T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ZAMAN SKALASINDA LİNEER OLMAYAN İMPALSİF SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ESMA TOZAK

DENİZLİ, ŞUBAT - 2021

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ZAMAN SKALASINDA LİNEER OLMAYAN İMPALSİF SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ESMA TOZAK

DENİZLİ, ŞUBAT - 2021

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

ESMA TOZAK

ÖZET

ZAMAN SKALASINDA LİNEER OLMAYAN İMPALSİF SINIR DEĞER PROBLEMLERİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ESMA TOZAK
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. İSMAİL YASLAN)
DENİZLİ, ŞUBAT - 2021

Bu tez üç ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, ele alınan problem tanıtılmıştır. İkinci bölümde, zaman skalası ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde ise, ilk olarak çözümlerin varlığı için gerekli tanımlar ve lemmalar verilmiştir. Sonra impalsif sınır değer problemi, integral denkleme indirgenerek en az bir pozitif çözümün varlığı Krasnosel'skii Sabit Nokta Teoremi yardımıyla, bir veya iki pozitif çözümün varlığı Lan ve Guo tarafından verilen bir lemma yardımıyla, en az iki pozitif çözümünün varlığı Avery-Henderson Sabit Nokta Teoremi yardımıyla ve son olarak da en az üç pozitif çözümünün varlığı Beş Fonksiyonel Sabit Nokta Teoremi yardımıyla ispatlanmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Zaman skalası, koni, sabit nokta teoremleri, pozitif çözümler.

ABSTRACT

NONLİNEAR IMPULSIVE BOUNDARY VALUE PROBLEMS ON TIME SCALES
MSC THESIS
ESMA TOZAK
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATİCS
(SUPERVISOR: PROF. DR. İSMAİL YASLAN)

DENİZLİ, FEBRUARY 2021

This thesis consists of three main chapters. In the first chapter, discussed problem is introduced. In the second chapter, some basic definitions and theorems on time scales are given. In the third chapter, firstly definitions and some lemmas for the main results are given. Then, impulsive boundary value problem is reduced to a nonlinear integral equation and we use Krasnosel'skii fixed point theorem to prove the existence of at least one positive solution. And then, we establish some sufficient conditions for the existence of one or two, at least two and at least three positive solutions for impulsive boundary problem by using a lemma given by Lan and Guo, Avery-Henderson fixed point theorem and five functional fixed point theorem, respectively.

KEYWORDS: Time scale, cone, fixed point theorems, positive solutions.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın her aşamasında anlayış ve sabırla bana destek olan, kıymetli vaktini, emeğini ve bilgisini esirgemeden yardımcı olup yönlendiren çok değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. İsmail YASLAN'a sonsuz saygılarımla teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca emeği geçen bütün hocalarıma ayrı ayrı teşekkürlerimi sunarım.

Beni bugünlere getiren, her anlamda destekleyip benim yanımda olan canım annem Şerife Sarmaşık'a ve canım ablam Pınar Karakuş' a, her zaman olduğu gibi bu süreçte de sabırla yanımda olan eşim Burak TOZAK' a ve varlığıyla mutlu eden oğlum Can TOZAK' a teşekkür ederim.

Esma TOZAK

1. GİRİŞ

Bu tez çalışmasında, zaman skalası üzerinde lineer olmayan impalsif sınır değer problemlerinin pozitif çözümlerinin varlığı incelenmiştir.

Zaman skalası teorisi, ilk olarak 1988 de Bernd Aulbach' ın danışmanlığını yaptığı Stefan Hilger'in doktora tezinde sunulmuştur. Ayrık olayları tanımlamada tam sayılar üzerindeki fark analizi ve sürekli doğal olayları tanımlarken de reel sayılar üzerindeki bildiğimiz analiz kullanılır. Zaman skalası bu iki durumu birleştirir. Ayrıca, reel sayılar ve tam sayılar dışında, daha birçok zaman skalası seçilebileceği için zaman skalası üzerinde yapılan çalışmalar daha geneldir. Zaman skalası, ayrık ve sürekli parçalardan oluşan kümelerin analizi üzerindeki çalışmalarda bize yardımcı olur ve hızla genişleyen bir araştırma alanıdır.

İmpalsif diferansiyel denklemler, belirli anlarda durumunda ani değişiklik gösteren süreçleri ifade ederler. Fizik, mekanik, ekoloji, biyoteknoloji, ekonomi ve doğa bilimlerindeki birçok dinamik olayın durumu aniden değişebilir veya kısa süreli etkiye maruz kalabilir. Bu tür problemler impalsif sınır değer problemleri ile ifade edilir. Zaman skalasında impalsif denklemler üzerine ilk çalışma, 2002 yılında Johnny Henderson tarafından yapılmış olup son yıllarda impalsif diferansiyel denklemleri içeren problemlerin incelenmesi hız kazanmıştır.

Zaman skalası üzerinde lineer olmayan impalsif sınır değer problemlerinin sonsuz aralık üzerindeki pozitif çözümlerinin varlığı üzerine yapılan az sayıda çalışma bulunmaktadır.

Zhao ve Ge (2009) makalesinde

$$\begin{cases} \left(\varphi_p\left(u^{\Delta}(t)\right)\right)^{\nabla} + q(t)\, f\left(t, u(t), u^{\Delta}(t)\right) = 0, \; t \in [0,\infty)_{\mathbb{T}} \\ u(0) = \beta u^{\Delta}(\eta), \; \lim\limits_{t\to\infty} u^{\Delta}(t) = 0 \end{cases}$$

sınır değer probleminin en az üç pozitif çözümünün varlığı problemini, Leggett-Williams sabit nokta teoremi ile incelenmiştir.

Daha sonra, Zhao ve Ge (2010) makalesinde

$$\begin{cases} \left(\varphi_p\left(u^{\Delta}(t)\right)\right)^{\nabla} + h(t)\, f\left(t, u(t), u^{\Delta}(t)\right) = 0,\ t \in [0,\infty)_{\mathbb{T}} \\ u(0) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i u(\eta_i),\ u^{\Delta}(\infty) = \sum_{i=1}^{m-2} \beta_i u^{\Delta}(\eta_i) \end{cases}$$

ikinci mertebeden sınır değer problemi için de, Beş Fonksiyonel Sabit Nokta Teoremini kullanarak, en az üç pozitif çözümün varlığı için koşullar elde etmiştir.

Zhao ve Ge (2009) makalesinden esinlenerek ortaya çıkan Karaca ve Tokmak (2011) makalesinde

$$\begin{cases} \left(\varphi_p\left(x^{\Delta}(t)\right)\right)^{\nabla} + \phi(t)\, f\left(t, x(t), x^{\Delta}(t)\right) = 0,\ t \in [0,\infty)_{\mathbb{T}} \\ x(0) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i x^{\Delta}(\eta_i),\ \lim_{t\to\infty} x^{\Delta}(t) = 0 \end{cases}$$

sınır değer probleminin en az üç pozitif çözümünün varlığı problemi, Leggett-Williams sabit nokta teoremi ve Beş Fonksiyonel Sabit Nokta Teoremi ile incelenmiştir.

Ayrıca, Yaslan ve Haznedar (2014) makalesinde

$$\begin{cases} \left(\varphi\left(y^{\Delta}(t)\right)\right)^{\nabla} + h(t) f\left(t, y(t), y^{\Delta}(t)\right) = 0,\ t \in [a,\infty)_{\mathbb{T}},\ t \neq t_k,\ k = 1,2,\dots,n \\ y(t_k^+) - y(t_k^-) = I_k\big(y(t_k)\big),\quad k = 1,2,\dots,n \\ y(a) - \beta y^{\Delta}(a) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i y^{\Delta}(\eta_i),\quad \lim_{t\to\infty} y^{\Delta}(t) = 0,\quad m \geq 3 \end{cases}$$

sınır değer probleminin en az üç pozitif çözümünün varlığı da Beş Fonksiyonel Sabit Nokta Teoremi yardımıyla incelenmiştir.

Yukarıda verilen çalışmalardan hareketle,

$$\begin{cases} u^{\Delta\nabla}(t) + h(t)\, f\left(t, u(t), u^{\Delta}(t)\right) = 0,\ t \in [a,\infty)_{\mathbb{T}} \\ u(a) - \gamma u^{\Delta}(a) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i u^{\Delta}(\eta_i), \\ u^{\Delta}(\infty) = \sum_{i=1}^{m-2} \beta_i u(\eta_i) \\ u\left(t_k^{+}\right) - u\left(t_k^{-}\right) = I_k\left(u(t_k)\right),\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

sınır değer problemi için sabit nokta teoremlerini kullanarak, hangi koşullar altında en az bir, iki ve üç pozitif çözümün var olduğunu inceleyeceğiz.

2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde zaman skalası ile ilgili temel tanımlar, Δ- türev, ∇- türev, Δ- integral ve ∇- integral kavramları verilmiştir.

2.1 Zaman Skalası ile İlgili Temel Tanımlar

Tanım 2.1.1: Reel sayıların boştan farklı kapalı alt kümesine zaman skalası denir ve $\mathbb{T}$ ile gösterilir (Bohner ve Peterson 2001).

Örneğin $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, Cantor kümesi, $[a,b]$, $\left\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}$ kümeleri birer zaman skalasıdır. Fakat $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ ve $(a,b),[a,b)$ ve $(a,b]$ kümeleri zaman skalası değildir.

Tanım 2.1.2: $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $\forall t\in\mathbb{T}$ için,

- $\forall t\in\mathbb{T}$ için, $\sigma(t)=\inf\{s\in\mathbb{T}: s>t\}$ ile tanımlı $\sigma:\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ operatörüne ileri sıçrama operatörü denir.
- $\forall t\in\mathbb{T}$ için, $\rho(t)=\sup\{s\in\mathbb{T}: s<t\}$ olarak tanımlanan $\rho:\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ operatörüne geri sıçrama operatörü denir.
- $\forall t\in\mathbb{T}$ için $\mu(t)=\sigma(t)-t$ şeklinde tanımlı $\mu:\mathbb{T}\to[0,\infty)$ fonksiyonuna graininess fonksiyonu adı verilir.
- $\sigma(t)>t$ ise $t\in\mathbb{T}$ ye sağ-yayılmış nokta, $\sigma(t)=t$ ise sağ-yoğun nokta denir.
- $\rho(t)<t$ ise $t\in\mathbb{T}$ ye sol-yayılmış nokta, $\rho(t)=t$ ise $t\in\mathbb{T}$ ye sol-yoğun nokta adı verilir.
- $\rho(t)<t<\sigma(t)$ ise yani $t\in\mathbb{T}$ hem sağ hem de sol-yayılmış ise bu noktaya izole (ayrık) nokta denir.
- $\rho(t)=t=\sigma(t)$ ise yani $t\in\mathbb{T}$ hem sağ hem de sol-yoğun ise bu noktaya yoğun nokta adı verilir (Bohner ve Peterson 2001).

Örnek 2.1.1: Eğer $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ ise $\forall t\in\mathbb{R}$ için $\sigma(t)=\inf\{s\in\mathbb{T}: s>t\}=\inf(t,\infty)=t$ ve benzer şekilde $\rho(t)=t$ bulunur. O halde $\mathbb{T}$ deki her nokta yoğundur. Ayrıca bu durumda $\forall t\in\mathbb{R}$ için $\mu(t)=\sigma(t)-t=t-t=0$ dır.

Örnek 2.1.2: $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ ise $\forall t\in\mathbb{R}$ için $\sigma(t)=t+1$ ve $\rho(t)=t-1$ olduğundan $\mathbb{T}$ deki her nokta izole noktadır. Böylece $\mu(t)=1$ olur.

Tanım 2.1.3: Eğer $\mathbb{T}$ sol-yayılmış maksimum m elemanına sahip ise $\mathbb{T}^{\kappa}=\mathbb{T}-\{m\}$ ile, diğer durumlarda ise $\mathbb{T}^{\kappa}=\mathbb{T}$ ile tanımlanır. Özetle;

$$\mathbb{T}^{\kappa}=\begin{cases}\mathbb{T}\setminus(\rho(\sup\mathbb{T}),\sup\mathbb{T}), & \sup\mathbb{T}<\infty\\ \mathbb{T} & ,\sup\mathbb{T}=\infty\end{cases}$$

şeklinde yazılabilir (Bohner ve Peterson 2001).

Tanım 2.1.4: Eğer $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ise $\forall t\in\mathbb{T}$ için $f^{\sigma}:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $f^{\sigma}(t)=f(\sigma(t))$ ile tanımlanır (Bohner ve Peterson 2001).

