önermede kullanılmak üzere, Abe (2004) kaynağına benzer olarak aşağıdaki tanımlamaları yapalım:

$$A_f^* \coloneqq \{\rho_L(a \otimes f)|a \in A\}$$

ve

$${}_fA^* \coloneqq \{\rho_R(f \otimes a)|a \in A\}.$$

Bu tanımlamalar yardımıyla aşağıdaki önermeyi verelim.

2.1.3. Önerme. (A, μ, α) çarpımsal Hom-cebir iken $f \in A^*$ verilsin. A_f^* nin sonlu boyutlu olması için gerek ve şart ${}_fA^*$ sonlu boyutlu olmasıdır.

İspat. A_f^* sonlu boyutlu olsun ve bazı $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ olsun. Yani, $\forall\ a \in A$ için

$$\rho_L(a \otimes f) = \sum_{i=1}^{n} g_i(a)f_i$$

olacak şekilde $g_i(a) \in k$ vardır. Böylece

$$\rho_R(f \otimes a')(a) = f\left(\alpha^{-2}(a'\bullet a)\right) = \rho_L(a \otimes f)(a')$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g_i(a)f_i(a') = \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(a')g_i\right)(a)$$

elde edilir. Bu da ${}_fA^*$ için bir bazın $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ olduğunu gösterir yani ${}_fA^*$ sonlu boyutludur. İspat benzer şekilde tamamlanır.

Dual tanımında kullanacak olan iki dönüşüm aşağıdaki gibidir. İlk olarak,

$$\pi: A^* \otimes A^* \to (A \otimes A)^*, \qquad \pi(f \otimes g)(a \otimes a') \coloneqq f(a)g(a')$$

dönüşümü tanımlanır. Bu lineer dönüşümde herhangi bir $\sum_{i=1}^{n} g_i \otimes f_i \in A^* \otimes A^*$ için $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, lineer bağımsızdır, $\pi(\sum_{i=1}^{n} g_i \otimes f_i) = 0$ dır. Ayrıca, $\forall\, a, a' \in A$ için

$$\pi\left(\sum_{i=1}^{n} g_i \otimes f_i\right)(a \otimes a') = \sum_{i=1}^{n} g_i(a) f_i(a') = \left(\sum_{i=1}^{n} g_i(a) f_i\right)(a') = 0$$

eşitliği bulunur. Ek olarak, $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ lineer bağımsız olmasından dolayı $g_i(a) = 0$ dır. Buradan da

$$\sum_{i=1}^{n} g_i \otimes f_i = 0$$

eşitliği elde edilir.

İkinci olarak,

$$\delta: A^* \to (A \otimes A)^*, \qquad \delta(f)(a \otimes a') \coloneqq f\big(\alpha^{-2}(a \bullet a')\big) = f(\alpha^{-2}(a) \bullet \alpha^{-2}(a'))$$

dönüşümünü tanımlanır. Bu tanımlamalar yardımıyla Abe (2004) kaynağında verilmiş teoremin bir benzeri aşağıdaki önermede verilmiştir.

2.1.4. Önerme. (A, μ, α) çarpımsal Hom-cebir olsun ve $f \in A^*$ verilsin. Bu durumda, $\delta(f) \in \pi(A^* \otimes A^*)$ olması için gerek ve yeter şart A_f^* nin sonlu boyutlu olmasıdır.

İspat. $\delta(f) \in \pi(A^* \otimes A^*)$ ve $\pi(\sum_{i=1}^{n} g_i \otimes f_i) = \delta(f)$ olacak şekilde $f_i, g_i \in A^*$ olsun. $\delta(f)(a \otimes a') = \rho_L(a' \otimes f)(a)$ olduğundan,

$$\rho_L(a' \otimes f)(a) = \pi\left(\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes g_i\right)(a \otimes a') = \sum_{i=1}^{n} f_i(a) g_i(a') = \left(\sum_{i=1}^{n} g_i(a') f_i\right)(a)$$

elde edilir. Bu da A_f^* nin $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ kümesinin gerdiği kümenin alt kümesi olduğunu gösterir. Yani A_f^* sonlu boyutludur. Tersi de benzer şekilde gösterilir.

2.1.5. Önerme. (A, μ, α) çarpımsal Hom-cebir olsun ve A nın kısıtlanmış duali

$$A^o \coloneqq \{f \in A^* \mid \dim\big(A_f^*\big) < \infty\}$$

olsun. Bu durumda, herhangi bir $f \in A^o$ için $\delta(f) \in \pi(A^o \otimes A^o)$ dir.

İspat. Verilmiş bir $f \in A^o$ için tanım gereği $f \in A^*$ dir. Ayrıca, A_f^* sonlu boyutlu olduğundan bu yapının bazı $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ seçilebilir. Bu durumda, $g_1, g_2, \dots, g_n \in A^*$ olacak şekilde $a' \in A$ mevcuttur ve

$$\rho_L(a' \otimes f) = \sum_{i=1}^{n} g_i(a) f_i$$

eşitliği elde edilir. Öbür taraftan,

$$\delta(f)(a \otimes a') = \rho_L(a' \otimes f)(a) = \sum_{i=1}^{n} g_i(a') f_i(a) = \pi\left(\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes g_i\right)(a \otimes a')$$

eşitliği elde edilir. Sol ve sağ etki tanımından,

$$\rho_L(a' \otimes f)(a) = \sum_{i=1}^{n} g_i(a') f_i(a) = \rho_R(f \otimes a)(a')$$

yazılabilir. Burada $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq A$ ve $f_i(a_j) = \delta_{ij}$ olduğu kullanılarak $g_j = \rho_R(f \otimes a_j) \in A^*$ olduğunu elde edilir. Herhangi bir $b \in A$ için

$$\rho_R(\rho_R(f \otimes a) \otimes b) = \rho_R\left((\alpha^{-1})^*(f) \otimes \left(a \bullet \alpha^{-1}(b)\right)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i((\alpha^{-1}(b) \bullet a) g_i \, o \, \alpha^{-1}$$

eşitliği elde edilir burada $\rho_R(\rho_R(f \otimes a) \otimes b)$ $\{g_1 \, o \, \alpha^{-1}, \dots, g_n \, o \, \alpha^{-1}\}$ kümesinin gerdiği kümenin alt kümesidir. Bir başka ifade ile ${}_{\rho_R(f \otimes a)}A^*$ sonlu boyutludur. Bahsedilen uzay sonlu boyutlu olduğuna göre $A^*_{\rho_R(f \otimes a)}$ de sonlu boyutludur. Buradan $\rho_R(f \otimes a) \in A^o$ olduğunu bulunur. Sonuç olarak, $g_j = \rho_R(f \otimes a_j) \in A^o$ dir ve

$$\delta(f) = \pi\left(\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes g_i\right) \in \pi(A^* \otimes A^o)$$

dir. Benzer olarak,

$$\delta(f) \in \pi(A^o \otimes A^*)$$

elde edilir. Bu iki eşitlik ile iddiada belirtilen

$$\delta(f) \in \pi(A^o \otimes A^o)$$

ifadesi ispatlanmış olur.

2.1.2. Sonuç. (A, μ, α) Hom-cebir olsun, bu Hom-cebirin kısıtlanmış duali $(A^o, \pi^{-1} o\ \delta, (\alpha^{-1})^*)$ Hom-eşcebirdir. Eğer yapı birimli ise yani (A, μ, η, α) birimli Hom-cebir ise kısıtlanmış duali $(A^o, \pi^{-1} o\ \delta, \eta^*, (\alpha^{-1})^*)$ eşbirimli Hom-eşcebirdir.

İspat. Önerme 2.1.5 kullanılarak aşağıdaki eşetki tanımlanır:

$$\pi^{-1} o\ \delta : A^o \to A^o \otimes A^o.$$

Değişmelilik şartını kontrol etmek için aşağıdaki denklemler kullanılır. İlk olarak,

$$((\alpha^{-1})^* \otimes \pi^{-1} o\ \delta)(\pi^{-1} o\ \delta)(f) = (\alpha^{-1})^*(f_{<1>}) \otimes f_{<2><1>} \otimes f_{<2><2>},$$

eşitliğini ve ikinci olarak

$$(\pi^{-1} o\ \delta \otimes (\alpha^{-1})^*)(\pi^{-1} o\ \delta)(f) = f_{<1><1>} \otimes f_{<1><2>} \otimes (\alpha^{-1})^*(f_{<2>})$$

eşitliğini aşağıdaki denklemler ile birlikte göz önünde bulundurarak

$$((\alpha^{-1})^*(f_{<1>}) \otimes f_{<2><1>} \otimes f_{<2><2>})(a \otimes a' \otimes a'')$$

$$= f_{<1>}\big(\alpha^{-1}(a)\big) f_{<2>}\big(\alpha^{-2}(a' \bullet a'')\big) = f(\alpha^{-3}(a) \bullet [\alpha^{-4}(a') \bullet \alpha^{-4}(a'')])$$

$$= f\big([\alpha^{-4}(a) \bullet \alpha^{-4}(a')] \bullet \alpha^{-3}(a'')\big) = f_{<1>}(\alpha^{-2}(a \bullet a') f_{<2>}\big(\alpha^{-1}(a'')\big)$$

$$= \big(f_{<1><1>} \otimes f_{<1><2>} \otimes (\alpha^{-1})^*(f_{<2>})\big)(a \otimes a' \otimes a''),$$

eşitliği elde edilir. Eşbirim için ise,

$$(id \otimes \eta^*)\big((\pi^{-1} o\ \delta)(f)\big)(a) = f_{<1>}(a)\eta^*(f_{<2>})$$

$$= f\left(\alpha^{-2}\big(a \bullet \eta(1)\big)\right) = f\left(\alpha^{-2}\big(\alpha(a)\big)\right) = f\big(\alpha^{-1}(a)\big) = (\alpha^{-1})^*(f)(a),$$

eşitlikleri ve

$$(\eta^* o\ (\alpha^{-1})^*)(f) = \eta^*\big((\alpha^{-1})^*(f)\big) = (\alpha^{-1})^*(f)\big(\eta(1)\big)$$

$$= f\left(\alpha^{-1}(\eta(1))\right) = f(\eta(1)) = \eta^*(f)$$

eşitlikleri yeterlidir. Sonuç olarak, (A, μ, η, α) birimli Hom-cebirinin kısıtlanmış duali olan $(A^o, \pi^{-1} o\ \delta, \eta^*, (\alpha^{-1})^*)$ yapı, eşbirimli Hom-eşcebirdir.

2.1.8. Tanım. $(B, \mu, \alpha, \Delta, \beta)$ Hom-bicebir olsun. Bu durumda

i. (B, μ, α) Hom-cebir,
ii. (B, Δ, β) Hom-eşcebir,
iii. Hom-eşcebir yapı dönüşümleri olan Δ ve β, Hom-cebir dönüşümleridir;
   a. $\Delta\ o\ \mu = (\mu \otimes \mu) o (id\ o\ \tau\ o\ id) o (\Delta \otimes \Delta)$,
   b. $\Delta\ o\ \alpha = (\alpha \otimes \alpha) o\ \Delta$,
   c. $\beta\ o\ \mu = \ \mu\ o\ (\beta \otimes \beta)$,
   d. $\beta\ o\ \alpha = \alpha\ o\ \beta$.

koşulları sağlanır.

2.1.9. Tanım. $(B, \mu, \eta, \alpha, \Delta, \varepsilon, \beta)$ birimli ve eşbirimli Hom-bicebir olsun. Bu durumda

i. (B, μ, η, α) birimli Hom-cebir,
ii. $(B, \Delta, \varepsilon, \beta)$ eşbirimli Hom-eşcebir,
iii. Hom-eşcebir yapı dönüşümleri olan Δ ve β, birimli Hom-cebir dönüşümleridir;
   a. $\Delta(\eta(1)) = \eta(1) \otimes \eta(1)$,
   b. $\Delta\ o\ \mu = (\mu \otimes \mu) o (id\ o\ \tau\ \ o\ id) o (\Delta \otimes \Delta)$,
   c. $\Delta\ o\ \alpha = (\alpha \otimes \alpha) o\ \Delta$,
   d. $\varepsilon\ o\ \eta = id_k$,
   e. $\varepsilon\ o\ \mu = \varepsilon \otimes \varepsilon$,
   f. $\varepsilon\ o\ \alpha = \varepsilon$,
   g. $\beta\ o\ \eta = \eta$,
   h. $\beta\ o\ \mu = \ \mu\ o\ (\beta \otimes \beta)$,
   i. $\beta\ o\ \alpha = \alpha\ o\ \beta$

koşulları sağlanır.

2.1.10. Tanım. $(H,\mu,\eta,\alpha,\Delta,\varepsilon,\beta,S)$ Hom-Hopf cebir olsun. Bu durumda

i. $(H,\mu,\eta,\alpha,\Delta,\varepsilon,\beta)$ (eş)birimli Hom-bicebirdir.

ii. $S : H \to H$ tanımlı lineer antipot dönüşümü aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

a. $\mu\ o\ (S \otimes Id)\ o\ \Delta = \mu\ o\ (Id \otimes S)\ o\ \Delta = \eta\ o\ \varepsilon,$

b. $S\ o\ \alpha = \alpha\ o\ S,$

c. $S\ o\ \beta = \beta\ o\ S$

şartları sağlanır.

Antipotun sağladığı bazı eşitlikler Önerme 2.1.6 ile aşağıdaki gibi verilir.

2.1.6. Önerme. $(H,\mu,\eta,\alpha,\Delta,\varepsilon,\beta,S)$ herhangi bir Hom-Hopf cebir olsun. Bu yapıda antipot bir tektir ve aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

i. $S\ o\ \eta = \eta,$

ii. $\varepsilon\ o\ S = \varepsilon,$

iii. $S\ o\ \mu = \mu\ o\ (S \otimes S)\ o\ \tau,$

iv. $\Delta\ o\ S = (\tau\ o\ (S \otimes S)\ o\ \Delta).$

Hom-Hopf cebirin kısıtlanmış dualinin de Hom-Hopf cebir olduğu, kısıtlanmış dual tanımı yardımıyla Önerme 2.1.7 de verilmiştir.

2.1.7. Önerme. $(H,\mu,\eta,\alpha,\Delta,\varepsilon,\beta,S)$ bir Hom-Hopf cebir olsun. Bu yapının kısıtlanmış duali olan $(H^{\circ},\Delta^*,\varepsilon,(\beta^{-1})^*,\pi^{-1}o\ \delta,\eta^*,(\alpha^{-1})^*,S^*)$ yapısı da bir Hom-Hopf cebirdir.

İspat. Sonlu boyutlu vektör uzayında tanımlanmış olan Hom-Hopf cebirinin dualinin, Hom-Hopf cebir olduğu kaynak (Makhlouf ve Silvestrov 2010) de belirtilmiştir. Sonsuz boyutlu vektör uzayında ise kısıtlanmış dual yardımıyla, Hom-Hopf cebirinin dualinin, Hom-Hopf cebir olduğunu göstermek için aşağıdaki tanımlar gereklidir.

Sonuç 2.1.1 kullanılarak, $(H^{\circ},\Delta^*,\varepsilon,(\beta^{-1})^*)$ yapısı birimli Hom-cebirdir denir. Ayrıca, Sonuç 2.1.2 den $(H^{\circ},\pi^{-1}o\ \delta,\eta^*,(\alpha^{-1})^*)$ yapısı eşbirimli Hom-eşcebirdir. Sonuç olarak, Hom-Hopf cebirin kısıtlanmış dualinin Hom-Hopf cebir olduğunu gösterebilmek için bicebir şartları ve antipot özelliklerinin gösterilmesi gerekmektedir. İlk olarak Tanım 2.1.9. iii) nin (a) özelliği aşağıdaki gibi gösterilir:

$$(\pi^{-1}o\delta)(\varepsilon)(h \otimes h') = (\varepsilon)(\alpha^{-2}(h \bullet h')) = \varepsilon(h \bullet h') = (\varepsilon \otimes \varepsilon)(h \otimes h').$$

Özelliği tekrar ifade etmek gerekirse yukarıdaki ifade

$$(\pi^{-1}o\delta)(\varepsilon) = \varepsilon \otimes \varepsilon$$

şeklinde yazılabilir.

Kısıtlanmış dual yapıda çarpma işlemini $\star: H \otimes H \to H$ olarak gösterilsin. Ayrıca $(\pi^{-1}o\delta)(f) \coloneqq f_{<1>} \otimes f_{<2>} \in H^\circ \otimes H^\circ$ iken, aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$(\pi^{-1}o\delta)(f \star g)(h \otimes h') = (f \star g)\big(\alpha^{-2}(h \bullet h')\big) = (f \star g)\big(\alpha^{-2}(h) \bullet \alpha^{-2}(h')\big)$$

$$= f(\beta^{-2}(\alpha^{-2}(h_{<1>}) \bullet \alpha^{-2}(h'_{<1>})))g(\beta^{-2}(\alpha^{-2}(h_{<2>}) \bullet \alpha^{-2}(h'_{<2>}))) =$$

$$= f(\beta^{-2}(\alpha^{-2}(h_{<1>}))\bullet \beta^{-2}(\alpha^{-2}(h'_{<1>})))g(\beta^{-2}\big(\alpha^{-2}(h_{<2>})\big) \bullet \beta^{-2}(\alpha^{-2}(h'_{<2>})))$$

$$= f_{<1>}\big(\beta^{-2}(h_{<1>})\big)f_{<2>}\big(\beta^{-2}(h'_{<1>})\big)g_{<1>}\big(\beta^{-2}(h_{<2>})\big)g_{<2>}(\beta^{-2}(h'_{<2>}))$$

$$= (f_{<1>} \star\ g_{<1>})(h)(f_{<2>} \star g_{<2>})(h').$$

Yukarıdaki ifade kısaca aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$(\pi^{-1}o\delta)(f \star g) = (\pi^{-1}o\delta)(f) \star (\pi^{-1}o\delta)(g)$$

böylece (b) özelliği gösterilmiş olur.

(c) şartı aşağıdaki eşitlikler yardımıyla görülür:

$$\begin{aligned}
\big((\pi^{-1}o\delta)\ o\ (\beta^{-1})^*\big)(f)(h \otimes\ h') &= (\pi^{-1}o\delta)(f\ o\ \beta^{-1})(h \otimes\ h') \\
&= (f\ o\ \beta^{-1})(\alpha^{-2}(h \bullet h')) = f\left(\alpha^{-2}\big(\beta^{-1}(h) \bullet \beta^{-1}(h')\big)\right) \\
&= (\pi^{-1}o\delta)(f)(\beta^{-1}(h) \bullet \beta^{-1}(h')) \\
&= \big(((\beta^{-1})^* \otimes (\beta^{-1})^*)\ o\ (\pi^{-1}\ o\ \delta)\big)(f)\ (h \otimes\ h')
\end{aligned}$$

Eşitlik aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir:

$$(\pi^{-1}o\delta)\ o\ (\beta^{-1})^* = ((\beta^{-1})^* \otimes (\beta^{-1})^*)\ o\ (\pi^{-1}\ o\ \delta).$$

Bicebir olma şartlarından (d) aşağıdaki gibi gösterilebilir, $\forall\ \sigma \in k$ için

$$(\eta^* o\varepsilon)(\sigma) = \varepsilon\big(\eta(\sigma)\big) = \sigma.$$

$$\eta^* o\varepsilon = id_{k}.$$

Bir diğer şart (e) ise

$$\eta^*(f \star g) = f \star g\big(\eta(1)\big) = f\left(\beta^{-2}\big(\eta(1)\big)\right) g\left(\beta^{-2}\big(\eta(1)\big)\right)$$

$$= f\big(\eta(1)\big)g\big(\eta(1)\big) \; = \eta^*(f)\eta^*(g),$$

olarak görülebilir.

$$(\eta^* o(\beta^{-1})^*)(f) = (f\ o\ \beta^{-1})\big(\eta(1)\big) = f\left(\beta^{-1}\big(\eta(1)\big)\right) = f\big(\eta(1)\big) \; = \eta^*(f),$$

Yukarıda gösterilen (f) şartı aşağıdaki gibi tekrar ifade edilebilir:

$$\eta^* o(\beta^{-1})^* = \eta^*.$$

Şartlardan bir diğeri olan (g) şartı

$$((\alpha^{-1})^* o\ \varepsilon)(h) = \varepsilon\big(\alpha^{-1}(h)\big) = \varepsilon(h)$$

olarak gösterilir.

(h) şartı,

$$\begin{aligned}(\alpha^{-1})^*(f \star g)(h) &= (f \star g)\big(\alpha^{-1}(h)\big)\\ &= f\left(\beta^{-2}\big(\alpha^{-1}(h_{<1>})\big)\right) g\left(\beta^{-2}\big(\alpha^{-1}(h_{<2>})\big)\right)\end{aligned}$$

$$= (\alpha^{-1})^*(f)\big(\beta^{-2}(h_{<1>})\big)(\alpha^{-1})^*(g)\big(\beta^{-2}(h_{<2>})\big) \; = \big((\alpha^{-1})^*(f) \star (\alpha^{-1})^*(g)\big)(h),$$

olarak gösterilebilir kısaca ifade etmek gerekirse bu şart aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$(\alpha^{-1})^*(f \star g) = (\alpha^{-1})^*(f) \star (\alpha^{-1})^*(g).$$

Son olarak (i) şartı,

$$(\alpha^{-1})^* o(\beta^{-1})^* = (\beta^{-1} o\ \alpha^{-1})^* = (\alpha^{-1} o\ \beta^{-1})^* = (\beta^{-1})^* o\ (\alpha^{-1})^*$$

olarak ifade edilir. Böylece verilen yapının bicebir şartlarını sağladığı gösterilmiş olur.

Hom-Hopf cebir şartlarından antipotun şartları ise aşağıdaki gibi gösterilir:

İlk olarak,

$$(S^*(f_{<1>}) \star f_{<2>})(h) = S^*(f_{<1>})\big(\beta^{-2}(h_{<1>})\big)f_{<2>}\big(\beta^{-2}(h_{<2>})\big)$$

$$= f_{<1>}\left(S\big(\beta^{-2}(h_{<1>})\big)\right)f_{<2>}\big(\beta^{-2}(h_{<2>})\big)$$

$$= f\left(\alpha^{-2}\left(S\big(\beta^{-2}(h_{<1>})\big) \bullet \beta^{-2}(h_{<2>})\right)\right)$$

$$= \varepsilon(h)f\big(\eta(1)\big) = (\eta^* \, o \, \varepsilon)(f)(h),$$

özelliği tekrar ifade edecek olursak,

$$S^*(f_{<1>}) \star f_{<2>} = \eta^*(f)\varepsilon$$

veya

$$f_{<1>} \star \; S^*(f_{<2>}) = \eta^*(f)\varepsilon.$$

eşitlikleri elde edilir. Diğer iki özellik ise aşağıdaki gibidir:

$$S^* \, o \, (\beta^{-1})^* = (\beta^{-1} \, o \, S)^* = (S \, o \, \beta^{-1})^* = \; (\beta^{-1})^* \, o \, S^*$$

ve

$$S^* \, o \, (\alpha^{-1})^* = (\alpha^{-1} \, o \, S)^* = (S \, o \, \alpha^{-1})^* = \; (\alpha^{-1})^* \, o \, S^*.$$

Sonuç olarak, $(H, \mu, \eta, \alpha, \Delta, \varepsilon, \beta, S)$ Hom-hopf cebirinin kısıtlanmış duali olan $(H°, \Delta^*, \varepsilon, (\beta^{-1})^*, \pi^{-1} o \; \delta, \eta^*, (\alpha^{-1})^*, S^*)$ yapısı bir Hom-Hopf cebir olur ve ispat tamamlanmış olur.

2.2 Hom-Lie Cebirler ve Evrensel Zarflama Cebirleri

Bu bölümde düzlemsel ikili ağaçlar kullanılarak Hom-Lie cebirlerin evrensel zarflama cebiri olan Hom-Hopf cebirler tanımlanmıştır. Kullanılacak olan Hom-Lie cebir tanımı aşağıda verilmiştir. Daha sonra düzlemsel ikili ağaçlar bölümüne geçilmiştir.

2.2.1. Tanım. $\mathfrak{g}$ vektör uzay olsun. Bu uzay üzerinde, $[\cdot,\cdot]$ anti-simetrik bilineer çarpımı ve $\alpha: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ dönüşümü tanımlansın. Bu yapı üzerinde Hom-Jacobi özdeşliği olan

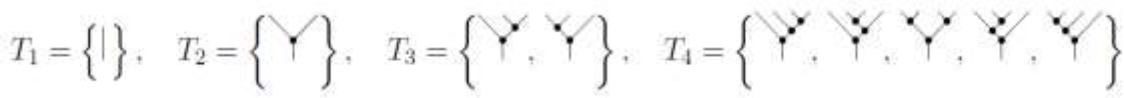
$$[\alpha(x), [y, z]] + [\alpha(y), [z, x]] + \big[\alpha(z), [x, y]\big] = 0$$

şartı sağlanırsa, $(\mathfrak{g}, \alpha)$ Hom-Lie cebirdir.

2.2.1 Düzlemsel İkili Ağaçlar ve Hom-Hopf Cebirler

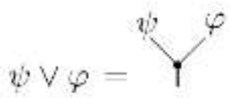
n pozitif bir tamsayı olmak üzere, n yapraklı ve bir köklü ikili ağaçların kümesini T_n ile gösterilir. Düzlemsellik terimi, ikili ağaç gösteriminde ağaçlardaki dalların sıralarının, sağdan sola veya soldan sağa önemli olduğu anlamına gelmektedir (Yau 2008).

$n = 1, 2, 3, 4$ için T_n kümeleri aşağıdaki gibidir:



Yukarıdaki her bir nokta bir bağlantı noktasını belirtmekte ve o noktadan uzanan doğrular ise dalları temsil etmektedir. Herhangi bir T_n ağacında, en altta kök olmak üzere, $n - 1$ tane bağlantı noktası vardır. Ayrıca, T_n nin eleman sayısını bulmak için Catalan sayıları kullanılabilir. Yani, n. Catalan sayısı olan $C_n = (2n)!/n!\,(n+1)!$ sayısı $n + 1$ tane bağlantı noktasına sahip tüm ağaçların kümesi olan T_{n+1} in mertebesidir (Laurent-Gengoux ve diğ. 2018).

Ağaçların çizimi ve bazı temel özelliklerini anlatabilmek için, $\psi \in T_n$ ve $\varphi \in T_m$ ağaçlarını ele alınırsa. $\psi \vee \varphi$ işlemi, ψ ve φ ağaçlarının sırasıyla birleştirilmesidir. Belirtilen ağaçların köklerini yeni bir bağlantı noktasında sırasıyla birleştirerek elde edilen yapı, elde edilen yeni kökün üzerinde bir $n + m$ ağaç oluşturur. Bu durum aşağıdaki gibi çizilebilir:



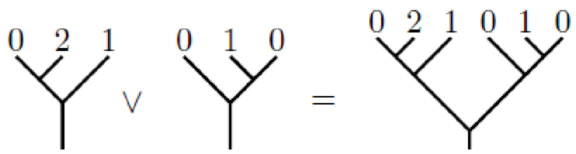
Burada bahsedilen işlem, değişmeli olmadığı gibi birleşmeli de değildir.

