T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇİFT SERİ UZAYLARI VE CESÀRO ORTALAMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OKAN BODUR

DENİZLİ, MART - 2021

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇİFT SERİ UZAYLARI VE CESÀRO ORTALAMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OKAN BODUR

DENİZLİ, MART - 2021

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

OKAN BODUR

ÖZET

ÇİFT SERİ UZAYLARI VE CESÀRO ORTALAMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
OKAN BODUR
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. G. CANAN HAZAR GÜLEÇ)

DENİZLİ, MART - 2021

Bu tez dört ana bölümden oluşmaktadır. Giriş kısmı olan birinci bölümde, çift diziler ve serilerle ilgili literatürde yer alan bazı çalışmalardan bahsedilmiştir. İkinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanımlar ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, Mursaleen ve Başar'a (2014) ait olan Cesàro dönüşümleri sınırlı, Pringsheim manada yakınsak, Pringsheim manada sıfıra yakınsak, Pringsheim manada yakınsak ve sınırlı, regüler yakınsak, mutlak $q-$toplanabilen çift dizilerin $\widetilde{\mathcal{M}}_u$, $\widetilde{\mathcal{C}}_p$, $\widetilde{\mathcal{C}}_{0p}$, $\widetilde{\mathcal{C}}_{bp}$, $\widetilde{\mathcal{C}}_r$ ve $\widetilde{\mathcal{L}}_q$ uzaylarının özellikleri detaylı incelenmiş ve bu çalışmada yer alan matris karakterizasyonlarıyla ilgili teoremler detaylı incelenmiştir. Son bölüm olan dördüncü bölümde ise, birinci mertebeden Cesàro ortalamasını mutlak toplanabilme kavramıyla birleştirmek suretiyle tanımlanan $\left|C_{1,1}\right|_k$ (Sarıgöl 2020) mutlak çift seri uzayının $\mathcal{L}_k$ uzayı ile norm izomorfik olduğu ve Banach uzayı olduğu gösterilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Çift Diziler, Çift Seriler, Dört Boyutlu Matrislerin Etki Alanı, Matris Dönüşümleri, *p*-yakınsaklık, Cesàro Ortalaması, Mutlak Toplanabilme Metodu.

ABSTRACT

DOUBLE SERIES SPACES AND CESÀRO MEAN
MSC THESIS
OKAN BODUR
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATİCS
(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. G. CANAN HAZAR GÜLEÇ)

DENİZLİ, MARCH 2021

This thesis consists of four main chapters. In the first part, which is the introduction, some studies related to double sequences and series are mentioned. In the second chapter, some basic definitions and theorems that will be used in other chapters are given. In the third chapter, the properties of spaces $\widetilde{\mathcal{M}}_u$, $\widetilde{\mathcal{C}}_p$, $\widetilde{\mathcal{C}}_{0p}$, $\widetilde{\mathcal{C}}_{bp}$, $\widetilde{\mathcal{C}}_r$ and $\widetilde{\mathcal{L}}_q$ of double sequences whose Cesàro transforms are bounded, convergent in the Pringsheim's sense, null in the Pringsheim's sense, both convergent in the Pringsheim's sense and bounded, regularly convergent, absolutely $q-$ summable, respectively, and theorems related to matrix characterizations, which are defined and examined by Mursaleen and Başar (2014), are studied in detail. In the fourth chapter, which is the last chapter, it is shown that the absolutely double series space $\left|C_{1,1}\right|_k$ (Sarıgöl 2020) defined by combining the first order Cesàro mean with the concept of absolute summability is norm isomorphic to the space $\mathcal{L}_k$, and is Banach space.

KEYWORDS: Double Sequences, Double Series, Matrix Domain of Four-Dimensional Matrices, Matrix Transformations, *p*-convergence, Cesàro Means, Absolute Summability Method.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET i
ABSTRACT ii
İÇİNDEKİLER iii
SEMBOL LİSTESİ iv
ÖNSÖZ vi
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL KAVRAMLAR 3
3. BAZI ÇİFT DİZİ UZAYLARINDA BİRİNCİ MERTEBEDEN CESÀRO ORTALAMASININ MATRİS ETKİ ALANI 11
3.1 $\widetilde{\mathcal{M}}_u$, $\widetilde{\mathcal{C}}_p$, $\widetilde{\mathcal{C}}_{0p}$, $\widetilde{\mathcal{C}}_{bp}$, $\widetilde{\mathcal{C}}_r$ **ve** $\widetilde{\mathcal{L}}_q$ **Çift Dizi Uzayları** 14
3.2 Çift Dizi Uzaylarının Alfa- ve Beta- Dualleri 18
3.3 Dört Boyutlu Matrislerin Bazı Sınıflarının Karakterizasyonu 31
4. ÇİFT SERİ UZAYLARI VE CESÀRO ORTALAMASI 36
5. SONUÇ VE ÖNERİLER 48
6. KAYNAKLAR 49
7. ÖZGEÇMİŞ 52

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
c	Yakınsak dizilerin uzayı
c_0	Sıfıra yakınsak dizilerin uzayı
ℓ_k	Mutlak k - yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
Ω	$\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı tüm çift dizilerin uzayı
$\mathcal{M}_u$	Sınırlı çift dizilerin uzayı
$\widetilde{\mathcal{M}}_u$	Tüm Cesàro sınırlı çift dizilerin uzayı
$\mathcal{C}_p$	Pringsheim manada yakınsak çift dizilerin uzayı
$\mathcal{C}_r$	Regüler yakınsak çift dizilerin uzayı
$\mathcal{C}_{bp}$	Sınırlı ve Pringsheim manada yakınsak çift dizilerin uzayı
$\mathcal{C}_{p0}$	Pringsheim manada sıfıra yakınsak çift dizilerin uzayı
$\mathcal{C}_{bp0}$	Sınırlı ve Pringsheim manada sıfıra yakınsak çift dizilerin uzayı
$\tilde{\mathcal{C}}_{bp}$	Tüm Cesàro yakınsak ve sınırlı çift dizilerin uzayı
$\tilde{\mathcal{C}}_r$	Cesàro regüler yakınsak dizilerin uzayı
$\tilde{\mathcal{C}}_p$	Tüm Pringsheim manada Cesàro yakınsak çift dizilerin uzayı
$\tilde{\mathcal{C}}_{0p}$	Tüm Pringsheim manada sıfıra Cesàro yakınsak çift dizilerin uzayı
$\boldsymbol{\mathcal{L}}_u$	Mutlak yakınsak seri oluşturan çift dizilerin uzayı
$\boldsymbol{\mathcal{L}}_k$	Mutlak $k-$toplanabilir çift dizilerin uzayı, $(0 < k < \infty)$

BS	Kısmi toplamları sınırlı olan çift serilerin uzayı
$\mathcal{CS}_p$	Kısmi toplamları Pringsheim manada yakınsak olan çift serilerin uzayı
$\mathcal{CS}_r$	Kısmi toplamları regüler yakınsak olan çift serilerin uzayı
$\vartheta-\lim$	Çift dizinin $\vartheta-$yakınsaklığa göre limiti
$\vartheta-$yakınsak	ϑ manada yakınsaklık
λ^{α}	λ çift dizi uzayının $\alpha-$duali
$\lambda^{\beta(\vartheta)}$	λ çift dizi uzayının $\beta(\vartheta)-$duali
$(\lambda:\mu)$	λ uzayından μ uzayına tüm matrislerin sınıfı

ÖNSÖZ

Bu tezin tamamlanması için geçen sürede birçok kişinin desteğini gördüm. İlk olarak bilgi ve birikimlerini benimle paylaşarak zaman ayıran danışman hocam Doç. Dr. G. Canan HAZAR GÜLEÇ'e tüm emekleri için teşekkür ederim. Tezime ilişkin değerli önerilerini esirgemeyen hocalarım Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL ve Doç. Dr. Merve İLKHAN KARA'ya katkılarından dolayı teşekkür ederim.

Tezimin hazırlanması aşamasında değerli fikir ve önerilerini sunan çok kıymetli dostum Dr. Çağlayan NEHİR'e teşekkürlerimi sunuyorum.

Hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen başta sevgili annem Hanife BODUR'a, sevgili babam Mehmet BODUR'a, sevgili ağabeyim Serkan BODUR ve eşi Zeynep YILMAZ BODUR'a çok teşekkür ederim.

Son teşekkürüm ise içinde bulunduğum her faaliyette olduğu gibi tezimi yazdığım süre boyunca da beni yüreklendiren, varlığıyla bana destek olan, zaman zaman motivasyonumu kaybetsem de bana olan inancını yitirmeyen çok değerli eşim, kıymetlim Dr. Nursel DURMAZ BODUR'a.

1. GİRİŞ

Çift dizi ve çift seriler teorisi tek veya alışılmış dizilerin bir genellemesi olarak ortaya çıkmıştır. Çift dizilerde Pringsheim manada yakınsaklık kavramı ilk olarak Pringsheim (1900) tarafından verildi. Pringsheim manada tüm yakınsak çift dizilerin uzayı $\mathcal{C}_p$ ile gösterilir. Tek dizilerin aksine Pringsheim manada yakınsaklık bu dizinin sınırlılığını gerektirmemektedir. Hardy (1916-1919) ise bu boşluğu tamamlayarak bir çift dizi için Pringsheim manada limitinin mevcut olmasına ek olarak tek taraflı limitleri mevcut olduğu anlamında regüler yakınsaklık tanımını vermiştir.

Son yıllarda yayınlanan önemli sayıda çalışma çeşitli bakış açılarından çift dizileri incelemektedir. Araştırmadaki bazı sonuçlar tek veya alışılmış dizilerle ilgili bilinen sonuçların belirli çift dizi sınıflarına ilişkin genellemeleridir, diğer sonuçlar ise Pringsheim manada yakınsaklık ve regüler yakınsaklık ile ilgilidir. Kojima (1922), Robison (1926) ve Hamilton (1936) gibi yazarlar Pringsheim manada yakınsaklık ve regüler yakınsaklık ile ilgili çalışma yapanlar arasında bulunur.