Tanım 2.1.5: $\mathbb{T}$ zaman skalasına ait $[a,b]_{\mathbb{T}}$ aralığı, $a,b\in\mathbb{T}$ olmak üzere

$$[a,b]=\{t\in\mathbb{T}: a\le t\le b\}$$

ile tanımlanır (Bohner ve Peterson 2001).

Zaman skalasında süreklilik ve türev kavramlarını incelerken komşuluk kavramına ihtiyacımız olacağı için aşağıdaki tanımları verelim.

Tanım 2.1.6: $U\subset\mathbb{T}$ olsun. $\forall\varepsilon>0$ için $U_{\varepsilon}(t)=\{s\in\mathbb{T}: |s-t|<\varepsilon\}$ kümesine t nin ε komşuluğu denir.

Tanım 2.1.7: $t_0\in\mathbb{T}$ olsun. Verilen her $\varepsilon>0$ ve her $t\in U(t_0)$ için, $|f(t)-f(t_0)|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $U(t_0)$ komşuluğu var ise, o halde $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna $t=t_0$ noktasında süreklidir denir.

Örnek 2.1.3: $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, $f(t)=\begin{cases}|t| & ,t<0\\ t+1 & ,t\geq 0\end{cases}$ fonksiyonu verilsin.

a) $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ ise f , $t=0$ da sürekli değildir.

b) $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ ise f , $\forall t\in\mathbb{Z}$ de süreklidir.

2.2 Zaman Skalasında Delta (Δ) Türev

Tanım 2.2.1: $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ olmak üzere, $\forall\varepsilon>0$ ve t nin bir $U\subset\mathbb{T}$ komşuluğundaki her $s\in U$ için,

$$\left|f(\sigma(t))-f(s)-f^{\Delta}(t)(\sigma(t)-s)\right|\leq\varepsilon|\sigma(t)-s|$$

olacak şekilde bir $f^{\Delta}(t)$ sayısı var ise, bu sayıya f fonksiyonunun t noktasındaki delta türevi denir.

Bununla birlikte, $\forall t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ için $f^{\Delta}(t)$ mevcut ise f fonksiyonuna tüm $\mathbb{T}^{\kappa}$ kümesi üzerinde delta türevlenebilirdir denir. Ve $f^{\Delta}:\mathbb{T}^{\kappa}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, f 'nin $\mathbb{T}^{\kappa}$ kümesindeki delta türevi olarak adlandırılır (Bohner ve Peterson 2001).

Teorem 2.2.1: $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ olsun. O zaman aşağıdakiler geçerlidir.

i) f fonksiyonu t de Δ-türevlenebilir ise f fonksiyonu t de süreklidir.

ii) Eğer f fonksiyonu t de sürekli ve t sağ-yayılmış ise f fonksiyonu t de

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}$$

olacak şekilde Δ - türevlenebilirdir.

iii) Eğer t sağ-yoğun nokta ise, f fonksiyonunun t de Δ-türevlenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

değerinin sonlu olmasıdır. Ve bu durumda

$$f^{\Delta}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

dir.

iv) f fonksiyonu t de Δ-türevlenebilir ise,

$$f(\sigma(t))=f(t)+[\sigma(t)-t]\,f^{\Delta}(t)$$

dir (Bohner ve Peterson 2001).

Örnek 2.2.1: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olmak üzere $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ ve $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ için $f^{\Delta}(t)$ yi inceleyelim.

i) $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ ise Teorem 2.2.1 den $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, $t\in\mathbb{R}$ de delta türevlenebilir ise, t sağ-yoğun bir nokta olduğundan, $f'(t)=\lim\limits_{s\to t}\dfrac{f(t)-f(s)}{t-s}$ sonlu bir sayı olarak mevcuttur. Yani f delta türevlenebilirse $f^{\Delta}(t)=f'(t)$ dir.

ii) $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ ise Teorem 2.2.1 den $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ delta türevlenebilen t noktaları sağ-yayılmıştır.

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}=\frac{f(t+1)-f(t)}{t+1-t}=f(t+1)-f(t)=\Delta f(t)$$

Burada Δ , fark denklemlerinde kullanılan ileri fark operatörüne denktir.

Teorem 2.2.2: $f,g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonlarının $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında $\Delta-$ türevlenebilir olduğunu kabul edelim. O zaman,

i) $f+g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında $\Delta-$ türevlenebilirdir ve

$$(f+g)^{\Delta}(t)=f^{\Delta}(t)+g^{\Delta}(t)$$

dir.

ii) Her α sabiti için $\alpha f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında $\Delta-$ türevlenebilirdir ve

$$(\alpha f)^{\Delta}(t)=\alpha f^{\Delta}(t)$$

olur.

iii) $f,g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonları**,** $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında $\Delta-$ türevlenebilrdir ve

$$(fg)^{\Delta}(t)=f^{\Delta}(t).g(t)+g^{\Delta}(t).f(\sigma(t))=f^{\Delta}(t).g(\sigma(t))+g^{\Delta}(t).f(t)$$

olur.

iv) $f(t)f(\sigma(t))\neq 0$ ise, $\frac{1}{f}$ fonksiyonu da $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında $\Delta-$ türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t)=-\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}$$

olur.

v) $g(t)g(\sigma(t))\neq 0$ ise, $\frac{f}{g}$ fonksiyonu da $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında $\Delta-$ türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t)=\frac{f^{\Delta}(t)g(t)-f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

dir (Bohner ve Peterson 2001).

Önerme 2.2.1: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monoton artan bir fonksiyon ise, $\forall t\in[a,b)$ için $f^{\Delta}(t)\geq 0$ olur.

Önerme 2.2.2: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monoton azalan bir fonksiyon ise, $\forall t\in[a,b)$ için $f^{\Delta}(t)\leq 0$ olur.

Sonuç 2.2.1: f, $[a,b]$ üzerinde tanımlı ve $[a,b)$ üzerinde türevlenebilen sürekli bir fonksiyon olsun. Her $t\in[a,b)$ için $f^{\Delta}(t)=0$ ise, f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sabittir (Bohner ve Peterson 2003).

2.3 Zaman Skalasında Nabla (∇) Türev

Tanım 2.3.1: Eğer $\mathbb{T}$ sağ-yayılmış minimum m elemanına sahip ise $\mathbb{T}_k=\mathbb{T}-\{m\}$ ile tanımlanır. Ve $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ise, $f^{\rho}:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall t\in\mathbb{T}$ için $f^{\rho}(t)=f(\rho(t))$ olarak tanımlanır (Bohner ve Peterson 2001).

Tanım 2.3.2: $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t\in\mathbb{T}_k$ olmak üzere, $\forall\varepsilon>0$ ve t nin bir $U\subset\mathbb{T}$ komşuluğundaki her $s\in U$ için,

$$\left|f(\rho(t))-f(s)-f^{\nabla}(t)(\rho(t)-s)\right|\leq\varepsilon\left|\rho(t)-s\right|$$

olacak şekilde bir $f^{\nabla}(t)$ sayısı var ise, bu sayıya f fonksiyonunun t noktasındaki nabla türevi denir.

Üstelik $\forall t\in\mathbb{T}_k$ için $f^{\nabla}(t)$ mevcut ise f fonksiyonuna tüm $\mathbb{T}_k$ kümesi üzerinde nabla türevlenebilirdir denir. Ve $f^{\nabla}:\mathbb{T}_k\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, f ’nin $\mathbb{T}_k$ kümesindeki nabla türevi olarak adlandırılır (Bohner ve Peterson 2003)..

Teorem 2.3.1: $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t\in\mathbb{T}_k$ olsun. O zaman aşağıdakiler geçerlidir.

i) f fonksiyonu t de ∇-türevlenebilir ise f fonksiyonu t de süreklidir.

ii) Eğer f fonksiyonu t de sürekli ve t sol-yayılmış ise f fonksiyonu t de

$$f^{\nabla}(t)=\frac{f(t)-f(\rho(t))}{t-\rho(t)}$$

olacak şekilde ∇-türevlenebilirdir.

iii) Eğer t sol-yoğun nokta ise, f fonksiyonunun t de ∇-türevlenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

değerinin sonlu olmasıdır. Ve bu durumda

$$f^{\nabla}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

dir.

iv) f fonksiyonu t de ∇-türevlenebilir ise,

$$f(\rho(t))=f(t)+[t-\rho(t)]\,f^{\nabla}(t)$$

dir (Bohner ve Peterson 2001).

Örnek 2.3.1: a) $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ için;

$$f^{\nabla}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}=f'(t)=f^{\Delta}(t) \text{ olur.}$$

b) $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ için;

$$f^{\nabla}(t)=\frac{f(t)-f(\rho(t))}{t-\rho(t)}=\frac{f(t)-f(t-1)}{1}=f(t)-f(t-1)=\nabla f(t)$$

olur. Burada ∇, fark denklemlerinde kullanılan geri fark operatörüdür.

Teorem 2.3.2: $f,g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonlarının $t\in\mathbb{T}_k$ noktasında $\nabla-$ türevlenebilir olduğunu kabul edelim. O zaman,

i) $f+g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, $t\in\mathbb{T}_k$ noktasında $\nabla-$türevlenebilirdir ve

$$(f+g)^{\nabla}(t)=f^{\nabla}(t)+g^{\nabla}(t)$$

dir.

ii) Her α sabiti için $\alpha f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, $t\in\mathbb{T}_k$ noktasında $\nabla-$ türevlenebilirdir ve

$$(\alpha f)^{\nabla}(t)=\alpha f^{\nabla}(t)$$

olur.

iii) $f,g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonları**,** $t\in\mathbb{T}_k$ noktasında $\nabla-$türevlenebilirdir ve

$$(fg)^{\nabla}(t)=f^{\nabla}(t).g(t)+f\left(\rho(t)\right).g^{\nabla}(t)=f^{\nabla}(t).g\left(\rho(t)\right)+g^{\nabla}(t).f(t)$$

olur.

iv) $f(t)\,f^{\rho}(t)\neq 0$ ise, $\dfrac{1}{f}$ fonksiyonu da $t\in\mathbb{T}_k$ noktasında $\nabla-$ türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\nabla}(t)=-\frac{f^{\nabla}(t)}{f(t)\,f\left(\rho(t)\right)}$$

olur.

v) $g(t)g^{\rho}(t)\neq 0$ ise, $\frac{f}{g}$ fonkssiyonu da $t\in\mathbb{T}_k$ noktasında $\nabla-$ türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\nabla}(t)=\frac{f^{\nabla}(t)g(t)-f(t)g^{\nabla}(t)}{g(t)g(\rho(t))}$$

dir (Bohner ve Peterson 2001).

2.4 Zaman Skalasında Delta (Δ) İntegral

Tanım 2.4.1: Eğer $f:\mathbb{T}\rightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{T}$ ’ deki sağ yoğun noktalarda sürekli ve sol yoğun noktalarda sonlu limite sahip ise f ye rd-sürekli veya sağ yoğun sürekli fonksiyon denir. Ve $f:\mathbb{T}\rightarrow\mathbb{R}$ rd-sürekli fonksiyonların kümesi

$$C_{rd}=C_{rd}(\mathbb{T})=C_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$$

ile gösterilir (Bohner ve Peterson 2001).

Tanım 2.4.2: $f:\mathbb{T}\rightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $F:\mathbb{T}\rightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}^k$ de $\Delta-$ türevlenebilir ve her $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ için $F^{\Delta}(t)=f(t)$ ise, F fonksiyonuna f nin ilkeli veya $\Delta-$anti türevi denir.

Eğer $f:\mathbb{T}\rightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonunun $\Delta-$ anti türevi varsa, f ye $\Delta-$ integrallenebilir fonksiyon denir. Ayrıca $a,b\in\mathbb{T}$ olmak üzere f nin a dan b ye delta integrali

$$\int_a^b f(t)\Delta t=F(b)-F(a)$$

ile tanımlanır (Bohner ve Peterson 2001).

Teorem 2.4.1: Her sağ yoğun sürekli fonksiyonun bir anti türevi vardır (Bohner ve Peterson 2001).