Ayrıca, bir kökün veya dalın kesilmesiyle yeni ağaçlar oluşabilir. Herhangi bir $\psi \in T_n$ ağacı, $p + q = n$ için $\psi_1 \in T_p$ ve $\psi_2 \in T_q$ olacak şekilde tek türlü yazılabilir. Yani, $\psi = \psi_1 \vee \psi_2$ tek türlüdür (Yau 2008).

2.2.2 Ağırlıklı Ağaçlar

Herhangi bir n-ağacın üst dallarına $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ sayıları atanarak elde edilen bu n-ağacın, $\psi \in T_n$ nin, ağırlıklı ağaç gösterimi $(\psi, a_1, a_2, \dots, a_n)$ şeklindedir. Aşağıda ağırlıklı 3-ağaç için iki örnek verilmiştir:

$\psi \vee \varphi$ olarak belirtilen ağaçları birleştirme işlemi ağırlıklı ağaçlar için de geçerlidir. Ağırlıklı ağaçlar için birleştirme işlemine aşağıdaki gibi bir örnek verilebilir:



Tüm ağırlıklı n-ağaçların kümesi B olsun

$$B \coloneqq \{\mathbf{1}\} \cup \bigcup_{n>0} B_n.$$

Burada $\mathbf{1}$ birimdir. Ayrıca, $\mathbb{T}$ ile B lerin ürettiği vektör uzayını ifade edilsin. O zaman, birleşme işlemini verilen notasyonlarla aşağıdaki gibi belirtebilir:

$$\vee : B_n \times B_m \to B_{n+m}$$

Ayrıca,

$$\alpha : B_n \to B_n, \qquad \varphi \coloneqq (\varphi, s_1, s_2, \dots, s_n) \to (\varphi, s_1 + 1, s_2 + 1, \dots, s_n + 1)$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın:

i) $\mathfrak{a}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$,

ii) $\mathbf{1} \vee \mathbf{1} = \mathbf{1}$,

iii) $\varphi \vee \mathbf{1} = \mathbf{1} \vee \varphi = \mathfrak{a}(\varphi)$.

Bu dönüşüm ile birleştirme işleminin, Hom-birleşmeli olmadığı açıktır. Yani, $\forall\, \varphi, \varphi', \varphi'' \in T$ elemanları için

$$\mathfrak{a}(\varphi) \vee (\varphi' \vee \varphi'') - (\varphi \vee \varphi') \vee \mathfrak{a}(\varphi'')$$

elemanları mevcuttur. Yukarıdaki biçimdeki elemanların ürettiği ideali $\mathcal{I}$ ile gösterilerek elde edilen $\mathbb{T}/\mathcal{I}$ bölümü Hom-birleşmelidir. Bir başka ifade ile $(\mathbb{T}/\mathcal{I}, \vee, \mathbf{1}, \mathfrak{a})$ birimli Hom-cebirdir.

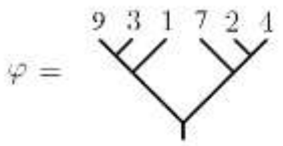
Herhangi bir $\varphi \coloneqq (\varphi, s_1, s_2, \dots, s_n)$ ve $\boldsymbol{I} \coloneqq \{t_1, t_2, \dots, t_m\} \subseteq \{1,2,\dots,n\}$ için $\varphi_{\boldsymbol{I}} \in T_m$ ile $\{1,2,\dots,n\}/\boldsymbol{I}$ e karşılık gelen ve dalları **1** ile değiştirilmiş ağacı ifade etsin. Bu durumda, herhangi bir $\varphi \in B_n$ için, aşağıdaki eşçarpım:

$$\Delta: \mathbb{T} \to \mathbb{T} \otimes \mathbb{T}, \qquad \Delta(\varphi) \coloneqq \sum_{\substack{\boldsymbol{I} \cup \boldsymbol{J} = \{1,2,\dots,n\} \\ \boldsymbol{I} \cap \boldsymbol{J} = \emptyset}} \varphi_{\boldsymbol{I}} \otimes \varphi_{\boldsymbol{J}}, \qquad \Delta(\mathbf{1}) \coloneqq \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$$

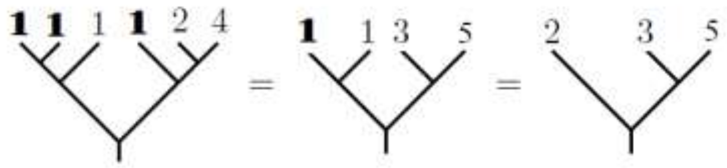
ve eşbirim

$$\varepsilon: \mathbb{T} \to k, \qquad \varepsilon(\mathbf{1}) = 1, \qquad \varepsilon(\varphi) = 0$$

tanımlanabilir (Laurent-Gengoux ve diğ. 2018). Yukarıda belirtilen $\varphi_{\boldsymbol{I}}$ ağacının çizimi için bir örnek aşağıdaki gibi:



olsun. O zaman, φ için $I = \{3,5,6\}$ olarak verilirse, elde edilecek olan $\varphi_{\boldsymbol{I}}$ aşağıdaki gibidir:



$(\mathbb{T}/\mathcal{I}, \vee, \mathbf{1}, \mathfrak{a})$ nin birimli Hom-cebir olduğunu belirtmiştik. Verilen eşçarpım ve eşbirim ile $(\mathbb{T}/\mathcal{I}, \vee, \mathbf{1}, \mathfrak{a}, \Delta, \varepsilon, Id)$ yapısı da bir Hom-bicebir olur.

$\mathbb{T}/\mathcal{I}$ üzerinde antipot tanımı aşağıdaki gibidir: $\forall\, \varphi, \varphi' \in B,\;\; T_1 = \{\varphi_1\}$ için

$$S: \mathbb{T} \to \mathbb{T}$$

$$S(\mathbf{1}) = \mathbf{1},$$

$$S(\varphi_1, s) = -(\varphi_1, s),$$

$$S(\varphi \,\vee\, \varphi') = S(\varphi') \,\vee\, S(\varphi)$$

şartlarını sağlar ise $S, \mathbb{T}/\mathcal{I}$ üzerinde antipottur.

Böylelikle, Hom-Hopf yapısı olan $(\mathbb{T}/\mathcal{I}, \vee, \mathbf{1}, \mathfrak{a}, \Delta, \varepsilon, Id, S)$ yapısı tanımlanmış olur.

2.2.3 Hom-Lie Cebirlerin Evrensel Zarflama Cebirleri

$(\mathfrak{g}, \phi)$ Hom-lie cebirinin evrensel zarflama cebiri aşağıdaki gibi tanımlanır: İlk olarak,

$$\mathbb{T}^{\mathfrak{g}} \coloneqq k\mathbf{1} \oplus \{\, \oplus\, n \geq 1\; (B_n \oplus\; \mathfrak{g}^{\otimes\, n}\,)\}$$

uzayının elemanları aşağıdaki gibidir:

$$(\varphi, s_1, \dots, s_n, \xi_1, \dots, \xi_n), \qquad \varphi \in T_n, \qquad s_1, \dots, s_n \in \mathbb{N}, \qquad \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathfrak{g}.$$

Bu elemanlar, ağırlıklı ağaçların yapraklarında ağırlık sayılarına ek olarak ξ ler bulunan ağaçlar olarak düşünülebilir (Laurent-Gengoux ve diğ. 2018). Diğer işlemler ξ leri içerecek şekilde aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\forall(\varphi, s_1, \dots, s_n, \xi_1, \dots, \xi_n) \in B_n, \qquad n \geq 1,$$

$$\vee : \mathbb{T}^{\mathfrak{g}} \otimes \mathbb{T}^{\mathfrak{g}} \to \mathbb{T}^{\mathfrak{g}},$$

$$(\varphi, s_1, \dots, s_n, \xi_1, \dots, \xi_n) \vee (\varphi', s'_1, \dots, s'_n, \xi'_1, \dots, \xi'_n)$$

$$\coloneqq (\varphi \vee \varphi', s_1, \dots, s_n, s'_1, \dots, s'_n, \xi_1, \dots, \xi_n, \xi'_1, \dots, \xi'_n),$$

$$\mathfrak{a} : \mathbb{T}^{\mathfrak{g}} \to \mathbb{T}^{\mathfrak{g}}, \qquad \mathfrak{a}(\varphi, s_1, s_2, \dots, s_n, \xi_1, \dots, \xi_n) \coloneqq (\varphi, s_1, s_2, \dots, s_n, \phi(\xi_1), \dots, \phi(\xi_n)),$$

$$\Delta : \mathbb{T}^{\mathfrak{g}} \to \mathbb{T}^{\mathfrak{g}} \otimes \mathbb{T}^{\mathfrak{g}}, \qquad \Delta(\varphi, s_1, s_2, \dots, s_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$$

$$:= \sum_{\substack{\{t_1,\dots,t_m\} \cup \{p_1,\dots,p_{n-m}\} = \{1,\dots,n\} \\ \{t_1,\dots,t_m\} \cap \{p_1,\dots,p_{n-m}\} = \emptyset}} (\varphi_{\{t_1,\dots,t_m\}}, \xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_m}) \otimes (\varphi_{\{p_1,\dots,p_{n-m}\}}, \xi_{p_1}, \dots, \xi_{p_{n-m}})$$

$$\varepsilon : \mathbb{T}^{\mathfrak{g}} \to k, \qquad \varepsilon(\mathbf{1}) = 1,$$

$$\varepsilon(\varphi, s_1, s_2, \dots, s_n, \xi_1, \dots, \xi_n) = 0.$$

Verilen birleştirme işlemini Hom-birleşmeli yapabilmek için ilk olarak $\mathcal{I}$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathcal{I}^{\mathfrak{g}} \coloneqq \bigoplus n \geq 1 \ (\mathcal{I} \cap B_n) \otimes \mathfrak{g}^{\otimes n}.$$

Tanımlanan bu (eş)ideal ile $(\mathbb{T}^{\mathfrak{g}}/\mathcal{I}^{\mathfrak{g}}, \vee, \mathbf{1}, \mathfrak{a}, \Delta, \varepsilon, Id, S)$ Hom-Hopf cebiri tanımlanmış olur.

Son olarak, aşağıdaki forma sahip olan elemanlar tarafından üretilen $\mathbb{T}^{\mathfrak{g}}/\mathcal{I}^{\mathfrak{g}}$ nin serbest esas ideali olan $\mathcal{J}^{\mathfrak{g}}$ tanımlanır (Laurent-Gengoux ve diğ. 2018).

i) $(\varphi_1, s, \xi) - (\varphi_1, 0, \phi^s(\xi))$,

ii) $(\varphi_2, 0,0, \xi_1, \xi_2) - (\varphi_2, 0,0, \xi_2, \xi_1) - (\varphi_1, 0, [\xi_1, \xi_2])$

burada kullanılan $T_1 = \{\varphi_1\}$ ve $\varphi_2 \coloneqq \varphi_1 \vee \varphi_1$ iken $T_2 = \{\varphi_2\}$ dir.

Tüm bu adımlar sonunda $(\mathfrak{g}, \phi)$ Hom-Lie cebirinin evrensel zarflama cebiri olan Hom-Hopf cebiri aşağıdaki gibidir:

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \coloneqq ((\mathbb{T}^{\mathfrak{g}}/\mathcal{I}^{\mathfrak{g}})/\mathcal{J}^{\mathfrak{g}}, \vee, \mathbf{1}, \mathfrak{a}, \Delta, \varepsilon, Id, S).$$

3. ETKİ VE EŞETKİ

Hom-Lie-Hopf cebirinin tanımı için gerekli olan ikili çapraz çarpım ve eşli çapraz çarpım tanımları ve bunların Hom versiyonları bu bölümde incelenmiştir. Bu yapılar Hom-Hopf cebirlerde eşlenmiş ve karşılıklı cebir çiftlerini oluşturmak için gerekli yapılardır. Bu bölümde, Hom-modül cebir tanımından Hom-eşmodül eşcebir tanımına kadar tüm tanımları sırası ile verilmiştir. Bölüm içerisinde kullanılan etki ve eşetki ile tanımlanan modül cebir, modül eşcebir, eşmodül cebir ve eşmodül eşcebir tanımları (Majid 2000) kaynağından alınmıştır.

3.1 Hom-modül cebir

Bu bölümde, ilk olarak modül ve modül cebir tanımlarını hatırlatıldıktan sonra Hom-modül cebir tanımını verilmiştir.

$(H,\mu,\eta,\Delta,\varepsilon)$ bicebir, (A,μ_A,η_A) cebir olsun. Bu yapılar üzerinde

$$H\otimes A\to A,\quad h\otimes a\to h\cdot a$$

etkisi ile,

$$(hh')\cdot a=h\cdot(h'\cdot a)\text{ ve }\eta_A\cdot a=a$$

şartlarını sağlayan A cebiri H-modüldür. Ayrıca, A cebirinin H-modül cebir olabilmesi için $\mu_A\colon A\otimes A\to A$ ve $\eta_A\colon k\to A$ olan yapı dönüşümlerinin köşegen H-etki ile, $A\otimes A$ üzerinde H-modül dönüşümleri olması gerekir. Yani dönüşümlerin,

$$H\otimes A\otimes A\to A\otimes A,\quad h\otimes a\otimes a'\to h_{(1)}\cdot a\otimes h_{(2)}\cdot a'$$

şartını ve

$$H\otimes k\to k,\quad h\otimes r\to\varepsilon(h)r$$

şartını sağlaması gerekir.

Yukarıda verilmiş olan tanım, homomorfizmalar ve etkiler yardımıyla Hom-modül Hom-cebir olacak şekilde aşağıdaki gibidir.

H üzerinde ϕ ve ψ endomorfizmaları $\phi\, o\, \psi = \psi\, o\, \phi$ şartını sağlasın ve H-modül cebir olan A üzerinde α ve γ endomorfizmaları ise

$$\alpha(h \cdot a) = \psi(h) \cdot \alpha(a), \qquad \gamma(h \cdot a) = \phi(h) \cdot \gamma(a)$$

şartını sağlasın. Bu dönüşümler yardımıyla hem A_α Hom-cebirinin hemde H_ϕ^ψ Hom-bicebirinin elde edildiği kontrol edilebilir. H_ϕ^ψ cebiri üzerinde çarpma işlemi $h \bullet h' \coloneqq \phi(hh')$ olarak tanımlıdır. Belirtilen Hom-yapılar üzerinde

$$\rhd : H_\phi^\psi \otimes A_\alpha \to A_\alpha, \quad h \rhd a = \phi(h) \cdot \gamma(a),$$

$$(h \bullet h') \rhd \gamma(a) = \phi(hh') \rhd \gamma(a) = \phi^2(hh') \cdot \gamma^2(a) = \phi^2(h) \cdot (\phi^2(h') \cdot \gamma^2(a))$$

$$= \phi(h) \rhd \big(\phi(h') \cdot \gamma(a)\big) = \phi(h) \rhd (h' \rhd a)$$

etkisi ve

$$\rhd : H_\phi^\psi \otimes A_\alpha \otimes \mathrm{A}_\alpha \to A_\alpha \otimes \mathrm{A}_\alpha,$$

$$h \rhd (a \otimes a') \coloneqq \phi\left(\psi\big(h_{(1)}\big)\right) \cdot \gamma(a) \otimes \phi\left(\psi\big(h_{(2)}\big)\right) \cdot \gamma(a')$$

etkisi kullanılarak

$$(h \bullet h') \rhd \gamma(a \otimes a') = \psi\left(\phi^2\big(h_{(1)}h'_{(1)}\big)\right) \cdot \gamma^2(a) \otimes \psi\left(\phi^2\big(h_{(2)}h'_{(2)}\big)\right) \cdot \gamma^2(a')$$

$$= \psi\left(\phi^2\big(h_{(1)}\big)\right) \cdot \left(\psi\left(\phi^2\big(h'_{(1)}\big)\right) \cdot \gamma^2(a)\right) \otimes \psi\left(\phi^2\big(h_{(2)}\big)\right) \cdot \left(\psi\left(\phi^2\big(h'_{(2)}\big)\right) \cdot \gamma^2(a')\right)$$

$$= \phi\left(\psi\big(h_{(1)}\big)\right) \rhd \left(\psi\big(h'_{(1)}\big) \rhd\ a\right) \otimes \phi\left(\psi\big(h_{(2)}\big)\right) \rhd \left(\psi\big(h'_{(2)}\big) \rhd\ a'\right)$$

$$= \phi(h) \rhd \big(h' \rhd (a \otimes a')\big)$$

(A_α, α) ve $(A_\alpha \otimes A_\alpha, \alpha \otimes \alpha)$ yapılarının H_ϕ^ψ üzerinde Hom-modül olduğu görülür.

Hom-modül cebir şartını göstermek için ise, A_α nin yapı dönüşümlerinin H_ϕ^ψ-Hom-modül dönüşümleri olduğunu gösterilmelidir. Bunun için ihtiyaç olan gösterimlerden birisi

$$h_{<1>} \otimes h_{<2>} := \Delta(\psi(h)) = \psi(h_{(1)}) \otimes \psi(h_{(2)})$$

gösterimidir. Bu gösterim ve aşağıdaki işlemler yardımıyla A_α Hom-modül cebirdir:

$$\mu_\alpha := (A_\alpha \otimes A_\alpha, \gamma \otimes \gamma) \to (A_\alpha, \gamma)$$

$$\mu_\alpha(h \rhd (a \otimes a')) = (h_{<1>} \rhd a) \bullet (h_{<2>} \rhd a') = (\psi(h_{(1)}) \rhd a) \bullet (\psi(h_{(2)}) \rhd a')$$

$$= \alpha(\psi(h_{(1)}) \rhd a)\alpha(\psi(h_{(2)}) \rhd a')$$

$$= \alpha\left(\phi\left(\psi(h_{(1)})\right) \cdot \gamma(a)\right)\alpha\left(\phi\left(\psi(h_{(2)})\right) \cdot \gamma(a')\right)$$

$$= \left(\phi\left(\psi^2(h_{(1)})\right) \cdot \alpha\gamma(a)\right)\left(\phi\left(\psi^2(h_{(2)})\right) \cdot \alpha\gamma(a')\right) = \phi(\psi^2(h)) \cdot \alpha\gamma(a)\alpha\gamma(a')$$

$$= \phi(\psi^2(h)) \cdot \alpha\gamma(aa') = \phi(\psi^2(h)) \cdot \gamma(a \bullet a') = \psi^2(h) \rhd (a \bullet a')$$

$$= \psi^2(h) \rhd \mu_\alpha(a \otimes a').$$

3.1.1. Sonuç. H_ϕ^ψ üzerinde tanımlanan

$$\blacktriangleright : H_\phi^\psi \otimes A_\alpha \to A_\alpha, \quad h \blacktriangleright a := \phi(\psi^2(h)) \cdot \gamma(a) = \psi^2(h) \rhd a$$

etki ile oluşan yapı Hom-modüldür.

Sonuç 3.1.1 de elde edilen Hom-modülde kullanılan etki ile daha önce tanımlananlardan farklı bir modül elde edilmiştir.

Yukarıda verilen etkinin Hom-modül şartlarını sağladığı aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$(h \bullet h') \blacktriangleright \gamma(a) = \psi^2(h \bullet h') \rhd \gamma(a) = \phi\psi^2(h) \rhd (\psi^2(h') \rhd a)$$

$$= \phi\psi^2(h) \rhd (h' \blacktriangleright a) = \phi(h) \blacktriangleright (h' \blacktriangleright a).$$

Son olarak ise, A_α nin birim dönüşümünün H_ϕ^ψ -Hom-modül dönüşümü olduğunu göstermeliyiz. Birim dönüşümü olan $\eta: (k, \rhd, Id) \to (A_\alpha, \rhd, \alpha)$ için

$$\eta(h \rhd r) = \eta(\varepsilon(h)r) = \varepsilon(h)\eta(r) = \varepsilon(\phi(h))\eta(r) = \phi(h) \cdot \eta(r)$$

$$= \phi(h) \cdot \gamma(\eta(r)) = h \rhd \eta(r)$$

ile Hom-modül Hom-cebir şartları tamamlanmış olur.

3.1.1. Tanım. $(H, \mu, \eta, \phi, \Delta, \varepsilon, \psi)$ Hom-bicebir, $\gamma: A \to A$ dönüşümü ile $(A, \mu_\alpha, \eta_A, \alpha)$ bir Hom-cebir ve $(A, \gamma), \rhd : H \otimes A \to A$ etkisi ile H-Hom-modül olsun. (A, γ) nın bir H-Hom-modül cebir olabilmesi için,

$$\rhd : H \otimes A \to A$$

etkisinin aşağıdaki şartları sağlaması gerekir: $\forall\, h \in H, \forall\, a, a' \in A$ için

$$\alpha(h \rhd a) = \psi(h) \rhd \alpha(a),$$

$$\psi^2(h) \rhd (a \bullet a') = (h_{<1>} \rhd a) \bullet (h_{<2>} \rhd a'),$$

$$h \rhd \eta(1) = \varepsilon(h)\eta(1)$$

şartlarını sağlayan (A, γ) bir H-Hom-modül cebirdir.

3.1.2. Sonuç. Hom-bicebirin homomorfizmalarının $\phi = \psi$ eşit olduğu durum (Makhlouf ve Panaite 2015, Yau 2008) kaynaklarında incelenmiştir.

3.2 Hom-modül eşcebir

Hom-modül eşcebir tanımı için Tanım 3.1.1 e benzer olarak, ilk önce modül eşcebir tanımı hatırlatılmıştır.

$(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ eşcebiri $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ bicebiri üzerinde $\cdot : H \otimes C \to C$ etkisinin modül eşcebir şartını sağlar yani, eşcebir yapı dönüşümlerinden Δ_C, $C \otimes C$ üzerinde köşegen etki ile H-modül homomorfizmasıdır. Ayrıca, ε_C yapı dönüşümü de H-modül homomorfizmasıdır. Bu yapılara homomorfizmalar eklenerek, Hom-modül eşcebir tanımı aşağıdaki gibi verilir.

H üzerinde ϕ ve ψ endomorfizmaları, $\phi\ o\ \psi = \psi\ o\ \phi$ şartını sağlasın ve H-modül eşcebir olan C üzerinde γ ve β endomorfizmaları ise

$$\gamma(h \cdot c) = \phi(h) \cdot \gamma(c), \qquad \beta(h \cdot c) = \psi(h) \cdot \beta(c)$$

şartını sağlasın. Bu dönüşümler ile, C^β eşcebiri ve H_ϕ^ψ Hom-bicebiri elde edilir. Burada $(C^\beta, \Delta_\beta, \varepsilon_\beta)$ eşcebirinin yapı dönüşümleri $\Delta_\beta \coloneqq \Delta\ o\ \beta$ ve $\varepsilon_\beta \coloneqq \varepsilon\ o\ \beta$ dir.

C^β nın H_ϕ^ψ-Hom-modül olabilmesi için kullanılacak etki,

$$\rhd:\ H_\phi^\psi \otimes C^\beta \to C^\beta, \qquad h \rhd c := \phi(h)\cdot\gamma(c)$$

olsun. Bu etkinin, H_ϕ^ψ-Hom-modül şartını sağladığı aşağıdaki gibi görülür:

$$(h \bullet h') \rhd \gamma(c) = \phi(hh') \rhd \gamma(c) = \phi^2(hh')\cdot\gamma^2(c) = \phi^2(h)\cdot\left(\phi^2(h')\cdot\gamma^2(c)\right)$$

$$= \phi(h) \rhd \left(\phi(h')\cdot\gamma(c)\right) = \phi(h) \rhd (h' \rhd c).$$

$C^\beta \otimes C^\beta$ yapısının köşegen etki yardımıyla, H_ϕ^ψ -Hom-modül olduğu aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\rhd: H_\phi^\psi \otimes C^\beta \otimes C^\beta \to C^\beta \otimes C^\beta,$$

$$h \rhd (c \otimes c') := \phi\left(\psi\left(h_{(1)}\right)\right)\cdot\gamma(c) \otimes \phi\left(\psi\left(h_{(2)}\right)\right)\cdot\gamma(c')$$

$$= h_{<1>} \rhd c \otimes h_{<2>} \rhd c',$$

$$(h \bullet h') \rhd \gamma(c \otimes c') = \phi(hh') \rhd \left(\gamma(c) \otimes \gamma(c')\right)$$

$$= \phi^2\left(\psi(h_{(1)})\right)\phi^2\left(\psi(h'_{(1)})\right)\cdot\gamma^2(c) \otimes \phi^2\left(\psi(h_{(2)})\right)\phi^2\left(\psi(h'_{(2)})\right)\cdot\gamma^2(c')$$

$$= \phi^2\left(\psi\left(h_{(1)}\right)\right)\cdot\left(\phi^2\left(\psi\left(h'_{(1)}\right)\right)\cdot\gamma^2(c)\right) \otimes \phi^2\left(\psi\left(h_{(2)}\right)\right)$$
$$\cdot\left(\phi^2\left(\psi\left(h'_{(2)}\right)\right)\cdot\gamma^2(c')\right)$$

$$= \phi(h) \rhd \left(h' \rhd (c \otimes c')\right).$$

Hom-modül olan C^β nin, Hom-modül eşcebir olduğunu göstermek için yapı dönüşümlerinin H_ϕ^ψ -Hom-modül dönüşümleri olduğu gösterilmelidir. Tanımlanan eşçarpım,

$$\Delta_\beta\left(\phi(h)\cdot\gamma(c)\right) = \beta\left(\phi\left(h_{(1)}\right)\cdot\gamma\left(c_{(1)}\right)\right) \otimes \beta\left(\phi\left(h_{(2)}\right)\cdot\gamma\left(c_{(2)}\right)\right)$$

$$= \phi\left(\psi\left(h_{(1)}\right)\right)\cdot\gamma\left(\beta\left(c_{(1)}\right)\right) \otimes \phi\left(\psi\left(h_{(2)}\right)\right)\cdot\gamma\left(\beta\left(c_{(2)}\right)\right) = h$$
$$\rhd \left(\beta\left(c_{(1)}\right) \otimes \beta\left(c_{(2)}\right)\right)$$

$$h_{<1>} \rhd c_{<1>} \otimes h_{<2>} \rhd c_{<2>} = h \rhd \Delta_\beta(c),$$

eşitliği ile H_ϕ^ψ-Hom-modül dönüşümüdür. Eşbirim dönüşümü ise,

$$\varepsilon_\beta : \left(C^\beta, \beta\right) \to (k, Id),$$

$$\varepsilon_\beta\big(\phi(h) \cdot \gamma(c)\big) = \varepsilon\left(\psi\big(\phi(h)\big) \cdot \beta\gamma(c)\right) = \varepsilon\left(\psi\big(\phi(h)\big)\right) \cdot \varepsilon\big(\beta\gamma(c)\big)$$

$$= \varepsilon(h)\varepsilon(c)$$

eşitliği ile H_ϕ^ψ-Hom-modül dönüşümüdür.