Çift dizi uzayları ile ilgili bazı çalışmalardan bahsedelim. Jardas ve Sarapa (1991), çift dizilerin toplanabilirliğini iki tek dizinin koordinatsal çarpımı şeklinde ifade ederek incelediler. Móricz (1991), c ve c_0 tek dizi uzaylarına karşılık gelen Pringsheim manada yakınsak $\mathcal{C}_p$, Pringsheim manada sıfıra yakınsak $\mathcal{C}_{p0}$ ve regüler manada yakınsak $\mathcal{C}_r$ çift dizi uzaylarının bazı özelliklerini inceledi. Zeltser (2001) doktora tezinde, temel olarak hem çift dizi uzaylarının topolojik özelliklerini hem de çift dizilerin toplanabilme teorisini inceledi. Móricz ve Rhoades (1988), çift diziler için hemen hemen yakınsaklık kavramının tanımını vererek hemen hemen yakınsak çift dizilerin $\mathcal{C}_f$ uzayını tanımladılar. Mursaleen (2004) ile Mursaleen ve Edely (2003, 2004) çift diziler için istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy tanımını verdiler ve istatistiksel yakınsak ile kuvvetli Cesàro toplanabilir çift diziler arasındaki ilişkiyi incelediler.

Gökhan ve Çolak (2004, 2005), $t = (t_{kl})$ pozitif reel sayıların bir dizisi olmak üzere $\mathcal{M}_u(t), \mathcal{C}_p(t)\ ve\ \mathcal{C}_{bp}(t)$ tam paranormlu çift dizi uzaylarını inşa ettiler ve $\mathcal{M}_u(t)$ ve $\mathcal{C}_{bp}(t)$ uzaylarının $alfa-, beta\ -$ve $gama\ -$ duallerini belirlediler.

Altay ve Başar (2005), sırasıyla kısmi toplamlar dizisi $\mathcal{M}_{u,}$ $\mathcal{M}_u(t)$, $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{C}_{bp}$, $\mathcal{C}_r$ ve $\mathcal{L}_u$ da bulunan çift serilerin BS , $BS(t)$, CS_p, CS_{bp}, CS_r ve BV uzaylarını tanımladılar ve bu uzayların bazı özelliklerini incelediler. Ayrıca BS, BV ve CS_p çift seri uzaylarının $alfa-$ duallerini ve CS_{bp}ve CS_r çift seri uzaylarının $\beta(\vartheta)-$ duallerini belirlediler.

Başar ve Sever (2009), mutlak $q-t$oplanabilen tek dizilerin iyi bilinen ℓ_q uzayına karşılık gelen ve Banach uzayı olan $\mathcal{L}_q$ çift dizi uzayını tanımladı ve $\mathcal{L}_q$ uzayının bazı özelliklerini belirlediler. Ayrıca bu uzayın $\beta(\vartheta)-$ dual uzayını belirlediler ve $\mathcal{L}_q$ uzayının $alfa-$ ve $gama-$ duallerinin $\beta(\vartheta)-$ duali ile çakıştığını tespit ettiler.

Mursaleen ve Başar (2014), birinci mertebeden Cesàro dönüşümü sırasıyla sınırlı olan $\widetilde{\mathcal{M}}_u$, Pringsheim manada yakınsak olan $\widetilde{\mathcal{C}}_{\mathrm{p}}$, Pringsheim manada sıfıra yakınsak olan $\widetilde{\mathcal{C}}_{0p}$, hem Pringsheim manada yakınsak hem de sınırlı olan $\widetilde{\mathcal{C}}_{bp}$, regüler manada yakınsak olan $\widetilde{\mathcal{C}}_r$ ve mutlak $q-t$oplanabilen $\widetilde{\mathcal{L}}_q$ çift dizi uzaylarını tanımladılar. Ayrıca, bu uzayların bazı topolojik özelliklerini incelediler ve bazı matris sınıflarını karakterize ettiler.

Bu tez çalışmasında ise Mursaleen ve Başar (2014) tarafından tanımlanan $\widetilde{\mathcal{M}}_u$, $\widetilde{\mathcal{C}}_p$, $\widetilde{\mathcal{C}}_{0p}$, $\widetilde{\mathcal{C}}_{bp}$, $\widetilde{\mathcal{C}}_r$ ve $\widetilde{\mathcal{L}}_q$ uzayları detaylı incelenmiştir. Daha sonra ise birinci mertebeden Cesàro ortalamasını Sarıgöl (2010) tarafından tanımlanan mutlak toplanabilme kavramıyla birleştirmek suretiyle tanımlanan $\left|C_{1,1}\right|_k$ (Sarıgöl 2020) mutlak çift seri uzayının $\mathcal{L}_k$ uzayı ile norm izomorfik olduğu ve bu uzayın bir Banach uzayı olduğu gösterilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde; daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanımlar, kavramlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1 X boş olmayan bir küme ve $\mathcal{F}$ reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$$+ : X \times X \longrightarrow X$$
$$(x, y) \longrightarrow x + y$$

$$. : \mathcal{F} \times X \longrightarrow X$$

$$(\alpha, x) \longrightarrow \alpha x$$

ikili işlemleri her $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ ve her $x, y, z \in X$ için aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X kümesine $\mathcal{F}$ cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir.

i) $x + y = y + x$,

ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$,

iii) Her $x \in X$ için $x + \theta = \theta + x$ olacak şekilde bir tek $\theta \in X$ vardır,

iv) Her $x \in X$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde bir tek $(-x) \in X$ vardır,

v) $1. x = x$, $1 \in \mathcal{F}$,

vi) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,

vii) $(\alpha + \beta)\, x = \alpha x + \beta x$,

viii) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

X, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir lineer uzay ve M de X in bir alt kümesi olsun. Her $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ ve her $x, y \in M$ için $\alpha x + \beta y \in M$ ise M kümesine X in bir lineer alt uzayı denir (Maddox 1970).

Tanım 2.2 $X, \mathcal{F}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $\|.\| : X \to \mathbb{R}$; $x \to \|x\|$ fonksiyonu her x, $y \in X$ ve $\alpha \in \mathcal{F}$ için,

$i)$ $\|x\| \geq 0$,

ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

iii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,

iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen Eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir.

Tanım 2.3 $(X, \|.\|)$ normlu uzayında bir (x_n) dizisi verilsin ve $x \in X$ olsun. Eğer herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $\forall\, n > n_0$ için

$$\|x_n - x\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa (x_n) dizisi x noktasına yakınsaktır denir. Bu durumda

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \text{ veya } x_n \to x$$

ile gösterilir.

Tanım 2.4 $(X, \|.\|)$ normlu uzayında bir (x_n) dizisi verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için $n, m > n_0$ olduğunda

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\mathrm{n}_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.5 Bir $(X, \|.\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde içinde bir noktaya yakınsıyorsa, bu durumda $(X, \|.\|)$ normlu uzayına Banach uzayı (Tam normlu uzay) adı verilir (Maddox 1970).

Tanım 2.6 X ve Y, aynı $\mathcal{F}$ skaler cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. Bir

$$T : X \longrightarrow Y$$

dönüşümü her $x_1, x_2 \in X$ ve $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{F}$ için

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2)$$

şartını sağlıyorsa T'ye X uzayından Y uzayına bir lineer dönüşüm denir.

Aynı $\mathcal{F}$ cismi üzerinde tanımlı olan X ve Y lineer uzayları arasında $T : X \longrightarrow Y$ birebir ve örten bir T lineer dönüşümü varsa T dönüşümüne izomorfizm denir. Bu durumda X, Y uzaylarına lineer izomorfik uzaylar denir ve $X \cong Y$ ile gösterilir (Maddox 1970).

Tanım 2.7 $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi ve X boş olmayan herhangi küme olmak üzere

$$f : \quad \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow X$$

$$(m, n) \longrightarrow f(m, n) = x_{mn}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna $X -$ değerli bir çift dizi denir (Burkill ve Burkill 1980).

Herhangi bir $x = (x_{mn})$ çift dizisinin x_{mn} elemanlarını,

$$\begin{bmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} & \cdots & x_{0n} & \cdots \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & \cdots \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ x_{m0} & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}$$

şeklinde bir tablo olarak gösterebiliriz.

Ω ile kompleks (veya reel) terimli tüm çift dizilerin kümesi gösterilir. Bu durumda,

$$\Omega = \{x = (x_{mn}) : \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ için } x_{mn} \in \mathbb{C}\}$$

şeklinde ifade edilir. $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ ve $\forall\, x = (x_{mn}), y = (y_{mn}) \in \Omega$ için

$$x + y = (x_{mn} + y_{mn}) ,$$

$$\alpha x = (\alpha x_{mn})$$

çift dizilerin koordinatsal toplama ve skalar ile çarpma işlemleri altında Ω bir lineer uzaydır. Ω uzayının herhangi bir lineer alt uzayına ise çift dizi uzayı denir.

Tanım 2.8 $x = (x_{mn})$ kompleks terimli bir çift dizi olmak üzere

$$\sup_{m,n \in \mathbb{N}} |x_{mn}| < \infty$$

ise, x çift dizisine sınırlıdır denir (Móricz ve Rhoades 1988).

Bütün sınırlı çift dizilerin kümesi $\mathcal{M}_u$ ile gösterilir. Yani,

$$\mathcal{M}_u := \left\{x = (x_{mn}) \in \Omega : \|x\|_\infty = \sup_{m,n \in \mathbb{N}} |x_{mn}| < \infty\right\}$$

ile ifade edilir. $\mathcal{M}_u$ uzayı $\|x\|_\infty$ normu ile bir Banach uzayıdır (Móricz 1991).