Teorem 2.4.2: $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ ve $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonlarının $\Delta-$ integrallenebilir olduğunu kabul edelim. $a,b,c\in\mathbb{T}$ için;

1. $\int_a^b [f(t)+g(t)]\Delta t=\int_a^b f(t)\Delta t+\int_a^b g(t)\Delta t$

2. Her k sabiti için $\int_a^b kf(t)\Delta t=k\int_a^b f(t)\Delta t$ dir.

3. $\int_a^a f(t)\Delta t=0$

4. $\int_a^b f(t)\Delta t=-\int_b^a f(t)\Delta t$

5. $\int_a^b f(t)\Delta t=\int_a^c f(t)\Delta t+\int_c^b f(t)\Delta t$

6. $\int_a^b f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)\Delta t=f(t)g(t)\Big|_a^b-\int_a^b f^{\Delta}(t)g(t)\Delta t$

7. $\int_a^b f(t)g^{\Delta}(t)\Delta t=f(t)g(t)\Big|_a^b-\int_a^b f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))\Delta t$

ifadeleri doğrudur (Bohner ve Peterson 2001).

Teorem 2.4.3: Eğer $f\in C_{rd}$ ve $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ ise,

$$\int_t^{\sigma(t)} f(s)\Delta s=[\sigma(t)-t]\,f(t)=\mu(t)f(t)$$

olur (Bohner ve Peterson 2001).

Tanım 2.4.3: $a\in\mathbb{T}$ **,** $\sup\mathbb{T}=\infty$ ve f fonksiyonu $[a,\infty)$ aralığında rd-sürekli fonksiyon ise genelleştirilmiş integrali

$$\int_a^{\infty} f(t)\Delta t=\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(t)\Delta t$$

şeklinde tanımlarız. Bu limit eğer mevcutsa genelleştirilmiş integral yakınsak, mevcut değilse genelleştirilmiş integral ıraksaktır (Bohner ve Peterson 2001).

Teorem 2.4.4: $\mathbb{T}$ bir zaman skalası, $a<b$ olmak üzere $a,b\in\mathbb{T}$ ve $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları $\mathbb{T}$ de $\Delta-$integrallenebilir olsunlar. Her $t\in[a,b]$ için,

1. $f(t)\geq 0$ ise, $\int_a^b f(t)\Delta t\geq 0$

2. $f(t)\leq g(t)$ ise, $\int_a^b f(t)\Delta t\leq \int_a^b g(t)\Delta t$

3. $|f(t)|\leq g(t)$ ise, $\left|\int_a^b f(t)\Delta t\right|\leq \int_a^b g(t)\Delta t$

4. $\left|\int_a^b f(t)\Delta t\right|\leq \int_a^b |f(t)|\Delta t\leq \left(\sup_{a\leq t\leq \rho(b)}|f(t)|\right)(b-a)$

ifadeleri doğrudur (Bohner ve Peterson 2001).

Örnek 2.4.1: $\mathbb{T}=[0,1]\cup[2,3]$ için $\int_0^t s\Delta s$ integralinin değerini hesaplayalım.

$0\leq t\leq 1$ için $\int_0^t s\Delta s=\int_0^t s ds=\dfrac{t^2}{2}$

$t=2$ için $\int_0^t s\Delta s=\int_0^1 s\Delta s+\int_1^2 s\Delta s=\dfrac{1}{2}+(\sigma(1)-1)\,f(1)=\dfrac{1}{2}+(2-1)1=\dfrac{3}{2}$

$t>2$ için $\int_0^t s\Delta s=\int_0^2 s\Delta s+\int_2^t s\Delta s=\dfrac{3}{2}+\int_2^t s ds=\dfrac{3}{2}+\dfrac{t^2}{2}-2=\dfrac{t^2}{2}-\dfrac{1}{2}$

Yani; $\int_0^t s\Delta s=\begin{cases}\dfrac{t^2}{2}, & 0\leq t\leq 1\\[2mm] \dfrac{t^2}{2}-\dfrac{1}{2}, & 2\leq t\leq 3\end{cases}$ elde edilir.

Örnek 2.4.2: $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ için $a \neq 0$ olmak üzere $\int a^t \Delta t$ belirsiz integralini inceleyelim.

$$\left(\frac{a^t}{a-1}\right)^{\Delta} = \Delta\left(\frac{a^t}{a-1}\right) = \frac{a^{t+1}-a^t}{a-1} = a^t$$

olduğundan

$$\int a^t \Delta t = \frac{a^t}{a-1} + c \quad (c = sabit)$$

elde edilir.

2.5 Zaman Skalasında Nabla (∇) İntegral

Tanım 2.5.1: Eğer $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{T}$ ’ deki sol yoğun noktalarda sürekli ve sağ yoğun noktalarda sonlu limite sahip ise f ye ld-sürekli veya sol yoğun sürekli fonksiyon denir. Ve $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ ld-sürekli fonksiyonların kümesi

$$C_{ld} = C_{ld}(\mathbb{T}) = C_{ld}(\mathbb{T},\mathbb{R})$$

ile gösterilir (Bohner ve Peterson 2001).

Tanım 2.5.2: $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $F:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}_k$ de $\nabla-$ türevlenebilir ve her $t\in\mathbb{T}_k$ için $F^{\nabla}(t) = f(t)$ ise, F fonksiyonuna f nin ilkeli veya $\nabla-$anti türevi denir.

Eğer $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun $\nabla-$ anti türevi varsa, f ye $\nabla-$ integrallenebilir fonksiyon denir. Ayrıca $a,b\in\mathbb{T}$ olmak üzere f nin a dan b ye nabla integrali

$$\int_a^b f(t)\nabla t = F(b) - F(a)$$

ile tanımlanır (Bohner ve Peterson 2001).

Teorem 2.5.1: Her sol yoğun sürekli fonksiyonun bir anti türevi vardır (Bohner ve Peterson 2001).

Teorem 2.5.2: $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ ve $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonlarının $\nabla-$ integrallenebilir olduğunu kabul edelim. O halde her $a,b,c\in\mathbb{T}$ için;

1. $\int_a^b \left[f(t)+g(t)\right]\nabla t=\int_a^b f(t)\nabla t+\int_a^b g(t)\nabla t$

2. Her k sabiti için $\int_a^b kf(t)\nabla t=k\int_a^b f(t)\nabla t$ olur.

3. $\int_a^a f(t)\nabla t=0$

4. $\int_a^b f(t)\nabla t=-\int_b^a f(t)\nabla t$

5. $\int_a^b f(t)\nabla t=\int_a^c f(t)\nabla t+\int_c^b f(t)\nabla t$

6. $\int_a^b f(\rho(t))g^{\nabla}(t)\nabla t=f(t)g(t)\Big|_a^b-\int_a^b f^{\nabla}(t)g(t)\nabla t$

7. $\int_a^b f(t)g^{\nabla}(t)\nabla t=f(t)g(t)\Big|_a^b-\int_a^b f^{\nabla}(t)g(\rho(t))\nabla t$

ifadeleri doğrudur (Bohner ve Peterson 2001).

Teorem 2.5.3: Eğer $f\in C_{ld}$ ve $t\in\mathbb{T}_k$ ise

$$\int_{\rho(t)}^{t} f(s)\nabla s=\left[t-\rho(t)\right]f(t)$$

eşitliği doğrudur (Bohner ve Peterson 2001).

Örnek 2.5.1: $\mathbb{T}=[0,3]\cup[5,7]$ olsun. $f(s)=s^2$ için $\int_0^7 f(s)\nabla s$ integralinin değerini hesaplayalım.

$\int_0^7 f(s)\nabla s=\int_0^3 f(s)\nabla s+\int_3^5 f(s)\nabla s+\int_5^7 f(s)\nabla s$ dir. Şimdi integral değerlerini ayrı ayrı hesaplayalım.

$$\int_0^3 f(s)\nabla s=\int_0^3 f(s)ds=\int_0^3 s^2 ds=9$$

$$\int_3^5 f(s)\nabla s=(5-3)f(5)=50$$

$$\int_5^7 f(s)\nabla s=\int_5^7 f(s)ds=\int_5^7 s^2 ds=\frac{218}{3}$$

olur. Böylece;

$$\int_0^7 f(s)\nabla s=\int_0^3 f(s)\nabla s+\int_3^5 f(s)\nabla s+\int_5^7 f(s)\nabla s=\frac{395}{3}$$

bulunur.

3. ZAMAN SKALASINDA LİNEER OLMAYAN İMPALSİF SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Bu bölümde $\mathbb{T}$ bir zaman skalası, $t \in [a,\infty)_{\mathbb{T}}$, $t \neq t_k$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq m-2)$, $\gamma \geq 0$, $0 \leq a < \eta_1 < \eta_2 < ... < \eta_{m-2} < \infty$, $f \in C\left([a,\infty)_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R} \times [0,\infty), [0,\infty)\right)$ olmak üzere,

$$\begin{cases} u^{\Delta\nabla}(t) + h(t)\, f\left(t, u(t), u^{\Delta}(t)\right) = 0,\ t \in [a,\infty)_{\mathbb{T}} \\ u(a) - \gamma u^{\Delta}(a) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i u^{\Delta}(\eta_i), \\ u^{\Delta}(\infty) = \sum_{i=1}^{m-2} \beta_i u(\eta_i) \\ u(t_k^{+}) - u(t_k^{-}) = I_k\left(u(t_k)\right),\ k \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{3.1}$$

sınır değer problemi ele alınacaktır.

Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim.

$(H1)$ $h \in C\left([a,\infty)_{\mathbb{T}}, [0,\infty)\right)$ ve $\int_a^{\infty} h(s)\nabla s < \infty$

$(H2)$ $\omega \in C\left([0,\infty),[0,\infty)\right)$ azalmayan olmak üzere, $f\left(t,(1+t)u,v\right) \leq \omega\left(\max\{|u|,|v|\}\right)$

$(H3)$ $\sum_{a<t_k<\infty} I_k(u(t_k)) > 0$

3.1 Temel Tanımlar

Tanım 3.1.1: B Banach uzayı olmak üzere

1. $P \in B$ boştan farklı, kapalı ve konvekstir.
2. $x \in P$ ise $\forall \lambda \geq 0$ için $\lambda x \in P$
3. $x \in P,\ x \neq 0$ iken $-x \notin P$

şartlarını sağlayan $P \subset B$ kümesine koni denir (Liang ve ark. 2009).

Tanım 3.1.2: Banach uzayımız $\|u\|_1 = \sup_{t\in[a,\infty)_{\mathbb{T}}} \frac{|u(t)|}{1+t}$, $\|u^{\Delta}\|_{\infty} = \sup_{t\in[a,\infty)_{\mathbb{T}}} |u^{\Delta}(t)|$ olmak üzere $\|u\| = \max\left\{\|u\|_1, \|u^{\Delta}\|_{\infty}\right\}$ normuyla tanımlı

$$B = \left\{ u \in C^{\Delta}[a,\infty) : \sup_{t\in[a,\infty)_{\mathbb{T}}} \frac{|u(t)|}{1+t} < \infty,\ \lim_{t\to\infty} u^{\Delta}(t) = \sum_{i=1}^{m-2} \beta_i u(\eta_i) \right\} \tag{3.2}$$

olsun ve konimiz,

$$P = \left\{ u \in B : u(a) - \gamma u^{\Delta}(a) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i u^{\Delta}(\eta_i),\ u,\ [a,\infty)_{\mathbb{T}} \text{ üzerinde azalmayan, konkav ve negatif olmayan} \right\} \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlansın.

Tanım 3.1.3: B**,** (3.2) de tanımlı bir Banach uzayı ve $G \subset B$ olsun.

1. G , B de düzgün sınırlıdır.

2. $\varepsilon > 0$ olmak üzere $\forall t_1, t_2 \in [a,\infty)_{\mathbb{T}}$ ve $\forall f \in G$ için $|t_1 - t_2| < \delta$ iken $|f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa G kümesine ait fonksiyonlar aynı dereceden süreklidir,

3. $t > d_0$, $f \in G$ ve herhangi bir ε için, $|f(t) - f(\infty)| < \varepsilon$ olacak şekilde $d_0 = d_0(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa G kümesine ait fonksiyonlar aynı dereceden yakınsaktır,

şartları sağlanırsa, G relatively kompakttır (Deimling 1985).

Tanım 3.1.4: (E,d) ve (E,d_1) metrik uzaylar ve $A : D \subset E \to E_1$ bir operatör olsun. Eğer A operatörü D içindeki her sınırlı kümeyi E_1 içindeki relatively kompakt kümeye dönüştürüyorsa A ya D üzerinde kompakt operatör denir (Deimling 1985).

Tanım 3.1.5: (E,d) ve (E,d_1) metrik uzaylar ve $A:D\subset E\to E_1$ bir operatör olmak üzere, A operatörü D üzerinde hem sürekli hem de kompakt operatör ise A ya tamamen sürekli operatör denir (Deimling 1985).