3.2.1. Tanım. $(H, \mu, \eta, \phi, \Delta, \varepsilon, \psi)$ Hom-bicebir $(C, \Delta_C, \varepsilon_C, \beta)$ bir Hom-eşcebir olsun. $\gamma: C \to C$ dönüşümü ile ve $\rhd : H \otimes C \to C$ etkisi ile (C, γ) bir H-Hom-modül olsun. H-Hom-modül eşcebir olan (C, γ) aşağıdaki eşitlikleri sağlar: $\forall\, h \in H$ ve $\forall\, c, c' \in C$ için

$$\beta(h \rhd c) = \psi(h) \rhd \beta(c),$$

$$\Delta_C(h \rhd c) = h_{<1>} \rhd c_{<1>} \otimes h_{<2>} \rhd c_{<2>},$$

$$\varepsilon_C(h \rhd c) = \varepsilon(h)\varepsilon_C(c).$$

3.3 Hom-eşmodül cebir

Bu bölümde, ilk olarak eşmodül ve eşmodül cebir tanımını hatırlatarak, Hom-eşmodül cebir tanımı verilmiştir.

3.3.1. Tanım. $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ bicebir, (A, μ_A, η_A) cebir olsun. A ve H üzerinde

$$\nabla: A \to A \otimes H, \qquad a \mapsto a_{(0)} \otimes a_{(1)}$$

eşetki dönüşümü olan ∇,

$$a_{(0)} \otimes \Delta\big(a_{(1)}\big) = \nabla\big(a_{(0)}\big) \otimes a_{(1)}, \qquad a = a_{(0)}\varepsilon\big(a_{(1)}\big)$$

eşitliklerini sağlıyor ise A cebirine sağ H-eşmodül denir.

Hom-eşmodül tanımı için, diğer bölümlerde yapıldığı gibi bicebir ve cebir yapısına $\phi: H \to H,\ \psi: H \to H$ ve $\alpha, \gamma: A \to A$ homomorfizmaları eklenir. Ayrıca α ve γ dönüşümleri $\alpha o \gamma = \gamma o \alpha$ eşitliğini sağlasın. Ek olarak, cebir homomorfizmaları olan α ve γ

$$\nabla\big(\gamma(a)\big) = \gamma\big(a_{(0)}\big) \otimes \psi\big(a_{(1)}\big), \qquad \nabla\big(\alpha(a)\big) = \alpha\big(a_{(0)}\big) \otimes \phi\big(a_{(1)}\big)$$

eşitliğini sağlasın. Verilen Hom-yapılar üzerinde

$$\nabla_{Hom}: A_\alpha \to A_\alpha \otimes H_\phi^\psi, \qquad \nabla_{Hom}(a) = a_{<0>} \otimes a_{<1>} \coloneqq \gamma\big(a_{(0)}\big) \otimes \psi\big(a_{(1)}\big)$$

$$\left(\left(\gamma \otimes \Delta_{H_\phi^\psi}\right) o\ \nabla_{Hom}\right)(a) = \left(\gamma \otimes \Delta_{H_\phi^\psi}\right)\Big(\gamma\big(a_{(0)}\big) \otimes \psi\big(a_{(1)}\big)\Big)$$

$$= \ \gamma^2\big(a_{(0)}\big) \otimes \big(\psi^2(a_{(1)(1)})\big) \otimes \big(\psi^2(a_{(1)(2)})\big)$$

$$= \gamma^2\big(a_{(0)(0)}\big) \otimes \big(\psi^2(a_{(0)(1)})\big) \otimes \big(\psi^2(a_{(1)})\big)$$

$$= \nabla_{Hom}\Big(\gamma\big(a_{(0)}\big)\Big) \otimes \big(\psi^2(a_{(1)})\big) = \big((\nabla_{Hom} \otimes \psi)\ o\ \nabla_{Hom}\big)(a)$$

eşitliği yardımıyla, (A_α, α) nın H_ϕ^ψ -Hom-eşmodül olduğu görülür. Eşitliklerde kullanılan Hom-bicebir eşçarpımı

$$\Delta_{H_\phi^\psi}: H_\phi^\psi \to H_\phi^\psi \otimes H_\phi^\psi, \qquad \Delta_{H_\phi^\psi}(h) \coloneqq \psi\big(h_{(1)}\big) \otimes \psi\big(h_{(2)}\big)$$

biçiminde tanımlıdır. $(A_\alpha \otimes A_\alpha)$ üzerinde, köşegen H_ϕ^ψ-eşetki ise

$$\nabla_{Hom}^{diag}: A_\alpha \otimes A_\alpha \to A_\alpha \otimes A_\alpha \otimes H_\phi^\psi,$$

$$\nabla_{Hom}^{diag}(a \otimes a') \coloneqq a_{<0>} \otimes a'_{<0>} \otimes a_{<1>} \bullet a'_{<1>}$$
$$= \Big(\gamma\big(a_{(0)}\big) \otimes \gamma\big(a'_{(0)}\big)\Big) \otimes \Big(\phi\Big(\psi\big(a_{(1)}\big)\Big)\phi\Big(\psi\big(a'_{(1)}\big)\Big)\Big)$$

olarak tanımlanırsa, $(A_\alpha \otimes A_\alpha, \alpha \otimes \alpha)$ yapısı aşağıdaki eşitlikler yardımıyla H_ϕ^ψ-Hom-eşmodül olur:

$$\left(\left(\gamma \otimes \Delta_{H_\phi^\psi}\right) o\ \nabla_{Hom}^{diag}\right)(a \otimes a')$$

$$= \left(\gamma \otimes \Delta_{H_\phi^\psi}\right)\left(\left(\gamma\left(a_{(0)}\right) \otimes \gamma\left(a'_{(0)}\right)\right) \otimes \phi\left(\psi\left(a_{(1)}\right)\right)\phi\left(\psi\left(a'_{(1)}\right)\right)\right)$$

$$= \gamma^2\left(a_{(0)}\right) \otimes \gamma^2\left(a'_{(0)}\right) \otimes \phi(\psi^2(a_{(1)}))\phi\left(\psi^2(a'_{(1)})\right)$$
$$\otimes \phi(\psi^2(a_{(2)}))\phi\left(\psi^2(a'_{(2)})\right)$$

$$= \gamma^2\left(a_{(0)(0)}\right) \otimes \gamma^2\left(a'_{(0)(0)}\right) \otimes \phi(\psi^2(a_{(0)(1)}))\phi\left(\psi^2(a'_{(0)(1)})\right)$$
$$\otimes \phi(\psi^2(a_{(1)}))\phi\left(\psi^2(a'_{(1)})\right)$$

$$= \gamma^2\left(a_{(0)(0)} \otimes a'_{(0)(0)}\right) \otimes \phi(\psi^2(a_{(0)(1)}))\phi\left(\psi^2(a'_{(0)(1)})\right)$$
$$\otimes \phi(\psi^2(a_{(1)}))\phi\left(\psi^2(a'_{(1)})\right)$$

$$= \nabla_{Hom}^{diag}\left(\gamma\left(a_{(0)}\right) \otimes \gamma\left(a'_{(0)}\right)\right) \otimes \phi(\psi^2(a_{(1)}))\phi\left(\psi^2(a'_{(1)})\right)$$

$$= \left((\nabla_{Hom}^{diag} \otimes \psi) o\, \nabla_{Hom}^{diag}\right)(a \otimes a').$$

Hom-cebir dönüşümü olan

$$\mu_\alpha : (A_\alpha \otimes A_\alpha, \alpha \otimes \alpha) \to (A_\alpha, \alpha)$$

dönüşümünün H_ϕ^ψ-Hom-eşmodül dönüşümü olduğu, yani H_ϕ^ψ-Hom-eşmodül olan A_α nın H_ϕ^ψ-Hom-eşmodül cebir olduğu aşağıdaki eşitlikler yardımıyla görülür:

$$\left((\mu_\alpha \otimes Id)\ o\ \nabla_{Hom}^{diag}\right)(a \otimes a')$$

$$= (\mu_\alpha \otimes Id)\left(\gamma\left(a_{(0)}\right) \otimes \gamma\left(a'_{(0)}\right) \otimes \phi\left(\psi\left(a_{(1)}\right)\right)\phi\left(\psi\left(a'_{(1)}\right)\right)\right)$$

$$= \alpha\left(\gamma\left(a_{(0)}\right)\right)\alpha\left(\gamma\left(a'_{(0)}\right)\right) \otimes \phi\left(\psi\left(a_{(1)}\right)\right)\phi\left(\psi\left(a'_{(1)}\right)\right) = \nabla_{Hom}\left(\alpha(a)\alpha(a')\right)$$

$$= (\nabla_{Hom}\ o\ \mu_\alpha)(a \otimes a').$$

Ayrıca birim dönüşümü (k, Id) olup bu dönüşüm

$$\nabla_k : k \to k \otimes H_\phi^\psi, \qquad \nabla_k(r) \coloneqq 1 \otimes \eta(r)$$

eşetkisi yardımıyla, H_ϕ^ψ-Hom-eşmodül olur. Diğer yandan

$$\eta_\alpha : (k, Id) \to (A_\alpha, \alpha),$$

dönüşümünün,

$$\big((\eta_\alpha \otimes Id)\ o\ \nabla_k\big)(r) = \alpha\big(\eta_A(1)\big) \otimes \eta(r) = \gamma\big(\eta_A(1)\big) \otimes \psi\big(\eta(r)\big)$$
$$= (\nabla_{Hom}\ o\ \eta_A)(r)$$

eşitliği yardımıyla H_ϕ^ψ-Hom-eşmodül dönüşümü olduğu görülür.

3.3.2. Tanım. $(H, \mu, \eta, \phi, \Delta, \varepsilon, \psi)$ Hom-bicebir, $(A, \mu_\alpha, \eta_A, \alpha)$ Hom-cebir ve

$$\gamma : A \to A \text{ ve } \nabla : A \to A \otimes H,\ \nabla(a) \coloneqq a_{<0>} \otimes a_{<1>}$$

eşetkisi ile (A, γ) bir H-Hom-eşmodül olsun. Aşağıdaki şartlar $\forall\ r \in\ k$ ve $\forall\ a, a' \in A$ için sağlanırsa

$$\alpha(a)_{<0>} \otimes \alpha(a)_{<1>} = \alpha(a_{<0>}) \otimes \phi(a_{<1>}),$$

$$\nabla(a \bullet a') = a_{<0>} \bullet a'_{<0>} \otimes a_{<1>} \bullet a'_{<1>},$$

$$\nabla\big(\eta_A(1)\big) = \eta_A(1) \otimes \eta(1)$$

(A, γ), H-Hom-eşmodül cebir olur.

3.4 Hom-eşmodül eşcebir

Etki ve eşetki bölümünde son olarak Hom-eşmodül eşcebir tanımı verilecektir. Bu tanım için ilk olarak eşmodül eşcebir tanımı aşağıdaki gibidir.

$(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ bicebir, $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ eşcebir ve C $\nabla : C \to C \otimes H,\ c \mapsto c_{(0)} \otimes c_{(1)}$ eşetkisi ile sağ H-eşmodül eşcebir olsun. Yani, eşcebirin yapı dönüşümleri, H-eşmodül dönüşümleridir. Köşegen H-eşmodül yapısı ise,

$$\nabla : C \otimes C \to C \otimes C \otimes H, \qquad \nabla(c \otimes c') \coloneqq c_{(0)} \otimes c'_{(0)} \otimes c_{(1)} c'_{(1)}$$

ve

$$\nabla_k : k \to k \otimes H, \qquad \nabla_k(r) \to 1 \otimes \eta(r)$$

olarak tanımlansın.

H üzerinde, ϕ ve ψ endomorfizmaları $\phi\ o\ \psi = \psi\ o\ \phi$ şartını sağlasın ve H-eşmodül eşcebir olan *C* üzerinde β, γ değişmeli endomorfizmaları ise,

$$\nabla\big(\gamma(c)\big) = \gamma\big(c_{(0)}\big) \otimes \psi\big(c_{(1)}\big), \qquad \nabla\big(\beta(c)\big) = \beta\big(c_{(0)}\big) \otimes \phi\big(c_{(1)}\big)$$

şartını sağlasın. Burada, $(C^{\beta}, \Delta_{\beta}, \varepsilon_{\beta})$ eşcebirinin yapı dönüşümleri $\Delta_{\beta} \coloneqq \Delta\ o\ \beta$ ve $\varepsilon_{\beta} \coloneqq \varepsilon\ o\ \beta$ dir.

$\big(C^{\beta}, \gamma\big)$ nın H_{ϕ}^{ψ}-Hom-eşmodül olabilmesi için, kullanılacak eşetki

$$\nabla_{Hom}: C^{\beta} \to C^{\beta} \otimes H_{\phi}^{\psi}, \qquad \nabla_{Hom}\,(c) \coloneqq c_{<0>} \otimes c_{<1>} \coloneqq \gamma\big(c_{(0)}\big) \otimes \psi(c_{(1)})$$

olsun. Bu eşetkinin, (sağ) H_{ϕ}^{ψ}-Hom-eşmodül şartını sağladığı aşağıdaki gibi görülür:

$$\left(\left(\gamma \otimes \Delta_{H_{\phi}^{\psi}}\right) o \nabla_{Hom}\right)(c) = \left(\gamma \otimes \Delta_{H_{\phi}^{\psi}}\right)\left(\gamma\big(c_{(0)}\big) \otimes \psi\big(c_{(1)}\big)\right)$$

$$= \gamma^2\big(c_{(0)}\big) \otimes \psi^2\big(c_{(1)(1)}\big) \otimes \psi^2\big(c_{(1)(2)}\big) = \gamma^2\big(c_{(0)(0)}\big) \otimes \psi^2\big(c_{(0)(1)}\big) \otimes \psi^2\big(c_{(1)}\big)$$

$$= \nabla_{Hom}\left(\gamma\big(c_{(0)}\big)\right) \otimes \psi^2\big(c_{(1)}\big) = \big((\nabla_{Hom} \otimes \psi) o \nabla_{Hom}\big)(c).$$

Köşegen Hom-eşetki ise,

$$\nabla_{Hom}^{diag}: C^{\beta} \otimes C^{\beta} \to C^{\beta} \otimes C^{\beta} \otimes H_{\phi}^{\psi},$$

$$\begin{aligned}\nabla_{Hom}^{diag}(c \otimes c') &\coloneqq c_{<0>} \otimes c'_{<0>} \otimes c_{<1>} \bullet c'_{<1>} \\ &= \left(\gamma\big(c_{(0)}\big) \otimes \gamma\big(c'_{(0)}\big)\right) \otimes \phi\left(\psi\big(c_{(1)}\big)\right) \phi\left(\psi\big(c'_{(1)}\big)\right)\end{aligned}$$

olarak tanımlanır ve H_{ϕ}^{ψ}-Hom-eşmodül şartını sağladığı aşağıdaki gibi görülür:

$$\left(\left(\gamma \otimes \Delta_{H_{\phi}^{\psi}}\right) o\ \nabla_{Hom}^{diag}\right)(c \otimes c')$$

$$= \left(\gamma \otimes \Delta_{H_{\phi}^{\psi}}\right)\left(\left(\gamma\big(c_{(0)}\big) \otimes \gamma\big(c'_{(0)}\big)\right) \otimes \phi\left(\psi\big(c_{(1)}\big)\right) \phi\left(\psi\big(c'_{(1)}\big)\right)\right)$$

$$= \gamma^2\big(c_{(0)}\big) \otimes \gamma^2\big(c'_{(0)}\big) \otimes \phi\big(\psi^2(c_{(1)})\big)\phi\left(\psi^2\big(c'_{(1)}\big)\right) \otimes \phi\big(\psi^2(c_{(2)})\big)\phi\left(\psi^2\big(c'_{(2)}\big)\right)$$

$$= \gamma^2\big(c_{(0)(0)}\big) \otimes \gamma^2\big(c'_{(0)(0)}\big) \otimes \phi\big(\psi^2(c_{(0)(1)})\big)\phi\left(\psi^2({c'}_{(0)(1)})\right)$$
$$\otimes\, \phi\big(\psi^2(c_{(1)})\big)\phi\left(\psi^2({c'}_{(1)})\right)$$

$$= \gamma^2\big(c_{(0)(0)} \otimes c'_{(0)(0)}\big) \otimes \phi\big(\psi^2(c_{(0)(1)})\big)\phi\left(\psi^2({c'}_{(0)(1)})\right)$$
$$\otimes\, \phi\big(\psi^2(c_{(1)})\big)\phi\left(\psi^2({c'}_{(1)})\right)$$

$$= \nabla_{Hom}^{diag}\left(\gamma\big(c_{(0)}\big) \otimes \gamma\big(c'_{(0)}\big)\right) \otimes \phi\big(\psi^2(c_{(1)})\big)\phi\left(\psi^2({c'}_{(1)})\right)$$

$$= \left(\big(\nabla_{Hom}^{diag} \otimes \psi\big) o\, \nabla_{Hom}^{diag}\right)(c \otimes c').$$

C^β eşçarpım dönüşümünün $\Delta_\beta\colon \big(C^\beta, \gamma\big) \to \big(C^\beta \otimes C^\beta, \gamma \otimes \gamma\big)$ H_ϕ^ψ -Hom-eşmodül dönüşümü olduğu

$$\big(\nabla_{Hom}^{diag}\ o\ \Delta_\beta\big)(c) = \nabla_{Hom}^{diag}\left(\beta\big(c_{(1)}\big) \otimes \beta\big(c_{(2)}\big)\right)$$

$$= \beta\gamma\big(c_{(1)(0)}\big) \otimes \beta\gamma\big(c_{(2)(0)}\big) \otimes \psi\left(\phi^2\big(c_{(1)(1)}\big)\right)\psi\left(\phi^2\big(c_{(2)(1)}\big)\right)$$

$$= \beta\gamma\big(c_{(0)(1)}\big) \otimes \beta\gamma\big(c_{(0)(2)}\big) \otimes \psi\left(\phi^2\big(c_{(1)}\big)\right)$$

$$= \big(\Delta_\beta \otimes Id\big)\left(\gamma\big(c_{(0)}\big) \otimes \psi\left(\phi^2\big(c_{(1)}\big)\right)\right) = \left(\big(\Delta_\beta \otimes \phi^2\big)\ o\ \nabla_{Hom}\right)(c)$$

eşitlikleri yardımıyla görülür. (k, Id) ise,

$$\nabla_k\colon k \to k \otimes H_\phi^\psi, \qquad \nabla_k(r) \coloneqq 1 \otimes \eta(r)$$

eşetkisi ile ve

$$\varepsilon_C\colon \big(C^\beta, \beta\big) \to (k, Id)$$

$$(\nabla_k\ o\ \varepsilon_C)(c) = 1 \otimes \eta\big(\varepsilon_C(c)\big) = \varepsilon_C\big(c_{(0)}\big) \otimes \psi\big(c_{(1)}\big) = \varepsilon_C\left(\gamma\big(c_{(0)}\big)\right) \otimes \psi\big(c_{(1)}\big)$$

$$= \big((\varepsilon_C \otimes Id)\ o\ \nabla_{Hom}\big)(c)$$

eşitlikleri yardımıyla ile H_ϕ^ψ-Hom-eşmodül dönüşümü olur.

3.4.2. Tanım. $(H,\mu,\eta,\phi,\Delta,\varepsilon,\psi)$ Hom-bicebir ve $(C,\Delta_{\mathcal{C}},\varepsilon_{\mathcal{C}},\beta)$ Hom-eşcebir olsun. $\gamma: C \to C$ dönüşümü ve $\nabla: C \to C \otimes H$, etkisi ile (C,γ) bir H-Hom-eşmodül olsun. $\forall\, c \in C$ için

$$\beta(c)_{<0>} \otimes \beta(c)_{<1>} = \beta(c_{<0>}) \otimes \phi(c_{<1>}),$$

$$\mathrm{c}_{<0><1>} \otimes \mathrm{c}_{<0><2>} \otimes \phi^2(\mathrm{c}_{<1>}) = \mathrm{c}_{<1><0>} \otimes \mathrm{c}_{<2><0>} \otimes \mathrm{c}_{<1><1>} \bullet \mathrm{c}_{<2><1>},$$

$$\varepsilon_{\mathcal{C}}(c_{<0>})c_{<1>} = \eta\big(\varepsilon_{\mathcal{C}}(c)\big)$$

şartları sağlanıyorsa (C,γ), H-Hom-eşmodül eşcebirdir.

4. ÇİFT ÇAPRAZ ÇARPIM HOM-HOPF CEBİRLER

Bu bölümde, eşlenmiş çift Hom-Hopf cebirleri inceleyeceğiz. İlk olarak çift çapraz çarpım Hom-Hopf cebirleri inceleyeceğiz.

4.1 Çift Çapraz Çarpım Hom-Hopf Cebirlerin İnşası

4.1.1. Tanım. $(\mathcal{U}, \mu_{\mathcal{U}}, \eta_{\mathcal{U}}, \phi, \Delta_{\mathcal{U}}, \varepsilon_{\mathcal{U}}, \psi, S_{\mathcal{U}})$ ve $(\mathcal{V}, \mu_{\mathcal{V}}, \eta_{\mathcal{V}}, \alpha, \Delta_{\mathcal{V}}, \varepsilon_{\mathcal{V}}, \beta, S_{\mathcal{V}})$ iki Hom-bicebir olsun.

i) $(\mathcal{U}, \phi)$ yapısı aşağıdaki etki ile sol $\mathcal{V}$ Hom-modül eşcebirdir:

$$\triangleright : \mathcal{V} \otimes \mathcal{U} \to \mathcal{U}, \qquad \phi(v \triangleright u) = \alpha(v) \triangleright \phi(u).$$

ii) $(\mathcal{V}, \alpha)$ yapısı aşağıdaki etki ile sağ $\mathcal{U}$ Hom-modül eşcebirdir:

$$\triangleleft : \mathcal{V} \otimes \mathcal{U} \to \mathcal{V}, \qquad \alpha(v \triangleleft u) = \alpha(v) \triangleleft \phi(u).$$

iii) $\mathcal{U}$ yapısı bir sol $\mathcal{V}$-modül Hom-eşcebir olup, eğer $\forall u, u' \in \mathcal{U}, \forall v, v' \in \mathcal{V}$ için

$$v \triangleright (uu') = \left(\alpha^{-1}\big(\beta^{-1}(v_{<1>})\big) \triangleright \psi^{-1}(u_{<1>})\right) \left(\left(\alpha^{-2}\big(\beta^{-1}(v_{<2>})\big) \triangleleft \phi^{-1}\big(\psi^{-1}(u_{<2>})\big)\right) \triangleright u'\right), \tag{4.1}$$

$$(vv') \triangleleft u = \left(v \triangleleft \left(\alpha^{-1}\big(\beta^{-1}(v'_{<1>})\big) \triangleright \phi^{-2}\big(\psi^{-1}(u_{<1>})\big)\right)\right) \left(\beta^{-1}(v'_{<2>}) \triangleleft \phi^{-1}\big(\psi^{-1}(u_{<2>})\big)\right), \tag{4.2}$$

$$v_{<1>} \triangleleft u_{<1>} \otimes v_{<2>} \triangleright u_{<2>} = v_{<2>} \triangleleft u_{<2>} \otimes v_{<1>} \triangleright u_{<1>}, \tag{4.3}$$

$$v \triangleright 1 = \varepsilon_V(v) 1, \qquad 1 \triangleleft u = 1 \varepsilon_U(u).$$

eşitlikleri sağlanırsa $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ ikilisine, bir eşlenmiş Hom-bicebir çifti denir. Bicebir dönüşümleri $\alpha = \beta$ ve $\phi = \psi$ olarak seçilirse, yaptığımız tanım, kaynak (Lu ve Wang 2016) de verilmiş olan tanıma denk olur.

4.1.1. Önerme. $(\mathcal{U},\mu_{\mathcal{U}},\eta_{\mathcal{U}},\phi,\Delta_{\mathcal{U}},\varepsilon_{\mathcal{U}},\psi,S_{\mathcal{U}})$ ve $(\mathcal{V},\mu_{\mathcal{V}},\eta_{\mathcal{V}},\alpha,\Delta_{\mathcal{V}},\varepsilon_{\mathcal{V}},\beta,S_{\mathcal{V}})$ iki Hom-Hopf cebir olsun ve $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ yapısı da bir eşlenmiş çift olsun. O zaman $\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$ vektör uzayı üzerinde,

$$(u\otimes v)(u'\otimes v')$$

$$= u\left(\alpha^{-1}\big(\beta^{-1}(v_{<1>})\big) \rhd \phi^{-1}\big(\psi^{-1}(u'_{<1>})\big)\right)$$
$$\otimes \left(\alpha^{-1}\big(\beta^{-1}(v_{<2>})\big) \lhd \phi^{-1}\big(\psi^{-1}(u'_{<2>})\big)\right)v',$$

$$\Delta(u\otimes v) = (u_{<1>}\otimes v_{<1>})\otimes(u_{<2>}\otimes v_{<2>})$$

ve

$$S(u\otimes v) = (1\otimes S(\alpha^{-1}(v)))(S(\phi^{-1}(u))\otimes 1)$$

denklemleri sırasıyla, çarpım, eşçarpım ve antipot olacak şekilde bir tek Hom-Hopf cebir yapısı vardır. Verilen bu Hom-Hopf yapısıyla birlikte $\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$, çift çapraz çarpımdır ve $\mathcal{U}\bowtie\mathcal{V} := (\mathcal{U}\otimes\mathcal{V},\phi\otimes\alpha,\psi\otimes\beta)$ ile gösterilir.