Tanım 2.9 $x = (x_{mn})$ reel ya da kompleks terimli bir çift dizi olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda

$$|x_{mn} - l| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ doğal sayısı mevcut ise, bu durumda $x = (x_{mn})$ çift dizisine $l \in \mathbb{C}$ sayısına Pringsheim anlamında yakınsak, l değerine de $x = (x_{mn})$ dizisinin Pringsheim limiti denir. Pringsheim anlamında yakınsak bir $x = (x_{mn})$ dizisine kısaca p *-yakınsak* dizi denir ve limiti $p - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = l$ ile gösterilir (Pringsheim 1900). Pringsheim anlamında tüm yakınsak çift dizilerin uzayı $\mathcal{C}_p$ ile gösterilir, yani

$$\mathcal{C}_p := \{x = (x_{mn}) \in \Omega : \exists l \in \mathbb{C}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0 \ni |x_{mn} - l| < \varepsilon\}$$

ile ifade edilir. Pringsheim anlamında yakınsak bir çift dizi, sınırlı olmayabilir. Gerçekten, Boos (2000) dan eğer $x = (x_{mn})$ dizisi

$$x_{mn} := \begin{cases} n, & m = 0, \quad n \in \mathbb{N} \\ 0, & m \geq 1, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ile tanımlanırsa, bu durumda $p - lim\ x_{mn} = 0$ fakat $\|x\|_\infty = \infty$ olduğundan x dizisi Pringsheim anlamında yakınsaktır fakat sınırlı değildir, yani $x \in \mathcal{C}_p - \mathcal{M}_u$ dir. Bu nedenle, $\mathcal{C}_{bp}$ ile Pringsheim anlamında yakınsak ve sınırlı çift dizilerin uzayı gösterilir, yani

$$\mathcal{C}_{bp} := \left\{ x = (x_{mn}) \in \mathcal{C}_p : \|x\|_\infty = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} |x_{mn}| < \infty \right\} = \mathcal{C}_p \cap \mathcal{M}_u$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.10 $x = (x_{mn}) \in \mathcal{C}_p$ ve $p - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = l$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = \lim_{m\to\infty} x_{mn}$ ve her $m \in \mathbb{N}$ için $x_m = \lim_{n\to\infty} x_{mn}$ limitleri mevcut olan $x = (x_{mn})$ dizisine l noktasına regüler yakınsaktır denir ve regüler yakınsak bir $x = (x_{mn})$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} x_{mn}$ ve $\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} x_{mn}$ limitleri mevcut ve Pringsheim limitine eşittir. Regüler yakınsak çift dizilerin kümesi $\mathcal{C}_r$ gösterilir, yani

$$\mathcal{C}_r := \{x = (x_{mn}) \in \mathcal{C}_p : \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ için } (x_{mn})_m, (x_{mn})_n \in c\}$$

şeklinde ifade edilir. Burada c yakınsak tek dizi uzayını ve $(x_{mn})_n \in c$ ise m indisine göre yakınsaklığı gösterir.

Tanım 2.11 $x = (x_{mn})$ çift dizisini göz önüne alalım ve bu x dizisi aracılığıyla $s = (s_{mn})$ dizisini $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için

$$s_{mn} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_{ij}$$

ile tanımlayalım. Bu durumda (x,s) ikilisine çift seri denir. x_{mn} terimine serinin genel terimi, (s_{mn}) dizisine de serinin kısmi toplamlar dizisi denir.

Eğer (s_{mn}) kısmi toplamlar dizisi bir s sayısına $\vartheta-$ $yakınsak$, yani $\vartheta-\lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}x_{ij}=\vartheta-\lim_{m,n\to\infty}s_{mn}=s$ ise, bu durumda (x,s) serisi $\vartheta-$ $yakınsaktır$ denir ve $\vartheta-$ toplamı s sayısıdır. Yakınsak olmayan seriye ıraksak seri denir. Kısalık için tez boyunca $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}$ toplamını $\sum_{i,j}$ ile göstereceğiz.

Başar ve Sever (2009), tek indisli dizilerin mutlak $q-$toplanabilen ℓ_q uzayına karşılık gelen $\mathcal{L}_q$ çift dizi uzayını

$$\mathcal{L}_q:=\left\{x=(x_{ij})\in\Omega:\sum_{i,j}\left|x_{ij}\right|^q<\infty\right\},(1\le q<\infty)$$

ile tanımladı ve $\mathcal{L}_q$ uzayının $\|x\|_q=\left(\sum_{i,j}\left|x_{ij}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$ normu ile bir Banach uzayı olduğunu gösterdi.

Mutlak yakınsak seri oluşturan çift dizilerin uzayı ise

$$\mathcal{L}_u=\left\{x=(x_{ij})\in\Omega:\ \|x\|_1=\sum_{i,j}\left|x_{ij}\right|<\infty\right\}$$

ile gösterilir.

Tez boyunca λ ve μ uzayları sırasıyla $\vartheta_1-\lim:\lambda\to\mathbb{R}$ ve $\vartheta_2-\lim:\mu\to\mathbb{R}$ lineer yakınsama kurallarına göre yakınsayan iki çift dizi uzayı olsun. $A=(a_{mnkl})$ reel veya kompleks terimli dört boyutlu sonsuz matris olsun.

λ uzayının λ^{α} $alfa-$ duali ve $\lambda^{\beta(\vartheta)}$ $\vartheta-$yakınsaklığa bağlı olan beta duali sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.12 Bir λ çift dizi uzayının $\alpha-$ duali λ^{α},

$$\lambda^{\alpha} := \left\{ (a_{ij}) \in \Omega : \text{her } (x_{ij}) \in \lambda \text{ için} \sum_{i,j} |a_{ij}\, x_{ij}| < \infty \right\}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.13 $\vartheta \in \{p, bp, r\}$ olmak üzere $\vartheta -$ yakınsama kuralına göre λ çift dizi uzayının $\beta(\vartheta)$ duali $\lambda^{\beta(\vartheta)}$,

$$\lambda^{\beta(\vartheta)} := \left\{ (a_{ij}) \in \Omega : \text{ her } (x_{ij}) \in \lambda \text{ için } \vartheta - \sum_{i,j} a_{ij}\, x_{ij} \ mevcut \right\}$$

ile tanımlanır.

Kolayca görülebilir ki λ ve μ iki çift dizi uzayı için $\lambda \subset \mu$ olduğunda $\mu^{\alpha} \subset \lambda^{\alpha}$ ve $\lambda^{\alpha} \subset \lambda^{\gamma}$ kapsamaları sağlanır. Ayrıca bir çift serinin kısmi toplamlar dizisinin $\vartheta -$ yakınsaklığı onun sınırlılığını gerektirmediğinden $\lambda^{\beta(\vartheta)} \subset \lambda^{\gamma}$ kapsaması sağlanmazken $\lambda^{\alpha} \subset \lambda^{\beta(\vartheta)}$ kapsamasının sağlandığı bilinir.

Tanım 2.14 Bir dört boyutlu sonsuz $A = (a_{mnkl})$ matrisinin herhangi bir λ çift dizi uzayında ϑ yakınsaklık türüne göre matris etki alanı $\lambda_A^{(\vartheta)}$,

$$\lambda_A^{(\vartheta)} = \left\{ x = (x_{kl}) \in \Omega : Ax = \left(\vartheta - \sum_{k,l} a_{mnkl}\, x_{kl} \right)_{m,n \in \mathbb{N}} \text{ mevcut ve } Ax \in \lambda \right\}$$

ile tanımlanır.

Yukarıdaki notasyon yardımı ile söyleyebiliriz ki A matrisinin λ uzayından μ uzayı içine bir matris dönüşümü tanımlaması için gerek ve yeter şart her $x \in \lambda$ için Ax mevcut ve $Ax \in \mu$ olmasıdır. λ uzayından μ uzayı içine tüm dört boyutlu matris dönüşümlerinin kümesini $(\lambda: \mu)$ ile göstereceğiz.

Ayrıca $(\lambda: \mu; p)$ ifadesi ile $\forall\, x \in \lambda$ için

$$\vartheta_2 - \lim Ax = \vartheta_1 - lim\, x$$

koşulunu sağlayan $(\lambda:\mu)$ sınıfına ait tüm dört boyutlu (a_{mnkl}) matrislerinin sınıfı gösterilir.

Tez boyunca $\forall\, m,n,k,l \in \mathbb{N}$ için notasyonda kısalık olması için aşağıdakileri kullanacağız.

$$\Delta_{10}x_{mn} = x_{mn} - x_{m+1,n}\,,$$

$$\Delta_{01}x_{mn} = x_{mn} - x_{m,n+1}\,,$$

$$\Delta_{11}x_{mn} = \Delta_{01}(\Delta_{10}x_{mn}) = \Delta_{10}(\Delta_{01}x_{mn}),$$

$$\Delta_{10}^{kl}a_{mnkl} = a_{mnkl} - a_{mn,k+1,l}\,,$$

$$\Delta_{01}^{kl}a_{mnkl} = a_{mnkl} - a_{mnk,l+1}\,,$$

$$\Delta_{11}^{kl}a_{mnkl} = \Delta_{01}^{kl}\left(\Delta_{10}^{kl}a_{mnkl}\right) = \Delta_{10}^{kl}\left(\Delta_{01}^{kl}a_{mnkl}\right).$$

Tanım 2.15 $x = (x_i), y = (y_i) \in \ell_p$ olsun. $1 \leq p < \infty$ için

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliğine Minkowski eşitsizliği denir (Maddox 1970).

3. BAZI ÇİFT DİZİ UZAYLARINDA BİRİNCİ MERTEBEDEN CESÀRO ORTALAMASININ MATRİS ETKİ ALANI

Mursaleen ve Başar (2014) sırasıyla Cesàro dönüşümleri sınırlı, Pringsheim manada yakınsak, Pringsheim manada sıfıra yakınsak, Pringsheim manada yakınsak ve sınırlı, regüler yakınsak, mutlak $q-$toplanabilen çift dizilerin $\widetilde{\mathcal{M}}_u$, $\widetilde{\mathcal{C}}_p$, $\widetilde{\mathcal{C}}_{0p}$, $\widetilde{\mathcal{C}}_{bp}$, $\widetilde{\mathcal{C}}_r$ ve $\widetilde{\mathcal{L}}_q$ uzaylarını tanımladılar ve bu uzayların bazı özelliklerini incelediler. Ayrıca bu uzayların Banach uzayı olduklarını gösterdiler. $\widetilde{\mathcal{M}}_u$ uzayının $\alpha-$dualini, $\widetilde{\mathcal{C}}_r$ uzayının $\beta(bp)-$dualini ve $\widetilde{\mathcal{C}}_\eta$ çift dizi uzayının $\beta(\vartheta)-$dualini belirlediler, burada $\vartheta, \eta \in \{p, bp, r\}$ dir. Sonuç olarak, $\vartheta \in \{p, bp, r\}$ ve herhangi verilen bir μ çift dizi uzayı için $(\widetilde{\mathcal{C}}_{bp} : \mathcal{C}_\vartheta)$ ve $(\mu : \widetilde{\mathcal{C}}_\vartheta)$ dört boyutlu matris sınıflarını karakterize ettiler.