3.2 Çözümlerin Varlığı İçin Gerekli Lemmalar

Lemma 3.2.1: $y(t)=h(t)\,f\left(t,u(t),u^{\Delta}(t)\right)$ olmak üzere, $y\in C\left([a,\infty)_{\mathbb{T}},[a,\infty)\right)$ ve $\int_a^{\infty} y(t)\nabla t<\infty$ olsun. Bu durumda (3.1) sınır değer probleminin tek çözümü;

$$u(t)=(\gamma-a)\int_a^{\infty} y(r)\nabla r+t\int_t^{\infty} y(r)\nabla r+\int_a^{t} ry(r)\nabla r+(\gamma+t-a)\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i u(\eta_i)$$

$$+\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\left[\sum_{k=1}^{m-2}\beta_k u(\eta_k)+\int_{\eta_i}^{\infty} y(r)\nabla r\right]+\sum_{a<t_k<t} I_k\left(u(t_k)\right)$$

dir.

İspat: $u^{\Delta\nabla}(t)=-y(t)\ ,\ t\in[a,\infty)_{\mathbb{T}}$

olduğundan, eşitliğin her iki tarafının t den ∞ a nabla integralini alırsak

$$u^{\Delta}(\infty)-u^{\Delta}(t)=-\int_t^{\infty} y(s)\nabla s$$

$$u^{\Delta}(t)=u^{\Delta}(\infty)+\int_t^{\infty} y(s)\nabla s$$

olur. $u^{\Delta}(\infty)=\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i u(\eta_i)$ olduğundan;

$$u^{\Delta}(t)=\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i u(\eta_i)+\int_t^{\infty} y(s)\nabla s$$

elde edilir. Şimdi de her iki tarafın a dan t ye delta integralini alırsak

$$u(t)-u(a)=(t-a)\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i u(\eta_i)+\int_a^t\int_s^\infty y(r)\nabla r\Delta s+\sum_{t_k<t} I_k\left(u\left(t_k\right)\right)$$

$$u(t)=u(a)+(t-a)\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i u(\eta_i)+\int_a^t\int_a^r y(r)\Delta s\nabla r+\int_t^\infty\int_a^t y(r)\Delta s\nabla r++\sum_{t_k<t} I_k\left(u\left(t_k\right)\right)$$

elde ederiz. $u\left(a\right)=\gamma u^{\Delta}\left(a\right)+\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i u^{\Delta}\left(\eta_i\right)$ olduğunu biliyoruz. Yukarıdaki denklemde $u(a)$ yerine eşitini yazarak;

$$u\left(t\right)=\gamma u^{\Delta}\left(a\right)+\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i u^{\Delta}\left(\eta_i\right)+(t-a)\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i u(\eta_i)+\int_a^t (r-a)y\left(r\right)\nabla r$$

$$+\int_t^\infty (t-a)y\left(r\right)\nabla r+\sum_{t_k<t} I_k\left(u\left(t_k\right)\right)$$

elde ederiz. Son olarak $u^{\Delta}(t)=\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i u(\eta_i)+\int_t^\infty y(s)\nabla s$ de t yerine a ve η_i yazılarak bulunan değerler yukarıdaki denklemde yerlerine yazılır ve düzenlenirse (3.1) sınır değer probleminin tek çözümü,

$$u\left(t\right)=\left(\gamma-a\right)\int_a^\infty y\left(r\right)\nabla r+t\int_t^\infty y\left(r\right)\nabla r+\int_a^t ry\left(r\right)\nabla r+(\gamma+t-a)\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i u(\eta_i)$$

$$+\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\left[\sum_{k=1}^{m-2}\beta_k u(\eta_k)+\int_{\eta_i}^\infty y\left(r\right)\nabla r\right]+\sum_{a<t_k<t} I_k\left(u\left(t_k\right)\right)$$

olarak bulunur.

$\left(3.1\right)$ sınır değer probleminin çözümlerinin bulunması, $t\in\left[a,\infty\right)_{\mathbb{T}}$ için B uzayı içinde

$$(Au)(t)=(\gamma-a)\int_a^\infty h(r)\,f\left(r,u(r),u^\Delta(r)\right)\nabla r+t\int_t^\infty h(r)\,f\left(r,u(r),u^\Delta(r)\right)\nabla r$$
$$+\int_a^t rh(r)\,f\left(r,u(r),u^\Delta(r)\right)\nabla r+(\gamma+t-a)\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i u(\eta_i)$$
$$+\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\left[\sum_{k=1}^{m-2}\beta_k u(\eta_k)+\int_{\eta_i}^\infty h(r)\,f\left(r,u(r),u^\Delta(r)\right)\nabla r\right]+\sum_{a<t_k<t} I_k\left(u(t_k)\right) \tag{3.4}$$

ile tanımlı $A:P\to B$ operatörünün sabit noktalarının bulunmasına denktir.

Lemma 3.2.2: $M=\max\left\{\gamma-a+\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i,1\right\}$ olmak üzere, $u\in P$ için $\|u\|_1\le M\left\|u^\Delta\right\|_\infty$ eşitsizliği sağlanır.

İspat: $u\in P$**,** $\|u\|_1=\sup\limits_{t\in[a,\infty)_{\mathbb{T}}}\dfrac{|u(t)|}{1+t}$ ve $\left\|u^\Delta\right\|_\infty=\sup\limits_{t\in[a,\infty)_{\mathbb{T}}}\left|u^\Delta(t)\right|$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\frac{u(t)}{1+t}&=\frac{1}{1+t}\left(\int_a^t u^\Delta(s)\Delta s+u(a)\right)\\&=\frac{1}{1+t}\left(\int_a^t u^\Delta(s)\Delta s+\gamma u^\Delta(a)+\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i u^\Delta(\eta_i)\right)\\&\le\frac{1}{1+t}\left[t-a+\gamma+\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\right]\left\|u^\Delta\right\|_\infty\\&\le M\left\|u^\Delta\right\|_\infty\end{aligned}$$

olur. Böylece, $\sup\limits_{t\in[a,\infty)_{\mathbb{T}}}\dfrac{|u(t)|}{1+t}\le M\left\|u^\Delta\right\|_\infty$ olduğu için,

$$\|u\|_1\le M\left\|u^\Delta\right\|_\infty$$

elde edilir.

Lemma 3.2.3: $(H1)$ **,** $(H2)$ ve $(H3)$ koşulları sağlandığında, $A:P\to P$ operatörü tamamen süreklidir.

İspat: İspatı 4 adımda yapalım.

1. Adım: $AP \subset P$ olduğunu gösterelim.

$u \in P$ için Au , $[a,\infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde;

$$\left(Au\right)^{\Delta\nabla}\left(t\right) = -h\left(t\right) f\left(t,u\left(t\right),u^{\Delta}\left(t\right)\right) \leq 0 \text{ olduğundan konkav,}$$

$$(Au)^{\Delta}(t) = \sum_{i=1}^{m-2} \beta_i u(\eta_i) + \int_t^{\infty} h\left(s\right) f\left(s,u\left(s\right),u^{\Delta}\left(s\right)\right)\nabla s \geq 0 \qquad \text{olduğundan}$$

azalmayan,

$$(Au)(a) = \gamma \int_a^{\infty} y\left(r\right)\nabla r + \gamma \sum_{i=1}^{m-2} \beta_i u(\eta_i) + \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \left[\sum_{k=1}^{m-2} \beta_k u(\eta_k) + \int_{\eta_i}^{\infty} y\left(r\right)\nabla r \right]$$
$$+ \sum_{a<t_k<t} I_k\left(u\left(t_k\right)\right) \geq 0$$

olduğu için de negatif olmayandır. Yani $AP \subset P$ dir.

2. Adım : $A: P \to P$ sürekli olduğunu gösterelim.

P de $n \to +\infty$ iken $u_n \to u$ ise $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\| < \lambda_0$ olacak şekilde λ_0 reel sayısı mevcuttur. $(H2)$ şartından, $f\left(t,(1+t)u,v\right) \leq \omega(\lambda_0)$ olduğunu söyleriz. $(H1)$ şartını da kullanarak,

$$\int_a^{\infty} h\left(s\right)\left| f\left(s,u_n\left(s\right),u_n^{\Delta}\left(s\right)\right) - f\left(s,u\left(s\right),u^{\Delta}\left(s\right)\right)\right|\nabla s \leq 2\omega(\lambda_0)\int_a^{\infty} h\left(s\right)\nabla s < \infty$$

elde ederiz.

Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoreminden,

$$\left|\left(Au_n\right)^{\Delta}\left(t\right) - \left(Au\right)^{\Delta}\left(t\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^{m-2} \beta_i (u_n(\eta_i) - u(\eta_i)) + \int_t^{\infty} h\left(s\right)\left[f\left(s,u_n\left(s\right),u_n^{\Delta}\left(s\right)\right) - f\left(s,u\left(s\right),u^{\Delta}\left(s\right)\right)\right]\nabla s\right|$$
$$\leq \sum_{i=1}^{m-2} \left|\beta_i (u_n(\eta_i) - u(\eta_i))\right| + \int_t^{\infty} h\left(s\right)\left| f\left(s,u_n\left(s\right),u_n^{\Delta}\left(s\right)\right) - f\left(s,u\left(s\right),u^{\Delta}\left(s\right)\right)\right|\nabla s$$
$$\to 0\,, \quad n \to +\infty$$

elde edilir. Böylece;

$$\|Au_n - Au\| \le M\left\|(Au_n)^{\Delta} - (Au)^{\Delta}\right\|_{\infty} \to 0\,, \quad n \to +\infty$$

olur. Dolayısıyla A süreklidir.

3. Adım : $A: P \to P$ operatörünün kompaktlığını (sınırlı kümeden relatively kompakt kümeye bir dönüşüm olduğunu) gösterelim.

Y, P nin sınırlı alt kümesi olsun. O zaman $u \in Y$ için $\|u\| \le L$ olacak şekilde bir $L > 0$ reel sayısı vardır. $(H1)$ ve $(H2)$ şartından $\forall u \in Y$ için,

$$\begin{aligned}
\left\|(Au)^{\Delta}\right\|_{\infty} &= \sum_{i=1}^{m-2} \beta_i u(\eta_i) + \int_a^{\infty} h(s)\, f\left(s, u(s), u^{\Delta}(s)\right) \nabla s \\
&\le L \sum_{i=1}^{m-2} \beta_i (1 + \eta_i) + \omega(L)\left(\int_a^{\infty} h(s) \nabla s\right) < \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $\left\|(AY)^{\Delta}\right\|_{\infty} < \infty$ olur. Dolayısıyla,

$$\|AY\| \le M\left\|(AY)^{\Delta}\right\|_{\infty} < \infty$$

ve $A(Y)$ düzgün sınırlıdır.

Şimdi $A(Y)$ nin $[a, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde aynı dereceden sürekli olduğunu gösterelim. $K > 0$, $r_2 > r_1$ olmak üzere $r_1, r_2 \in [a, K]_{\mathbb{T}}$ ve $\forall u \in Y$ için, $(H1)$ ve $(H2)$ şartından,

$$\begin{aligned}
\left|(Au)^{\Delta}(r_1) - (Au)^{\Delta}(r_2)\right| &= \left|\sum_{i=1}^{m-2} \beta_i u(\eta_i) + \int_{r_1}^{\infty} y(s) \nabla s - \sum_{i=1}^{m-2} \beta_i u(\eta_i) - \int_{r_2}^{\infty} y(s) \nabla s\right| \\
&= \left|\int_{r_1}^{r_2} y(s) \nabla s\right| \le \int_{r_1}^{r_2} |h(s)| \left| f\left(s, u(s), u^{\Delta}(s)\right)\right| \nabla s \\
&\le \omega(L) \int_{r_1}^{r_2} h(s) \nabla s \to 0 \qquad , r_1 \to r_2
\end{aligned}$$

olur. Böylece $(AY)^{\Delta}$, $[a,\infty)_{\mathbb{T}}$ aralığında aynı dereceden sürekli olup Lemma 3.2.2 gereğince $A(Y)$ nin de $[a,\infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde aynı dereceden sürekli olduğunu söyleyebiliriz.

4. Adım : Son olarak, $A:P\to P$ nin aynı dereceden yakınsak olduğunu gösterelim. $t\to\infty$ iken $u\in Y$ için,

$$\left|(Au)^{\Delta}(t)-(Au)^{\Delta}(\infty)\right|=\left|\int_t^{\infty} h(s)\, f\left(s,u(s),u^{\Delta}(s)\right)\nabla s\right|$$

Böylece $t\to\infty$ iken $\left\|(Au)^{\Delta}(t)-(Au)^{\Delta}(\infty)\right\|_{\infty}\to 0$ olur. Buradan da $\left\|(Au)(t)-(Au)(\infty)\right\|\to 0$ olduğunu söyleriz. O halde $A:P\to P$ aynı dereceden yakınsaktır.