İspat. Birinci eşitliğin Hom-birleşmeli olduğu aşağıdaki eşitlikler ile gösterilebilir:

$$\big(\phi(u)\otimes\alpha(v)\big)\big((u'\otimes v')(u''\otimes v'')\big)$$

$$= \big(\phi(u)\otimes\alpha(v)\big)\left(u'\left(\alpha^{-1}\big(\beta^{-1}(v'_{<1>})\big) \rhd \phi^{-1}\big(\psi^{-1}(u''_{<1>})\big)\right)\right.$$
$$\left.\otimes\left(\alpha^{-1}\big(\beta^{-1}(v'_{<2>})\big) \lhd \phi^{-1}\big(\psi^{-1}(u''_{<2>})\big)\right)v''\right)$$

$$= (\phi(u)\left(\beta^{-1}(v_{<1>})\right.$$
$$\rhd \left[\phi^{-1}\big(\psi^{-1}(u'_{<1>})\big)\left(\alpha^{-2}\big(\beta^{-2}(v'_{<1><1>})\big)\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\rhd \phi^{-2}\big(\psi^{-2}(u''_{<1><1>})\big)\right)\right]\right)$$

$$\otimes\left(\beta^{-1}(v_{<2>})\right.$$
$$\lhd\left[\phi^{-1}\big(\psi^{-1}(u'_{<2>})\big)\left(\alpha^{-2}\big(\beta^{-2}(v'_{<1><2>})\big)\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\rhd \phi^{-2}\big(\psi^{-2}(u''_{<1><2>})\big)\right)\right]\right)$$

$$\times[(\alpha^{-1}(\beta^{-1}(v'_{<2>}))\lhd \phi^{-1}(\psi^{-1}(u''_{<2>})))v''])$$

$$(\phi(u)((\alpha^{-1}(\beta^{-2}(v_{<1><1>})) \triangleright \phi^{-1}(\psi^{-2}(u'_{<1><1>})))$$

$$\times [(\alpha^{-2}(\beta^{-2}(v_{<1><2>})) \triangleleft \phi^{-2}(\psi^{-2}(u'_{<1><2>}))) \triangleright (\alpha^{-2}(\beta^{-2}(v'_{<1><1>})) \triangleright \phi^{-2}(\psi^{-2}(u''_{<1><2>})))])$$

$$\otimes \left[\left(\alpha^{-1}\left(\beta^{-1}(v_{<2>})\right) \triangleleft \phi^{-1}\left(\psi^{-1}(u'_{<2>})\right)\right) \triangleleft \left(\alpha^{-1}\left(\beta^{-2}(v'_{<1><2>})\right) \triangleright \phi^{-2}\left(\psi^{-2}(u''_{<1><2>})\right)\right)\right]$$

$$\times [(\alpha^{-1}(\beta^{-1}(v'_{<2>})) \triangleleft \phi^{-1}(\psi^{-1}(u''_{<2>})))v''])$$

$\mathcal{U}$ nun Hom-birleşmesini kullanarak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\left(\phi(u) \otimes \alpha(v)\right)\left((u' \otimes v')(u'' \otimes v'')\right)$$

$$= (\left[u\left(\alpha^{-1}\left(\beta^{-2}(v_{<1><1>})\right) \triangleright \phi^{-1}\left(\psi^{-2}(u'_{<1><1>})\right)\right)\right]$$

$$\times \left[\left(\alpha^{-1}\left(\beta^{-2}(v_{<1><2>})\right) \triangleleft \phi^{-1}\left(\psi^{-2}(u'_{<1><2>})\right)\right) \triangleright \left(\alpha^{-1}\left(\beta^{-2}(v'_{<1><1>})\right) \triangleright \phi^{-1}\left(\psi^{-2}(u''_{<1><1>})\right)\right)\right]$$

$$\otimes \left[\left(\alpha^{-1}\left(\beta^{-1}(v_{<2>})\right) \triangleleft \phi^{-1}\left(\psi^{-1}(u'_{<2>})\right)\right) \triangleleft \left(\alpha^{-1}\left(\beta^{-2}(v'_{<1><2>})\right) \triangleright \phi^{-1}\left(\psi^{-2}(u''_{<1><2>})\right)\right)\right]$$

$$\times [(\alpha^{-1}(\beta^{-1}(v'_{<2>})) \triangleleft \phi^{-1}(\psi^{-1}(u''_{<2>})))v'']).$$

Hom-birleşme eşitliğini sağ taraftan kullanılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\left((u \otimes v)(u' \otimes v')\right)\left(\phi(u'') \otimes \alpha(v'')\right)$$

$$= (u(\alpha^{-1}(\beta^{-1}(v_{<1>})) \triangleright \phi^{-1}(\psi^{-1}(u'_{<1>}))) \otimes (\alpha^{-1}(\beta^{-1}(v_{<2>})) \triangleleft \phi^{-1}(\psi^{-1}(u'_{<2>})))v')\,(\phi(u'') \otimes \alpha(v''))$$

$$(\left[u\left(\alpha^{-1}\left(\beta^{-1}(v_{<1>})\right) \triangleright \phi^{-1}\left(\psi^{-1}(u'_{<1>})\right)\right)\right]$$

$$\times \left[\left(\left(\alpha^{-2}\left(\beta^{-2}(v_{<2><1>})\right) \triangleleft \phi^{-2}\left(\psi^{-2}(u'_{<2><1>})\right)\right) \alpha^{-1}\left(\beta^{-1}(v'_{<1>})\right)\right) \triangleright \psi^{-1}(u''_{<1>})\right]$$

$$\otimes \left[\left(\left(\alpha^{-2}\left(\beta^{-2}(v_{<2><2>})\right) \lhd \phi^{-2}\left(\psi^{-2}(u'_{<2><2>})\right)\right)\alpha^{-1}\left(\beta^{-1}(v'_{<2>})\right)\right)\right.$$

$$\left.\lhd \psi^{-1}(u''_{<2>})\right]\alpha(v''))$$

$$(\left[u\left(\alpha^{-1}\left(\beta^{-1}(v_{<1>})\right) \rhd \phi^{-1}\left(\psi^{-1}(u'_{<1>})\right)\right)\right]$$

$$\times \left[\left(\alpha^{-1}\left(\beta^{-2}(v_{<2><1>})\right) \lhd \phi^{-1}\left(\psi^{-2}(u'_{<2><1>})\right)\right)\right.$$

$$\left.\rhd \left(\alpha^{-1}\left(\beta^{-1}(v'_{<1>})\right) \rhd \phi^{-1}\left(\psi^{-1}(u''_{<1>})\right)\right)\right]$$

$$\otimes [\left(\left(\alpha^{-2}\left(\beta^{-2}(v_{<2><2>})\right) \lhd \phi^{-2}\left(\psi^{-2}(u'_{<2><2>})\right)\right)\right.$$

$$\left.\lhd \left(\alpha^{-2}\left(\beta^{-2}(v'_{<2><1>})\right) \rhd \phi^{-2}\left(\psi^{-2}(u''_{<2><1>})\right)\right)\right)$$

$$\times (\alpha^{-1}(\beta^{-2}(v'_{<2><2>})) \lhd \phi^{-1}(\psi^{-2}(u''_{<2><2>})))]\alpha(v''))$$

$\mathcal{V}$ nin Hom-birleşme özelliği kullanılarak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\left((u \otimes v)(u' \otimes v')\right)\left(\phi(u'') \otimes \alpha(v'')\right)$$

$$= (\left[u\left(\alpha^{-1}\left(\beta^{-1}(v_{<1>})\right) \rhd \phi^{-1}\left(\psi^{-1}(u'_{<1>})\right)\right)\right]$$

$$\times \left[\left(\alpha^{-1}\left(\beta^{-2}(v_{<2><1>})\right) \lhd \phi^{-1}\left(\psi^{-2}(u'_{<2><1>})\right)\right)\right.$$

$$\left.\rhd \left(\alpha^{-1}\left(\beta^{-1}(v'_{<1>})\right) \rhd \phi^{-1}\left(\psi^{-1}(u''_{<2>})\right)\right)\right]$$

$$\otimes \left(\left(\alpha^{-1}\left(\beta^{-2}(v_{<2><2>})\right) \lhd \phi^{-1}\left(\psi^{-2}(u'_{<2><2>})\right)\right)\right.$$

$$\left.\lhd \left(\beta^{-2}(v'_{<2><1>}) \rhd \phi^{-1}\left(\psi^{-2}(u''_{<2><1>})\right)\right)\right)$$

$$\times [(\alpha^{-1}(\beta^{-2}(v'_{<2><2>})) \lhd \phi^{-1}(\psi^{-2}(u''_{<2><2>})))v''])$$

Sonuç olarak Önerme 4.1.1 deki ifadenin ispatı $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{V}$ nin Hom-birleşme özelliklerini kullanılarak verilir.

Çarpımsallık özelliği ise aşağıdaki gibi verilir:

$$\Delta((u \otimes v)(u' \otimes v'))$$

$$= \Delta(u\left(\alpha^{-1}\left(\beta^{-1}(v_{<1>})\right) \rhd \phi^{-1}\left(\psi^{-1}(u'_{<1>})\right)\right) \otimes (\alpha^{-1}(\beta^{-1}(v_{<2>})) \lhd \phi^{-1}(\psi^{-1}(u'_{<2>})))v')$$

$$= ((u_{<1>}\left(\alpha^{-1}\left(\beta^{-1}(v_{<1><1>})\right) \rhd \phi^{-1}\left(\psi^{-1}(u'_{<1><1>})\right)\right) \otimes \left(\alpha^{-1}\left(\beta^{-1}(v_{<2><1>})\right) \lhd \phi^{-1}\left(\psi^{-1}(u'_{<2><1>})\right)\right) v'_{<1>})$$

$$\otimes (u_{<2>}(\alpha^{-1}(\beta^{-1}(v_{<1><2>})) \rhd \phi^{-1}(\psi^{-1}(u'_{<1><2>}))) \otimes \left(\alpha^{-1}\left(\beta^{-1}(v_{<2><2>})\right) \lhd \phi^{-1}\left(\psi^{-1}(u'_{<2><2>})\right)\right) v'_{<2>})),$$

Çarpımsallığın diğer ifadesini açıp yukarıdaki denkleme eşit olduğu aşağıdaki gibi görülür:

$$\Delta(u \otimes v)\Delta(u' \otimes v')$$

$$= (u_{<1>} \otimes v_{<1>})(u'_{<1>} \otimes v'_{<1>}) \otimes (u_{<2>} \otimes v_{<2>})(u'_{<2>} \otimes v'_{<2>})$$

$$= \left(u_{<1>}\left(\alpha^{-1}\left(\beta^{-1}(v_{<1><1>})\right) \rhd \phi^{-1}\left(\psi^{-1}(u'_{<1><1>})\right)\right) \otimes \left(\alpha^{-1}\left(\beta^{-1}(v_{<1><2>})\right) \lhd \phi^{-1}\left(\psi^{-1}(u'_{<2><1>})\right)\right) v'_{<1>}\right)$$

$$\otimes (u_{<2>}\left(\alpha^{-1}\left(\beta^{-1}(v_{<2><1>})\right) \rhd \phi^{-1}\left(\psi^{-1}(u'_{<2><1>})\right)\right) \otimes \left(\alpha^{-1}\left(\beta^{-1}(v_{<2><2>})\right) \lhd \phi^{-1}\left(\psi^{-1}(u'_{<2><2>})\right)\right) v'_{<2>}).$$

Çarpımsallığı ispatlamak için eşçarpımların Hom-eşbirleşme özelliklerinden aşağıdaki gibi faydalanılmıştır:

$$\begin{aligned} v_{<1><1>} \otimes v_{<1><2>} \otimes v_{<2><1>} \otimes v_{<2><2>} &= \beta(v_{<1>}) \otimes v_{<2><1>} \otimes \beta^{-1}(v_{<2><2><1>}) \otimes \beta^{-1}(v_{<2><2><2>}) \\ &= \beta(v_{<1>}) \otimes \beta^{-1}(v_{<2><1><1>}) \otimes \beta^{-1}(v_{<2><2><1>}) \otimes v_{<2><2>}. \end{aligned}$$

Ayrıca,

$$\Delta(u \otimes v)\Delta(u' \otimes v')$$

$$= (u_{<1>}\left(\alpha^{-1}\left(\beta^{-1}\left(\beta(v_{<1>})\right)\right) \rhd \phi^{-1}\left(\psi^{-1}\left(\psi(u'_{<1>})\right)\right)\right)$$

$$\otimes\left(\alpha^{-1}\left(\beta^{-1}\left(\beta^{-1}(v_{<2><1>><1>})\right)\right) \lhd\ \phi^{-1}\left(\psi^{-1}\left(\psi^{-1}(u'_{<2><1><1>})\right)\right)v'_{<1>}\right)$$

$$\otimes\,(u_{<2>}\left(\alpha^{-1}\left(\beta^{-1}\left(\beta^{-1}(v_{<2><1><2>})\right)\right) \rhd\ \phi^{-1}\left(\psi^{-1}\left(\psi^{-1}(u'_{<2><1><2>})\right)\right)\right)$$

$$\otimes\left(\alpha^{-1}\left(\beta^{-1}(v_{<2><2>})\right) \lhd\ \phi^{-1}\left(\psi^{-1}(u'_{<2><2>})\right)\right)v'_{<2>}).$$

denklemi ile

$$\Delta(u\otimes\ v)\Delta(u'\otimes\ v')$$

$$=(u_{<1>}\left(\alpha^{-1}\left(\beta^{-1}\left(\beta(v_{<1>})\right)\right) \rhd\ \phi^{-1}\left(\psi^{-1}\left(\psi(u'_{<1>})\right)\right)\right)$$

$$\otimes\left(\alpha^{-1}\left(\beta^{-1}\left(\beta^{-1}(v_{<2><1><2>})\right)\right) \lhd\ \phi^{-1}\left(\psi^{-1}\left(\psi^{-1}(u'_{<2><1><2>})\right)\right)v'_{<1>}\right)$$

$$\otimes\,(u_{<2>}\left(\alpha^{-1}\left(\beta^{-1}\left(\beta^{-1}(v_{<2><1><1>})\right)\right) \rhd\ \phi^{-1}\left(\psi^{-1}\left(\psi^{-1}(u'_{<2><1><1>})\right)\right)\right)$$

$$\otimes\left(\alpha^{-1}\left(\beta^{-1}(v_{<2><2>})\right) \lhd\ \phi^{-1}\left(\psi^{-1}(u'_{<2><2>})\right)\right)v'_{<2>})$$

ve elde edilen sonuçlar ile çarpımsallık aşağıdaki gibi ispat edilmiş olur:

$$(\left(u_{<1>}\left(\alpha^{-1}\left(\beta^{-1}(v_{<1><1>})\right) \rhd\ \phi^{-1}\left(\psi^{-1}(u'_{<1><1>})\right)\right)\right.$$
$$\left.\otimes\left(\alpha^{-1}\left(\beta^{-1}(v_{<2><1>})\right) \lhd\ \phi^{-1}\left(\psi^{-1}(u'_{<2><1>})\right)\right)v'_{<1>}\right)$$

$$\otimes\,(u_{<2>}\left(\alpha^{-1}\left(\beta^{-1}(v_{<1><2>})\right) \rhd\ \phi^{-1}\left(\psi^{-1}(u'_{<1><2>})\right)\right)$$
$$\otimes\left(\alpha^{-1}\left(\beta^{-1}(v_{<2><2>})\right) \lhd\ \phi^{-1}\left(\psi^{-1}(u'_{<2><2>})\right)\right)v'_{<2>}))$$

$$=\Delta((u\otimes\ v)(u'\otimes\ v')).$$

Antipotun ispatı ise aşağıdaki gibi verilebilir:

$$S(\phi(u_{<1>})\otimes\alpha(v_{<1>}))(\phi(u_{<2>})\otimes\alpha(v_{<2>}))$$
$$=[(1\otimes S(v_{<1>}))(S(u_{<1>})\otimes\ 1)](\phi(u_{<2>})\otimes\alpha(v_{<2>}))$$

$$=(1\otimes S(\alpha(v_{<1>})))[(S(u_{<1>})\otimes\ 1))(u_{<2>}\otimes\ v_{<2>})]$$

$$= (1 \otimes S(\alpha(v_{<1>})))(S(u_{<1>})\left(\alpha^{-1}(\beta^{-1}(1)) \rhd \ \phi^{-1}(\psi^{-1}(u_{<2><1>}))\right)$$
$$\otimes (\alpha^{-1}(\beta^{-1}(1)) \lhd \ \phi^{-1}(\psi^{-1}(u_{<2><2>}))v_{<2>})$$

$$= (1 \otimes S(\alpha(v_{<1>})))(S(u_{<1>})\psi^{-1}(u_{<2><1>}) \otimes \varepsilon(u_{<2><2>})1 \cdot \ v_{<2>})$$

$$= (1 \otimes S(\alpha(v_{<1>})))(S(u_{<1>})u_{<2>} \otimes \alpha(v_{<2>}))$$
$$= \varepsilon(u)(1 \otimes S(\alpha(v_{<1>})))(1 \otimes \alpha(v_{<2>}))$$

$$= \varepsilon(u)\left(1\ \varepsilon(v_{<1><1>}) \otimes S\left(\alpha\left(\beta^{-1}(v_{<1><2>})\right)\right)\alpha\ (v_{<2>}\ )\right)$$

$$= \varepsilon(u)\left(1 \otimes S(\alpha(v_{<1>}))\alpha(v_{<2>})\right) = \varepsilon(u)\varepsilon(v)(1 \otimes 1).$$

4.1.1. Sonuç. Önerme 4.1.1 de yapılan tanımdaki dönüşümler $\alpha = \beta$ ve $\phi = \psi$ olarak alınırsa oluşan önerme kaynak (Lu ve Wang 2016) da verilmiş olan önerme ile aynı olur.

4.2 Eşlenmiş Çift Hom-Lie Cebirler ve Hom-Hopf Cebirler

İlk olarak, Hom-Lie cebirlerde modül tanımı verilmiştir. Daha sonra, evrensel zarflama cebirleri ve bunların özellikleri üzerinde durulmuştur.

4.2.1. Tanım. $(\mathfrak{g}, [,], \phi)$ (çarpımsal) Hom-Lie cebir ve $V, \gamma: V \to V$ lineer dönüşümüne sahip vektör uzay olsun.

i) $\gamma(\xi \cdot v) = \phi(\xi) \cdot \gamma(v),$

ii) $[\xi, \xi'] \cdot \gamma(v) = \phi(\xi) \cdot (\xi' \cdot v) - \phi(\xi') \cdot (\xi \cdot v)$

yukarıdaki şartları sağlayan (V, γ) ikilisine $\mathfrak{g}$-modül denir (Sheng 2012).

4.2.2. Tanım. $(\mathfrak{g}, [,], \phi)$ ve $(\mathfrak{h}, [,], \alpha)$ iki (çarpımsal) Hom-Lie cebir olsun ve bu cebirler üzerinde aşağıdaki etkiler tanımlansın:

$$\rhd : \ \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \qquad \eta \otimes \xi \to \eta \rhd \xi$$

ve

$$\lhd : \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}, \qquad \eta \otimes \xi \to \eta \lhd \xi.$$

Bu etkiler ile $(\mathfrak{g}, \phi)$ bir $\mathfrak{h}$-modüldür ve $(\mathfrak{h}, \alpha)$ bir $\mathfrak{g}$-modüldür (Sheng ve Bai 2014).

Üstelik $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ikilisi aşağıdaki eşitliklerin sağlanması durumunda eşlenmiş çift (çarpımsal) Hom-Lie cebirdir.

$$\alpha(\eta) \rhd [\xi, \xi'] = [\eta \rhd \xi, \phi(\xi')] + [\phi(\xi), \eta \rhd \xi'] + (\eta \lhd \xi) \rhd \big(\phi(\xi')\big) - (\eta \lhd \xi') \rhd \big(\phi(\xi)\big), \tag{4.4}$$

$$[\eta, \eta'] \lhd \phi(\xi) = [\alpha(\eta), \eta' \lhd \xi] + [\eta \lhd \xi, \alpha(\eta')] + \alpha(\eta) \lhd (\eta' \rhd \xi) - \alpha(\eta') \lhd (\eta \rhd \xi). \tag{4.5}$$

Ayrıca (Sheng ve Bai 2014) kaynağındaki önermeyi verelim.

“$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ikilisi eşlenmiş çift Hom-Lie cebir olması için gerek ve yeter şart $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ nin aşağıdaki işlem ile Lie cebir olmasıdır:

$$[(\xi, \eta), (\xi', \eta')] = ([\xi, \xi'] + \eta \rhd \xi' - \eta' \rhd \xi, [\eta, \eta'] + \eta \lhd \xi' - \eta' \lhd \xi).”$$

Çalışmamızın devamında, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ikilisi, eşlenmiş çift Hom-Lie cebir olmak üzere karşılıklı çift olan $\big(\mathcal{U}(\mathfrak{h})^{\mathrm{O}}, \mathcal{U}(\mathfrak{g})\big)$ yapısının bir Hom-Hopf cebir olduğunu gösterilecektir, ki bu tezimizde önemli yere sahip bir sonuçtur.

$(\mathfrak{h}, \alpha)$ üzerinde $(\mathbb{T}^{\mathfrak{g}}/\mathcal{I}^{\mathfrak{g}}, \vee, \mathbf{1}, \mathfrak{a})$ Hom-cebirinin Hom-etkisini aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\eta \lhd \mathbf{1} := \alpha(\eta), \quad \eta \lhd (\varphi_1, s, \xi) := \eta \lhd \phi^s(\xi). \tag{4.6}$$

Verilen Hom-etkiyi $\mathbb{T}^{\mathfrak{g}}$ üzerine aşağıdaki gibi genişletilebilir:

$$\alpha(\eta) \lhd (\varphi \vee \varphi') := (\eta \lhd \varphi) \lhd \mathfrak{a}(\varphi'). \tag{4.7}$$

Burada

$$\varphi := (\varphi, s_1, \dots, s_n, \xi_1, \dots, \xi_n) \in B_n \otimes \mathfrak{g}^{\otimes n}$$

ve

$$\varphi' := \big(\varphi', r_1, \dots, r_m, {\xi'}_1, \dots, {\xi'}_m\big) \in B_m \otimes \mathfrak{g}^{\otimes m}$$

olarak tanımlıdır.

4.2.1. Önerme. $(\mathfrak{g},\phi)$ ve $(\mathfrak{h},\alpha)$ iki Hom-Lie cebir olmak üzere, $(\mathfrak{h},\alpha)$, $(\mathfrak{g},\phi)$ üzerinde bir (sağ) Hom-modül olsun. Bu durumda, $(\mathfrak{h},\alpha)$, $(\mathbb{T}^{\mathfrak{g}}/\mathcal{J}^{\mathfrak{g}},\vee,\mathbf{1},\mathfrak{a})$ Hom-cebiri üzerinde bir (sağ) Hom-modül olur.

İspat. Hom-etki tanımından

$$\alpha(\eta \lhd \varphi) = \alpha(\eta) \lhd \mathfrak{a}(\varphi)$$

elde edilir. Verilen Hom-etkinin, bölüm uzayı $\mathbb{T}^{\mathfrak{g}}/\mathcal{J}^{\mathfrak{g}}$ üzerinde de tanımlı olduğunu görmek için aşağıdaki eşitlik kullanılır:

$$\alpha(\eta) \lhd [\mathfrak{a}(\varphi) \vee (\varphi' \vee \varphi'')] = \big(\eta \lhd \mathfrak{a}(\varphi)\big) \lhd \mathfrak{a}(\varphi' \vee \varphi'')$$

$$= \alpha(\alpha^{-1}(\eta) \lhd \varphi) \lhd [\mathfrak{a}(\varphi') \vee \mathfrak{a}(\varphi'')] = [(\alpha^{-1}(\eta) \lhd \varphi) \lhd \mathfrak{a}(\varphi')] \lhd \mathfrak{a}^2(\varphi'')$$

$$= [\eta \lhd (\varphi \vee \varphi')] \lhd \mathfrak{a}^2(\varphi'') = \alpha(\eta) \lhd [(\varphi \vee \varphi') \vee \mathfrak{a}(\varphi'')].$$

Ayrıca bu Hom-etki, $(\mathbb{T}^{\mathfrak{g}}/\mathcal{I}^{\mathfrak{g}})/\mathcal{J}^{\mathfrak{g}}$ üzerinde de tanımlı bir Hom-etkidir.

4.2.1. Sonuç. $(\mathfrak{g},\phi)$ ve $(\mathfrak{h},\alpha)$ iki Hom-Lie cebir olmak üzere, $(\mathfrak{h},\alpha)$, $(\mathfrak{g},\phi)$ üzerinde bir (sağ) Hom-modül olsun. Bu durumda, $(\mathfrak{h},\alpha)$, evrensel zarflama cebiri olan $(\mathcal{U}(g),\vee,\mathbf{1},\phi)$ Hom-Hopf cebiri üzerinde bir (sağ) Hom-modüldür.

İspat. İddiayı ispatlamak için bir önceki önermede ifade edilen, Hom-etkinin $(\mathbb{T}^{\mathfrak{g}}/\mathcal{I}^{\mathfrak{g}})/\mathcal{J}^{\mathfrak{g}}$ üzerinde de tanımlı bir Hom-etki olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Yani,

$$\eta \lhd \big(\varphi_1, 0, \phi^s(\xi)\big) = \eta \lhd \phi^0\big(\phi^s(\xi)\big) = \eta \lhd \phi^s(\xi) = \eta \lhd (\varphi_1, s, \xi)$$

eşitliği ve

$$\alpha(\eta) \lhd (\varphi_1, 0, [\xi_1, \xi_2]) = \alpha(\eta) \lhd [\xi_1, \xi_2]$$

$$= (\eta \lhd \xi_1) \lhd \phi(\xi_2) - (\eta \lhd \xi_2) \lhd \phi(\xi_1)$$

$$= \eta \lhd [(\varphi_1, 0, \xi_1) \vee (\varphi_1, 0, \xi_2)] - \eta \lhd [(\varphi_1, 0, \xi_2) \vee (\varphi_1, 0, \xi_1)]$$

$$= \eta \lhd [(\varphi_2, 0,0, \xi_1, \xi_2) - (\varphi_2, 0,0, \xi_2, \xi_1)].$$

eşitliği yeterlidir. Sağ Hom-etki için verilen (4.6) ve (4.7) denklemlerinin sol tarafları

$$\eta \rhd \mathbf{1} \coloneqq 0, \qquad \eta \rhd (\varphi_1, s, \xi) \coloneqq (\varphi_1, s, \alpha^{-s}(\eta) \rhd \xi)$$

olarak bulunur. Verilen Hom-etki $\mathbb{T}^{\mathfrak{g}}$ üzerine aşağıdaki gibi genişletilir:

$$\alpha(\eta) \rhd (\varphi \vee \varphi')$$

$$:= (\alpha^{-1}(\eta) \rhd \varphi) \vee \mathfrak{a}(\varphi') + \mathfrak{a}(\varphi_{<1>}) \vee \left[\left(\alpha^{-2}(\eta) \lhd \alpha^{-1}(\varphi_{<1>})\right) \rhd \varphi'\right].$$

Burada

$$\varphi := (\varphi, s_1, \dots, s_n, \xi_1, \dots, \xi_n) \in B_n \otimes \mathfrak{g}^{\otimes n}$$

ve

$$\varphi' := (\varphi', r_1, \dots, r_m, \xi'_1, \dots, \xi'_m) \in B_m \otimes \mathfrak{g}^{\otimes m}$$

olarak tanımlıdır. Kullanılan sağ Hom-etki Önerme 4.2.1 de tanımlanan etkidir. Ayrıca, $\mathfrak{a}: \mathbb{T}^{\mathfrak{g}} \to \mathbb{T}^{\mathfrak{g}}$ dönüşümü $\Delta(\varphi) = \varphi_{<1>} \otimes \varphi_{<2>}$ üzerinde terslenebilirdir.

4.2.1. Lemma. $(\mathfrak{g}, \phi)$ ve $(\mathfrak{h}, \alpha)$ iki Hom-Lie cebir olmak üzere, $(\mathfrak{h}, \alpha)$, $(\mathfrak{g}, \phi)$ üzerinde bir (sağ) Hom-modül olsun ve denklem (4.5) yi sağlasın. Ayrıca, $(\mathfrak{g}, \phi)$, $(\mathfrak{h}, \alpha)$ üzerinde bir (sol) Hom-modül olsun. Bu durumda, her $\eta, \eta' \in \mathfrak{h}$ ve her $\varphi \in \mathbb{T}^{\mathfrak{g}}/\mathcal{I}^{\mathfrak{g}}$ için

$$[\eta, \eta'] \lhd \mathfrak{a}(\varphi) = [\eta \lhd \varphi_{<1>}, \eta' \lhd \varphi_{<2>}] + \alpha(\eta) \lhd (\eta' \rhd \varphi) - \alpha(\eta') \lhd (\eta \rhd \varphi)$$

şartını sağlayan (sağ) Hom-etki ile $(\mathbb{T}^{\mathfrak{g}}/\mathcal{I}^{\mathfrak{g}}, \vee, \mathbf{1}, \mathfrak{a})$, $(\mathfrak{h}, \alpha)$ üzerinde Hom-cebirdir.