Bu bölümde Mursaleen ve Başar'ın (2014) bu çalışması detaylı olarak incelenmiştir ve verilen bazı teoremlerdeki ispat teknikleri öğrenilmiştir.

Birinci mertebeden $C = (c_{mnkl})$ Cesàro matrisi $\forall\, m, n, k, l \in \mathbb{N}$ için,

$$c_{mnkl} = \begin{cases} \dfrac{1}{(m+1)(n+1)}, & 0 \leq k \leq m, \quad 0 \leq l \leq n, \\ \quad 0 \quad , & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Tez boyunca her $m, n \in \mathbb{N}$ için, $x = (x_{mn})$ ve $y = (y_{mn})$ çift dizilerinin terimleri aşağıdaki eşitlikle birbiriyle bağıntılıdır.

$$y_{mn} = (Cx)_{mn} = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_{ij}\,.$$

Ayrıca, C matrisinin $C^{-1} = (d_{mnkl})$ ters matrisi basit bir hesaplama ile aşağıdaki gibi bulunur.

$$y_{mn} = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_{ij}$$

olduğundan

$$(m+1)(n+1)\, y_{mn} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_{ij} \tag{3.1}$$

yazılabilir. (3.1) eşitliğinde n yerine $(n-1)$yazılırsa,

$$(m+1)n\, y_{m,n-1} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n-1} x_{ij} \tag{3.2}$$

eşitliği elde edilir. (3.1) eşitliği ve (3.2) eşitliği kullanılarak

$$(m+1)(n+1)\, y_{mn} - (m+1)(n)\, y_{m,n-1} = \sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{j=0}^{n} x_{ij} - \sum_{j=0}^{n-1} x_{ij} \right)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafında bulunan

$$\sum_{j=0}^{n} x_{ij} - \sum_{j=0}^{n-1} x_{ij}$$

ifadesi için,

$$\sum_{j=0}^{n} x_{ij} = x_{i0} + x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{i,n-1} + x_{in}\,, \tag{3.3}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} x_{ij} = x_{i0} + x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{i,n-1} \tag{3.4}$$

olduğundan (3.3) ve (3.4) eşitlikleri kullanılarak

$$\sum_{j=0}^{n} x_{ij} - \sum_{j=0}^{n-1} x_{ij} = x_{in}$$

bulunur. Buradan

$$(m+1)(n+1)\, y_{mn} - (m+1)n\, y_{m,n-1} = \sum_{i=0}^{m} x_{in} \tag{3.5}$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki (3.5) eşitliğinde m yerine $(m-1)$ yazılırsa

$$m(n+1)\, y_{m-1,n} - mn\, y_{m-1,n-1} = \sum_{i=0}^{m-1} x_{in} \tag{3.6}$$

eşitliği elde edilir. (3.5) ve (3.6) eşitlikleri kullanılarak

$$(m+1)(n+1)\, y_{mn} - (m+1)n\, y_{m,n-1} - m(n+1)\, y_{m-1,n} + mn\, y_{m-1,n-1}$$
$$= x_{mn}$$

eşitliği elde edilir. Yani,

$$\sum_{k=m-1}^{m} \sum_{l=n-1}^{n} d_{mnkl}\; y_{kl} = x_{mn}$$

bulunur, burada $C^{-1} = (d_{mnkl})$ matrisi

$$d_{mnkl} = \begin{cases} (-1)^{k+l-(i+j)}\,(i+1)(j+1), & k-1 \le i \le k, l-1 \le j \le l \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile verilir.

Şimdi Mursaleen ve Başar'ın (2014) tanımladığı Cesàro sınırlı olan tüm çift dizilerin uzayı $\widetilde{\mathcal{M}}_u$, Pringsheim manada Cesàro yakınsak olan tüm çift dizilerin uzayı $\widetilde{\mathcal{C}}_{\mathrm{p}}$, Pringsheim manada sıfıra Cesàro yakınsak olan tüm çift dizilerin uzayı $\widetilde{\mathcal{C}}_{0p}$ ve mutlak $q-$toplanabilen tüm çift dizilerin kümesi olan $\widetilde{\mathcal{L}}_{\mathrm{q}}$ uzayını verelim.

$$\widetilde{\mathcal{M}}_u = \left\{ (x_{ij}) \in \Omega \;:\; \sup_{\mathrm{m,n}\in\mathbb{N}} \frac{1}{(m+1)(n+1)} \left| \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_{ij} \right| < \infty \right\},$$

$$\widetilde{\mathcal{C}}_p = \left\{ (x_{ij}) \in \Omega : \exists l \in \mathbb{C} \ni p - \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{(m+1)(n+1)} \left| \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_{ij} - l \right| = 0 \right\},$$

$$\widetilde{\mathcal{C}}_{0p} = \left\{ (x_{ij}) \in \Omega : p - \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{(m+1)(n+1)} \left| \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_{ij} \right| = 0 \right\},$$

$$\widetilde{\mathcal{L}}_q = \left\{ (x_{ij}) \in \Omega : \sum_{m,n} \left| \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_{ij} \right|^q < \infty \right\}, \qquad (1 \leq q < \infty).$$

$\widetilde{\mathcal{C}}_{bp}$ ve $\widetilde{\mathcal{C}}_r$ ile tüm Cesàro yakınsak ve sınırlı çift dizilerin kümesi ve tüm Cesàro regüler yakınsak çift diziler kümesi gösterilir. $\widetilde{\mathcal{M}}_u$, $\widetilde{\mathcal{C}}_p$, $\widetilde{\mathcal{C}}_{0p}$, $\widetilde{\mathcal{C}}_{bp}$, $\widetilde{\mathcal{C}}_r$,$\widetilde{\mathcal{L}}_q$ uzayları sırasıyla $\mathcal{M}_u$, $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{C}_{op}$, $\mathcal{C}_{bp}$,$\mathcal{C}_r$, $\mathcal{L}_q$ uzaylarında $C = (c_{mnkl})$ Cesàro matrisinin etki alanıdır.

3.1 $\widetilde{\mathcal{M}}_u$, $\widetilde{\mathcal{C}}_p$, $\widetilde{\mathcal{C}}_{0p}$, $\widetilde{\mathcal{C}}_{bp}$, $\widetilde{\mathcal{C}}_r$ ve $\widetilde{\mathcal{L}}_q$ Çift Dizi Uzayları

Bu bölümde, birinci mertebeden Cesàro dönüşümleri $\mathcal{M}_u$, $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{C}_{op}$, $\mathcal{C}_{bp}$,$\mathcal{C}_r$, $\mathcal{L}_q$ uzaylarında olan çift dizilerin $\widetilde{\mathcal{M}}_u$, $\widetilde{\mathcal{C}}_p$, $\widetilde{\mathcal{C}}_{0p}$, $\widetilde{\mathcal{C}}_{bp}$, $\widetilde{\mathcal{C}}_r$, $\widetilde{\mathcal{L}}_q$ uzayları ile ilgili Mursaleen ve Başar (2014) tarafından verilen bazı teoremler detaylı incelenmiştir.

Teorem 3.1 $\widetilde{\mathcal{M}}_u$, $\widetilde{\mathcal{C}}_p$, $\widetilde{\mathcal{C}}_{0p}$, $\widetilde{\mathcal{C}}_{bp}$, $\widetilde{\mathcal{C}}_r$ ve $\widetilde{\mathcal{L}}_q$ kümeleri koordinatsal toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre lineer uzaylardır ve $\widetilde{\mathcal{M}}_u$, $\widetilde{\mathcal{C}}_p$, $\widetilde{\mathcal{C}}_{0p}$, $\widetilde{\mathcal{C}}_{bp}$, $\widetilde{\mathcal{C}}_r$ ve $\widetilde{\mathcal{L}}_q$ uzayları

$$\|x\|_{\widetilde{\mathcal{M}}_u} = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(m+1)(n+1)} \left| \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_{ij} \right|$$

ve

$$\|x\|_{\widetilde{\mathcal{L}}_q} = \left[\sum_{m,n} \left| \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_{ij} \right|^q \right]^{\frac{1}{q}}, \qquad (1 \leq q < \infty),$$

normlarına göre Banach uzaylarıdır (Mursaleen ve Başar 2014).

İspat : Teoremin ilk kısmı açıktır. Ayrıca, $\widetilde{\mathcal{C}}_p$, $\widetilde{\mathcal{C}}_{0p}$, $\widetilde{\mathcal{C}}_{bp}$, $\widetilde{\mathcal{C}}_r$ ve $\widetilde{\mathcal{L}}_q$ uzayları için benzer ifadelerin tekrarından kaçınmak amacıyla sadece $\widetilde{\mathcal{M}}_u$ uzayı için teoremin ispatı verilmiştir.

Açıktır ki,

$$\|x\|_{\widetilde{\mathcal{M}}_u} = \|y\|_\infty$$

dur, burada $\|.\|_\infty$, $\mathcal{M}_u$ uzayı üzerinde normdur. Gerçekten,

$$\|x\|_{\widetilde{\mathcal{M}}_u} = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(m+1)(n+1)} \left| \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_{ij} \right| = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} |y_{mn}| = \|y\|_{\mathcal{M}_u} = \|y\|_\infty$$

dur.