Sonuç olarak, Adım 1-4 gereğince A operatörü tamamen süreklidir.

3.3 En Az Bir Pozitif Çözümün Varlığı

Bu bölümde, (3.1) sınır değer probleminin en az bir pozitif çözümünün varlığını Krasnosel'skii Sabit Nokta Teoremi yardımıyla göstereceğiz. Öncelikle;

$(H4)$ $f\in C\left([a,\infty)_{\mathbb{T}}\times[0,\infty)\times[0,\infty),[0,\infty)\right)$

koşulunun sağlandığını kabul edelim ve

$$J=\left(\int_a^{\infty} h(s)\nabla s\right) \tag{3.5}$$

sabitini tanımlayalım.

Teorem 3.3.1: (Krasnosel'skii 1964) B bir Banach uzayı ve $P\subset B$ bir koni olsun. Ω_1 ve Ω_2, B nin açık ve sınırlı alt kümeleri ve $0\in\Omega_1$ ile $\overline{\Omega_1}\subset\Omega_2$ olsun.

$A:P\cap\left(\overline{\Omega_2}\setminus\Omega_1\right)\to P$ tamamen sürekli operatörü,

i) $u\in P\cap\partial\Omega_1$ için $\|Au\|\le\|u\|$; $u\in P\cap\partial\Omega_2$ için $\|Au\|\ge\|u\|$

ii) $u\in P\cap\partial\Omega_1$ için $\|Au\|\ge\|u\|$; $y\in P\cap\partial\Omega_2$ için $\|Au\|\le\|u\|$

koşullarından birini sağlıyor ise, A operatörünün $P\cap\left(\overline{\Omega_2}\setminus\Omega_1\right)$ kümesinde en az bir sabit noktası vardır.

Teorem 3.3.2: Kabul edelim ki $(H1)$, $(H2)$ ve $(H4)$ koşulları sağlansın.

i) $(t,u,v)\in[a,\infty)_{\mathbb{T}}\times[0,r]\times[0,r]$ olduğunda;

$$f\left(t,(1+t)u,v\right)\le\left(\frac{1}{JM}-\frac{1}{J}\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\left(1+\eta_i\right)\right)v \quad \text{veya}$$

$$f\left(t,(1+t)u,v\right)\le\left(\frac{1}{JM}-\frac{1}{J}\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\left(1+\eta_i\right)\right)u\,;$$

ii) $(t,u,v)\in[a,\infty)_{\mathbb{T}}\times[0,R]\times[0,R]$ olduğunda;

$$f\left(t,(1+t)u,v\right)\ge\frac{M}{J}v(a)\,;$$

olacak şekilde $0<r<R<\infty$ sayılarının var olduğunu kabul edelim. O halde (3.1) sınır değer probleminin en az bir pozitif çözümü vardır.

İspat: P konisini (3.3) deki gibi tanımlamıştık. Lemma 3.2.3 gereğince $A:P\to P$ tamamen süreklidir.

$\Omega_1 = \{u \in P : \|u\| < r\}$ alalım. $u \in P \cap \partial\Omega_1$ ise Lemma 3.2.2 den,

$$
\begin{aligned}
\|Au\| &= \max\left\{\|Au\|_1, \left\|(Au)^\Delta\right\|_\infty\right\} \\
&\le M \sup_{t\in[a,\infty)_{\mathbb{T}}} \left|(Au)^\Delta(t)\right| \\
&\le M\left(\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i r(1+\eta_i) + \int_a^\infty h(s)\, f\left(s,u(s),u^\Delta(s)\right)\nabla s\right) \\
&\le M\left[\|u\|\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i(1+\eta_i) + \left(\frac{1}{JM} - \frac{1}{J}\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i(1+\eta_i)\right)\left\|u^\Delta\right\|_\infty \int_a^\infty h(s)\nabla s\right] \\
&\le M\|u\|\frac{1}{M} \\
&= \|u\|
\end{aligned}
$$

veya $f\left(t,(1+t)u,v\right) \le \left(\frac{1}{JM} - \frac{1}{J}\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i(1+\eta_i)\right)u$ şartından,

$$
\begin{aligned}
\|Au\| &\le M\left[\|u\|\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i(1+\eta_i) + \left(\frac{1}{JM} - \frac{1}{J}\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i(1+\eta_i)\right)\|u\|_1 \int_a^\infty h(s)\nabla s\right] \\
&\le M\|u\|\frac{1}{M} \\
&= \|u\|
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece, $u \in P \cap \partial\Omega_1$ için $\|Au\| \le \|u\|$ olur.

İkinci olarak $\Omega_2 = \{u \in P : \|u\| < R\}$ şeklinde tanımlayalım. $u \in P \cap \partial\Omega_2$ için,

$$
\begin{aligned}
\|Au\| &= \max\left\{\|Au\|_1, \left\|(Au)^\Delta\right\|_\infty\right\} \ge \left\|(Au)^\Delta\right\|_\infty \\
&= \sum_{i=1}^{m-2}\beta_i u(\eta_i) + \int_a^\infty h(s)\, f\left(s,u(s),u^\Delta(s)\right)\nabla s \\
&\ge \int_a^\infty h(s)\, f\left(s,u(s),u^\Delta(s)\right)\nabla s \\
&\ge \frac{M}{J}u^\Delta(a)\left(\int_a^\infty h(r)\nabla r\right) \\
&= M\left\|u^\Delta\right\|_\infty \\
&\ge \|u\|
\end{aligned}
$$

elde edilir. Yani, $y \in P \cap \partial\Omega_2$ için $\|Au\| \geq \|u\|$ olur.

Böylece Teorem 3.3.1 (i) koşulundan, $r \leq \|u\| \leq R$ olacak şekilde A nın $P \cap \left(\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1\right)$ de sabit noktası vardır. Bu durumda, (3.1) sınır değer probleminin en az bir pozitif çözümü vardır.

3.4 Bir veya İki Pozitif Çözümün Varlığı

Bu bölümde (3.1) sınır değer probleminin bir veya iki pozitif çözümünün varlığını Lan (2001) ve Guo (1988) tarafından verilen ve Yaslan (2012) makalesinde çalışılmış olan bir lemma yardımıyla göstereceğiz.

Tanım 3.4.1: Öncelikle, $Rx = x$ olacak şekilde $R : X \to K$ bir sürekli dönüşümü var ise X in bu $K \neq \varnothing$ altkümesine X in retraktı denildiğini hatırlayalım.

X bir Banach uzayı, $K \subset X$ retraktı, $\Omega \subset K$ açık küme ve $f : \overline{\Omega} \to K$ kompakt ve $Fix(f) = \{x : f(x) = x\}$ olmak üzere $Fix(f) \cap \partial\Omega = \varnothing$ olsun. O zaman aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $i_K(f, \Omega)$ sabiti tanımlayabiliriz.

(a) $f(\overline{\Omega}) \in \Omega$ için $i_X(f, \Omega) = 1$ dir.

(b) $f : \Omega \to K$ sürekli bir fonksiyon ve $Fix(f)$, Ω nın kompakt altkümesi olsun. $Fix(f) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$ olmak üzere Ω_1 ve Ω_2, Ω nın ayrık açık altkümeleri olduğunda $i_K(f, \Omega) = i_K(f, \Omega_1) + i_K(f, \Omega_2)$ olur.

(c) G , $K \times [0,1]$ in açık altkümesi ve $F : G \to K$ sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca $Fix(F)$ in G nin kompakt altkümesi olduğunu kabul edelim. $G_t = \{x : (x,t) \in G\}$ ve $F_t = F(.,t)$ ise $i_K(F_0, G_0) = i_K(F_1, G_1)$ dir.

(d) $K_0 \subset K$, K nın bir retraktı ve $F(\overline{\Omega}) \subset K_0$ ise $i_K(F, \Omega) = i_{K_0}(F, \Omega \cap K_0)$ dır.

Lemma 3.4.1: (Lan 2001, Guo 1988) P , B Banach uzayında bir koni olsun. D , B nin açık ve sınırlı altkümesi olmak üzere

$$D_P = D \cap P \neq \varnothing \text{ ve } \overline{D_P} \neq P$$

sağlansın.

$A:\overline{D_P} \to P$ operatörünün kompakt ve $\forall u \in \partial D_P$ için $u \neq Au$ olduğunu kabul edelim. O zaman aşağıdaki koşullar sağlanır.

i) $u \in \partial D_P$ için $\|Au\| \leq \|u\|$ ise $i_P(A, D_P) = 1$ dir.

ii) $\forall u \in \partial D_P$ ve $\forall \lambda > 0$ için $u \neq Au + \lambda b$ olacak şekilde bir $b \in P \setminus \{0\}$ varsa $i_P(A, D_P) = 0$ dır.

iii) U , P nin içinde $\overline{U_P} \subset D_P$ şartını sağlayan açık küme olsun. Eğer $i_P(A, D_P) = 1$ ve $i_P(A, U_P) = 0$ ise A operatörünün $D_P \setminus \overline{U_P}$ de bir sabit noktası vardır. Aynı şekilde $i_P(A, D_P) = 0$ ve $i_P(A, U_P) = 1$ için de A operatörünün $D_P \setminus \overline{U_P}$ de bir sabit noktası vardır.

(3.3) de tanımlanan P konisi ve herhangi bir $r \in \mathbb{R}^+$ için konveks küme

$$P_r := \{u \in P : \|u\| < r\}$$

ile gösterilsin.

Lemma 3.2.2 de tanımlanan M için

$$\Omega_r := \left\{ u \in P : \min_{t \in [\eta_i, \infty)} \frac{u(t)}{1+t} < Mr ,\ \min_{t \in [\eta_i, \infty)} u^{\Delta}(t) < r \right\}$$

şeklinde tanımlansın.

Lemma 3.4.2: Ω_r kümesi aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i) Ω_r, P ye göre açıktır.

ii) $P_{Mr} \subset \Omega_r \subset P_r$ dir.

iii) $u \in \partial\Omega_r$ olması için gerek ve yeter şart $\min\limits_{t\in[\eta_i,\infty)} \dfrac{u(t)}{1+t} = Mr$ olmasıdır.

iv) $u \in \partial\Omega_r$ ise $t \in [\eta_i, \infty)$ için $Mr(1+t) \le u(t) \le r$ olur (Lan 2001).

Bu kısımda kullanmak üzere,

$$K = \int_{\eta_1}^{\infty} h(s)\nabla s \tag{3.6}$$

sabitini ve aşağıdaki notasyonları tanımlayalım;

$$f_{Mr}^{r} := \min\left\{ \min_{t\in[\eta_i,\infty)} \frac{f(t,u,v)}{r};\ u \in \left[0, Mr(1+\eta_1)\right], v \in [0,r] \right\}$$

$$f_0^{r} := \max\left\{ \max_{t\in[a,\infty)} \frac{f(t,u,v)}{r};\ u \in \left[0, \infty)\right], v \in [0,r] \right\}$$

Aşağıdaki iki lemmada f fonksiyonu için $i_P(A, P_r) = 1$ ve $i_P(A, \Omega_r) = 0$ olma koşulunu garantileyeceğiz.

Lemma 3.4.3: $f_0^r \le \dfrac{1 - M\sum_{i=1}^{m-2} \beta_i (1+\eta_i)}{MJ}$ ve $u \in \partial P_r$ için $u \ne Au$ ise $i_P(A, P_r) = 1$ dir.

İspat: $u \in \partial P_r$ ise $\|u\| = r$ dir. O zaman $0 \le \dfrac{u(t)}{1+t} \le r$ ve $0 \le u^{\Delta}(t) \le r$ olur.

$$\begin{aligned}
\|Au\| &\le M \sup_{t \in [a,\infty)_{\mathbb{T}}} \left| (Au)^{\Delta}(t) \right| \\
&= M \left(\sum_{i=1}^{m-2} \beta_i u(\eta_i) + \int_a^{\infty} h(s) f\left(s, u(s), u^{\Delta}(s)\right) \nabla s \right) \\
&\le M \left[r \sum_{i=1}^{m-2} \beta_i (1+\eta_i) + \frac{1 - M \sum_{i=1}^{m-2} \beta_i (1+\eta_i)}{MJ} r \int_a^{\infty} h(s) \nabla s \right] \\
&= Mr \sum_{i=1}^{m-2} \beta_i (1+\eta_i) + r - rM \sum_{i=1}^{m-2} \beta_i (1+\eta_i) \\
&= r \\
&= \|u\|
\end{aligned}$$

Yani; $\|Au\| \le \|u\|$ bulunur. O halde Lemma 3.4.1 (i) den $i_P(A, P_r) = 1$ dir.