İspat. Her $\eta, \eta' \in \mathfrak{h}$, $\xi \in \mathfrak{g}$ ve her $\varphi \in \mathbb{T}^{\mathfrak{g}}/\mathcal{I}^{\mathfrak{g}}$ için

$$[\eta, \eta'] \lhd \mathfrak{a}(\varphi_1, s, \xi) = [\eta, \eta'] \lhd \phi^{s+1}(\xi)$$

$$= [\alpha(\eta), \eta' \lhd \phi^s(\xi)] + [\eta \lhd \phi^s(\xi), \alpha(\eta')] + \alpha(\eta) \lhd (\eta' \rhd \phi^s(\xi)) - \alpha(\eta') \lhd (\eta \rhd \phi^s(\xi))$$

$$= [\eta \lhd \mathbf{1}, \eta' \lhd (\varphi_1, s, \xi)] + [\eta \lhd (\varphi_1, s, \xi), \eta' \lhd \mathbf{1}] + \alpha(\eta) \lhd \phi^s(\alpha^{-s}(\eta') \rhd \xi) - \alpha(\eta') \lhd \phi^s(\alpha^{-s}(\eta) \rhd \xi)$$

$$= [\eta \lhd (\varphi_1, s, \xi)_{<1>}, \eta' \lhd (\varphi_1, s, \xi)_{<2>}] + \alpha(\eta) \lhd (\eta' \rhd (\varphi_1, s, \xi)) - \alpha(\eta') \lhd (\eta \rhd (\varphi_1, s, \xi)),$$

elde edilir. Buradan da,

$$[\eta, \eta'] \lhd \mathfrak{a}(\varphi \vee \varphi') = \left([\alpha^{-1}(\eta), \alpha^{-1}(\eta')] \lhd \mathfrak{a}(\varphi)\right) \lhd \mathfrak{a}^2(\varphi')$$

$$= \{[\alpha^{-1}(\eta) \lhd \varphi_{<1>}, \alpha^{-1}(\eta') \lhd \varphi_{<2>}] + \eta \lhd (\alpha^{-1}(\eta') \rhd \varphi) - \eta' \lhd (\alpha^{-1}(\eta) \rhd \varphi)\} \lhd \mathfrak{a}^2(\varphi')$$

$$= [(\alpha^{-1}(\eta) \lhd \varphi_{<1>}) \lhd \mathfrak{a}(\varphi'_{<1>}), (\alpha^{-1}(\eta') \lhd \varphi_{<2>}) \lhd \mathfrak{a}(\varphi'_{<2>})]$$

$$+ \alpha(\alpha^{-1}(\eta) \lhd \varphi_{<1>}) \lhd [(\alpha^{-1}(\eta') \lhd \varphi_{<2>}) \rhd \mathfrak{a}(\varphi')] - \alpha(\alpha^{-1}(\eta') \lhd \varphi_{<1>}) \lhd [(\alpha^{-1}(\eta) \lhd \varphi_{<2>}) \rhd \mathfrak{a}(\varphi')] + [\eta \lhd (\alpha^{-1}(\eta') \rhd \varphi)] \lhd \mathfrak{a}^2(\varphi') - [\eta' \lhd (\alpha^{-1}(\eta) \rhd \varphi)] \lhd \mathfrak{a}^2(\varphi')$$

$$= [\eta \lhd (\varphi_{<1>} \vee \varphi'_{<1>}), \eta' \lhd (\varphi_{<2>} \vee \varphi'_{<2>}] + \alpha(\eta) \lhd \{\mathfrak{a}(\varphi_{<1>}) \vee [(\alpha^{-2}(\eta') \lhd \mathfrak{a}^{-1}(\varphi_{<2>})) \rhd \varphi']\} - \alpha(\eta') \lhd \{\mathfrak{a}(\varphi_{<1>}) \vee [(\alpha^{-2}(\eta) \lhd \mathfrak{a}^{-1}(\varphi_{<2>})) \rhd \varphi']\} + \alpha(\eta) \lhd [(\alpha^{-1}(\eta') \rhd \varphi) \vee \mathfrak{a}(\varphi')] - \alpha(\eta') \lhd [(\alpha^{-1}(\eta) \rhd \varphi) \vee \mathfrak{a}(\varphi')]$$

$$= [\eta \lhd (\varphi \vee \varphi')_{<1>}, \eta' \lhd (\varphi \vee \varphi')_{<2>}] + \alpha(\eta) \lhd (\eta' \rhd (\varphi \vee \varphi')) - \alpha(\eta') \lhd (\eta \rhd (\varphi \vee \varphi'))$$

eşitliği elde edilir.

4.2.2. Lemma. $(\mathfrak{g}, \phi)$ ve $(\mathfrak{h}, \alpha)$ iki Hom-Lie cebir olmak üzere, $(\mathfrak{h}, \alpha)$, $(\mathfrak{g}, \phi)$ üzerinde bir (sağ) Hom-modül olsun. Ayrıca, $(\mathfrak{g}, \phi)$, $(\mathfrak{h}, \alpha)$üzerinde bir (sol) Hom-modül olsun. Bu durumda, her $\eta \in \mathfrak{h}$ ve her $\varphi \in \mathbb{T}^{\mathfrak{g}}/\mathcal{J}^{\mathfrak{g}}$ için

$$\Delta(\eta \rhd \varphi) = \eta \rhd \varphi_{<1>} \otimes \mathfrak{a}(\varphi_{<2>}) + \mathfrak{a}(\varphi_{<1>}) \otimes \eta \rhd \varphi_{<2>}$$

şartını sağlayan (sol) Hom-etkisi ile $(\mathbb{T}^{\mathfrak{g}}/\mathcal{J}^{\mathfrak{g}}, \vee, \mathbf{1}, \mathfrak{a})$, $(\mathfrak{h}, \alpha)$ üzerinde Hom-cebirdir.

İspat. Her $\eta \in \mathfrak{h}$ ve her $\varphi \in \mathbb{T}^{\mathfrak{g}}/\mathcal{J}^{\mathfrak{g}}$ için

$$\Delta(\eta \rhd (\varphi_1, s, \xi)) = \Delta(\varphi_1, s, \alpha^{-s}(\eta) \rhd \xi)$$

$$= (\varphi_1, s, \alpha^{-s}(\eta) \rhd \xi) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes (\varphi_1, s, \alpha^{-s}(\eta) \rhd \xi)$$

$$= \eta \rhd (\varphi_1, s, \xi)_{<1>} \otimes \mathfrak{a}((\varphi_1, s, \xi)_{<2>}) + \mathfrak{a}((\varphi_1, s, \xi)_{<1>}) \otimes \eta \rhd (\varphi_1, s, \xi)_{<2>},$$

elde edilir. Ayrıca eşçarpımın, eşbirleşmelilik ve değişme özellikleri ile aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\Delta(\eta \rhd (\varphi \vee \varphi'))$$

$$= \Delta([\alpha^{-1}(\eta) \rhd \varphi] \vee \mathfrak{a}(\varphi')) + \Delta\big(\mathfrak{a}(\varphi_{<1>}) \vee \big[\big(\alpha^{-2}(\eta) \lhd \mathfrak{a}^{-1}(\varphi_{<2>})\big) \rhd \varphi'\big]\big)$$

$$= (\alpha^{-1}(\eta) \rhd \varphi)_{<1>} \vee \mathfrak{a}(\varphi'_{<1>}) \otimes (\alpha^{-1}(\eta) \rhd \varphi)_{<2>} \vee \mathfrak{a}(\varphi'_{<2>})$$

$$+ \mathfrak{a}(\varphi_{<1><1>}) \vee \big[\big(\alpha^{-2}(\eta) \lhd \mathfrak{a}^{-1}(\varphi_{<2>})\big) \rhd \varphi'\big]_{<1>} \otimes \mathfrak{a}(\varphi_{<1><2>})$$
$$\vee \big[\big(\alpha^{-2}(\eta) \lhd \mathfrak{a}^{-1}(\varphi_{<2>})\big) \rhd \varphi'\big]_{<2>}$$

$$= (\alpha^{-1}(\eta) \rhd \varphi_{<1>}) \vee \mathfrak{a}(\varphi'_{<1>}) \otimes \mathfrak{a}(\varphi_{<2>}) \vee \mathfrak{a}(\varphi'_{<2>})$$

$$+ \mathfrak{a}(\varphi_{<1>}) \vee \mathfrak{a}(\varphi'_{<1>}) \otimes (\alpha^{-1}(\eta) \rhd \varphi_{<2>}) \vee \mathfrak{a}(\varphi'_{<2>})$$

$$+ \mathfrak{a}(\varphi_{<1><1>}) \vee \big[\big(\alpha^{-2}(\eta) \lhd \mathfrak{a}^{-1}(\varphi_{<2>})\big) \rhd \varphi'_{<1>}\big] \otimes \mathfrak{a}(\varphi_{<1><2>}) \vee \mathfrak{a}(\varphi'_{<2>})$$

$$+ \mathfrak{a}(\varphi_{<1><1>}) \vee \mathfrak{a}(\varphi'_{<1>}) \otimes \mathfrak{a}(\varphi_{<1><2>}) \vee \big[\big(\alpha^{-2}(\eta) \lhd \mathfrak{a}^{-1}(\varphi_{<2>})\big) \rhd \varphi'_{<2>}\big]$$

$$= \eta \rhd (\varphi_{<1>} \vee \varphi'_{<1>}) \otimes \big(\mathfrak{a}(\varphi_{<2>}) \vee \mathfrak{a}(\varphi'_{<2>})\big) + \big(\mathfrak{a}(\varphi_{<1>}) \vee \mathfrak{a}(\varphi'_{<1>})\big) \otimes \eta$$
$$\rhd (\varphi_{<2>} \vee \varphi'_{<2>}).$$

Böylece ispat tamamlanır.

4.2.2. Önerme. $(\mathfrak{g}, \phi)$ ve $(\mathfrak{h}, \alpha)$ iki Hom-Lie cebir olmak üzere, $(\mathfrak{g}, \phi)$, $(\mathfrak{h}, \alpha)$üzerinde bir (sol) Hom-modül olsun. Ayrıca, $(\mathfrak{h}, \alpha)$, $(\mathfrak{g}, \phi)$ üzerinde denklem (4.5) yi sağlayan bir (sağ) Hom-modül olsun. Bu durumda, $(\mathbb{T}^{\mathfrak{g}}/\mathcal{J}^{\mathfrak{g}}, \vee, \mathbf{1}, \mathfrak{a})$, $(\mathfrak{h}, \alpha)$ Hom-Lie cebiri üzerinde (sol) Hom-modüldür.

İspat. Daha önce belirtildiği gibi Hom-etki işleminin özelliklerinin bölüm yapısında da geçerli olduğunu aşağıdaki işlemlerle gösterilir. Bunun için aşağıdaki eşitlik ve sol Hom-etki tanımını kullanılacaktır:

$$\mathfrak{a}(\eta \rhd \varphi) = \alpha(\eta) \rhd \mathfrak{a}(\varphi).$$

İlk olarak, $\forall\, \varphi := (\varphi, s_1, \dots, s_n, \xi_1, \dots, \xi_n) \in B_n \otimes \mathfrak{g}^{\otimes n}$ için

$$\eta \rhd [\mathfrak{a}(\varphi) \vee (\varphi' \vee \varphi'')]$$

$$= \big(\alpha^{-1}(\eta) \rhd \mathfrak{a}(\varphi)\big) \vee \big(\mathfrak{a}(\varphi') \vee \mathfrak{a}(\varphi'')\big) + \mathfrak{a}^2(\varphi_{<1>})$$
$$\vee [(\alpha^{-2}(\eta) \lhd \varphi_{<2>}) \rhd (\varphi' \vee \varphi'')]$$

$$= \big(\alpha^{-1}(\eta) \rhd \mathfrak{a}(\varphi)\big) \vee \big(\mathfrak{a}(\varphi') \vee \mathfrak{a}(\varphi'')\big) + \mathfrak{a}^2(\varphi_{<1>})$$
$$\vee \{[\alpha^{-1}(\alpha^{-2}(\eta) \lhd \varphi_{<2>}) \rhd \varphi'] \vee \mathfrak{a}(\varphi'')$$

$$+\ \mathfrak{a}(\varphi'_{<1>}) \vee ([\alpha^{-2}(\alpha^{-2}(\eta) \lhd \varphi_{<2>}) \lhd \mathfrak{a}^{-1}(\varphi'_{<2>})] \rhd \varphi'')\}$$

$$= \left(\alpha^{-1}(\eta) \rhd \mathfrak{a}(\varphi)\right) \vee \left(\mathfrak{a}(\varphi') \vee \mathfrak{a}(\varphi'')\right) + \mathfrak{a}^2(\varphi_{<1>})$$
$$\vee \{\left[\left(\alpha^{-3}(\eta) \lhd \mathfrak{a}^{-1}(\varphi_{<2>})\right) \rhd \varphi'\right] \vee \mathfrak{a}(\varphi'')$$

$$+\ \mathfrak{a}(\varphi'_{<1>}) \vee (\left[\alpha^{-2}\left((\alpha^{-2}(\eta) \lhd \varphi_{<2>}) \lhd \mathfrak{a}(\varphi'_{<2>})\right)\right] \rhd \varphi'')\}$$

$$= \mathfrak{a}(\alpha^{-2}(\eta) \rhd \varphi) \vee \left(\mathfrak{a}(\varphi') \vee \mathfrak{a}(\varphi'')\right) + \mathfrak{a}^2(\varphi_{<1>})$$
$$\vee \{\left[\left(\alpha^{-3}(\eta) \lhd \mathfrak{a}^{-1}(\varphi_{<2>})\right) \rhd \varphi'\right] \vee \mathfrak{a}(\varphi'')$$

$$+\ \mathfrak{a}(\varphi'_{<1>}) \vee ([\alpha^{-2}(\alpha^{-1}(\eta) \lhd (\varphi_{<2>} \vee \varphi'_{<2>}))] \rhd \varphi'')\}$$

bulunur. Diğer taraftan ise,

$$\eta \rhd [(\varphi \vee \varphi') \vee \mathfrak{a}(\varphi'')]$$

$$= \left(\alpha^{-1}(\eta) \rhd (\varphi \vee \varphi')\right) \vee \mathfrak{a}^2(\varphi'')$$

$$+\ \mathfrak{a}(\varphi_{<1>} \vee \varphi'_{<1>}) \vee \left[\left(\alpha^{-2}(\eta) \lhd \left(\mathfrak{a}^{-1}(\varphi_{<2>}) \vee \mathfrak{a}^{-1}(\varphi'_{<2>})\right)\right) \rhd \mathfrak{a}(\varphi'')\right]$$

$$= \left[(\alpha^{-2}(\eta) \rhd \varphi) \vee \mathfrak{a}(\varphi') + \mathfrak{a}(\varphi_{<1>}) \vee \left[\left(\alpha^{-3}(\eta) \lhd \mathfrak{a}^{-1}(\varphi_{<2>})\right) \rhd \varphi'\right]\right]$$
$$\vee\ \mathfrak{a}^2(\varphi'')$$

$$+\ \mathfrak{a}(\varphi_{<1>} \vee \varphi'_{<1>}) \vee \left[\left(\alpha^{-2}(\eta \lhd [\mathfrak{a}(\varphi_{<2>}) \vee \mathfrak{a}(\varphi'_{<2>})])\right) \rhd \mathfrak{a}(\varphi'')\right]$$

$$= \left[(\alpha^{-2}(\eta) \rhd \varphi) \vee \mathfrak{a}(\varphi') + \mathfrak{a}(\varphi_{<1>}) \vee \left[\left(\alpha^{-3}(\eta) \lhd \mathfrak{a}^{-1}(\varphi_{<2>})\right) \rhd \varphi'\right]\right]$$
$$\vee\ \mathfrak{a}^2(\varphi'') + \mathfrak{a}(\varphi_{<1>} \vee \varphi'_{<1>})$$
$$\vee\ \mathfrak{a}\left(\left[\alpha^{-2}\left(\alpha^{-1}(\eta) \lhd \left(\varphi_{<2>} \vee \varphi'_{<2>}\right)\right)\right] \rhd \varphi''\right)$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki eşitlikleri de göz önünde bulundurarak aşağıdaki önerme ifade edilebilir. Herhangi $A, B, C \in \mathbb{T}^{\mathfrak{g}}$ için

$$\eta \rhd \left[\mathfrak{a}(\varphi) \vee \left(\varphi' \vee \varphi''\right)\right] = \mathfrak{a}(A) \vee (B \vee C)$$

eşitliğini sağlıyor ise

$$\eta \rhd [(\varphi \vee \varphi') \vee \mathfrak{a}(\varphi'')] = (A \vee B) \vee \mathfrak{a}(C)$$

eşitliği sağlanır. Bir başka ifade ile, $\mathcal{J}^{\mathfrak{g}}$ verilen işleme göre kapalıdır ve bu durum $\mathbb{T}^{\mathfrak{g}}/\mathcal{J}^{\mathfrak{g}}$ üzerinde de geçerlidir. Ayrıca,

$$[\eta,\eta'] \rhd \mathfrak{a}(\varphi) = \alpha(\eta) \rhd (\eta' \rhd \varphi) - \alpha(\eta') \rhd (\eta \rhd \varphi)$$

eşitliği elde edilir. Gerçekten de $\varphi \coloneqq (\varphi_1, s, \xi)$ için

$$[\eta,\eta'] \rhd \mathfrak{a}(\varphi_1,s,\xi) = [\eta,\eta'] \rhd \big(\varphi_1,s,\phi(\xi)\big) = (\varphi_1,s,\alpha^{-s}([\eta,\eta']) \rhd \phi(\xi))$$

$$= (\varphi_1,s,[\alpha^{-s}(\eta),\alpha^{-s}(\eta')] \rhd \phi(\xi))$$

$$= (\varphi_1,s,\alpha^{-s+1}(\eta) \rhd [\alpha^{-s}(\eta') \rhd \xi]) - (\varphi_1,s,\alpha^{-s+1}(\eta') \rhd [\alpha^{-s}(\eta) \rhd \xi])$$

$$= \alpha(\eta) \rhd (\varphi_1,s,\alpha^{-s}(\eta') \rhd \xi) - \alpha(\eta') \rhd (\varphi_1,s,\alpha^{-s}(\eta) \rhd \xi)$$

$$= \alpha(\eta) \rhd [\eta' \rhd (\varphi_1,s,\xi)] - \alpha(\eta') \rhd [\eta \rhd (\varphi_1,s,\xi)]$$

eşitliği sağlanır. Diğer taraftan ise

$$[\eta,\eta'] \rhd \mathfrak{a}(\varphi \vee \varphi')$$

$$= \big(\alpha^{-1}([\eta,\eta']) \rhd \mathfrak{a}(\varphi)\big) \vee \mathfrak{a}^2(\varphi') + \mathfrak{a}^2(\varphi_{<1>}) \\ \vee [(\alpha^{-2}([\eta,\eta']) \lhd \varphi_{<2>}) \rhd \mathfrak{a}(\varphi')],$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca, bir başka eşitlik ise aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\alpha(\eta) \rhd \big(\eta' \rhd (\varphi \vee \varphi')\big)$$

$$= \alpha(\eta) \rhd \Big[(\alpha^{-1}(\eta') \rhd \varphi) \vee \mathfrak{a}(\varphi') + \mathfrak{a}(\varphi_{<1>}) \vee \big[\big(\alpha^{-2}(\eta') \lhd \mathfrak{a}^{-1}(\varphi_{<2>})\big) \rhd \varphi'\big]\Big]$$

$$= \alpha(\eta) \rhd [(\alpha^{-1}(\eta') \rhd \varphi) \vee \mathfrak{a}(\varphi')] + \alpha(\eta) \\ \rhd \big\{\mathfrak{a}(\varphi_{<1>}) \vee \big[\big(\alpha^{-2}(\eta') \lhd \mathfrak{a}^{-1}(\varphi_{<2>})\big) \rhd \varphi'\big]\big\}$$

$$= [\eta \rhd (\alpha^{-1}(\eta') \rhd \varphi)] \vee \mathfrak{a}^2(\varphi')$$

$$+ \mathfrak{a}((\alpha^{-1}(\eta') \rhd \varphi)_{<1>}) \vee [(\alpha^{-1}(\eta) \lhd \mathfrak{a}^{-1}((\alpha^{-1}(\eta') \rhd \varphi)_{<2>})) \rhd \mathfrak{a}(\varphi')]$$

$$+ \big(\eta \rhd \mathfrak{a}(\varphi_{<1>})\big) \vee [(\alpha^{-1}(\eta') \lhd \varphi_{<2>}) \rhd \mathfrak{a}(\varphi')]$$

$$+ \mathfrak{a}^2(\varphi_{<1><1>}) \vee \big\{(\alpha^{-1}(\eta) \lhd \varphi_{<1><2>}) \rhd \big[\big(\alpha^{-2}(\eta') \lhd \mathfrak{a}^{-1}(\varphi_{<2>})\big) \rhd \varphi'\big]\big\}.$$

Buradan Lemma 4.2.2 yardımıyla aşağıdaki eşitlikleri elde edilir:

$$\alpha(\eta) \rhd \big(\eta' \rhd (\varphi \vee \varphi')\big)$$

$$= [\eta \rhd (\alpha^{-1}(\eta') \rhd \varphi)] \vee \mathfrak{a}^2(\varphi')$$

$$+ \big(\eta' \rhd \mathfrak{a}(\varphi_{<1>})\big) \vee [(\alpha^{-1}(\eta) \lhd \varphi_{<2>}) \rhd \mathfrak{a}(\varphi')]$$

$$+ \mathfrak{a}^2(\varphi_{<1>}) \vee \Big[\Big(\alpha^{-1}(\eta) \lhd \big(\alpha^{-2}(\eta') \rhd \mathfrak{a}^{-1}(\varphi_{<2>})\big)\Big) \rhd \mathfrak{a}(\varphi')\Big]$$

$$+ \big(\eta \rhd \mathfrak{a}(\varphi_{<1>})\big) \vee [(\alpha^{-1}(\eta') \lhd \varphi_{<2>}) \rhd \mathfrak{a}(\varphi')]$$

$$+ \mathfrak{a}^2(\varphi_{<1>}) \vee \big\{(\alpha^{-1}(\eta) \lhd \varphi_{<2>}) \rhd \big[\big(\alpha^{-2}(\eta') \lhd \mathfrak{a}^{-1}(\varphi_{<3>})\big) \rhd \varphi'\big]\big\}.$$

Sonuç olarak,

$$\alpha(\eta) \rhd \big(\eta' \rhd (\varphi \vee \varphi')\big) - \alpha(\eta') \rhd \big(\eta \rhd (\varphi \vee \varphi')\big)$$

$$= \big([\alpha^{-1}(\eta), \alpha^{-1}(\eta')] \rhd \mathfrak{a}(\varphi)\big) \vee \mathfrak{a}^2(\varphi')$$

$$+ \mathfrak{a}^2(\varphi_{<1>}) \vee \big([\alpha^{-2}(\eta) \lhd \mathfrak{a}^{-1}(\varphi_{<2>}), \alpha^{-2}(\eta') \lhd \mathfrak{a}^{-1}(\varphi_{<3>})] \rhd \mathfrak{a}(\varphi')\big)$$

$$\mathfrak{a}^2(\varphi_{<1>}) \vee \Big[\Big(\alpha^{-1}(\eta) \lhd \big(\alpha^{-2}(\eta') \rhd \mathfrak{a}^{-1}(\varphi_{<2>})\big) - \alpha^{-1}(\eta') \lhd \big(\alpha^{-2}(\eta) \rhd \mathfrak{a}^{-1}(\varphi_{<2>})\big)\Big) \rhd \mathfrak{a}(\varphi')\Big]$$

$$= \big([\alpha^{-1}(\eta), \alpha^{-1}(\eta')] \rhd \mathfrak{a}(\varphi)\big) \vee \mathfrak{a}^2(\varphi')$$

$$+ \mathfrak{a}^2(\varphi_{<1>}) \vee \big[\big([\alpha^{-2}(\eta), \alpha^{-2}(\eta')] \lhd \mathfrak{a}^{-1}(\varphi_{<2>})\big) \rhd \mathfrak{a}(\varphi')\big]$$

$$= [\eta, \eta'] \rhd \mathfrak{a}(\varphi \vee \varphi')$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla, verilen tanımlarla $(\mathbb{T}^{\mathfrak{g}}/\mathcal{J}^{\mathfrak{g}}, \vee, \mathbf{1}, \mathfrak{a})$, $(\mathfrak{h}, \alpha)$ Hom-Lie cebiri üzerinde (sol) Hom-modüldür.

4.2.2. Sonuç. $(\mathfrak{g}, \phi)$ ve $(\mathfrak{h}, \alpha)$ ikilisi eşlenmiş Hom-Lie cebir çifti olmak üzere, evrensel zarflama cebiri olan $(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), \phi)$, $(\mathfrak{h}, \alpha)$üzerinde bir (sol) Hom-modüldür.