$x^{(r)} = \left\{x_{jk}^{(r)}\right\}$, $\widetilde{\mathcal{M}}_u$ içinde bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $\left\{y^{(r)}\right\}_{r\in\mathbb{N}}$, $\mathcal{M}_u$ içinde bir Cauchy dizisidir, burada her $m, n, r \in \mathbb{N}$ için

$$y_{mn}^{(r)} = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_{ij}{}^{(r)}$$

dir. Bu durumda verilen her $\varepsilon > 0$ için bir $N = N(\varepsilon)$ pozitif tamsayısı vardır öyle ki her $r, s > N$ için

$$\left\|y^{(r)} - y^{(s)}\right\|_\infty = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left|y_{mn}^{(r)} - y_{mn}^{(s)}\right| < \varepsilon \tag{3.7}$$

dir. Böylece $\left|y_{mn}^{(r)} - y_{mn}^{(s)}\right| < \varepsilon$, yani $\left\{y_{mn}^{(r)}\right\}_{r\in\mathbb{N}}$ dizisi $\mathbb{C}$ içinde bir Cauchy dizisidir, ve dolayısıyla $\mathbb{C}$ içinde yakınsaktır.

$$\lim_{r\to\infty} y_{mn}{}^{(r)} = y_{mn} \tag{3.8}$$

diyelim. $y = (y_{mn})_{m,n=0}^{\infty}$ olsun. Bu durumda (3.7) ve (3.8) den

$$\left\|y - y^{(r)}\right\|_\infty = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left|y_{mn} - y_{mn}^{(r)}\right| < \varepsilon$$

Elde edilir. Şimdi, $y \in \mathcal{M}_u$ olduğunu göstermeliyiz. Her $r \in \mathbb{N}$ için $y^{(r)} = \{y_{mn}{}^{(r)}\}_{m,n=0}^{\infty} \in \mathcal{M}_u$ olduğundan öyle bir $K = K(r)$ pozitif sabiti vardır öyle ki $\left|y_{mn}^{(r)}\right| \leq K$ sağlanır. Ayrıca,

$$|y_{mn}| \leq \left|y_{mn} - y_{mn}^{(r)}\right| + \left|y_{mn}^{(r)}\right| \leq \varepsilon + K$$

elde edilir.

$m, n \in \mathbb{N}$ üzerinden supremum alınırsa

$$y = (y_{mn})_{m,n=0}^{\infty} \in \mathcal{M}_u$$

elde edilir, böylece

$$\|x\|_{\widetilde{\mathcal{M}}_u} = \|y\|_{\mathcal{M}_u}$$

olduğundan

$$x = (x_{jk}) \in \widetilde{\mathcal{M}}_u$$

bulunur. Böylece, $\widetilde{\mathcal{M}}_u$ tamdır.

Teorem 3.2 Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(i) $\mathcal{M}_u$ uzayı, $\widetilde{\mathcal{M}}_u$ uzayının alt uzayıdır.

(ii) $\mathcal{C}_p$ uzayı, $\widetilde{\mathcal{C}}_p$ uzayının alt uzayıdır.

(iii) $\mathcal{C}_{op}$ uzayı, $\widetilde{\mathcal{C}}_{0p}$ uzayının alt uzayıdır.

(iv) $\mathcal{C}_{bp}$ uzayı $\widetilde{\mathcal{C}}_{bp}$ uzayının alt uzayıdır.

(v) $\mathcal{C}_r$ uzayı, $\widetilde{\mathcal{C}}_r$ uzayının alt uzayıdır.

(vi) $\mathcal{L}_q$ uzayı, $\widetilde{\mathcal{L}}_q$ uzayının alt uzayıdır, $(1 \leq q < \infty)$ (Mursaleen ve Başar 2014).

İspat: İspatta tekrardan kaçınmak için sadece $\mathcal{C}_p \subset \widetilde{\mathcal{C}}_p$ ilişkisi verilmiştir. $C = (c_{mnkl})$ birinci mertebeden Cesàro matrisini göz önüne alalım ve $p-$

$\lim_{j,k\to\infty} x_{jk} = L$ ile $x = (x_{jk}) \in \mathcal{C}_p$ olsun. Bu durumda C matrisi RH regüler olduğundan,

$$y_{mn} = (Cx)_{mn}$$

olmak üzere

$$p - \lim_{m,n\to\infty} y_{mn} = L$$

olur. Böylece L limiti ile $x \in \widetilde{\mathcal{C}}_p$ 'dir. Yani, $\mathcal{C}_p \subset \widetilde{\mathcal{C}}_p$ 'dir.

Şimdi, kapsamanın kesin (tam) olduğunu görelim. Her k için $(j \in \mathbb{N})$, $x_{jk} = (-1)^{j+1}$ olacak şekilde $x = (x_{jk})$ tanımlansın. Yukarıda olduğu gibi x dizisinin 0 sayısına C −toplanabilir olduğu görülür. Böylece $x \in \widetilde{\mathcal{C}}_p$ olur fakat $x \notin \mathcal{C}_p$ 'dir. Bu ise ispatı tamamlar.

Diğer durumlar için uygun diziler seçilerek kolaylıkla ispat edilebilir.

Teorem 3.3 λ uzayı $\mathcal{M}_u$, $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{C}_{op}$, $\mathcal{C}_{bp}$, $\mathcal{C}_r$ ve $\mathcal{L}_q$ uzaylarından birini göstermek üzere, $\tilde{\lambda}$ uzayı lineer olarak λ uzayına izomorftur (Mursaleen ve Başar 2014).

İspat: Burada $\widetilde{\mathcal{M}}_u$ uzayının $\mathcal{M}_u$ uzayına lineer olarak izomorf olduğunu gösterelim. $\widetilde{\mathcal{M}}_u$ uzayından $\mathcal{M}_u$ uzayına,

$$x = (x_{jk}) \longrightarrow y = (y_{mn})$$

ile tanımlı T dönüşümünü göz önüne alalım. Yani,

$$T: \ x = (x_{jk}) \to Tx = y = (y_{mn}),$$

burada

$$y_{mn} = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} x_{ij}$$

olur. Açıktır ki T lineer ve birebirdir. Gerçekten,

$$Tx = \theta \Rightarrow x = \theta$$

dır, yani,

$$y_{mn} = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} x_{ij} = 0 \Rightarrow \forall\, i,j \text{ için } x_{ij} = 0$$

dır. Şimdi $x = (x_{jk})$ dizisini her $j,k \in \mathbb{N}$ için,

$$x_{jk} = (j+1)(k+1)y_{jk} - j(k+1)y_{j-1,k} - (j+1)ky_{j,k-1} + jky_{j-1,k-1} \quad (3.9)$$

ile tanımlayalım. Kabul edelim ki $y \in \mathcal{M}_u$ olsun. Bu durumda,

$$\|x\|_{\widetilde{\mathcal{M}}_u} = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(m+1)(n+1)} \left| \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_{ij} \right| = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} |y_{mn}| = \|y\|_\infty < \infty$$

olduğundan, (3.9) ile tanımlı $x = (x_{jk}) \in \widetilde{\mathcal{M}}_u$ bulunur. Böylece T örten ve norm koruyandır. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

3.2 Çift Dizi Uzaylarının Alfa- ve Beta- Dualleri

Bu bölümde $\widetilde{\mathcal{M}}_u$ uzayının alfa − duali , $\widetilde{\mathcal{C}}_r$ uzayının $\beta(bp)$ − duali ve $\vartheta, \eta \in \{p, bp, r\}$ olmak üzere $\tilde{\mathcal{C}}_\eta$ çift dizi uzayının $\beta(\vartheta)$ − duali verilmiştir (Mursaleen ve Başar 2014).

Bir çift dizi uzayının αlfa − duali tek olmasına rağmen onun βeta − duali ϑ − yakınsaklığına göre birden daha fazla olabilir.

Ayrıca, λ ve μ iki çift dizi uzayı için $\lambda \subset \mu$ olduğunda $\mu^\beta \subset \lambda^\beta$ kapsamasının sağlandığı kolayca görülebilir.

Teorem 3.4 $\widetilde{\mathcal{M}}_u$ uzayının αlfa − duali $\mathcal{L}_u$ uzayıdır (Mursaleen ve Başar 2014).

İspat: $x = (x_{kl}) \in \widetilde{\mathcal{M}}_u$ ve $z = (z_{kl}) \in \mathcal{L}_u$ olsun. Bu durumda, $y = (y_{kl}) \in \mathcal{M}_u$'dur. Böylece bir M pozitif sabiti vardır öyle ki her $k, l \in \mathbb{N}$ için $|y_{kl}| \leq M$ 'dir. Böylece, (3.9) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\sum_{k,l} |z_{kl}\, x_{kl}| = \sum_{k,l} \left| z_{kl} \sum_{i=k-1}^{k} \sum_{j=l-1}^{l} (-1)^{k+l-(i+j)}(i+1)(j+1)y_{ij} \right|$$

$$\leq M \sum_{k,l} \left| \sum_{i=k-1}^{k} \sum_{j=l-1}^{l} (-1)^{k+l-(i+j)}(i+1)(j+1)z_{kl} \right|$$

$$= M \sum_{k,l} |z_{kl}| < \infty,$$

bu ise, $z \in \widetilde{\mathcal{M}}_u^{\alpha}$ olduğunu söyler. Yani,

$$\mathcal{L}_u \subset \widetilde{\mathcal{M}}_u^{\alpha} \tag{3.10}$$

bulunur.

Tersine, kabul edelim ki $z = (z_{kl}) \in \widetilde{\mathcal{M}}_u^{\alpha}$ olsun. Bu durumda her $x = (x_{kl}) \in \widetilde{\mathcal{M}}_u$ için $\sum_{k,l} |x_{kl} z_{kl}| < \infty$ olur. Eğer $z \notin \mathcal{L}_u$ ise, bu durumda kesin artan (k_i),(l_j) dizileri vardır öyle ki her pozitif i, j tam sayıları için $\left| z_{k_i, l_j} \right| > (ij)^3$ olur. Eğer, $y = (y_{mn})$ dizisi

$$y_{mn} = \begin{cases} (ij)^{-2}, m = k_i \text{ ve } n = l_j \\ 0, \quad\quad m \neq k_i \text{ ve } n \neq l_j \end{cases} ; (i, j \in \{1,2,3 \ldots\}),$$

ile tanımlanırsa, bu durumda $y \in \mathcal{M}_u$ dur, gerçekten

$$\sup_{m,n} |y_{mn}| = \sup_{i,j} \left| y_{k_i, l_j} \right| = \sup_{i,j} |(ij)^{-2}| < \infty$$

dur, fakat

$$\sum_{k,l}|x_{kl}z_{kl}| = \sum_{k,l}\left|\sum_{i=k-1}^{k}\sum_{j=l-1}^{l}(-1)^{k+l-(i+j)}\ (i+1)(j+1)y_{ij}z_{kl}\right| = \infty\,.$$

Bu ise $z \notin \widetilde{\mathcal{M}}_u^{\alpha}$ anlamına gelir ki çelişki elde edilir. Böylece aşağıdaki kapsama sağlanır.

$$\widetilde{\mathcal{M}}_u^{\alpha} \subset \mathcal{L}_u. \tag{3.11}$$

(3.10) ve (3.11) birleştirilirse

$$\widetilde{\mathcal{M}}_u^{\alpha} = \mathcal{L}_u$$

elde edilir ki bu da istenendir.