Lemma 3.4.4: $\gamma - a + \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i = 1$ olmak üzere, $f_{Mr}^{r} \ge \dfrac{1+\eta_1}{\alpha_1 K}$ ve $u \in \partial \Omega_r$ için $u \ne Au$ sağlanırsa $i_P(A, \Omega_r) = 0$ dır.

İspat: $t \in [a, \infty)$ için $b(t) = 1$ alalım. O zaman $b \in \partial P_1$ dir. $u_0 = Au_0 + \lambda_0 b$ olacak şekilde $\lambda_0 > 0$ ve $u_0 \in \partial \Omega_r$ olduğunu kabul edelim.

$$\begin{aligned}
u_0(t) &= Au_0(t) + \lambda_0 b(t) \\
&\ge \alpha_1 \int_{\eta_1}^{\infty} h(s) f(s, u_0(s), u_0^{\Delta}(s)) \nabla s + \lambda_0 \\
&\ge \alpha_1 r \, f_{Mr}^{r} \int_{\eta_1}^{\infty} h(s) \nabla s + \lambda_0 \\
&\ge \alpha_1 r \frac{1+\eta_1}{\alpha_1 K} \int_{\eta_1}^{\infty} h(s) \nabla s + \lambda_0 \\
&= r(1+\eta_1) + \lambda_0
\end{aligned}$$

Buradan da $r(1+\eta_1) \ge r(1+\eta_1) + \lambda_0$ bulunur. Bu bir çelişkidir. Bu durumda $u_0 \in \partial \Omega_r$ ve $\lambda_0 > 0$ için $u_0 \ne Au_0 + \lambda_0 b$ dir. O halde Lemma 3.4.1 (ii) den $i_P(A, \Omega_r) = 0$ dır.

Teorem 3.4.1: $\gamma - a + \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i = 1$ olmak üzere aşağıdaki koşullardan biri sağlansın.

(C1) $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, $0 < c_1 < c_2 < c_3$ olmak üzere,

$$f_{Mc_1}^{c_1}, f_{Mc_3}^{c_3} \geq \frac{1+\eta_1}{\alpha_1 K} \quad , \quad f_0^{c_2} \leq \frac{1-\sum_{i=1}^{m-2} \beta_i (1+\eta_i)}{J} \text{ ve } u \in \partial P_{c_2} \text{ için } u \neq Au \text{ olur.}$$

(C2) $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, $0 < c_1 < c_2 < c_3$ olmak üzere,

$$f_0^{c_1}, f_0^{c_3} \leq \frac{1-\sum_{i=1}^{m-2} \beta_i (1+\eta_i)}{J}, \quad f_{Mc_2}^{c_2} \geq \frac{1+\eta_1}{\alpha_1 K} \text{ ve } u \in \partial\Omega_{c_2} \text{ için } u \neq Au \text{ olur.}$$

O zaman (3.1) sınır değer probleminin iki pozitif çözümü vardır.

İspat: İki koşulda da sağlandığını gösterelim.

1.Durum: (C1) in sağlandığını kabul edelim. A operatörünün $\partial\Omega_{c_1}$ veya $P_{c_2} \setminus \overline{\Omega_{c_1}}$ de sabit noktası olduğunu göstermeliyiz.

$u \in \partial\Omega_{c_1}$ için $u \neq Au$ ise Lemma 3.4.4 ten $i_P(A, \Omega_{c_1}) = 0$ dır.

$u \in \partial P_{c_2}$ için $u \neq Au$ ve $f_0^{c_2} \leq \frac{1-\sum_{i=1}^{m-2} \beta_i (1+\eta_i)}{J}$ olduğundan Lemma 3.4.3 ten $i_P(A, P_{c_2}) = 1$ dir.

Lemma 3.4.2 (ii) den ve $c_1 < c_2$ olduğundan $\overline{\Omega_{c_1}} \subset \overline{P_{c_1}} \subset P_{c_2}$ dir. Böylece Lemma 3.4.1 (iii) gereğince A operatörünün $P_{c_2} \setminus \overline{\Omega_{c_1}}$ de sabit noktası vardır.

$u \in \partial\Omega_{c_3}$ için $u \neq Au$ olduğunda Lemma 3.4.4 ten $i_P(A,\Omega_{c_3}) = 0$ olur. Lemma 3.4.2 (ii) den ve $c_2 < c_3$ olduğundan $\overline{P_{c_2}} \subset P_{Mc_3} \subset \Omega_{c_3}$ elde edilir. Lemma 3.4.1 (iii) den A operatörünün $\Omega_{c_3} \setminus \overline{P_{c_2}}$ de sabit noktası vardır.

2.Durum: (C2) nin sağlandığını kabul edelim. A operatörünün $\Omega_{c_2} \setminus \overline{P_{c_1}}$ de sabit noktası olduğunu gösterelim.

$u \in \partial P_{c_1}$ için $u \neq Au$ ise Lemma 3.4.3 ten $i_P(A,P_{c_1}) = 1$ dir.

$u \in \partial\Omega_{c_2}$ için $u \neq Au$ ve $f_{Mc_2}^{c_2} \geq \dfrac{1+\eta_1}{\alpha_1 K}$ olduğu için Lemma 3.4.4 ten $i_P(A,\Omega_{c_2}) = 0$ dır.

Lemma 3.4.2 (ii) den $P_{c_1} \subset P_{Mc_2} \subset \Omega_{c_2}$ dir. Şimdi $\overline{P_{c_1}} \subset \Omega_{c_2}$ olduğunu gösterelim. $u \in \overline{P_{c_1}}$ ise $\|u\| \leq c_1$ olur. $c_1 < c_2$ olduğundan $\|u\| < c_2$ ve $\min\limits_{t\in[\eta_i,\infty)} \dfrac{u(t)}{1+t} < \sup\limits_{t\in[a,\infty)} \dfrac{u(t)}{1+t} < c_2$ elde edilir. Bu da $\overline{P_{c_1}} \subset \Omega_{c_2}$ olduğunu gösterir. O halde Lemma 3.4.1 (iii) den A operatörünün $\Omega_{c_2} \setminus \overline{P_{c_1}}$ de sabit noktası vardır.

$u \in \partial P_{c_3}$ için $u \neq Au$ olduğunda Lemma 3.4.3 ten $i_P(A,P_{c_3}) = 1$ dir. Lemma 3.4.2 (ii) den $\Omega_{c_2} \subset P_{c_2} \subset P_{c_3}$ olur. $\Omega_{c_2} \subset P_{c_2}$ olduğundan $\overline{\Omega_{c_2}} \subset \overline{P_{c_2}}$ dir. $u \in \overline{\Omega_{c_2}}$ alırsak $u \in \overline{P_{c_2}}$ olur. $\|u\| \leq c_2 < c_3$ olduğu için $u \in P_{c_3}$ tür. Bu durumda $\overline{\Omega_{c_2}} \subset P_{c_3}$ olur. Böylece Lemma 3.4.1 (iii) den A operatörünün $P_{c_3} \setminus \overline{\Omega_{c_2}}$ de sabit noktası vardır.

Böylelikle her iki koşulda da (3.1) sınır değer probleminin iki pozitif çözümünün olduğunu göstermiş olduk.

Teorem 3.4.2: $\gamma - a + \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i = 1$ olmak üzere aşağıdaki koşullardan biri sağlansın.

(C3) $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $0 < c_1 < c_2$ için,

$$f_{Mc_1}^{c_1} \geq \frac{1+\eta_1}{\alpha_1 K} \text{ ve } f_0^{c_2} \leq \frac{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i(1+\eta_i)}{J}$$

(C4) $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $0 < c_1 < c_2$ için,

$$f_0^{c_1} \leq \frac{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i(1+\eta_i)}{J} \text{ ve } f_{Mc_2}^{c_2} \geq \frac{1+\eta_1}{\alpha_1 K}$$

O zaman (3.1) sınır değer probleminin bir pozitif çözümü vardır.

İspat: Burada (C3) koşulu (C1) e, (C4) koşulu (C2) ye eşittir.

Lemma 3.4.4 ten $u \in \partial\Omega_{c_1}$ için $u \neq Au$ ise $i_P(A, \Omega_{c_1}) = 0$ dır. Yine Lemma 3.4.3 ten $u \in \partial P_{c_2}$ için $u \neq Au$ ise $i_P(A, P_{c_2}) = 1$ dir. O halde Lemma 3.4.1 (iii) den A operatörünün $P_{c_2} \setminus \overline{\Omega_{c_1}}$ de sabit bir noktası vardır.

3.5 En Az İki Pozitif Çözümün Varlığı

Bu bölümde, (3.1) sınır değer probleminin en az iki pozitif çözümünün varlığını kanıtlamak için Avery-Henderson Sabit Nokta Teoremini kullanacağız.

Teorem 3.5.1: (Avery ve Henderson 2001) P, B Banach uzayında bir koni ve

$$P(\phi, b) = \{u \in P : \phi(u) < b\}$$

olsun. Ω ve ϕ, P üzerinde azalmayan, negatif olmayan sürekli fonksiyoneller ve θ P üzerinde $\theta(0) = 0$ koşulunu sağlayan, negatif olmayan sürekli fonksiyonel ise, $\forall u \in \overline{P(\phi, b)}$ için,

$$\phi(u) \leq \theta(u) \leq \Omega(u) \text{ ve } \|u\| \leq L\,\phi(u)$$

olacak şekilde b ve L pozitif sabitleri var olsun. $0 \le \lambda \le 1$ için $\theta(\lambda u) \le \lambda\theta(u)$ ve $u \in \partial P(\theta, c)$ olacak şekilde $d < c < b$ pozitif sayıları var olsun. Eğer tamamen sürekli $A : \overline{P(\phi, b)} \to P$ operatörü,

i) $\forall u \in \partial P(\phi, b)$ *için*, $\phi(Au) > b$;

ii) $\forall u \in \partial P(\theta, c)$ *için*, $\theta(Au) < c$;

iii) $P(\Omega, d) \ne \varnothing$ ve $\forall u \in \partial P(\Omega, d)$ için $\Omega(Au) > d$;

koşullarını sağlıyorsa, A nın $\Omega(u_1) > d$, $\theta(u_1) < c$ ve $\theta(u_2) > c$, $\phi(u_2) < b$ olacak şekilde en az iki u_1 ve u_2 sabit noktası vardır.

Teorem 3.5.2: $(H1)$, $(H2)$ ve $(H4)$ koşulları sağlansın ve $0 < d < c < b$ olacak şekilde, sırasıyla Lemma 3.2.2 ve (3.5) te tanımlanan M ve J değerleri için, f fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlasın.

i) $(t,u,v) \in [a,\infty)_{\mathbb{T}} \times [0, Mb] \times [0, b]$ için

$$f\left(t,(1+t)u,v\right) > \frac{b}{J};$$

ii) $(t,u,v) \in [a,\infty)_{\mathbb{T}} \times [0, c] \times [0, c]$ için

$$f\left(t,(1+t)u,v\right) < \frac{c}{M\,J}\left[1 - M\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i(1+\eta_i)\right];$$

iii) $(t,u,v) \in [a,\infty)_{\mathbb{T}} \times [0, d] \times [0, d]$ için

$$f\left(t,(1+t)u,v\right) > \frac{d}{J};$$

O halde, (3.1) impalsif sınır değer probleminin

$$\|u_1\| > d \ , \ \|u_1\| < c \text{ ve } \|u_2\| > c \ , \ u_2^{\Delta}(a) < b$$

olacak şekilde en az iki u_1 ve u_2 pozitif çözümü vardır.

İspat: P konisini (3.3), A operatörünü de (3.4) te tanımladığımız şekilde alalım. Lemma 3.2.3 gereğince $AP \subset P$ ve A nın tamamen sürekli olduğunu biliyoruz. P konisi üzerinde negatif olmayan, azalmayan ve sürekli fonksiyoneller ϕ, θ ve Ω aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\phi(u) = \|u^{\Delta}\|_{\infty} = u^{\Delta}(a)$$

$$\theta(u) = \|u\|$$

$$\Omega(u) = \|u\|$$

$u \in P$ için,

$$\phi(u) \leq \theta(u) = \Omega(u)$$

fonksiyonellerin tanımından elde edilir. Ayrıca, Lemma 3.2.2 den

$$\|u\| \leq M \|u^{\Delta}\|_{\infty} = Mu^{\Delta}(a) = M\phi(u)$$

olduğunu söyleriz. Ek olarak , $u \in P$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $\theta(0) = 0$ ve $\theta(\lambda y) = \lambda\theta(y)$ olur.