İspat. Bu ifadeyi ispatlamak için $\mathcal{J}^{\mathfrak{g}}$ idealinin, $(\mathfrak{h}, \alpha)$üzerinde Hom-etkiye göre kapalı olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\eta \rhd \big[(\varphi_1, s, \xi) - \big(\varphi_1, 0, \phi^s(\xi)\big)\big]$$

$$= \eta \rhd (\varphi_1, s, \xi) \ - \eta \rhd \big(\varphi_1, 0, \phi^s(\xi)\big)$$

$$= (\varphi_1, s, \alpha^{-s}(\eta) \rhd \xi) \ - \ \big(\varphi_1, 0, \eta \rhd \phi^s(\xi)\big)$$

$$= \ (\varphi_1, s, \alpha^{-s}(\eta) \rhd \xi) \ - \ \big(\varphi_1, 0, \phi^s(\alpha^{-s}(\eta) \rhd \xi)\big) \in \ \mathcal{J}^{\mathfrak{g}}$$

Yukarıda görüldüğü üzere, elemanlar $\mathcal{J}^{\mathfrak{g}}$ idealinin elemanlarıdır. Ayrıca,

$$\eta \ \rhd \{(\varphi_2, 0{,}0, \xi_1, \xi_2) \ - \ (\varphi_2, 0{,}0, \xi_2, \xi_1) \ - \ (\varphi_1, 0, [\xi_1, \xi_2])\}$$

$$= \eta \rhd \ \{(\varphi_1, 0, \xi_1) \ \vee \ (\varphi_1, 0, \xi_2) - \ (\varphi_1, 0, \xi_2) \vee \ (\varphi_1, 0, \xi_2) \ - \ (\varphi_1, 0, [\xi_1, \xi_2])\}$$

$$\begin{aligned} &= \big(\alpha^{-1}(\eta) \rhd (\varphi_1, 0, \xi_1)\big) \vee \ \mathfrak{a}(\varphi_1, 0, \xi_2) \ + \mathfrak{a}((\varphi_1, 0, \xi_1)_{<1>}) \\ &\qquad \vee \ \big[\big(\alpha^{-2}(\eta) \lhd \mathfrak{a}^{-1}((\varphi_1, 0, \xi_1)_{<2>})\big) \rhd \ (\varphi_1, 0, \xi_2)\big] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \ - \big(\alpha^{-1}(\eta) \rhd \ (\varphi_1, 0, \xi_2)\big) \vee \ \mathfrak{a}(\varphi_1, 0, \xi_1) \ - \ \mathfrak{a}((\varphi_1, 0, \xi_2)_{<1>}) \vee \ [(\alpha^{-2}(\eta) \\ &\qquad \lhd \ \mathfrak{a}^{-1}((\varphi_1, 0, \xi_2)_{<2>})) \ \rhd \ (\varphi_1, 0, \xi_1)] \end{aligned}$$

$$+ \ - \ (\varphi_1, 0, \eta \rhd \ [\xi_1, \xi_2])$$

$$\begin{aligned} &= \ (\varphi_1, 0, \alpha^{-1}(\eta) \rhd \xi_1) \vee \ \big(\varphi_1, 0, \phi(\xi_2)\big) \ + \ \big(\varphi_1, 0, \phi(\xi_1)\big) \\ &\qquad \vee \ \big(\alpha^{-1}(\eta) \rhd \ (\varphi_1, 0, \xi_2)\big) \ + \ \big(\alpha^{-1}(\eta) \lhd (\varphi_1, 0, \xi_1)\big) \\ &\qquad \rhd \ \big(\varphi_1, 0, \phi(\xi_2)\big) \ - \ (\varphi_1, 0, \alpha^{-1}(\eta) \rhd \xi_2) \vee \ \big(\varphi_1, 0, \phi(\xi_1)\big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \ - \ \big(\varphi_1, 0, \phi(\xi_2)\big) \vee \big(\alpha^{-1}(\eta) \rhd \ (\varphi_1, 0, \xi_1)\big) \ - \ \big(\alpha^{-1}(\eta) \lhd \ (\varphi_1, 0, \xi_2)\big) \\ &\qquad \rhd \ \big(\varphi_1, 0, \phi(\xi_1)\big) \end{aligned}$$

$$+ - \ (\varphi_1, 0, \eta \rhd \ [\xi_1, \xi_2])$$

$$= \big(\varphi_2, 0{,}0, \alpha^{-1}(\eta) \rhd \xi_1, \phi(\xi_2)\big) \ + \ (\varphi_2, 0{,}0, \phi(\xi_1), \alpha^{-1}(\eta) \rhd \xi_2)$$

$$+ \big(\varphi_1, 0, (\alpha^{-1}(\eta) \lhd \xi_1) \ \rhd \phi(\xi_2)\big) \ - \ \big(\varphi_2, 0{,}0, \alpha^{-1}(\eta) \rhd \xi_2, \phi(\xi_1)\big)$$

$$+ - \ (\varphi_2, 0{,}0, \phi(\xi_2), \alpha^{-1}(\eta) \rhd \xi_1) \ \ - \ \ \big(\varphi_1, 0, (\alpha^{-1}(\eta) \lhd \xi_2) \rhd \phi(\xi_1)\big)$$

$$+ \ - \ (\varphi_1, 0, \eta \rhd \ [\xi_1, \xi_2])$$

$$\begin{aligned} &= \big(\varphi_2, 0{,}0, \alpha^{-1}(\eta) \rhd \xi_1, \phi(\xi_2)\big) \ - \ (\varphi_2, 0{,}0, \phi(\xi_2), \alpha^{-1}(\eta) \rhd \xi_1) \\ &\qquad - \ (\varphi_1, 0, \eta \rhd \ [\alpha^{-1}(\eta) \rhd \xi_1, \phi(\xi_2)]) \end{aligned}$$

$$+(\varphi_2, 0,0, \phi(\xi_1), \alpha^{-1}(\eta) \rhd \xi_2) - \left(\varphi_2, 0,0, \alpha^{-1}(\eta) \rhd \xi_2, \phi(\xi_1)\right)$$
$$- (\varphi_1, 0, \eta \rhd [\phi(\xi_1), \alpha^{-1}(\eta) \rhd \xi_2]) \in \mathcal{J}^{\mathfrak{g}}$$

elemanları da $\mathcal{J}^{\mathfrak{g}}$ idealinin elemanlarıdır. Dolayısıyla, $\mathcal{J}^{\mathfrak{g}}$ ideali, $(\mathfrak{h}, \alpha)$ üzerindeki Hom-etkiye göre kapalıdır.

Çalışmamızın bu kısmına kadar, $(\mathfrak{h}, \alpha)$ üzerinde $(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), \vee, \mathbf{1}, \phi)$ yapısının (sağ) Hom-etkisini ve $(\mathfrak{g}, \phi)$ üzerinde $(\mathcal{U}(\mathfrak{h}), \vee, \mathbf{1}, \alpha)$ yapısının (sol) Hom-etkisini ayrı ayrı tanımlanmıştır. Şimdi ise $(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), \phi)$ üzerinde $(\mathcal{U}(\mathfrak{h}), \vee, \mathbf{1}, \alpha)$ yapısının Hom-etkisi tanımlanacaktır.

4.2.3. Önerme. $(\mathfrak{g}, \phi)$ ve $(\mathfrak{h}, \alpha)$ ikilisi eşlenmiş Hom-Lie cebir çifti olmak üzere, evrensel zarflama Hom-Hopf cebiri olan $(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), \vee, \mathbf{1}, \phi, \Delta, \varepsilon, \mathrm{Id}, S)$, aynı şekilde evrensel zarflama cebiri olan $(\mathcal{U}(\mathfrak{h}), \vee, \mathbf{1}, \alpha, \Delta, \varepsilon, \mathrm{Id}, S)$ Hom-Hopf cebiri üzerinde bir (sol) Hom-modül eşcebirdir.

İspat. Daha önceki önermelerden, $(\mathfrak{h}, \alpha)$ Hom-Lie cebirinin $(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), \phi)$ üzerinde (sol) Hom-etkisinin var olduğu ve bu etkinin $(\mathcal{U}(\mathfrak{h}), \vee, \mathbf{1}, \alpha)$ üzerine genişletilebileceği gösterilmiştir. Dolayısıyla, Hom-modül eşcebir şartlarının sağlandığını göstermek yeterlidir. Her $\Omega \in \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ ve her $\varphi \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ için

$$\Delta(\Omega \rhd \varphi) = \Omega_{<1>} \rhd \varphi_{<1>} \otimes \Omega_{<2>} \rhd \varphi_{<2>}.$$

$\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ ın elemanları $\Omega = (\varphi_1, s, \eta)$ şeklinde ise durum Lemma 4.2.2 dolayısıyla açıktır, böylece genel olarak,

$$\Delta((\Omega \vee \Omega') \rhd \varphi) = \Delta\left(\alpha(\Omega) \rhd \left(\Omega' \rhd \phi^{-1}(\varphi)\right)\right)$$

$$= \alpha(\Omega_{<1>}) \rhd \left(\Omega' \rhd \phi^{-1}(\varphi)\right)_{<1>} \otimes \alpha(\Omega_{<2>}) \rhd \left(\Omega' \rhd \phi^{-1}(\varphi)\right)_{<2>}$$

$$= \alpha(\Omega_{<1>}) \rhd \left(\Omega'_{<1>} \rhd \phi^{-1}(\varphi_{<1>})\right) \otimes \alpha(\Omega_{<2>}) \rhd \left(\Omega'_{<2>} \rhd \phi^{-1}(\varphi_{<2>})\right)$$

$$= (\Omega \vee \Omega')_{<1>} \rhd \varphi_{<1>} \otimes (\Omega \vee \Omega')_{<2>} \rhd \varphi_{<2>}$$

eşitliği elde edilir. Böylelikle şimdiye kadar yaptığımız tanımlamalar yardımıyla aşağıdaki önemli önerme verilebilir.

4.2.4. Önerme. $(\mathfrak{g},\phi)$ ve $(\mathfrak{h},\alpha)$ ikilisi eşlenmiş Hom-Lie cebir çifti olmak üzere, $(\mathcal{U}(\mathfrak{g}),\vee,\mathbf{1},\phi,\Delta,\varepsilon,\mathrm{Id},S)$ ve $(\mathcal{U}(\mathfrak{h}),\vee,\mathbf{1},\alpha,\Delta,\varepsilon,\mathrm{Id},S)$ Hom-Hopf cebirleri eşlenmiş çift Hom-Hopf cebirlerdir.

İspat. Bir önceki önerme olan Önerme 4.2.3 kullanılarak $(\mathcal{U}(\mathfrak{g}),\vee,\mathbf{1},\phi,\Delta,\varepsilon,\mathrm{Id},S)$ nin $(\mathcal{U}(\mathfrak{h}),\vee,\mathbf{1},\alpha,\Delta,\varepsilon,\mathrm{Id},S)$ cebirinin sol Hom-modül eşcebir olduğu, $(\mathcal{U}(\mathfrak{h}),\vee,\mathbf{1},\alpha,\Delta,\varepsilon,\mathrm{Id},S)$ yapısının ise $(\mathcal{U}(\mathfrak{g}),\vee,\mathbf{1},\phi,\Delta,\varepsilon,\mathrm{Id},S)$ cebirinin sağ Hom-modül eşcebir olduğu görülür. Dolayısıyla, Hom-Hopf cebirin karşılıklı cebir olması için sağlaması gereken şartlardan sadece

$$v \triangleright (uu') = \Big(\alpha^{-1}\big(\beta^{-1}(v_{<1>})\big) \triangleright \psi^{-1}(u_{<1>})\Big)\Big(\Big(\alpha^{-2}\big(\beta^{-1}(v_{<2>})\big) \triangleleft \phi^{-1}\big(\psi^{-1}(u_{<2>})\big)\Big) \triangleright u'\Big),$$

$$(vv') \triangleleft u = \Big(v \triangleleft \Big(\alpha^{-1}\big(\beta^{-1}(v'_{<1>})\big) \triangleright \phi^{-2}\big(\psi^{-1}(u_{<1>})\big)\Big)\Big)\Big(\beta^{-1}(v'_{<2>}) \triangleleft \phi^{-1}\big(\psi^{-1}(u_{<2>})\big)\Big)$$

şartlarını göstermek yeterli olacaktır. Bu şartlar tanımlara göre tekrar yazılırsa

$$\Omega \triangleright (\varphi \vee \varphi') = (\alpha^{-1}(\Omega_{<1>}) \triangleright \varphi_{<1>}) \vee \big[\big(\alpha^{-2}(\Omega_{<2>}) \triangleleft \phi^{-1}(\varphi_{<2>})\big) \triangleright \varphi'\big],$$

$$(\Omega \vee \Omega') \triangleleft \varphi = \big[\Omega \triangleleft \big(\alpha^{-1}(\Omega'_{<1>}) \triangleright \phi^{-2}(\varphi_{<1>})\big)\big] \vee \big(\Omega'_{<2>} \triangleleft \phi^{-1}(\varphi_{<2>})\big)$$

eşitlikleri elde edilir. Benzer özellikler olan bu iki özelliklerden ilkini göstermemiz yeterli olacaktır. Bu durumda, omega elemanları $\Omega = (\varphi_1, s, \eta)$ şeklinde ise ispat tanımdan açıktır. Diğer durumlar

$$(\Omega \vee \Omega') \triangleright (\varphi \vee \varphi') = \alpha(\Omega) \triangleright \big(\Omega' \triangleright \phi^{-1}(\varphi \vee \varphi')\big)$$

$$= \alpha(\Omega) \triangleright \big\{\big(\alpha^{-1}(\Omega'_{<1>}) \triangleright \phi^{-1}(\varphi_{<1>})\big) \vee \big[\big(\alpha^{-2}(\Omega'_{<2>}) \triangleleft \phi^{-2}(\varphi_{<2>})\big) \triangleright \phi^{-1}(\varphi')\big]\big\}$$

$$= \big[\Omega_{<1>} \triangleright \big(\alpha^{-1}(\Omega'_{<1>}) \triangleright \phi^{-1}(\varphi_{<1>})\big)\big] \vee \big\{\big[\alpha^{-1}(\Omega) \triangleleft \big(\alpha^{-2}(\Omega'_{<2>}) \triangleright \phi^{-2}(\varphi_{<2>})\big)\big] \triangleright \big[\big(\alpha^{-2}(\Omega'_{<3>}) \triangleleft \phi^{-2}(\varphi_{<3>})\big) \triangleright \phi^{-1}(\varphi')\big]\big\}$$

$$= \big[\big(\alpha^{-1}(\Omega_{<1>}) \vee \alpha^{-1}(\Omega'_{<1>})\big) \triangleright \varphi_{<1>}\big] \vee \big\{\big[\big(\alpha^{-2}(\Omega_{<2>}) \vee \alpha^{-2}(\Omega'_{<2>})\big) \triangleleft \phi^{-1}(\varphi_{<2>})\big] \triangleright \varphi'\big\},$$

eşitliği ile ispatlanmış olur.

5. İKİLİ ÇAPRAZ ÇARPIM HOM-HOPF CEBİRLER

5.1 İkili Çapraz Çarpım Hom-Hopf Cebirlerin İnşası

5.1.1. Önerme. $(\mathcal{F},\mu_{\mathcal{F}},\eta_{\mathcal{F}},\alpha,\Delta_{\mathcal{F}},\varepsilon_{\mathcal{F}},\beta)$ ve $(\mathcal{U},\mu_{\mathcal{U}},\eta_{\mathcal{U}},\phi,\Delta_{\mathcal{U}},\varepsilon_{\mathcal{U}},\psi)$ iki Hom-bicebir olsun ve $(\mathcal{F},\beta)$ yapısı da $\rhd:\mathcal{U}\otimes\mathcal{F}\to\mathcal{F}, \beta(u\rhd f)=\phi(u)\rhd\beta(f)$ etkisi ile bir sol $\mathcal{U}$-Hom modül olsun. O zaman $\mathcal{F}\rtimes\mathcal{U}\coloneqq(\mathcal{F}\otimes\mathcal{U},\beta\otimes\phi)$ üzerinde

$$(f,u)*(f',u')\coloneqq\left(\alpha^{-1}\big(\beta(f)\big)\star\left(\phi^{-1}\big(\psi^{-1}(u_{<1>})\big)\rhd\alpha^{-1}(f')\right),\psi^{-1}(u_{<2>})\bullet u'\right)$$

ve

$$\eta_{\rtimes}:k\to\mathcal{F}\rtimes\mathcal{U},\qquad \eta_{\rtimes}(1)\coloneqq\eta_{\mathcal{F}}(1)\rtimes\eta_{\mathcal{U}}(1)$$

dönüşümlerine sahip bir (birimli) Hom-cebir yapısı vardır.

İspat. Hom-birleşme özelliğini görmek için ilk olarak,

$$[(f,u)*(f',u')]*(\beta(f''),\phi(u''))$$

$$=\left(\alpha^{-1}\big(\beta(f)\big)\star\left(\phi^{-1}\big(\psi^{-1}(u_{<1>})\big)\rhd\alpha^{-1}(f')\right),\psi^{-1}(u_{<2>})\bullet u'\right)$$
$$*(\beta(f''),\phi(u''))$$

$$=([\alpha^{-2}(\beta^{2}(f))\star(\psi^{-2}(u_{<1>})\ \rhd\ \alpha^{-2}(\beta(f')))]$$

$$\star((\phi^{-1}\big(\psi^{-2}(u_{<2><1>})\big)\bullet\phi^{-1}(\psi^{-1}(u'_{<1>})))\ \rhd\alpha^{-1}(\beta(f''))),$$

$$[\psi^{-2}(u_{<2><2>})\bullet\psi^{-1}(u'_{<2>})]\bullet\phi(u''))$$

eşitliği ve denklemin eşit olmasını gereken diğer formu aşağıdaki gibidir:

$$\big(\beta(f),\phi(u)\big)*\ [(f',u')*(f'',u'')]$$

$$=\big(\beta(f),\phi(u)\big)*(\alpha^{-1}(\beta(f'))\star(\phi^{-1}(\psi^{-1}(u'_{<1>}))\ \rhd\ \alpha^{-1}(f'')),\psi^{-1}(u'_{<2>})\bullet u'')$$
$$=\ (\alpha^{-1}\big(\beta^{2}(f)\big)\star\ \{\psi^{-1}(u_{<1>})$$
$$\rhd\ [\alpha^{-2}\big(\beta(f')\big)\star\ (\phi^{-1}(\psi^{-2}(u'_{<1>}))\ \rhd\ \alpha^{-2}(f''))]\},$$

$$\phi\big(\psi^{-1}(u_{<2>})\big)\bullet[\psi^{-1}(u'_{<2>})\bullet u''])$$

$$= (\alpha^{-1}(\beta^2(f)) \star \{(\psi^{-3}(u_{<1><1>}) \rhd \alpha^{-2}(\beta(f'))) \star [\psi^{-3}(u_{<1><2>}) \rhd (\phi^{-1}(\psi^{-2}(u'_{<1>})) \rhd \alpha^{-2}(f''))]\},$$

$$\psi^{-1}(u_{<2>}) \bullet [\psi^{-1}(u'_{<2>}) \bullet u''])$$

$$= (\alpha^{-1}(\beta^2(f)) \star \{(\psi^{-3}(u_{<1><1>}) \rhd \alpha^{-2}(\beta(f'))) \star [(\phi^{-1}(\psi^{-3}(u_{<1><2>})) \bullet \phi^{-1}(\psi^{-2}(u'_{<1>}))) \rhd \alpha^{-2}(f'')]\},$$

$$\psi^{-1}(u_{<2>}) \bullet [\psi^{-1}(u'_{<2>}) \bullet u''])$$

$$= (\left\{\alpha^{-2}(\beta^2(f)) \star (\psi^{-3}(u_{<1><1>}) \rhd \alpha^{-2}(\beta(f')))\right\} \star [(\phi^{-1}(\psi^{-2}(u_{<1><2>})) \bullet \phi^{-1}(\psi^{-1}(u'_{<1>}))) \rhd \alpha^{-1}(\beta(f''))],$$

$$\psi^{-1}(u_{<2>}) \bullet [\psi^{-1}(u'_{<2>}) \bullet u''])$$

Yukarıdaki denklemler eşit olduğundan ispat tamamlanır.

Birim dönüşüm için ispat aşağıdaki gibi verilebilir:

$$(f,u) * (\eta_F(1), \eta_U(1))$$

$$= (\alpha^{-1}(\beta(f)) \star (\phi^{-1}(\psi^{-1}(u_{<1>})) \rhd \alpha^{-1}(\eta_F(1))), \psi^{-1}(u_{<2>}) \bullet \eta_U(1))$$

$$= (\alpha^{-1}(\beta(f)) \star (\phi^{-1}(\psi^{-1}(u_{<1>})) \rhd \eta_F(1)), \psi^{-1}(u_{<2>}) \bullet \eta_U(1))$$

$$= (\alpha^{-1}(\beta(f)) \star \varepsilon(\phi^{-1}(\psi^{-1}(u_{<1>})))\eta_F(1), \phi(\psi^{-1}(u_{<2>})))$$

$$= (\alpha^{-1}(\beta(f)) \star \eta_F(1), \phi(u)) = (\beta(f), \phi(u)).$$

Benzer şekilde aşağıdaki eşitliği elde edilir:

$$(\eta_F(1), \eta_U(1)) * (f,u) = (\beta(f), \phi(u)).$$

5.1.2. Önerme. $(\mathcal{F}, \mu_{\mathcal{F}}, \eta_{\mathcal{F}}, \alpha, \Delta_{\mathcal{F}}, \varepsilon_{\mathcal{F}}, \beta)$ ve $(\mathcal{U}, \mu_{\mathcal{U}}, \eta_{\mathcal{U}}, \phi, \Delta_{\mathcal{U}}, \varepsilon_{\mathcal{U}}, \psi)$ iki Hom-bicebir olsun ve $(\mathcal{U}, \phi)$ yapısı da $\nabla: \mathcal{U} \to \mathcal{U} \otimes \mathcal{F}, \nabla(\phi(u)) = \phi(u_{<0>}) \otimes \beta(u_{<1>})$ eşetkisi ile bir sağ $\mathcal{F}$-Hom eşmodül olsun. O zaman $\mathcal{F} \bowtie \mathcal{U} \coloneqq \mathcal{F} \otimes \mathcal{U}, \alpha \otimes \psi$ üzerinde

$$\Delta_{\bowtie}(f,u) = (\alpha(\beta^{-1}(f_{<1>})), \phi^{-1}(u_{<1><0>})) \otimes (\beta^{-1}(f_{<2>})$$
$$\star\, \alpha^{-2}(u_{<1><1>}), u_{(2)}),$$

ve

$$\varepsilon_{\bowtie} : \mathcal{F} \bowtie \mathcal{U} \to k, \qquad \varepsilon_{\bowtie}(f,u) \coloneqq \varepsilon_{\mathcal{F}}(f)\varepsilon_{\mathcal{U}}(u)$$

dönüşümlerine sahip bir (eşbirimli) Hom-eşcebir yapısı vardır.

İspat. Hom-eşbirleşme özelliğinin ispatı için ilk olarak aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\Delta_{\bowtie}\left(\alpha\big(\beta^{-1}(f_{<1>})\big), \phi^{-1}(u_{<1><0>})\right) \otimes\ (\alpha \otimes\ \psi)(\beta^{-1}(f_{<2>})$$
$$\star\, \alpha^{-2}(u_{<1><1>}), u_{<2>})$$

$$= \left(\alpha^2\big(\beta^{-2}(f_{<1><1>})\big), \phi^{-2}(u_{<1><0><1><0>})\right)$$

$$\otimes \left(\alpha\big(\beta^{-2}(f_{<1><2>})\big) \star \alpha^{-2}\big(\beta^{-1}(u_{<1><0><1><1>})\big), \phi^{-1}(u_{<1><0><2>})\right)$$

$$(\alpha\big(\beta^{-1}(f_{<2>})\big) \star\ \alpha^{-1}(u_{<1><1>}), \psi(u_{<2>}))$$

$$= \left(\alpha^2\big(\beta^{-2}(f_{<1><1>})\big), \phi^{-1}(u_{<1><1><0>})\right)$$

$$\otimes \left(\alpha\big(\beta^{-2}(f_{<1><2>})\big) \star\ \alpha^{-2}\big(\beta^{-1}(u_{<1><1><1><1>})\big), \phi^{-1}(u_{<1><2><0>})\right)$$

$$\otimes\ (\alpha\big(\beta^{-1}(f_{<2>})\big) \star [\alpha^{-3}\big(\beta^{-1}(u_{<1><1><1><2>})\big) \star\ \alpha^{-3}(u_{<1><2><1>})], \psi(u_{<2>}))$$

$$= (\alpha^2(\beta^{-1}(f_{<1>})), \phi^{-1}(\psi(u_{<1><0>})))$$

$$\otimes \left(\alpha\big(\beta^{-2}(f_{<2><1>})\big) \star\ \alpha^{-1}\big(\beta^{-1}(u_{<1><1><1>})\big), \phi^{-1}(u_{<2><1><0>})\right)$$

$$\otimes \left(\alpha\big(\beta^{-2}(f_{<2><2>})\big) \star \left[\alpha^{-2}\big(\beta^{-1}(u_{<1><1><2>})\big) \star\ \alpha^{-3}(u_{<2><1><1>})\right], u_{<2><2>}\right).$$

Diğer taraftan ise aşağıdaki denklem elde edilir:

$$(\alpha \otimes \psi)\left(\alpha\big(\beta^{-1}(f_{<1>})\big), \phi^{-1}(u_{<1><0>})\right)$$
$$\otimes\ \Delta_{\bowtie}(\beta^{-1}(f_{<2>}) \star\ \alpha^{-2}(u_{<1><1>}), u_{<2>})$$

$$= \left(\alpha^2\big(\beta^{-1}(f_{<1>})\big), \phi^{-1}\big(\psi(u_{<1><0>})\big)\right)$$

$$\otimes\left(\alpha^{-1}\left(\beta^{-2}(f_{<2><1>})\right)\star\ \alpha^{-1}\left(\beta^{-1}(u_{<1><1><1>})\right),\phi^{-1}(u_{<2><1><0>})\right)$$

$$\otimes\left(\left[\beta^{-2}(f_{<2><2>})\star\ \alpha^{-2}\left(\beta^{-1}(u_{<1><1><2>})\right)\right]\star\ \alpha^{-2}(u_{<2><1><1>}),u_{<2><2>}\right).$$

Hom-eşbirleşme özelliği yukarıdaki denklemlerden ve $\mathcal{F}$ nin Hom-birleşmeli olmasından açıktır. Eşbirim ise ayrı ayrı $\mathcal{F}$ nin ve $\mathcal{U}$ nun eşbirimli olmasından açıktır.

5.1.1. Tanım. $(\mathcal{F},\mu_{\mathcal{F}},\eta_{\mathcal{F}},\alpha,\Delta_{\mathcal{F}},\varepsilon_{\mathcal{F}},\beta,S_{\mathcal{F}})$ ve $(\mathcal{U},\mu_{\mathcal{U}},\eta_{\mathcal{U}},\phi,\Delta_{\mathcal{U}},\varepsilon_{\mathcal{U}},\psi,S_{\mathcal{U}})$ iki Hom-Hopf cebir olmak üzere,

i) $(\mathcal{F},\beta)$ yapısı $\rhd:\mathcal{U}\otimes\mathcal{F}\to\mathcal{F},\beta(u\rhd f)=\phi(u)\rhd\beta(f)$ etkisi ile bir sol $\mathcal{U}$-Hom modül cebir olsun.

ii) $(\mathcal{U},\phi)$ yapısı $\nabla:\mathcal{U}\to\mathcal{U}\otimes\mathcal{F},\nabla\left(\phi(u)\right)=\phi(u_{<0>})\otimes\beta(u_{<1>})$ eşetkisi ile bir sağ $\mathcal{F}$-Hom eşmodül eşcebir olsun.