Şimdi Altay ve Başar (2002, 2003) tarafından verilen tek indisli diziler için kullanılan teknik kullanılarak $\vartheta -$ yakınsaklığa göre uzayların $\beta -$ dualleri belirlenmiştir.

$\mathcal{C}_{bp}, \mathcal{C}_r$ ve $\mathcal{C}_p$ uzaylarından $\mathcal{C}_{bp}$ uzayı içine bir dört boyutlu matris dönüşümünün karakterizasyonu için aşağıdaki Lemmalar kullanılır (Hamilton 1936, Zeltser ve diğ. 2009).

Lemma 3.5 $A = (a_{mnjk})$ matrisinin $(\mathcal{C}_r : \mathcal{C}_{\vartheta})$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır:

$$\sup_{m,n\in\mathbb{N}}\sum_{j,k}|a_{mnjk}| < \infty \tag{3.12}$$

$$\exists (a_{jk}) \in \Omega \ni \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} a_{mnjk} = a_{jk}, (\forall j,k \in \mathbb{N} \text{ için}) \tag{3.13}$$

$$\exists v \in \mathbb{C} \ni \vartheta - \lim_{m,n\to\infty}\sum_{j,k} a_{mnkj} = v \tag{3.14}$$

$$\exists u^{k_0} \in \mathbb{C} \ni \vartheta - \lim_{m,n\to\infty}\sum_{j} a_{mnjk_0} = u^{k_0}, \qquad (\forall k_0 \in \mathbb{N} \text{ sabiti için})$$

$$\exists v_{j_0} \in \mathbb{C} \ni \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} \sum_k a_{mnj_0k} = v_{j_0}, (\forall j_0 \in \mathbb{N} \text{ sabiti için}) . \qquad (3.15)$$

(3.15) durumunda, $a = (a_{jk}) \in \mathcal{L}_u, (u^k), (\, v_j) \in \ell_1$ ve $\forall\, x = (x_{jk}) \in \mathcal{C}_r$ için

$$\vartheta - \lim_{m,n\to\infty} [Ax]_{m,n} = \sum_{j,k} a_{jk}\, x_{jk} + \sum_j \left(v_j - \sum_k a_{jk}\right) x_j + \sum_k \left(u^k - \sum_j a_{jk}\right) x^k$$

$$+ \left(v + \sum_{j,k} a_{jk} - \sum_j v_j - \sum_k u^k\right) r - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn}$$

dır.

Lemma 3.6 $A = (a_{mnjk})$ matrisinin $(\mathcal{C}_{bp} : \mathcal{C}_\vartheta)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart Lemma 3.5 teki (3.12), (3.13), (3.14) koşullarının ve aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır.

$$\vartheta - \lim_{m,n\to\infty} \sum_j \left|a_{mnjk_0} - a_{jk_0}\right| = 0, (\forall k_0 \in \mathbb{N} \text{ sabiti için})$$

$$\vartheta - \lim_{m,n\to\infty} \sum_k \left|a_{mnj_0k} - a_{j_0k}\right| = 0, (\forall j_0 \in \mathbb{N} \text{ sabiti için}). \qquad (3.16)$$

(3.16) durumunda, $a = (a_{jk}) \in \mathcal{L}_u$ ve $x = (x_{jk}) \in \mathcal{C}_{bp}$ için

$$\vartheta - \lim_{m,n\to\infty} [Ax]_{m,n} = \sum_{j,k} a_{jk}\, x_{jk} + \left(v - \sum_{j,k} a_{jk}\right) bp - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn}$$

dir.

Lemma 3.7 $A = (a_{mnjk})$ matrisinin $(\mathcal{C}_p : \mathcal{C}_\vartheta)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart Lemma 3.5 deki (3.12), (3.13), (3.14) koşullarının ve aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır.

$$\forall j \in \mathbb{N}\ \exists K \in \mathbb{N}\ \ni k > K \text{ ve } \forall m,n \in \mathbb{N} \text{ için } a_{mnjk} = 0 \text{ dır.}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists J \in \mathbb{N} \ni j > J \text{ ve } \forall m,n \in \mathbb{N} \text{ için } a_{mnjk} = 0 \text{ dır.} \qquad (3.17)$$

(3.17) durumunda, $a = (a_{jk}) \in \mathcal{L}_u$ ve $(a_{jk_0})_j$, $(a_{j_0k})_k \in \varphi$ $(j_0, k_0 \in \mathbb{N})$ ve her $x = (x_{jk}) \in \mathcal{C}_p$ için

$$\vartheta - \lim_{m,n\to\infty} [Ax]_{m,n} = \sum_{j,k} a_{jk}\, x_{jk} + \sum_{j} \left(v - \sum_{j,k} a_{jk} \right) p - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn}$$

sağlanır.

Teorem 3.8 Aşağıdaki kümeleri tanımlayalım.

$$D_1 = \left\{ a = (a_{jk}) \in \Omega : \sum_j \sum_k (j+1)(k+1)\left|\Delta_{11} a_{jk}\right| < \infty \right\},$$

$$D_2 = \left\{ a = (a_{jk}) \in \Omega : \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_j (k+1)(j+1)\left|\Delta_{10} a_{jk}\right| < \infty \right\},$$

$$D_3 = \left\{ a = (a_{jk}) \in \Omega : \sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_k (j+1)(k+1)\left|\Delta_{01} a_{jk}\right| < \infty \right\},$$

burada

$$\Delta_{01} a_{jk} = a_{jk} - a_{j,k+1}\,,$$

$$\Delta_{10} a_{jk} = a_{jk} - a_{j+1,k}$$

ve

$$\Delta_{11} a_{jk} = \Delta_{01}(\Delta_{10} a_{jk}) = a_{jk} - a_{j+1,k} - a_{j,k+1} + a_{j+1,k+1}$$

dır. Bu durumda

$$(\widetilde{\mathcal{C}_r})^{\beta(bp)} = D_1 \cap D_2 \cap D_3$$

olur (Mursaleen ve Başar 2014).

İspat: $x=(x_{jk})\in\widetilde{\mathcal{C}}_r$ olsun. Bu durumda $y=(y_{mn})\in\mathcal{C}_r$ dir. Aşağıdaki eşitliği göz önüne bulunduralım.

$$z_{mn}=\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}x_{jk}\,a_{jk}. \tag{3.18}$$

(3.18) eşitliğinde (3.9) eşitliği yerine yazılırsa,

$$z_{mn}=\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}a_{jk}\Big[(j+1)(k+1)y_{jk}-j(k+1)y_{j-1,k}-(j+1)ky_{j,k-1}+jky_{j-1,k-1}\Big]$$

olur. Dolayısıyla,

$$z_{mn}=\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}a_{jk}\,(j+1)(k+1)y_{jk}-\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}a_{jk}\,j(k+1)y_{j-1,k}-\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}a_{jk}(j+1)ky_{j,k-1}+\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}a_{jk}\,jky_{j-1,k-1}$$

elde edilir. Eğer yukarıdaki eşitlikte yer alan ifadeleri aşağıdaki gibi ayrı ayrı inceleyelim.

$$I=\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}a_{jk}\,(j+1)(k+1)y_{jk}$$

$$II=\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}a_{jk}\,j(k+1)y_{j-1,k}$$

$$III=\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}a_{jk}(j+1)ky_{j,k-1}$$

$$IV = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{jk}\, jk y_{j-1,k-1}$$

olsun. Bu durumda

$$z_{mn} = I - II - III + IV$$

olur. Şimdi I, II, III, IV ifadelerinin her birini tek tek inceleyelim.

$$I = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{jk}\, (j+1)(k+1) y_{jk}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_{mk}\, (m+1)(k+1) y_{mk} + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n} a_{jk}\, (j+1)(k+1) y_{jk}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_{mk}\, (m+1)(k+1) y_{mk}$$

$$+ \sum_{j=0}^{m-1} \left(a_{jn}(j+1)(n+1) y_{jn} + \sum_{k=0}^{n-1} a_{jk}(j+1)(k+1) y_{jk} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_{mk}(m+1)(k+1) y_{mk} + \sum_{j=0}^{m-1} a_{jn}(j+1)(n+1) y_{jn}$$

$$+ \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_{jk}\, (j+1)(k+1) y_{jk}$$

olur. Yani,

$I = a_{mn}(m+1)(n+1) y_{mn}$

$$+\sum_{k=0}^{n-1} a_{mk}(m+1)(k+1)y_{mk} + \sum_{j=0}^{m-1} a_{jn}(j+1)(n+1)y_{jn}$$

$$+\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1} a_{jk}\ (j+1)(k+1)y_{jk}$$

olarak bulunur.

Şimdi II ifadesini inceleyelim.

$$II=\sum_{j=0}^{m}\ \sum_{k=0}^{n}\ a_{jk}\, j(k+1)y_{j-1,k}$$

$$=\sum_{j=0}^{m}\ \left(a_{jn}j(n+1)y_{j-1,n}\ +\sum_{k=0}^{n-1}\ a_{jk}j(k+1)y_{j-1,k}\right)$$

$$=\sum_{j=0}^{m} a_{jn}j(n+1)y_{j-1,n}\ +\ \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n-1} a_{jk}\ j(k+1)y_{j-1,k}$$

$$=\sum_{j=0}^{m-1}\ a_{j+1,n}(j+1)(n+1)y_{jn}\ +\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1} a_{j+1,k}\ (j+1)(k+1)y_{jk}$$

olur. Dolayısıyla II ifadesini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$II=\sum_{j=0}^{m-1}\ a_{j+1,n}(j+1)(n+1)y_{jn}\ +\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1} a_{j+1,k}\ (j+1)(k+1)y_{jk}.$$

Şimdi III ifadesini inceleyelim.

$$III=\sum_{j=0}^{m}\ \sum_{k=0}^{n}\ a_{jk}(j+1)ky_{j,k-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\ a_{mk}(m+1)ky_{m,k-1}\ +\ \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n} a_{jk}\ (j+1)ky_{j,k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} a_{m,k+1}(m+1)(k+1)y_{mk} + \sum_{j=0}^{m-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{j,k+1}\ (j+1)(k+1)y_{jk}\right).$$

Yani,

$$III = \sum_{k=0}^{n-1} a_{m,k+1}(m+1)(k+1)y_{mk} + \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1} a_{j,k+1}\ (j+1)(k+1)y_{jk}$$

olarak bulunur.