Şimdi, Teorem (3.5.1) in koşullarının sağlandığını gösterelim.

Eğer $u \in \partial P(\phi, b)$ ise, o zaman $\phi(u) = b$ dir. Böylece, $\forall t \in [a,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $0 \le u^{\Delta}(t) \le b$ ve Lemma 3.2.2 den $0 \le \dfrac{u(t)}{1+t} \le M\,b$ olur. (i) koşulundan ,

$$\begin{aligned}
\phi(Au) = \left\|(Au)^{\Delta}\right\|_{\infty} &= (Au)^{\Delta}(a) \\
&= \sum_{i=1}^{m-2} \beta_i u(\eta_i) + \int_a^{\infty} h(s)\, f\left(s, u(s), u^{\Delta}(s)\right) \nabla s \\
&\ge \int_a^{\infty} h(s)\, f\left(s, u(s), u^{\Delta}(s)\right) \nabla s \\
&> \frac{b}{J} \int_a^{\infty} h(s) = b
\end{aligned}$$

elde edilir. $\phi(Au) > b$ olduğundan Teorem 3.5.1 in (i) şartı sağlanmış olur.

İkinci olarak $u \in \partial P(\theta, c)$ ise, $\theta(u) = \|u\| = c$ dir. O zaman $t \in [a,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $0 \le u^{\Delta}(t) \le c$ ve $0 \le \dfrac{u(t)}{1+t} \le c$ olur. (ii) hipotezinden,

$$\begin{aligned}
\theta(Au) = \|Au\| \le M \left\|(Au)^{\Delta}\right\|_{\infty} & \\
&= M\left[\sum_{i=1}^{m-2} \beta_i u(\eta_i) + \int_a^{\infty} h(s)\, f\left(s, u(s), u^{\Delta}(s)\right) \nabla s\right] \\
&< M\left[c\sum_{i=1}^{m-2} \beta_i (1+\eta_i) + \frac{c}{M\,J}(1 - M\sum_{i=1}^{m-2} \beta_i (1+\eta_i)) \int_a^{\infty} h(s) \nabla s\right] \\
&= c
\end{aligned}$$

bulunur ve $\theta(Au) < c$ olduğundan Teorem 3.5.1 in (ii) şartı sağlanmış olur.

Son olarak da, $0 \in P(\Omega, d)$ ve $d > 0$ olduğundan $P(\Omega, d) \ne \varnothing$ yani $\Omega(0) = 0 < d$ dir. $u \in \partial P(\Omega, d)$ ise, $\Omega(u) = \|u\| = d$ olur. O halde $t \in [a,\infty)_{\mathbb{T}}$ için, $0 \le \dfrac{u(t)}{1+t} \le d$ ve $0 \le u^{\Delta}(t) \le d$ olur. Öyleyse (iii) hipotezinden,

$$\begin{aligned}\Omega(Au) = \|Au\| \geq \left\|(Au)^{\Delta}\right\|_{\infty} \\ = \sum_{i=1}^{m-2} \beta_i u(\eta_i) + \int_a^{\infty} h(s) f\left(s, u(s), u^{\Delta}(s)\right) \nabla s \\ \geq \int_a^{\infty} h(s) f\left(s, u(s), u^{\Delta}(s)\right) \nabla s \\ > \frac{d}{J}\left(\int_a^{\infty} h(s) \nabla s\right) = d\end{aligned}$$

elde edilir ve Teorem 3.5.1 in (iii) şartı da sağlanmış olur.

Teorem 3.5.1 in tüm şartları sağlandığından, (3.1) sınır değer problemimiz

$$\|u_1\| > d,\ \ \|u_1\| < c \text{ ve } \|u_2\| > c \text{ ve } u_2^{\Delta}(a) < b$$

olacak şekilde en az iki u_1 ve u_2 pozitif çözüme sahiptir.

3.6 En Az Üç Pozitif Çözümün Varlığı

Bu bölümde ise (3.1) impalsif sınır değer problemimizin en az üç pozitif çözümünün varlığını Beş Fonksiyonel Sabit Nokta Teoremini kullanarak inceleyeceğiz.

Tanım 3.6.1: α ve ψ , P üzerinde negatif olmayan, sürekli, konkav fonksiyoneller, ξ , ϕ ve θ ise P üzerinde negatif olmayan, sürekli, konveks fonksiyoneller olsun. Negatif olmayan p , q , r , x ve n sayıları için aşağıdaki kümeleri tanımlayalım;

$$P(\xi, q) = \{u \in P : \xi(u) < q\},$$

$$P(\xi, \alpha, x, q) = \{u \in P : x \leq \alpha(u), \xi(u) \leq q\},$$

$$Q(\xi, \phi, r, q) = \{u \in P : \phi(u) \leq r, \xi(u) \leq q\},$$

$$P(\xi,\theta,\alpha,x,p,q)=\{u\in P: x\le\alpha(u),\theta(u)\le p,\xi(u)\le q\},$$

$$Q(\xi,\phi,\psi,n,r,q)=\{u\in P: n\le\psi(u),\phi(u)\le r,\xi(u)\le q\}$$

Teorem 3.6.1: (Avery 1999) P, B Banach uzayı üzerinde bir koni, α ve ψ, P üzerinde negatif olmayan, sürekli, konkav fonksiyoneller, ξ, ϕ ve θ ise P üzerinde negatif olmayan, sürekli, konveks fonksiyoneller olsun. q ve z negatif olmayan iki sabit sayı olmak üzere $\forall u\in\overline{P(\xi,q)}$ için $\alpha(u)\le\phi(u)$ ve $\|u\|\le z\xi(u)$ eşitsizlikleri sağlansın. O halde $0<r<x$ olacak şekilde negatif olmayan p, r, x ve n sayıları için eğer tamamen sürekli

$$A:\overline{P(\xi,q)}\to\overline{P(\xi,q)}$$

operatörü,

i) $\{u\in P(\xi,\theta,\alpha,x,p,q):\alpha(u)>x\}\ne\varnothing$ ve $u\in P(\xi,\theta,\alpha,x,p,q)$ için $\alpha(Au)>x$ dir,

ii) $\{u\in Q(\xi,\phi,\psi,n,r,q):\phi(u)<r\}\ne\varnothing$ ve $u\in Q(\xi,\phi,\psi,n,r,q)$ için $\phi(Au)<r$ dir,

iii) $u\in P(\xi,\alpha,x,q)$ için $\theta(Au)>p$ iken $\alpha(Au)>x$ dir,

iv) $u\in Q(\xi,\phi,r,q)$ için $\psi(Au)<n$ iken $\phi(Au)<r$ dir,

koşullarını sağlıyorsa A operatörünün, $u_1,u_2,u_3\in\overline{P(\xi,q)}$ olmak üzere

$$\phi(u_1)<r,\ \alpha(u_2)>x,\ \phi(u_3)>r \text{ ve } \alpha(u_3)<x$$

eşitsizliklerini sağlayan en az üç u_1,u_2 ve u_3 pozitif çözümü vardır.

Teoremi uygularken kullanılmak üzere,

$$\lambda = \left(\int_{1/k}^{k} h(s)\nabla s \right) \tag{3.6}$$

tanımlansın. J yi (3.5) ile tanımlamıştık. $0 < k < \infty$, $\frac{1}{k} \in \mathbb{T}$ sabit, $n = 0$ ve $z = 1$ olmak üzere P üzerinde α ve ψ negatif olmayan, sürekli, konkav fonksiyonellerini ve ξ, β ve θ negatif olmayan, sürekli, konveks fonksiyonellerini

$$\alpha(u) = \frac{k}{k+1} \min_{t \in \left[\frac{1}{k}, \infty\right)_{\mathbb{T}}} u(t), \quad \xi(u) = \phi(u) = \theta(u) = \|u\|, \quad \psi(u) = 0 \tag{3.7}$$

şeklinde tanımlayalım.

Teorem 3.6.2: $(H1)$, $(H2)$, $(H3)$ ve $\gamma - a \geq 1$ şartlarının sağlandığını kabul edelim. $0 < r < x < q$ pozitif sayıları için f fonksiyonu,

i) $(t,u,v) \in \left[\frac{1}{k}, k\right]_{\mathbb{T}} \times \left[\frac{x}{k}, q\right] \times [0,q]$ için,

$$f\left(t,(1+t)u,v\right) > \frac{x(k+1)}{\lambda\left[k(\gamma - a)+1\right]} \text{ dir.}$$

ii) $\forall (t,u,v) \in [a,\infty)_{\mathbb{T}} \times [0,r] \times [0,r]$ için,

$$f\left(t,(1+t)u,v\right) < \frac{r}{JM}\left[1 - M\sum_{i=1}^{m-2} \beta_i (1+\eta_i)\right],$$

iii) $\forall (t,u,v) \in [a,\infty)_{\mathbb{T}} \times [0,q] \times [0,q]$ için,

$$f\left(t,(1+t)u,v\right) \leq \frac{q}{JM}\left[1 - M\sum_{i=1}^{m-2} \beta_i (1+\eta_i)\right],$$

şartlarını sağlıyorsa (3.1) sınır değer probleminin, $u_1, u_2, u_3 \in \overline{P(\xi, q)}$ olmak üzere

$$\|u_1\| \le r \ , \ \alpha(u_2) > x \, , \ \ r < \|u_3\| \text{ ve } \alpha(u_3) < x$$

eşitsizliklerini sağlayan en az üç u_1, u_2 ve u_3 pozitif çözümü vardır.

İspat: $\forall u \in \overline{P(\xi, q)}$ için (3.7) den,

$$\alpha(u) = \frac{k}{k+1} u(\frac{1}{k}) = \frac{u(\frac{1}{k})}{1+\frac{1}{k}} \le \sup_{t\in[a,\infty)} \frac{u(t)}{1+t} \le \|u\| = \phi(u)$$

Yani $\alpha(u) \le \phi(u)$ olur. Ayrıca $z = 1$ kabulü ile $\|u\| \le z\xi(u)$ olduğu açıktır.

Şimdi $A : \overline{P(\xi, q)} \to \overline{P(\xi, q)}$ olduğunu gösterelim. $u \in \overline{P(\xi, q)}$ ve $\forall t \in [a, \infty)_{\mathbb{T}}$ için, $\xi(u) = \|u\| \le q$ olduğundan,

$$0 \le \frac{u(t)}{1+t} \le q \text{ ve } 0 \le u^{\Delta}(t) \le q$$

dir. O halde,

$$\begin{aligned}
\xi(Au) = \|Au\| &\le M \left\| (Au)^{\Delta} \right\|_{\infty} \\
&= M \left[\sum_{i=1}^{m-2} \beta_i u(\eta_i) + \int_a^{\infty} h(s) f\left(s, u(s), u^{\Delta}(s)\right) \nabla s \right] \\
&< M \left[q \sum_{i=1}^{m-2} \beta_i (1+\eta_i) + \frac{q}{M\,J} (1 - M \sum_{i=1}^{m-2} \beta_i (1+\eta_i)) \int_a^{\infty} h(s) \nabla s \right] \\
&= q
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \xi(Au) \le q$$

bulunur. Bu durumda $A(u) \in \overline{P(\xi, q)}$ olur. Bu da $A : \overline{P(\xi, q)} \to \overline{P(\xi, q)}$ olduğunu kanıtlar. Ayrıca, Lemma 3.2.3 gereğince $A : \overline{P(\xi, q)} \to \overline{P(\xi, q)}$ operatörünün tamamen sürekli olduğunu söyleyebiliriz.

Şimdi Beş Fonksiyonel Sabit Nokta Teoremi'nin diğer koşullarının da sağlandığını gösterelim.

i) $t \in [a,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $u(t) = \dfrac{x+q}{2}(t+1) + \dfrac{x+q}{2}\left(\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i + \gamma - (a+1)\right)$ alırsak,

$u \in P$ olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\alpha(u) = \frac{k}{k+1}u(\frac{1}{k}) &= \frac{k}{k+1}\left[\frac{x+q}{2}(\frac{1}{k}+1) + \frac{x+q}{2}\left(\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i + \gamma - (a+1)\right)\right] \\
&\geq \frac{k}{k+1}\left(\frac{x+q}{2}(\frac{1}{k}+1)\right) \\
&= \frac{x+q}{2} > x
\end{aligned}$$

ve $\|u\| = \dfrac{x+q}{2} < q$ elde edilir. Yani, $\{u \in P(\xi,\theta,\alpha,x,p,q) : \alpha(u) > x\} \neq \varnothing$ dir.