Ek olarak her $u,u'\in\mathcal{U}$, her $f\in\mathcal{F}$ için

iii) $$\Delta_{\mathcal{F}}(u\rhd f)=\psi^{-1}(u_{<1><0>})\rhd f_{<1>}\otimes\alpha^{-4}\beta^{3}(u_{<1><1>})\star\left(\phi\left(\psi^{-2}(u_{<2>})\right)\rhd\alpha^{-1}(f_{<2>})\right),$$

iv) $$\varepsilon_{\mathcal{F}}(u\rhd f)=\varepsilon_{\mathcal{U}}(u)\varepsilon_{\mathcal{F}}(f),$$

v) $$\nabla(u\bullet u')=\psi^{-1}(u_{<1><0>})\bullet u'_{<0>}\otimes\alpha^{-2}(\beta(u_{<1><1>}))\star(\phi^{-1}(u_{<2>})\rhd\alpha^{-1}(u'_{<1>})),$$

vi) $$u_{<2><0>}\otimes(u_{<1>}\rhd f)\star\alpha^{-2}\beta^{2}(u_{<2><1>})=u_{<1><0>}\otimes\alpha^{-2}\beta^{2}(u_{<1><1>})\star(u_{<2>}\rhd f)$$

eşitlikleri sağlanırsa, $(\mathcal{F},\mathcal{U})$ ikilisine karşılıklı Hom-Hopf cebir çifti denir.

Yukarıdaki eşitlikleri sağlayan $\mathcal{U}\otimes\mathcal{F}:=\mathcal{U}\bowtie\mathcal{F}$ yapısı üzerinde bir Hom-Hopf cebir yapısı vardır. Bu Hom-Hopf cebir yapısını aşağıdaki önermede verilmiştir.

5.1.3. Önerme. $(\mathcal{F},\mu_{\mathcal{F}},\eta_{\mathcal{F}},\alpha,\Delta_{\mathcal{F}},\varepsilon_{\mathcal{F}},\beta,S_{\mathcal{F}})$ ve $(\mathcal{U},\mu_{\mathcal{U}},\eta_{\mathcal{U}},\phi,\Delta_{\mathcal{U}},\varepsilon_{\mathcal{U}},\psi,S_{\mathcal{U}})$ iki Hom-Hopf cebir olsun. Ayrıca, $(\mathcal{F},\mathcal{U})$ karşılıklı Hom-Hopf cebir çifti olsun. Bu durumda $\mathcal{F}\bowtie\mathcal{U}:=(\mathcal{F}\otimes\mathcal{U},\beta\otimes\phi,\alpha\otimes\psi)$ üzerinde $\forall u,u'\in\mathcal{U}$ ve $\forall f,f'\in\mathcal{F}$ için

i) $(f,u)*(f',u')=\Big(\alpha^{-1}\big(\beta(f)\big)\star\Big(\phi^{-1}\big(\psi^{-1}(u_{<1>})\big)\rhd$

$\alpha^{-1}(f')\Big),\psi^{-1}(u_{<2>})\bullet u'\Big),$

ii) $\eta_{\bowtie}:k\to\mathcal{F}\bowtie\mathcal{U},\ \eta_{\bowtie}(1):=\eta_{\mathcal{F}}(1)\rtimes\eta_{\mathcal{U}}(1),$

iii) $\Delta_{\bowtie}(f\otimes u)=(\alpha(\beta^{-1}(f_{<1>})),\phi^{-1}(u_{<1><0>}))\otimes(\beta^{-1}(f_{<2>})$

$\star\,\alpha^{-2}(u_{<1><1>}),u_{(2)}),$

iv) $\varepsilon_{\bowtie}:\mathcal{F}\bowtie\mathcal{U}\to k,\ \varepsilon_{\bowtie}(f,u):=\varepsilon_{\mathcal{F}}(f)\varepsilon_{\mathcal{U}}(u),$

v) $S_{\bowtie}(f\otimes u)=\Big(1,S_{\mathcal{U}}\big(\phi^{-2}(u_{<0>})\big)\Big)*\Big(S_{\mathcal{F}}\Big(\alpha^{-1}\big(\beta^{-1}(f)\big)\star$

$\alpha^{-2}\big(\beta^{-1}(u_{<1>})\big)\Big),1\Big)$

dönüşümlerine sahip bir Hom-Hopf cebir yapısı vardır.

İspat. Önermede verilen yapının Hom-Hopf cebir şartlarını sağladığı gösterilmelidir. Bunun için ilk olarak, Tanım 2.1.9 da verilen şartlara bakılmalıdır. Belirtilen şartlardan ilk ikisi olan Hom-cebir ve Hom-eşcebir olma şartlarının sağlandığı tanım ve önceki önermelerden açıktır. Hom-bicebir olma şartlarından iii)-b) şartı aşağıda gösterilmiştir. İlk olarak

$$\Delta_{\bowtie}((f,u)*\ (f',u'))$$

$$=\Delta_{\bowtie}\Big(\alpha^{-1}\big(\beta(f)\big)\star\ \Big(\phi^{-1}\big(\psi^{-1}(u_{<1>})\big)\rhd\alpha^{-1}(f')\Big),\psi^{-1}(u_{<2>})\bullet u'\Big)$$

$$\begin{aligned}=\Big(f_{<1>}\star\alpha\Big(\beta^{-1}\Big(\big[\phi^{-1}\big(\psi^{-1}(u_{<1>})\big)\\ \rhd\alpha^{-1}(f')\big]_{<1>}\Big)\Big),\phi^{-1}((\psi^{-1}(u_{<2>})\bullet u')_{<1><0>})\Big)\\ \otimes\Big(\Big[\alpha^{-1}(f_{<2>})\star\beta^{-1}\Big(\big[\phi^{-1}\big(\psi^{-1}(u)\big)\rhd\alpha^{-1}(f')\big]_{<2>}\Big)\Big]\\ \star\,\alpha^{-2}((\psi^{-1}(u_{<2>})\bullet u')_{<1><1>}),(\psi^{-1}(u_{<2>})\bullet u')_{<2>}\Big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=\Big(f_{<1>}\star\alpha\Big(\beta^{-1}(\big[\phi^{-1}\big(\psi^{-2}(u_{<1><1><0>})\big)\\ \rhd\alpha^{-1}(f'_{<1>})\big]\big)\Big),\phi^{-1}((\psi^{-1}(u_{<2>})\bullet u')_{<1><0>})\Big)\end{aligned}$$

$$\otimes \Big(\big[\alpha^{-1}(f_{<2>}) \star \beta^{-1}\big(\alpha^{-5}\big(\beta^2(u_{<1><1><1>})\big) \star [\psi^{-3}(u_{<1><2>}) \rhd \alpha^{-2}(f'_{<2>})]\big)\big] \star \alpha^{-2}((\psi^{-1}(u_{<2>}) \bullet u')_{<1><1>}), (\psi^{-1}(u_{<2>}) \bullet u')_{<2>}\Big)$$

$$= \Big(f_{<1>} \star [\phi^{-2}\big(\psi^{-1}(u_{<1><1><0>})\big) \rhd \beta^{-1}(f'_{<1>})], \phi^{-1}((\psi^{-1}(u_{<2><1>}) \bullet u'_{<1>})_{<0>})\Big)$$

$$\otimes \Big(\big[\alpha^{-1}(f_{<2>}) \star \big\{\alpha^{-5}\big(\beta(u_{<1><1><1>})\big) \star [\phi^{-1}\big(\psi^{-3}(u_{<1><2>})\big) \rhd \alpha^{-2}\big(\beta^{-1}(f'_{<2>})\big)]\big\}\big] \star \alpha^{-2}((\psi^{-1}(u_{<2><1>}) \bullet u'_{<1><1>}), (\psi^{-1}(u_{<2><2>}) \bullet u'_{<2>})\Big).$$

eşitliği elde edilir. $\mathcal{F}$ nin Hom-birleşme özelliği kullanılarak,

$$\Delta_{\bowtie}((f,u) * (f',u'))$$

$$= \Big(f_{<1>} \star [\phi^{-2}\big(\psi^{-1}(u_{<1><1><0>})\big) \rhd \beta^{-1}(f'_{<1>})], \phi^{-1}\big(\psi^{-2}(u_{<2><1><1><0>})\big) \bullet \phi^{-1}(u'_{<1><0>})\Big)$$

$$\big(\big[\alpha^{-1}(f_{<2>}) \star \big\{\alpha^{-5}\big(\beta(u_{<1><1><1>})\big) \star [\phi^{-1}\big(\psi^{-3}(u_{<1><2>})\big) \rhd \alpha^{-2}\big(\beta^{-1}(f'_{<2>})\big)]\big\}\big]$$

$$\star \big\{\alpha^{-5}\big(\beta(u_{<2><1><1><1>})\big) \star [\phi^{-1}\big(\psi^{-3}(u_{<2><1><2>})\big) \rhd \alpha^{-3}(u'_{<1><0>})]\big\},$$

$$(\psi^{-1}(u_{<2><2>}) \bullet u'_{<2>})\big)$$

$$= \Big(f_{<1>} \star [\phi^{-2}\big(\psi^{-1}(u_{<1><1><0>})\big) \rhd \beta^{-1}(f'_{<1>})], \phi^{-1}\big(\psi^{-2}(u_{<2><1><1><0>})\big) \bullet \phi^{-1}(u'_{<1><0>})\Big)$$

$$\otimes \Big(\big[\alpha^{-1}(f_{<2>}) \star \alpha^{-4}\big(\beta(u_{<1><1><1>})\big)\big] \star$$

$$\Big\{\Big(\big[\phi^{-1}\big(\psi^{-3}(u_{<1><2>})\big) \rhd \alpha^{-2}\big(\beta^{-1}(f'_{<2>})\big)\big] \star \alpha^{-6}\big(\beta(u_{<2><1><1>1>})\big)\Big) \star [\phi^{-1}\big(\psi^{-3}(u_{<2><1><2>})\big) \rhd \alpha^{-3}(u'_{<1><1>})]\Big\}, (\psi^{-1}(u_{<2><2>}) \bullet u'_{<2>})\Big)$$

bulunur. $\mathcal{U}$ nun Hom-eşbirleşme özelliği kullanılarak ise,

$$\Delta_{\bowtie}((f,u)*\ (f',u'))$$

$$= \Big(f_{<1>} \star\ [\phi^{-2}(u_{<1><0>})$$

$$\rhd \beta^{-1}(f'_{<1>})], \phi^{-1}\big(\psi^{-3}(u_{<2><1><2><1><0>})\big) \bullet \phi^{-1}(u'_{<1><0>})\Big)$$

$$\otimes\ (\big[\alpha^{-1}(f_{<2>}) \star \alpha^{-3}\big(\beta(u_{<1><1>})\big)\big]$$

$$\star \{ \Big(\big[\phi^{-1}\big(\psi^{-4}(u_{<2><1><1>})\big) \rhd \alpha^{-2}\big(\beta^{-1}(f'_{<2>})\big)\big]$$

$$\star\, \alpha^{-7}\big(\beta(u_{<2><1><2><1><1>})\big)\Big)$$

$$\star\, [\phi^{-1}\big(\psi^{-4}(u_{<2><1><2><2>})\big) \rhd \alpha^{-3}(u'_{<1><1>})]\},$$

$$(\psi^{-1}(u_{<2><2>}) \bullet u'_{<2>})$$

$$= \Big(f_{<1>} \star\ [\phi^{-2}(u_{<1><0>})$$

$$\rhd \beta^{-1}(f'_{<1>})], \phi^{-1}\big(\psi^{-3}(u_{<2><1><1><2><0>})\big) \bullet \phi^{-1}(u'_{<1><0>})\Big)$$

$$\otimes\ (\big[\alpha^{-1}(f_{<2>}) \star \alpha^{-3}\big(\beta(u_{<1><1>})\big)\ \big]$$

$$\star \{ \Big(\big[\phi^{-1}\big(\psi^{-5}(u_{<2><1><1><1>})\big) \rhd \alpha^{-2}\big(\beta^{-1}(f'_{<2>})\big)\big]$$

$$\star\, \alpha^{-7}\big(\beta(u_{<2><1><1><2><1>})\big)\Big)$$

$$\star\, [\phi^{-1}\big(\psi^{-3}(u_{<2><1><2>})\big) \rhd \alpha^{-3}(u'_{<1><1>})]\}, (\psi^{-1}(u_{<2><2>}) \bullet u'_{<2>}))$$

elde edilir. $\mathcal{U}$ nun Hom-eşbirleşme özelliğini tekrar kullanılarak

$$\Delta_{\bowtie}((f,u)*\ (f',u'))$$

$$= \Big(f_{<1>} \star [\phi^{-2}(u_{<1><0>})$$

$$\rhd \beta^{-1}(f'_{<1>})], \phi^{-1}\big(\psi^{-3}\ (u_{<2><1><1><1><0>})\big) \bullet \phi^{-1}(u'_{<1><0>})\Big)$$

$$\otimes\ (\big[\alpha^{-1}(f_{<2>}) \star \alpha^{-3}\big(\beta(u_{<1><1>})\big)\big]$$

$$\star \{ \big(\alpha^{-7}\big(\beta(u_{<2><1><1><1><1>})\big)$$

$$\star \big[\phi^{-1}\big(\psi^{-5}(u_{<2><1><1><2>})\big) \rhd \alpha^{-2}\big(\beta^{-1}(f'_{<2>})\big)\big]\big)$$

$$\star \big[\phi^{-1}\big(\psi^{-3}(u_{<2><1><2>})\big) \rhd \alpha^{-3}(u'_{<1><1>})\big]\}, (\psi^{-1}(u_{<2><2>}) \bullet u'_{<2>}))$$

$$= \Big(f_{<1>} \star [\phi^{-2}(u_{<1><0>}) \rhd \beta^{-1}(f'_{<1>})], \phi^{-1}\big(\psi^{-2}(u_{<2><1><1><0>})\big) \bullet \phi^{-1}(u'_{<1><0>})\Big)$$

$$\otimes \big(\big[\alpha^{-1}(f_{<2>}) \star \alpha^{-3}\big(\beta(u_{<1><1>})\big)\big]$$

$$\star \{\big(\alpha^{-6}\big(\beta(u_{<2><1><1><1>})\big) \star \big[\phi^{-1}\big(\psi^{-5}(u_{<2><1><2><1>})\big) \rhd \alpha^{-2}\big(\beta^{-1}(f'_{<2>})\big)\big]\big)$$

$$\star \big[\phi^{-1}\big(\psi^{-4}(u_{<2><1><2><2>})\big) \rhd \alpha^{-3}(u'_{<1><1>})\big]\}, (\psi^{-1}(u_{<2><2>}) \bullet u'_{<2>})),$$

denklemi elde edilir. Ayrıca, yukarıdaki denklem

$$\Big(f_{<1>} \star [\phi^{-2}\big(\psi^{-1}(u_{<1><1><0>})\big) \rhd \beta^{-1}(f'_{<1>})\big], \phi^{-1}\big(\psi^{-1}(u_{<1><2><0>})\big) \bullet \phi^{-1}(u'_{<1><0>})\Big)$$

$$\otimes \big(\big[\alpha^{-1}(f_{<2>}) \star \alpha^{-4}\big(\beta(u_{<1><1><1>})\big)\big]$$

$$\star \{\big(\alpha^{-5}\big(\beta(u_{<1><2><1>})\big) \star \big[\phi^{-1}\big(\psi^{-4}(u_{<2><1><1>})\big) \rhd \alpha^{-2}\big(\beta^{-1}(f'_{<2>})\big)\big]\big)$$

$$\star [\phi^{-1}\big(\psi^{-3}(u_{<2><1><1>})\big) \rhd \alpha^{-3}(u'_{<1><1>})]\}, (\psi^{-1}(u_{<2><2>}) \bullet u'_{<2>}))$$

denklemine eşittir. $\mathcal{F}$ nin Hom-birleşme özelliği tekrar kullanılarak,

$$\Delta_{\bowtie}((f,u) * (f',u'))$$

$$= \Big(f_{<1>} \star \big[\phi^{-2}\big(\psi^{-1}(u_{<1><1><0>})\big) \rhd \beta^{-1}(f'_{<1>})\big], \phi^{-1}\big(\psi^{-1}(u_{<1><2><0>})\big) \bullet \phi^{-1}(u'_{<1><0>})\Big)$$

$$\otimes \big(\big\{\alpha^{-1}(f_{<2>}) \star \big[\alpha^{-5}\big(\beta(u_{<1><1><1>})\big) \star \alpha^{-5}\big(\beta(u_{<1><2><1>})\big)\big]\big\}$$

$$\star \big\{\big(\big[\phi^{-1}\big(\psi^{-3}(u_{<2><1><1>})\big) \rhd \alpha^{-1}\big(\beta^{-1}(f'_{<2>})\big)\big]\big) \star \big[\phi^{-1}\big(\psi^{-3}(u_{<2><1><2>})\big) \rhd \alpha^{-3}(u'_{<1><1>})\big]\big\}, (\psi^{-1}(u_{<2><2>}) \bullet u'_{<2>}))$$

bulunur. Hom-modül cebir ve Hom-eşmodül eşcebir eşitlikleri ile,

$$\Delta_{\bowtie}((f,u) * (f',u'))$$

$$= \Big(f_{<1>} \star \big[\phi^{-2}\big(\psi^{-1}(u_{<1><0><1>})\big)$$

$$\rhd \beta^{-1}(f_{<1>})\big], \phi^{-1}\big(\psi^{-1}(u_{<1><0><2>})\big) \bullet \phi^{-1}(u'_{<1><0>})\Big)$$

$$\otimes (\{\alpha^{-1}(f_{<2>}) \star \alpha^{-3}\big(\beta(u_{<1><1>})\big)\}$$

$$\star \{ \phi^{-1}\big(\psi^{-1}(u_{<2><1>})\big)$$

$$\rhd \big[\alpha^{-1}\big(\beta^{-1}(f'_{<2>})\big) \star \alpha^{-3}(u'_{<1><1>})\big]\},$$

$$(\psi^{-1}(u_{<2><2>}) \bullet u'_{<2>})$$

$$= \Big(\alpha\big(\beta^{-1}(f_{<1>})\big), \phi^{-1}(u_{<1><0>})\Big) * \Big(\alpha\big(\beta^{-1}(f'_{<1>})\big), \phi^{-1}(u'_{<1><0>})\Big)$$

$$\otimes (\beta^{-1}(f_{<2>}) \star \alpha^{-2}(u_{<1><1>}), u_{<2>}) * (\beta^{-1}(f'_{<2>}) \star \alpha^{-2}(u'_{<1><1>}), u'_{<2>})$$

$$= \Delta_{\bowtie}(f,u) * \Delta_{\bowtie}(f',u')$$

elde edilir. Böylelikle Tanım 2.1.9 da belirtilen Hom-bicebir şartları sağlanır.

Tanım 2.1.10 da verilen ilk şart yani yapının Hom-bicebir olma şartı yukarıda ispatlanmıştır. Şimdi ise Hom-Hopf cebir olma şartlarından ikincisi ve sonuncusu olan antipot şartı için ise ilk olarak

$$(Id \otimes S_{\bowtie}) \text{ o } \Delta_{\bowtie} (f,u)$$

$$= \Big(\alpha\big(\beta^{-1}(f_{<1>})\big), \phi^{-1}(u_{<1><0>})\Big) * S_{\bowtie}(\beta^{-1}(f_{<2>}) \star \alpha^{-2}(u_{<1><1>}), u_{<2>})$$

$$\Big(\alpha\big(\beta^{-1}(f_{<1>})\big), \phi^{-1}(u_{<1><0>})\Big)$$

$$\star \Big[\Big(1, S_U\big(\phi^{-2}(u_{<2><0>})\big)\Big)$$

$$* \Big(S_F\Big(\big[\alpha^{-1}\big(\beta^{-2}(f_{<2>})\big) \star \alpha^{-3}\big(\beta^{-1}(u_{<1><1>})\big)\big]$$

$$\star \alpha^{-2}\big(\beta^{-1}(u_{<2><1>})\big)\Big), 1\Big)\Big]$$

denklemi hesaplanır. Daha sonra $\mathcal{F}$ nin Hom-birleşme özelliğinden

$$= \Big[\Big(\alpha\big(\beta^{-2}(f_{<1>})\big), \phi^{-2}(u_{<1><0>})\Big) * \Big(1, S_U\big(\phi^{-2}(u_{<2><0>})\big)\Big)\Big]$$

$$\star \Big(S_F\Big(\big[\alpha^{-1}\big(\beta^{-1}(f_{<2>})\big) \star \alpha^{-3}(u_{<1><1>})\big] \star \alpha^{-2}(u_{<2><1>})\Big), 1\Big)$$

$$= \left[\left(\alpha\left(\beta^{-2}(f_{<1>})\right), \phi^{-2}(u_{<1><0>})\right) * \left(1, S_U\left(\phi^{-2}(u_{<2><0>})\right)\right)\right]$$

$$* \left(S_F(\beta^{-1}(f_{<2>}) \star [\alpha^{-3}(u_{<1><1>} \star u_{<2><1>})]\right), 1).$$

bulunur. Hom-eşmodül eşcebir eşitliğinden ise

$$(Id \otimes S_{\bowtie}) \circ \Delta_{\bowtie}(f, u)$$

$$= \left[\left(\alpha\left(\beta^{-2}(f_{<1>})\right), \phi^{-2}(u_{<0><1>})\right) * \left(1, S_U\left(\phi^{-2}(u_{<0><2>})\right)\right)\right]$$
$$* \left(S_F\left(\beta^{-1}(f_{<2>}) \star \alpha^{-1}(u_{<1>})\right), 1\right)$$

$$= \left(\alpha\left(\beta^{-1}(f_{<1>})\right), \phi^{-2}(u_{<0><1>}) \bullet S_U\left(\phi^{-2}(u_{<0><2>})\right)\right)$$
$$* \left(S_F\left(\beta^{-1}(f_{<2>}) \star \alpha^{-1}(u_{<1>})\right), 1\right)$$

$$= \left(\alpha\left(\beta^{-1}(f_{<1>})\right), 1\right) * \left(S_F\left(\alpha\left(\beta^{-1}(f_{<2>})\right)\right), 1\right) \varepsilon_U(u)$$

$$= \left(f_{<1>} \star S_F(f_{<2>})\right) \varepsilon_U(u) = \varepsilon_F(f) \varepsilon_U(u)(1,1).$$

denklemi elde edilir. Benzer şekilde

$$(S_{\bowtie} \otimes Id) \circ \Delta_{\bowtie}(f, u)$$

$$= S_{\bowtie}\left(\alpha\left(\beta^{-1}(f_{<1>})\right), \phi^{-1}(u_{<1><0>})\right) * \left(\beta^{-1}(f_{<2>}) \star \alpha^{-2}(u_{<1><1>}), u_{<2>}\right)$$

$$= \left[\left(1, S_U\left(\phi^{-3}(u_{<1><0><0>})\right)\right)\right.$$
$$\left. * \left(S_F\left(\beta^{-2}(f_{<1>}) \star \alpha^{-2}\left(\beta^{-2}(u_{<1><0><1>})\right)\right), 1\right)\right]$$
$$* \left(\beta^{-1}(f_{<2>}) \star \alpha^{-2}(u_{<1><1>}), u_{<2>}\right)$$

$$= \left(1, S_U\left(\phi^{-2}(u_{<1><0><0>})\right)\right)$$
$$* \left[\left(S_F\left(\beta^{-2}(f_{<1>}) \star \alpha^{-2}\left(\beta^{-2}(u_{<1><0><1>})\right)\right), 1\right)\right.$$
$$\left. * \left(\beta^{-2}(f_{<2>}) \star \alpha^{-2}\left(\beta^{-1}(u_{<1><1>})\right), \phi^{-1}(u_{<2>})\right)\right]$$

$$= \left(1, S_U\left(\phi^{-1}(u_{<1><0>})\right)\right)$$
$$* \left[\left(S_F\left(\beta^{-2}(f_{<1>}) \star \alpha^{-2}\left(\beta^{-2}(u_{<1><1><1>})\right)\right), 1\right)\right.$$
$$\left. * \left(\beta^{-2}(f_{<2>}) \star \alpha^{-2}\left(\beta^{-2}(u_{<1><1><2>})\right), \phi^{-1}(u_{<2>})\right)\right]$$

$$= \Big(1, S_U\big(\phi^{-1}(u_{<1><0>})\big)\Big)$$
$$* \Big[\Big(S_F\Big(\alpha^{-1}\big(\beta^{-1}(f_{<1>})\big) \star \alpha^{-3}\big(\beta^{-1}(u_{<1><1><1>})\big)\Big)$$
$$\star \big[\alpha^{-1}\big(\beta^{-1}(f_{<2>})\big) \star \alpha^{-3}\big(\beta^{-1}(u_{<1><1><2>})\big)\big], u_{<2>}\Big)\Big]$$

$$= \big(1, S_U(u_{<1>})\big) * (1, u_{<2>}), \varepsilon_F(f) = \big(1, S_U(u_{<1>} \bullet u_{<2>})\big), \varepsilon_F(f)$$
$$= \varepsilon_F(f)\varepsilon_F(u)(1,1)$$

elde edilir. Sonuç olarak, $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{U}, *, \eta_{\bowtie}, \beta \otimes \phi, \Delta_{\bowtie}, \varepsilon_{\bowtie}, \alpha \otimes \psi, S_{\bowtie})$ üzerinde verilen dönüşümlere sahip bir Hom-Hopf cebir yapısı olduğu ispatlanmış olur.

5.2 Yarı duallik

Bu bölümde, Hom-Hopf cebirlerde yarı dualliği kullanabilmek için gerekli yapılar ve özellikleri verilmiştir. Hopf cebirler üzerinde dual yapıların ayrıntılı bilgileri için (Majid 2000) ve (Abe 2004) kaynakları incelenebilir.

5.2.1. Lemma. $(\mathcal{V}, \mu, \eta, \phi, \Delta, \varepsilon, \psi)$ Hom-bicebir olsun ve $(\mathcal{U}, \gamma)$,

$$\gamma(v \triangleright u) = \phi(v) \triangleright \gamma(u)$$

etkisi ile (birimli) sol $\mathcal{V}$-Hom modül olsun. Bu durumda $(\mathcal{U}, \gamma)$,

$$\nabla_{Hom}^{O}: \mathcal{U} \to \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}^{O}, \qquad \nabla_{Hom}^{O}(u) \coloneqq u_{<0>} \otimes u_{<1>}$$

eşetkisi ile (eşbirimli) sağ $\mathcal{V}^{O}$ -Hom-eşmodüldür. Verilen eşetki aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$u_{<0>} < u_{<1>}, v > = \phi^{-2}(v) \triangleright u.$$

Ek olarak $\gamma: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ dönüşümü aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$\gamma(u)_{<0>} \otimes \gamma(u)_{<1>} = \gamma(u_{<0>}) \otimes (\phi^{-1})^{*}(u_{<1>})$$

İspat. İlk olarak yukarıda verilen dönüşümün sağ eşetki olduğunu aşağıdaki eşitlikler yardımıyla gösterilir:

$$\gamma(u_{<0>}) < \Delta(u_{<1>}), v \otimes v' > = \gamma(u_{<0>}) < u_{<1>}, \phi^{-2}(v \bullet v') >$$

$$= \gamma(\phi^{-4}(v \bullet v') \rhd u) = \phi^{-3}(v \bullet v') \rhd \gamma(u) = \phi^{-2}(v) \rhd (\phi^{-3}(v') \rhd u)$$

$$= \phi^{-2}(v) \rhd u_{<0>} < u_{<1>}, \phi^{-1}(v') > = u_{<0><0>} < u_{<0><1>}, v >< u_{<1>}, \phi^{-1}(v') >.$$

Yukarı elde edilmiş olan eşitlik, aşağıdaki eşitliğin farklı şekildeki bir gösterimidir:

$$\gamma(u_{<0>}) \otimes \Delta(u_{<1>}) = u_{<0><0>} \otimes u_{<0><1>} \otimes (\phi^{-1})^*(u_{<1>}).$$

Lemmanın ikinci iddiasının doğruluğunun ispatı

$$\gamma(u)_{<0>} < \gamma(u)_{<1>}, v > = \phi^{-2}(v) \rhd \gamma(u)$$

$$= \gamma(\phi^{-3}(v) \rhd u) = u_{<0>} < u_{<1>}, \phi^{-1}(v) >$$

eşitlikleri ile gösterilir.