Son olarak IV ifadesini inceleyelim.

$$IV = \sum_{j=0}^{m}\ \sum_{k=0}^{n} a_{jk}\, jky_{j-1,k-1}$$

$$= \sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{j,k+1}\, j(k+1)y_{j-1,k}\right) = \sum_{j=0}^{m-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{j+1,k+1}\,(j+1)(k+1)y_{jk}\right).$$

Yani,

$$IV = \sum_{j=0}^{m-1}\ \sum_{k=0}^{n-1} a_{j+1,k+1}\,(j+1)(k+1)y_{jk}$$

olarak bulunur.

Şimdi,

$$z_{mn} = I - II - III + IV$$

eşitliğinde bulunan ifadeler yerine yazılırsa,

$$z_{mn} = \left(a_{mn}(m+1)(n+1)y_{mn} \right.$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} a_{mk}(m+1)(k+1)y_{mk} + \sum_{j=0}^{m-1} a_{jn}(j+1)(n+1)y_{jn}$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_{jk}\ (j+1)(k+1)y_{jk} \right)$$

$$-\left(\sum_{j=0}^{m-1} a_{j+1,n}(j+1)(n+1)y_{jn} + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_{j+1,k}\ (j+1)(k+1)y_{jk} \right)$$

$$-\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{m,k+1}(m+1)(k+1)y_{mk} + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_{j,k+1}\ (j+1)(k+1)y_{jk} \right)$$

$$+\left(\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_{j+1,k+1}\,(j+1)(k+1)y_{jk} \right)$$

bulunur.

Yukarıda elde edilen ifade düzenlenirse,

$$z_{mn} = \left[\sum_{j=0}^{m-1} a_{jn}(j+1)(n+1)y_{jn} - \sum_{j=0}^{m-1} a_{j+1,n}(j+1)(n+1)y_{jn} \right]$$

$$+ \left[\sum_{k=0}^{n-1} a_{mk}(m+1)(k+1)y_{mk} - \sum_{k=0}^{n-1} a_{m,k+1}(m+1)(k+1)y_{mk} \right]$$

$$+\left[\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1} a_{jk}\ (j+1)(k+1)y_{jk} - \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1} a_{j+1,k}\ (j+1)(k+1)y_{jk}\right.$$

$$-\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1} a_{j,k+1}\ (j+1)(k+1)y_{jk}$$

$$\left.+\sum_{j=0}^{m-1}\ \sum_{k=0}^{n-1}\ a_{j+1,k+1}\,(j+1)(k+1)y_{jk}\right]$$

$$+[a_{mn}(m+1)(n+1)y_{mn}\ ]$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$z_{mn} = \left[\sum_{j=0}^{m-1}\ \left(a_{jn} - a_{j+1,n}\right)\left[(j+1) + (n+1)y_{jn}\right]\right]$$

$$+\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(a_{mk} - a_{m,k+1}\right)\left[(m+1)(k+1)y_{mk}\right]\right]$$

$$+\left[\sum_{j=0}^{m-1}\ \sum_{k=0}^{n-1}\ \left(a_{jk} - a_{j+1,k} - a_{j,k+1} + a_{j+1,k+1}\right)\left[(j+1)(k+1)y_{jk}\right]\right]$$

$$+[a_{mn}(m+1)(n+1)y_{mn}\ ]$$

elde edilir. Burada,

$$a_{jn} - a_{j+1,n} = \Delta_{10}a_{jn},$$

$$a_{mk} - a_{m,k+1} = \Delta_{01}a_{mk},$$

$$a_{jk} - a_{j+1,k} - a_{j,k+1} + a_{j+1,k+1} = \Delta_{11}a_{jk},$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$z_{mn} = \sum_{j=0}^{m-1}\ (j+1)(n+1)y_{jn}\Delta_{10}a_{jn}$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}(m+1)(k+1)y_{mk}\Delta_{01}a_{mk}$$

$$+\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}(j+1)(k+1)y_{jk}\,\Delta_{11}a_{jk}$$

$$+a_{mn}(m+1)(n+1)y_{mn}$$

bulunur. Dolayısıyla, $B=\left(b_{mnjk}\right)$ matrisi yardımıyla

$$z_{mn}=\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}b_{mnjk}y_{jk}=(By)_{mn}$$

eşitliği elde edilir, burada $B=\left(b_{mnjk}\right)$ matrisi

$$b_{mnjk}=\begin{cases}(j+1)(k+1)\Delta_{11}a_{jk}, & 0\le j\le m-1 \text{ ve } 0\le k\le n-1,\\ (n+1)(j+1)\Delta_{10}a_{jn}, & 0\le j\le m-1 \text{ ve } k=n,\\ (m+1)(k+1)\Delta_{01}a_{mk}, & j=m \text{ ve } 0\le k\le n-1,\\ (m+1)(n+1)a_{mn}, & j=m \quad \text{ve} \quad k=n,\\ 0, & \text{diğer durumlarda,}\end{cases} \tag{3.19}$$

ile tanımlıdır. Böylece, $x=(x_{mn})\in\widetilde{\mathcal{C}}_r$ olduğunda $ax=(a_{mn}x_{mn})\in\mathcal{CS}_{bp}$ olması için gerek ve yeter şart $y=(y_{mn})\in\mathcal{C}_r$ olduğunda $z=(z_{mn})\in\mathcal{C}_{bp}$ olmasıdır. Bu ise $B\in\left(\mathcal{C}_r:\mathcal{C}_{bp}\right)$ olması anlamına gelir. Böylece, Lemma 3.5 den

$$\sup_{m,n\in\mathbb{N}}\sum_{j,k}\left|b_{mnjk}\right|<\infty$$

yazılır. Buradan,

$$\sup_{m,n\in\mathbb{N}} \sum_{j,k} |b_{mnjk}|$$

$$= \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} (n+1)(j+1)|\Delta_{10} a_{jn}| \right.$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} (m+1)(k+1)|\Delta_{01} a_{mk}|$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} (j+1)(k+1)|\Delta_{11} a_{jk}| + |a_{mn}| \right\} < \infty$$

bulunur. Böylece Lemma 3.5 den

$$\sum_{j} \sum_{k} (j+1)(k+1)|\Delta_{11} a_{jk}| < \infty,$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j} (n+1)(j+1)|\Delta_{10} a_{jn}| < \infty,$$

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{k} (m+1)(k+1)|\Delta_{01} a_{mk}| < \infty$$

ve

$$a = (a_{mn}) \in \mathcal{C}S_r$$

elde edilir. Yani,

$$\left(\widetilde{\mathcal{C}}_r\right)^{\beta(bp)} = D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap \mathcal{C}S_r$$

bulunur.

$\vartheta, \eta \in \{p, bp, r\}$ olmasıd durumunda ise $\widetilde{\mathcal{C}}_\eta$ uzayının $\beta(\vartheta) -$ duali aşağıdaki gibi verilir (Mursaleen ve Başar 2014).

Teorem 3.9 $B = (b_{mnjk})$ matrisi (3.19) ile verilsin. Bu durumda $\widetilde{\mathcal{C}}_\eta$ uzayının $\beta(\vartheta) -$ duali

$$\{a = (a_{mn}) \in \Omega : \ B = (b_{mnjk}) \in (\mathcal{C}_\eta : \mathcal{C}_\vartheta)\}$$

kümesidir.

3.3 Dört Boyutlu Matrislerin Bazı Sınıflarının Karakterizasyonu

Bu bölümde $\widetilde{\mathcal{C}}_{bp}$, $\mathcal{C}_p$ ve $\mathcal{C}_r$ uzaylarından $\widetilde{\mathcal{C}}_\vartheta$, $\widetilde{\mathcal{C}}_r$ *ve* $\widetilde{\mathcal{C}}_{bp}$ çift dizi uzaylarına bazı matris dönüşümlerinin Mursaleen ve Başar (2014) tarafından verilen karakterizasyonları incelenmiştir.

$(\widetilde{\mathcal{C}}_{bp} : \mathcal{C}_\vartheta)$ ve $(\mu : \widetilde{\mathcal{C}}_\vartheta)$ sınıflarının karakterizasyonunu veren teoremler ispatlı verilmesine rağmen, $(\widetilde{\mathcal{C}}_{bp} : \widetilde{\mathcal{C}}_\vartheta)$, $(\mathcal{C}_r : \widetilde{\mathcal{C}}_r)$ ve $(\mathcal{C}_{bp} : \widetilde{\mathcal{C}}_{bp})$ sınıflarına ait dört boyutlu matris karakterizasyonu veren teoremler ise ispatsız biçimde aşağıda verilmiştir (Mursaleen ve Başar 2014).

Teorem 3.10 $A = (a_{mnkl}) \in (\widetilde{\mathcal{C}}_{bp} : \mathcal{C}_\vartheta)$ olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır.

$$\sup_{m,n\in\mathbb{N}} \sum_{j,k} (j+1)(k+1)\left|\Delta_{11}^{jk} a_{mnjk}\right| < \infty, \tag{3.20}$$

$$\text{her } k \in \mathbb{N} \text{ sabiti ve } m,n \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{j\to\infty}(j+1)\Delta_{10}^{jk} a_{mnjk} = 0, \tag{3.21}$$

$$\text{her } j \in \mathbb{N} \text{ sabiti ve } m,n \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{k\to\infty}(k+1)\Delta_{01}^{jk} a_{mnjk} = 0, \tag{3.22}$$

$$\exists(a_{jk}) \in \Omega \ni \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{j,k} (j+1)(k+1)\Delta_{11}^{jk} a_{mnjk} = a_{jk}, \tag{3.23}$$

$$\text{her } j,k \in \mathbb{N} \text{ sabiti için } \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{j,k} (j+1)(k+1)\Delta_{11}^{jk} a_{mnjk} = \sum_{j} a_{jk}. \tag{3.24}$$

İspat: $x = (x_{jk}) \in \widetilde{\mathcal{C}}_{bp}$ olsun. Bu durumda $y = (y_{mn}) \in \mathcal{C}_{bp}$ ’dir.