$u \in P(\xi,\theta,\alpha,x,p,q)$ için $\alpha(u) > x$, $\theta(u) \leq p$ ve $\xi(u) \leq q$ olduğundan

$t \in \left[\dfrac{1}{k},k\right]_{\mathbb{T}}$ için, $\dfrac{x}{k} \leq \dfrac{1}{k+1}u\left(\dfrac{1}{k}\right) \leq \dfrac{u(t)}{k+1} \leq \dfrac{u(t)}{t+1} \leq q \Rightarrow \dfrac{x}{k} \leq \dfrac{u(t)}{t+1} \leq q$ ve $0 \leq u^{\Delta}(t) \leq q$

olur. (3.6) ve (i) koşulundan;

$$
\begin{aligned}
\alpha(Au) &= \frac{k}{k+1}(Au)\left(\frac{1}{k}\right)\\
&= \frac{k}{k+1}\Bigg[(\gamma-a)\int_a^{\frac{1}{k}} y(r)\nabla r + \int_a^{\frac{1}{k}} r y(r)\nabla r + (\gamma+\frac{1}{k}-a)\int_{\frac{1}{k}}^{\infty} y(r)\nabla r + (\gamma+\frac{1}{k}-a)\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i u(\eta_i)\\
&\qquad + \sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\left[\sum_{k=1}^{m-2}\beta_k u(\eta_k) + \int_{\eta_i}^{\infty} y(r)\nabla r\right] + \sum_{a<t_k<\frac{1}{k}} I_k\left(u(t_k)\right)\Bigg]\\
&\geq \frac{k}{k+1}\left[(\gamma+\frac{1}{k}-a)\int_{\frac{1}{k}}^{\infty} y(r)\nabla r\right]\\
&\geq \frac{k}{k+1}(\gamma+\frac{1}{k}-a)\left(\int_{1/k}^{k} h(s)\, f\left(s,u(s),u^{\Delta}(s)\right)\nabla s\right)\\
&> \frac{k}{k+1}(\gamma+\frac{1}{k}-a)\frac{x(k+1)}{\lambda\left[k(\gamma-a)+1\right]}\int_{1/k}^{k} h(s)\nabla s\\
&= x
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

Yani, $\alpha(Au) > x$ olup Teorem 3.6.1 in (i) koşulu sağlanır.

ii) $t \in [a,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $u(t) = \frac{r}{2}t + \frac{r}{2}\left(\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i + \gamma - a\right)$ alırsak, $u \in P$, $0 = \psi(u)$ ve $\|u\| = \frac{r}{2} < r < q$ olduğu açıktır. Böylece $\{u \in Q(\xi,\phi,\psi,n,r,q) : \phi(u) < r\} \neq \varnothing$ olduğunu söyleyebiliriz.

$u \in Q(\xi,\phi,\psi,n,r,q)$ için $\phi(u) = \|u\| < r$ ve $\xi(u) = \|u\| \leq q$ olur. Yani,

$$0 \leq \frac{u(t)}{1+t} \leq r \text{ ve } 0 \leq u^{\Delta}(t) \leq r \text{ dir.}$$

Lemma 3.2.2 ve (ii) koşulundan,

$$
\begin{aligned}
\phi(Au) &\le M \sup\left|(Au)^{\Delta}(t)\right| \\
&= M\left[\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i u(\eta_i)+\int_a^{\infty} h(s)\, f\left(s,u(s),u^{\Delta}(s)\right)\nabla s\right] \\
&< M\left[r\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i(1+\eta_i)+\frac{r}{M\,J}(1-M\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i(1+\eta_i))\int_a^{\infty} h(s)\nabla s\right] \\
&= r
\end{aligned}
$$

Yani, $\phi(Au) < r$ dir. Böylece Teorem 3.6.1 in (ii) koşulu gerçeklenir.

iii) $P(\xi,\alpha,x,q)=\left\{u\in P:\alpha(u)=\dfrac{k}{k+1}\min_{t\in\left[\frac{1}{k},\infty\right)_{\mathbb{T}}} u(t)\ge x,\ \xi(u)=\|u\|\le q\right\}$

olduğundan $u\in P(\xi,\alpha,x,q)$ için (3.8) gereğince $\alpha(Au)>x$ elde ederiz. Böylece Teorem 3.6.1 in (iii) koşulu da sağlanmış olur.

iv) Son olarak $\psi(Au)<n=0$ imkansız olduğundan Teorem 3.6.1 in (iv) şartını ihmal ederiz.

Böylece beş fonksiyonelli sabit nokta teoreminin tüm şartları sağlanmış olur. Bu durumda (3.1) sınır değer probleminin

$$
\|u_1\|<r\,,\ \frac{k}{k+1}\min_{t\in\left[\frac{1}{k},\infty\right)_{\mathbb{T}}} u_2(t)>x\,,\ \|u_3\|>r\,,\ \frac{k}{k+1}\min_{t\in\left[\frac{1}{k},\infty\right)_{\mathbb{T}}} u_3(t)<x
$$

olacak şekilde en az üç u_1,u_2 ve u_3 pozitif çözümü vardır.

Örnek 3.6.1: Zaman skalamız $\mathbb{T}=[0,4]\cup\{5,6\}\cup[7,\infty)$ olsun.

$$
f(t,(1+t)u,v)=\begin{cases}\dfrac{t}{1+t^2}(u^4+\dfrac{v}{3.10^4});\ u<1,\ v\ge 0,\ t\in\mathbb{T}\\[2ex] \dfrac{t}{1+t^2}(480+\dfrac{v}{3.10^4});\ u\ge 1,\ v\ge 0,\ t\in\mathbb{T}\end{cases} \tag{3.9}
$$

iken,

$$\begin{cases} u^{\Delta\nabla}(t)+\dfrac{1}{(1+t)^2}f\left(t,u(t),u^{\Delta}(t)\right)=0,\ t\in[0,\infty)_{\mathbb{T}} \\ u(a)-u^{\Delta}(a)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_i u^{\Delta}(\eta_i)=\dfrac{1}{10}u^{\Delta}\left(\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{10}u^{\Delta}\left(\dfrac{1}{3}\right), \\ u^{\Delta}(\infty)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i u(\eta_i)=\dfrac{1}{4}u(\dfrac{1}{2})+\dfrac{1}{3}u(\dfrac{1}{3}) \\ u\left(\dfrac{1}{3}^{+}\right)-u\left(\dfrac{1}{3}^{-}\right)=I_1\left(u\left(\dfrac{1}{3}\right)\right) \end{cases} \tag{3.10}$$

sınır değer problemini ele alalım. Burada $h(t)=\dfrac{1}{(1+t)^2}$, $a=0$, $\gamma=1$, $\alpha_1=\alpha_2=\dfrac{1}{10}$, $\eta_1=\dfrac{1}{2}$, $\eta_2=\dfrac{1}{3}$, $\beta_1=\dfrac{1}{4}$, $\beta_2=\dfrac{1}{3}$ ve $t_1=\dfrac{1}{3}$ olduğu görülür. Gerekli hesaplamalar yapıldığında $M=1,2$ ve $J\cong 0,9888$ olarak bulunur. $k=4$ alınırsa $\lambda=0,6$ olur.

$0<r<x<q$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde $r=0,1$, $x=4$, $q=3.10^5$ alalım.

Şimdi, Teorem 3.6.2 nin koşullarının sağlanıp sağlanmadığını kontrol edelim.

$(t,u,v)\in\left[\dfrac{1}{4},4\right]\times\left[1,\ 3.10^5\right]\times\left[0,\ 3.10^5\right]$ için;

$f(t,(1+t)u,v)\geq 7,059>6,667$ elde edilir. Böylece Teorem 3.6.2 nin (i) şartı sağlanmış olur.

$(t,u,v)\in[0,\infty)\times\left[0,\ \dfrac{1}{10}\right]\times\left[0,\ \dfrac{1}{10}\right]$ için;

$f(t,(1+t)u,v)\leq 0,000052<0,0014$ olur. Böylece Teorem 3.6.2 nin (ii) şartı da sağlanmış olur.

$(t,u,v)\in[0,\infty)\times\left[0,\ 3.10^5\right]\times\left[0,\ 3.10^5\right]$ için;

$u\in[0,1)$ iken; $f(t,(1+t)u,v)\leq 5,5<4.222$

$u\in\left[1,\ 3.10^5\right]$ iken; $f(t,(1+t)u,v)\leq 245<4.222$

bulunarak Böylece Teorem 3.6.2 nin (iii) koşulu da sağlanmış olur.

Bu durumda, (3.10) sınır değer probleminin,

$$\|u_1\| < 0,1 \text{ ve } \frac{4}{5}\min_{t\in\left[\frac{1}{4},\infty\right)_{\mathbb{T}}} u_2(t) > 4 \text{ ile } \|u_3\| > 0,1 \text{ ve } \frac{4}{5}\min_{t\in\left[\frac{1}{4},\infty\right)_{\mathbb{T}}} u_3(t) < 4$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde en az üç pozitif çözümü vardır.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında zaman skalası üzerinde lineer olmayan impalsif sınır değer problemi ele alınmıştır. Bu problemin önce, Krasnosel'skii Sabit Nokta Teoremi ile en az bir pozitif çözümünün varlığı, Lan ve Guo tarafından verilen bir lemma ile bir veya iki pozitif çözümün varlığı, Avery-Henderson Sabit Nokta Teoremi ile en az iki pozitif çözümünün varlığı ve Beş Fonksiyonel Sabit Nokta Teoremi ile de en az üç pozitif çözümünün varlığı için yeterli koşullar incelenmiştir.

5. KAYNAKLAR

Avery, R. I., “A generalization of the Leggett-Williams fixed point theorem”, *Math. Sci. Res. Hot-Line,* 3, 9-14, (1999).

Avery, R. I. and Henderson, J., “Two Positive Fixed Points of Nonlinear Operations on Ordered Banach Spaces”, *Commun. Appl. Nonlinear Anal.*, 8, 27-36, (2001).

Bohner, M. and Peterson, A., *Dynamic Equations on Time Scales: An Introductions With Applications,* Birkhauser, (2001).

Bohner, M. and Peterson, A. (Eds), *Advances in Dynamic Equations on Time Scales*, Birkhauser, (2003).

Deimling, K., *Nonlinear Functional Analysis*, New York: Springer, (1985).

Guo, D. and Lakshmikantham, V., *Nonlinear Problems in Abstract Cones,* San Diego: Academic Press, (1988).

Henderson, J., “Double solutions of impulsive dynamic boundary value problems on time scale”, *J. Difference Equ. Appl.*, 8, 345-356, (2002).

Hilger, S., “Analysis on measure chains-A unified approach to continuous and discrete calculus”, *Results Math.*, 18, 18-56, (1990).

Karaca, I. Y. and Tokmak, F., “Existence of thee positive solutions for m-point time scale boundary value problems on infinite intervals”, *Dynam. Systems Appl.*, 20, 355-368, (2011).

Krasnosel’skii, M., *Positive Solutions of Operator Equations*, Noordhoff, (1964).

Lan, K. Q., “Multiple positive solutions of semilinear differantial equations with sigularities”, *J. London Math. Soc*., 63, 690-704, (2001).

Liang, S., Zhang, J. and Wang, Z., “The existence of three positive solutions of m-point boundary value problems for some dynamic equations on time scales”, *Math. Comput. Modelling*, 49, 1386-1393, (2009).

Yaslan, I., "Higher order m-point boundary value problems on time scales", *Comput. Math. Appl.*, 63, 739-750, (2012).

Yaslan, I. and Haznedar, Z., "Existence of positive solutions for second-order impulsive time scale boundary value problems on infinite intervals", *Filomat*, 28, 2163-2173, (2014).

Zhao, X. and Ge, W., "Multiple positive solutions for time scale boundary value problems on infinite intervals", *Acta Appl. Math.*, 106, 265-273, (2009).

Zhao, X. and Ge, W., "Unbounded positive solutions for m-point time scale boundary value problems on infinite intervals", *J. Appl. Math. Comput.*, 33, 103-123, (2010).

6. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Esma TOZAK

Doğum Yeri ve Tarihi : Denizli 06.01.1988

Lisans Üniversite : Ege Üniversitesi

Elektronik posta : ebtozak@gmail.com

İletişim Adresi : Gerzele Mah. Hakkı Dereköylü Cad. No:20 Borazan Apt. D:4 Merkezefendi/ DENİZLİ