5.2.1. Önerme. $(\mathcal{V}, \mu, \eta, \phi, \Delta, \varepsilon, \psi)$ Hom-bicebir ve $(\mathcal{U}, \Delta_{\mathcal{U}}, \varepsilon_{\mathcal{U}}, \beta)$ Hom-eşcebir olsun. $\gamma: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ Hom-eşcebir dönüşümü ile $(\mathcal{U}, \gamma)$ ikilisi $\rhd : \mathcal{V} \otimes \mathcal{U} \to \mathcal{U}, \gamma(v \rhd u) = \phi(v) \rhd \gamma(u)$ etkisi ile sol $\mathcal{V}$-Hom modül eşcebir olsun. Bu durumda $(\mathcal{U}, \gamma)$ ikilisi eşetki ile sağ $\mathcal{V}^{\mathrm{O}}$-Hom-eşmodül eşcebirdir.

İspat. Önermede tanımlanan etki ile $(\mathcal{U}, \gamma)$ nin sağ $\mathcal{V}^{\mathrm{O}}$-Hom-eşmodül eşcebir olduğunu görmek için

$$\beta(u)_{<0>} < \beta(u)_{<1>}, v > = \phi^{-2}(v) \rhd \beta(u) = \beta\big(\psi^{-1}\big(\phi^{-2}(v)\big) \rhd u\big)$$

$$= \beta(u_{<0>}) < u_{<1>}, \psi^{-1}(v) > = \beta(u_{<0>}) < (\psi^{-1})^*(u_{<1>}), v >$$

eşitliği ve

$$u_{<0><1>} \otimes u_{<0><2>} < u_{<1>}, v >$$

$$= \Delta_{\mathcal{U}}(\phi^{-2}(v) \rhd u) = \phi^{-2}(v_{<1>}) \rhd u_{<1>} \otimes \phi^{-2}(v_{<2>}) \rhd u_{<2>}$$

$$= u_{<1><0>} < u_{<1><1>}, v_{<1>} > \otimes u_{<2><0>} < u_{<2><2>}, v_{<2>} >$$

$$= u_{<1><0>} \otimes u_{<2><0>} < u_{<1><1>} \bullet u_{<2><1>}, \psi^2(v) >$$

eşitliği yeterlidir.

5.2.2. Lemma. $(\mathcal{U},\mu,\eta,\phi,\Delta,\varepsilon,\psi)$ Hom-bicebir ve $(\mathcal{V},\gamma)$ ikilisi $\lhd : \mathcal{V}\otimes\mathcal{U}\to\mathcal{V},\ \gamma(v\lhd u)=\phi(v)\lhd\gamma(u)$ etkisi ile (birimli) sol $\mathcal{U}$-Hom-modül olsun. Bu durumda $(\mathcal{V}^{O},(\gamma^{-1})^{*})$ aşağıdaki etki ile bir (birimli) sol $\mathcal{U}$-Hom-modüldür:

$$\overset{O}{\rhd}:\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}^{O}\to\mathcal{V}^{O},\qquad <u\overset{O}{\rhd}f,v>=<f,\gamma^{-2}(v)\lhd\phi^{-2}(u)>.$$

Ayrıca, $(\gamma^{-1})^{*}:\mathcal{V}^{O}\to\mathcal{V}^{O}$ etkisi

$$(\gamma^{-1})^{*}\left(u\overset{O}{\rhd}f\right)=\phi(u)\overset{O}{\rhd}(\gamma^{-1})^{*}(f)$$

eşitliğini sağlar.

İspat. Verilen dönüşüm

$$<(u\bullet u')\overset{O}{\rhd}(\psi^{-1})^{*}(f),v>=<(\psi^{-1})^{*}(f),(\gamma^{-2})(v)\lhd\phi^{-2}(u\bullet u')>$$

$$=<f,(\gamma^{-1})\big((\gamma^{-2})(v)\lhd\phi^{-2}(u\bullet u')\big)>=<f,(\gamma^{-3})(v)\lhd\phi^{-3}(u\bullet u')>$$

$$=<f,((\gamma^{-4})(v)\lhd\phi^{-3}(u))\lhd\phi^{-2}(u'))>=<u'\overset{O}{\rhd}f,\gamma^{2}((\gamma^{-4})(v)\lhd\phi^{-3}(u))>$$

$$=<u'\overset{O}{\rhd}f,\big((\gamma^{-2})(v)\lhd\phi^{-1}(u)\big)>=<\phi(u)\overset{O}{\rhd}\left(u'\overset{O}{\rhd}f\right),v>$$

ve

$$<\eta(1)\overset{O}{\rhd}f,v>=<f,\gamma^{-2}(v)\lhd\phi^{-2}\big(\eta(1)\big)>=<f,\gamma^{-2}(v)\lhd\eta(1)>$$

$$=<f,\gamma^{-1}(v)>=<(\gamma^{-1})^{*}(f),v>$$

eşitlikleri ile sol etkidir. Ayrıca

$$<(\gamma^{-1})^{*}\left(u\overset{O}{\rhd}f\right),v>=<u\overset{O}{\rhd}f,\gamma^{-1}(v)>=<f,\gamma^{-3}(v)\lhd\phi^{-2}(u)>$$

$$=<f,\gamma^{-1}\big(\gamma^{-2}(v)\lhd\phi^{-1}(u)\big)>=<(\gamma^{-1})^{*}(f),\gamma^{-2}(v)\lhd\phi^{-1}(u)>$$

$$=<\phi(u)\overset{O}{\rhd}(\gamma^{-1})^{*}(f),v>$$

eşitliği ise Lemma da verilen ek şartın ispatıdır.

5.2.2. Önerme. $(\mathcal{U},\mu,\eta,\phi,\Delta,\varepsilon,\psi)$ Hom-bicebir ve $(\mathcal{V},\Delta_{\mathcal{V}},\varepsilon_{\mathcal{V}},\beta)$ Hom-eşcebir olsun. $\gamma:\mathcal{V}\to\mathcal{V}$ Hom-eşcebir dönüşümü ile $(\mathcal{V},\gamma)$ ikilisi $\lhd:\mathcal{V}\otimes\mathcal{U}\to$

$: \mathcal{V}, \gamma(v \lhd u) = \gamma(v) \lhd \phi(u)$ etkisi ile sol $\mathcal{U}$-Hom modül eşcebir olsun. Bu durumda $(\mathcal{V}^{\mathrm{o}}, (\gamma^{-1})^{*})$ ikilisi sol $\mathcal{U}$-Hom-modül cebirdir.

İspat. $(\mathcal{V}^{O}, (\gamma^{-1})^{*})$ nin sol $\mathcal{U}$-Hom-modül cebir olduğunu görmek için

$$< (\beta^{-1})^{*}\left(u \overset{o}{\rhd} f\right), v > =< u \overset{o}{\rhd} f, \beta^{-1}(v) >$$

$$=< f, \gamma^{-2}\big(\beta^{-1}(v)\big) \lhd \phi^{-2}(u) > = < f, \beta^{-1}\left(\gamma^{-2}(v) \lhd \psi\big(\phi^{-2}(u)\big)\right) >$$

$$=< (\beta^{-1})^{*}(f), \gamma^{-2}(v) \lhd \phi^{-2}\big(\psi(u)\big) > =< \psi(u) \overset{o}{\rhd} (\beta^{-1})^{*}(f), v >$$

eşitlikleri ve

$$< \psi^{-2}(u) \overset{o}{\rhd} (f \star g), v > =< f \star g, \gamma^{-2}(v) \lhd \phi^{-2}\big(\psi^{2}(u)\big) >$$

$$=< f \otimes g, \beta^{-2}\left(\gamma^{-2}(v_{<1>}) \lhd \phi^{-2}\big(\psi^{2}(u_{<1>})\big)\right) \otimes \beta^{-2}\big(\gamma^{-2}(v_{<2>})\big) \lhd \phi^{-2}\big(\psi^{2}(u_{<2>})\big) >$$

$$=< f, \beta^{-2}\left(\gamma^{-2}(v_{<1>}) \lhd \phi^{-2}\big(\psi^{2}(u_{<1>})\big)\right) >< g, \beta^{-2}\big(\gamma^{-2}(v_{<2>})\big) \lhd \phi^{-2}\big(\psi^{2}(u_{<2>})\big) >$$

$$=< f, \beta^{-2}\big(\gamma^{-2}(v_{<1>}) \lhd \phi^{-2}(u_{<1>})\big) >< g, \beta^{-2}\big(\gamma^{-2}(v_{<2>})\big) \lhd \phi^{-2}(u_{<2>}) >$$

$$=< \left(u_{<1>} \overset{o}{\rhd} f\right) \star \left(u_{<2>} \overset{o}{\rhd} g\right), v >$$

eşitlikleri yeterlidir.

5.2.3. Önerme. $(\mathcal{U}, \mu_U, \eta_U, \phi, \Delta_U, \varepsilon_U, \psi, S_U)$ ve $(\mathcal{V}, \mu_V, \eta_V, \alpha, \Delta_V, \varepsilon_V, \beta, S_V)$ Hom-Hopf cebir olsunlar. Bu yapılar üzerindeki dönüşümler $\alpha^{4}\beta^{-2} = Id_{\mathcal{V}}$ ve $\phi^{4}\psi^{-2} = Id_{\mathcal{U}}$ şartını sağlasın. $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ nin eşlenmiş Hom-Hopf cebir çifti olması için gerek ve yeter şart $(\mathcal{V}^{\mathrm{o}}, \mathcal{U})$ karşılıklı Hom-Hopf cebir çifti olmasıdır.

İspat. $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ eşlenmiş çift Hom-Hopf cebir olsun. $\mathcal{V}$, Hom-Hopf cebirinin dualini ise $(\mathcal{V}^{\mathrm{o}}, m, e, a, \Delta, \epsilon, b, S)$ olarak gösterelim. İlk olarak Tanım 5.1.1 iii) şartını inceleyelim. Her $u \in \mathcal{U}, f \in \mathcal{V}^{\mathrm{o}}$ ve her $v, v' \in \mathcal{V}$ için

$$< \Delta\left(u \overset{o}{\rhd} f\right), v \otimes v' > = < u \overset{o}{\rhd} f, \alpha^{-2}(v \bullet v') >$$

$$=< f, \alpha^{-4}(v \bullet v') \lhd \phi^{-2}(u) >= f, \big(\alpha^{-4}(v) \bullet \alpha^{-4}(v')\big) \lhd \ \phi^{-2}(u) >$$

denlemi elde edilir. Diğer taraftan,

$$< \psi^{-1}(u_{<1><0>})\overset{o}{\rhd} f_{<1>}, v >< a^{-4}b^{3}(u_{<1><1>}) \star \left[\phi\big(\psi^{-2}(u_{<2>})\big)\overset{o}{\rhd} a^{-1}(f_{<2>})\right], v' >$$

$$=< f_{<1>}, \alpha^{-2}(v) \lhd \phi^{-2}\psi^{-1}(u_{<1><0>}) >< a^{-4}b^{3}(u_{<1><1>}), \beta^{-2}(v'_{<1>}) >$$
$$< \phi\big(\psi^{-2}(u_{<2>})\big)\overset{o}{\rhd} a^{-1}(f_{<2>}), \beta^{-2}(v'_{<2>}) >$$

$$=< f_{<1>}, \alpha^{-2}(v) \lhd \phi^{-2}\psi^{-1}(u_{<1><0>}) >< u_{<1><1>}, \alpha^{-3}\beta^{2}(v'_{<1>}) >$$
$$< f_{<2>}, a^{-2}\beta^{-1}(v'_{<2>}) \lhd \phi^{-1}\big(\psi^{-1}(u_{<2>})\big) >$$

$$=< f_{<1>}, \alpha^{-2}(v) \lhd \phi^{-2}\psi^{-1}(u_{<1><0>}) >< u_{<1><1>}, \alpha^{-1}(v'_{<1>}) >$$
$$< f_{<2>}, a^{-2}\beta^{-1}(v'_{<2>}) \lhd \phi^{-1}\big(\psi^{-1}(u_{<2>})\big) >$$

$$=< f_{<1>}, \alpha^{-2}(v) \lhd \big(\alpha^{-3}\beta^{-1}(v'_{<1>}) \rhd \phi^{-2}\psi^{-1}(u_{<1>})\big) >< f_{<2>}, a^{-2}\beta^{-1}(v'_{<2>})$$
$$\lhd \phi^{-1}\big(\psi^{-1}(u_{<2>})\big) >$$

$$=< f, \left[\alpha^{-4}(v) \lhd \big(\alpha^{-5}\beta^{-1}(v'_{<1>}) \rhd \phi^{-4}\psi^{-1}(u_{<1>})\big)\right] \bullet (\alpha^{-4}\beta^{-1}(v'_{<2>})$$
$$\lhd \phi^{-3}\big(\psi^{-1}(u_{<2>})\big) >$$

denklemi de elde edilir. Bu da Tanım 4.1.1 iii) şartında belirtilen (4.2) denkleminin sağlanması için gerek ve yeter şartın Tanım 5.1.1 iii) şartının sağlanması olduğunu gösterir.

Benzer şekilde Tanım 5.1.1 v) şartı için aşağıdaki eşitliği inceleyelim:

$$(u \bullet u')_{<0>} < (u \bullet u')_{<1>}, v >= \alpha^{-2}(v) \ \rhd (u \bullet u')$$

diğer taraftan ise

$$\psi^{-1}(u_{<1><0>}) \bullet u'_{<0>} < a^{-1}\big(b(u_{<1><1>})\big) \star \left[\phi^{-1}(u_{<2>})\overset{o}{\rhd} a^{-1}(u'_{<1>})\right], v >$$

$$= \psi^{-1}(u_{<1><0>}) \bullet u'_{<0>} < a^{-1}\big(b(u_{<1><1>})\big), \beta^{-2}(v_{<1>}) >$$
$$< \phi^{-1}(u_{<2>})\overset{o}{\rhd} a^{-1}(u'_{<1>}), \beta^{-2}(v_{<2>}) >$$

$$= \psi^{-1}(u_{<1><0>})\bullet u'_{<0>} < u_{<1><1>}, \alpha^{-1}(v_{<1>}) >< u'_{<1>}, \alpha^{-2}\beta^{-1}(v_{<2>})$$
$$\lhd \phi^{-3}\big(\psi(u_{<2>})\big) >$$

$$=<\left(\alpha^{-3}\beta^{-1}(v_{<1>}) \triangleright \psi^{-1}(u_{<1>})\right)\bullet u'_{<0>} < u'_{<1>}, \alpha^{-2}\beta^{-1}(v_{<2>}) \triangleleft \phi^{-3}\psi(u_{<2>}) >$$

$$= \left(\alpha^{-3}\beta^{-1}(v_{<1>}) \triangleright \psi^{-1}(u_{<1>})\right)\bullet \left[\left(\alpha^{-4}\beta^{-1}(v_{<2>}) \triangleleft \phi^{-5}\psi(u_{<2>})\right) \triangleright u'\right]$$

$$= \left(\alpha^{-3}\beta^{-1}(v_{<1>}) \triangleright \psi^{-1}(u_{<1>})\right)\bullet \left[\left(\alpha^{-4}\beta^{-1}(v_{<2>}) \triangleleft \phi^{-1}\psi^{-1}(u_{<2>})\right) \triangleright u'\right]$$

elde edilir. Bu da Tanım 4.1.1 iii) şartında belirtilen (4.1) denkleminin sağlanması için gerek ve yeter şartın Tanım 5.1.1 v) şartının sağlanması olduğunu gösterir. Son olarak Tanım 5.1.1 vi) şartı için ise

$$u_{<1><0>} < a^{-2}b^{2}(u_{<1><1>}) \star \left(u_{<2>} \underset{\triangleright}{\overset{o}{}} f\right), v >$$

$$= u_{<1><0>} < a^{-2}b^{2}(u_{<1><1>}), \beta^{-2}(v_{<1>}) >< u_{<2>} \underset{\triangleright}{\overset{o}{}} f, \beta^{-2}(v_{<2>}) >$$

$$= \alpha^{-4}(v_{<1>}) \triangleright u_{<1>} < f, \alpha^{-2}\beta^{-2}(v_{<2>}) \triangleleft \phi^{-2}(u_{<2>}) >$$

$$= \phi^{2}\left(\alpha^{-6}(v_{<1>}) \triangleright \phi^{-2}(u_{<1>})\right) < f, \alpha^{-2}\beta^{-2}(v_{<2>}) \triangleleft \phi^{-2}(u_{<2>}) >$$

$$= \phi^{2}\left(\alpha^{-6}(v_{<1>}) \triangleright \phi^{-2}(u_{<1>})\right) < f, \alpha^{-6}(v_{<2>}) \triangleleft \phi^{-2}(u_{<2>}) >$$

eşitliği ve

$$u_{<2><0>} < \left(u_{<1>} \underset{\triangleright}{\overset{o}{}} f\right) \star a^{-2}b^{2}(u_{<2><1>}), v >$$

$$= u_{<2><0>} < \left(u_{<1>} \underset{\triangleright}{\overset{o}{}} f\right), \beta^{-2}(v_{<1>}) >< a^{-2}b^{2}(u_{<2><1>}), \beta^{-2}(v_{<2>}) >$$

$$= u_{<2><0>} < f, \alpha^{-2}\beta^{2}(v_{<1>}) \triangleleft \phi^{-2}(u_{<1>}) >< (u_{<2><1>}), \alpha^{-2}(v_{<2>}) >$$

$$= \alpha^{-4}(v_{<2>}) \triangleright u_{<2>} < f, \alpha^{-2}\beta^{-2}(v_{<1>}) \triangleleft \phi^{-2}(u_{<1>}) >$$

$$= \phi^{2}\left(\alpha^{-6}(v_{<2>}) \triangleright \phi^{-2}(u_{<2>})\right) < f, \alpha^{-2}\beta^{-2}(v_{<1>}) \triangleleft \phi^{-2}(u_{<1>}) >$$

$$= \phi^{2}\left(\alpha^{-6}(v_{<2>}) \triangleright \phi^{-2}(u_{<2>})\right) < f, \alpha^{-6}(v_{<1>}) \triangleleft \phi^{-2}(u_{<1>}) >$$

eşitliği yardımıyla ispat tamamlanmış olur. Bu da Tanım 4.1.1 iii) şartında belirtilen (4.3) denkleminin sağlanması için gerek ve yeter şartın Tanım 5.1.1 vi) şartının sağlanması olduğunu gösterir.

Sonuç 5.2.1, önceki önermelerden direk olarak elde edilebileceği için ispatsız bir şekilde verilmiştir.

5.2.1 Sonuç $(\mathfrak{g},\phi)$ ve $(\mathfrak{h},\alpha)$ herhangi iki eşlenmiş çift Hom-Lie cebir olsun. Ayrıca, dönüşümler $\phi^4 = Id_{\mathfrak{g}}$ ve $\alpha^4 = Id_{\mathfrak{h}}$ şartını sağlasın. Verilen yapılara karşılık

$$\left(\mathcal{U}(\mathfrak{h})^{O} \bowtie \mathcal{U}(\mathfrak{g}), *, \varepsilon \otimes \mathbf{1}, (\alpha^{-1})^{*} \otimes \phi, \Delta_{\bowtie}, \varepsilon_{\bowtie}, Id^{*}_{\mathcal{U}(\mathfrak{h})} \otimes Id_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}, S_{\bowtie}\right)$$

şeklinde tanımlanan ikili çapraz çarpım Hom-Hopf cebir vardır.

Sonuç 5.2.1 de elde edilen Hom-Hopf cebir, Hom-Lie-Hopf cebir olarak adlandırılarak tez tamamlanır.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Hom-Lie-Hopf cebirler tanımlanmıştır. Bu tanımlama için gerekli olan Hom-cebir, Hom-eşcebir, Hom-Lie cebir, Hom-Bicebir, Hom-Hopf cebir tanımlamaları verilmiştir. Hom-Lie cebirin evrensel zarflama cebiri tanımlanmış, bu tanım sırasında düzlemsel ikili ağaç yapılarından faydalanılmıştır. Hom-cebir ve Hom-eşcebir üzerinde modül ve eşmodül tanımlarına yer verilmiştir. Bu tanımlamalar çift çapraz çarpım Hom-Hopf cebir ve ikili çapraz çarpım Hom-Hopf cebir tanımları için gereklidir. Son olarak, dualleme yardımıyla çift çapraz çarpım cebir olan ve Hom-Lie cebir çiftinin evrensel zarflama cebiri olan Hom-Hopf cebir tanımı yapılmıştır. Bu bahsedilen Hom-Hopf cebir Hom-Lie-Hopf cebir olarak adlandırılmıştır.

İleriki çalışmalarda, Hom-Lie-Hopf cebirler üzerinde homoloji, kohomoloji, gösterimler veya bunları içeren yapılar üzerinde durulabilir. Ayrıca, Hom-Lie-Hopf cebirlerin özelliklerinden olan ve tezin içerisinde de değinilen, parçadan bütün ile ilgili bilgi edinme stratejisi kullanılabilir. Yani, büyük ve karmaşık yapıdaki Hom-Hopf cebirler hakkında onları oluşturan ve nispeten anlaşılması kolay olan Hom-Lie cebirler üzerinde çalışarak Hom-Hopf cebirler daha rahat bir şekilde incelenebilir.

7. KAYNAKLAR

Abe, E., “*Hopf algebras”*, Cambridge University Press, (2004).

Bekaert, X., “*Universal enveloping algebras and some applications in physics*”, (2005).

Connes, A. ve Moscovici, H., “Hopf algebras, cyclic cohomology and the transverse index theorem”, *Communications in Mathematical Physics,* 198(1), 199-246, (1998).

Connes, A. ve Moscovici, H., “Background independent geometry and Hopf cyclic cohomology”, arXiv preprint math/0505475, (2005).

Dixmier, J., “*Enveloping algebras”*, Newnes, (1977).

Gel'fand, I. M. ve Fuks, D. B., “Cohomology of the Lie algebra of formal vector fields”, *Mathematics of the USSR-Izvestiya,* 4(2), 327, (1970).

Gohr, A., “On Hom-algebras with surjective twisting”. *Journal of Algebra,* 324(7), 1483-1491, (2010).

Günaydin, M. ve Gürsey, F., “Quark structure and octonions” *Journal of Mathematical Physics,* 14(11), 1651-1667, (1973).

Hartwig, J. T., Larsson, D., Silvestrov, S., “Deformations of Lie algebras using σ-derivations”, *Journal of Algebra,* 295(2), 314-361, (2006).

Hassanzadeh, M., Shapiro, I., ve Sütlü, S., “Cyclic homology for Hom-associative algebras”, *Journal of Geometry and Physics*, 98, 40-56, (2015).

Hazewinkel, M., “Pervasiveness of Hopf algebras”, arXiv preprint math/0411536, (2004).

Laurent-Gengoux, C., Makhlouf, A., Teles, J., “Universal algebra of a Hom-Lie algebra and group-like elements”, *Journal of Pure and Applied Algebra,* 222(5), 1139-1163, (2018).

Lu, D. ve Wang, S., “The Drinfel’d double versus the Heisenberg double for Hom-Hopf algebras”, Journal of Algebra and Its Applications, 15(4), 1650059, (2016).

Majid, S., *Foundations of quantum group theory*. Cambridge university press, (2000).

Makhlouf, A. ve Silvestrov, S., “Hom-Algebra Structures”, *Journal of Generalized Lie Theory and Applications,* 2(2), 51–64, (2008).

Makhlouf, A. ve Silvestrov, S., “Hom-Lie admissible Hom-coalgebras and Hom-Hopf algebras” *In Generalized Lie theory in mathematics, physics and beyond,* 189-206 Springer, Berlin, Heidelberg, (2009).

Makhlouf, A. ve Silvestrov, S., “Hom-algebras and Hom-coalgebras” *Journal of Algebra and its Applications*, 9(4), 553-589, (2010).

Makhlouf, A., ve Panaite, F., “Hom-L-R-smash products, Hom-diagonal crossed products and the Drinfeld double of a Hom-Hopf algebra”, *J. Algebra*, (441), 314–343, (2015).

Moscovici, H. ve Rangipour, B., “Hopf algebras of primitive Lie pseudogroups and Hopf cyclic cohomology” *Advances in Mathematics*, 220(3), 706-790, (2009).

Rangipour, B. ve Sütlü, S., “SAYD modules over Lie-Hopf algebras”, *Communications in Mathematical Physics*, 316(1), 199-236, (2012).

Sheng, Y., “Representations of hom-Lie algebras”, *Algebras and Representation Theory*, 15(6), 1081-1098, (2012).

Sheng, Y. ve Bai, C., “A new approach to hom-Lie bialgebras”, *Journal of Algebra*, 399, 232-250, (2014).

Sütlü, S., “Hopf-cyclic cohomology of bicrossed product Hopf algebras”, *arXiv preprint arXiv:1305.5854*, (2013).

Yakovlev, N. N., “Cohomologies of Witt algebras”, Functional Analysis and Its Applications, 9(3), 269-271, (1975).

Yau, D., “Enveloping algebras of Hom-Lie algebras”, *J. Gen. Lie Theory Appl*. 2(2), 95–108, (2008).

Yau, D., “Module Hom-algebras”, *arXiv:math/0812.4695*, (2008).

Yau, D., “Hom-bialgebras and comodule Hom-algebras”, *Int. Electron. J. Algebra,* 8, 45–64, (2010).

Yunhe, S., "Representations of hom-Lie algebras”, *Algebras and Representation Theory* 15(6), 1081-1098, (2012).

8. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Adnan KARATAŞ

Doğum yeri / yılı : Elazığ / 1990

Elektronik posta : Adnankaratas@outlook.com

Elektronik posta : Adnank@pau.edu.tr

Öğrenim Yeri ve Yılı

Lise : Ankara Atatürk Lisesi (2004 - 2007)

Lisans : TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi (2007 - 2013)

Y. Lisans : Pamukkale Üniversitesi (2014 - 2016)

Tez ile İlgili Yayın ve Konferans

Yayın : Halıcı, S., Karataş, A. ve Sütlü, S., “Hom-Lie-Hopf algebras”, Journal of Algebra, 553, 26-88, (2020).

Konferans : Halıcı, S., Karataş, A. ve Sütlü, S., “Quaternions as a Hom-Hopf Algebras”, 12. International Conference on Clifford Algebras and Their Applications in Mathematical Physics, Hefei-China, 3-7.08.2020. (Sözlü Bildiri)