Şimdi, $\sum_{j,k} a_{mnjk}x_{jk}$ serisinin (s,t) 'inci dikdörtgen kısmi toplamları için, $\forall\, m,n,s,t \in \mathbb{N}$ $için$,

$$(Ax)_{mn}^{[s,t]} = \sum_{j=0}^{s}\sum_{k=0}^{t} a_{mnjk}\, x_{jk} \tag{3.25}$$

$$= \sum_{j=0}^{s-1}\sum_{k=0}^{t-1}(j+1)(k+1)\Delta_{11}^{jk}\, a_{mnjk}y_{jk} + \sum_{j=0}^{s-1} (t+1)(j+1)\Delta_{10}^{jt}a_{mnjt}y_{jt}$$

$$+\sum_{k=0}^{t-1} (s+1)(k+1)\Delta_{01}^{sk}a_{mnsk}y_{sk} + (s+1)(t+1)a_{mnst}y_{st}$$

bulunur. $B_{mn} = \left(b_{mnjk}^{[s,t]}\right)$ matrisi,

$$b_{mnjk}^{[s,t]} = \begin{cases} (j+1)(k+1)\Delta_{11}^{jk}a_{mnjk}, & 0 \le j \le s-1 \text{ ve } 0 \le k \le t-1\,; \\ (s+1)(k+1)\Delta_{01}^{sk}a_{mnsk}, & j = s \text{ ve } 0 \le k \le t-1\,; \\ (t+1)(j+1)\Delta_{10}^{jt}a_{mnjt}, & 0 \le j \le s-1 \text{ ve } k = t\,; \\ (s+1)(t+1)a_{mnst}, & j = s \text{ ve } k = t\,; \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlansın.

Böylece (3.25)'den $(Ax)_{mn}^{[s,t]} = (B_{mn}y)_{[s,t]}$ yazılabilir. $x \in \widetilde{\mathcal{C}}_{bp}$ olduğundan $y \in \mathcal{C}_{bp}$ olur. $A \in \left(\widetilde{\mathcal{C}}_{bp} : \mathcal{C}_{\vartheta}\right)$ ise $\forall x \in \widetilde{\mathcal{C}}_{bp}$ için $Ax \in \mathcal{C}_{\vartheta}$ 'dir. Bu durumda her $m,n \in \mathbb{N}$ ve $x \in \widetilde{\mathcal{C}}_{bp}$ için $(Ax)_{mn}^{[s,t]}$ dikdörtgensel kısmi toplamlarının Pringsheim manada yakınsak olması $B_{mn} \in (\mathcal{C}_{bp}:\mathcal{C}_{\vartheta})$ olmasını söylemeye eşdeğerdir. Sonuç olarak her $m,\ n \in \mathbb{N}$ sabiti için

$$\sum_{j}\sum_{k} (j+1)(k+1)\left|\Delta_{11}^{jk}\, a_{mnjk}\right| < \infty, \tag{3.26}$$

$$\forall\, j \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{k\to\infty}(k+1)\Delta_{01}^{jk}\, a_{mnjk} = 0, \tag{3.27}$$

ve

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{j\to\infty}(j+1)\Delta_{10}^{jk}\, a_{mnjk} = 0, \tag{3.28}$$

koşulları sağlanmalıdır. Bu durumda,

$$\vartheta - \lim_{s,t\to\infty} b_{mnjk}^{[s,t]} = (j+1)(k+1)\Delta_{11}^{jk} a_{mnjk}$$

ve

$$\vartheta - (Ax)_{mn}^{[s,t]} = p - lim(B_{mn}y)$$

sağlanır. Böylece, “ $A = (a_{mnkl}) \in \left(\widetilde{\mathcal{C}}_{bp} : \mathcal{C}_{\vartheta}\right)$ olması için gerek ve yeter şart $B \in (\mathcal{C}_{bp} : \mathcal{C}_{\vartheta})$ olmasıdır.” ifadesini göz önüne alarak Lemma 3.6’ dan

$$\sup_{m,n\in\mathbb{N}} \sum_{j} \sum_{k} (j+1)(k+1)\left|\Delta_{11}^{jk}\, a_{mnjk}\right| < \infty, \tag{3.29}$$

$$\exists (a_{jk}) \in \Omega \ni \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} (j+1)(k+1)\Delta_{11}^{jk}\, a_{mnjk} = a_{jk}, \tag{3.30}$$

ve

$$\vartheta - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{j,k} (j+1)(k+1)\Delta_{11}^{jk}\, a_{mnjk} = \sum_{j} a_{jk} \tag{3.31}$$

elde edilir. Şimdi, $(3.26) - (3.31)$ koşullarından görülür ki $A = (a_{mnkl}) \in \left(\widetilde{\mathcal{C}}_{bp} : \mathcal{C}_{\vartheta}\right)$ olması için gerek ve yeter şart $(3.20) - (3.24)$ koşullarının sağlanmasıdır. Bu ispatı tamamlar.

Teorem 3.11 $E = (e_{mnkl})$ ve $F = (f_{mnkl})$ dört boyutlu sonsuz matrislerinin elemanlarının

$$f_{mnkl} = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} e_{ijkl}\,, \; \forall k,l,m,n \in \mathbb{N}, \tag{3.32}$$

bağıntısıyla ilişkili olduğunu ve μ herhangi verilen bir çift dizi uzayı olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $E \in \left(\mu : \widetilde{\mathcal{C}_\vartheta}\right)$ olması için gerek ve yeter şart $F \in (\mu : \mathcal{C}_\vartheta)$ olmasıdır.

İspat: $x = (x_{kl}) \in \mu$ olsun ve (3.32) ile her $m,n,s,t \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{s} \sum_{l=0}^{t} e_{ijkl} x_{kl} = \sum_{k=0}^{s} \sum_{l=0}^{t} f_{mnkl} x_{kl} \tag{3.33}$$

eşitliğini göz önüne alalım. (3.33) eşitliğinde $s,t \to \infty$ için

$$\frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} (Ex)_{ij} = (Fx)_{mn}, \;\; \forall\, m,n \in \mathbb{N}, \tag{3.34}$$

elde edilir. Böylece, (3.34) ten görülür ki $x \in \mu$ olduğunda $Ex \in \widetilde{\mathcal{C}_\vartheta}$ olması için gerek ve yeter şart $x \in \mu$ olduğunda $Fx \in \mathcal{C}_\vartheta$ olmasıdır. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.10 ve Teorem 3.11 den μ dizi uzayları seçimine bağlı olarak birkaç sonuç elde edilir (Mursaleen ve Başar 2014). Bunun için aşağıdaki iki lemmaya gereksinim duyulur.

Lemma 3.12 $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{C}_r : \mathcal{C}_r)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{m,n \in \mathbb{N}} \sum_{k,l} |a_{mnkl}| < \infty, \tag{3.35}$$

$$\text{her } k,l \in \mathbb{N} \text{ için } \; \exists (a_{jk}) \in \Omega \ni \; r - \lim_{m,n\to\infty} a_{mnkl} = a_{kl}, \tag{3.36}$$

$$\exists \upsilon \in \mathbb{C} \ni r - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k,l} a_{mnkl} = \upsilon, \tag{3.37}$$

herhangi $k_0, l_0 \in \mathbb{N}$ için $\exists u^{l_0}, v_{k_0} \in \mathbb{C} \ni \; r - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k} a_{mnkl_0} = u^{l_0}$ ve

$$r-\lim_{m,n\to\infty}\sum_{l} a_{mnk_0l}=\upsilon_{k_0} \tag{3.38}$$

koşullarının sağlanmasıdır (Hamilton 1936, Robinson 1926, Zeltser, 2002).

Lemma 3.13 $A=(a_{mnkl})\in(\mathcal{C}_{bp}:\mathcal{C}_{bp})$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{m,n\in\mathbb{N}}\sum_{k,l}|a_{mnkl}|<\infty, \tag{3.39}$$

$$\text{her } k,l\in\mathbb{N} \text{ için } \exists(a_{kl})\in\Omega\ni\ bp-\lim_{m,n\to\infty}a_{mnkl}=\ a_{kl}, \tag{3.40}$$

$$\exists\upsilon\in\mathbb{C}\ni bp-\lim_{m,n\to\infty}\sum_{k,l}a_{mnkl}=\upsilon, \tag{3.41}$$

$$\text{herhangi } k_0,l_0\in\ \mathbb{N} \text{ için } bp-\lim_{m,n\to\infty}\sum_{k}\left|a_{mnkl_0}-a_{kl_0}\right|=0 \text{ ve}$$

$$bp-\lim_{m,n\to\infty}\sum_{l}\left|a_{mnk_0l}-a_{k_0l}\right|=0 \tag{3.42}$$

koşullarının sağlanmasıdır (Hamilton 1936, Robinson 1926, Zelster 2002).

Sonuç 3.14 $E=(e_{mnkl})$ ve $F=(f_{mnkl})$ dört boyutlu sonsuz matrislerin elemanları arasında (3.32) bağıntısının sağlandığını kabul edelim. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler sağlanır:

$i)$ $E=(e_{mnjk})\in(\widetilde{\mathcal{C}}_{bp}\ :\ \widetilde{\mathcal{C}}_{\vartheta})$ olması için gerek ve yeter şart a_{mnkl} yerine f_{mnkl} alınarak (3.20)-(3.24) koşullarının sağlanmasıdır.

$ii)$ $E=(e_{mnjk})\in(\mathcal{C}_{r}:\widetilde{\mathcal{C}}_{r}\ )$ olması için gerek ve yeter şart şart a_{mnkl} yerine f_{mnkl} alınarak (3.35)-(3.38) koşullarının sağlanmasıdır.

$iii)$ $E=(e_{mnjk})\in(\mathcal{C}_{bp}:\widetilde{\mathcal{C}}_{bp}\ )$ olması için gerek ve yeter şart şart a_{mnkl} yerine f_{mnkl} alınarak (3.39)-(3.42) koşullarının sağlanmasıdır (Mursaleen ve Başar, 2014).

4. ÇİFT SERİ UZAYLARI VE CESÀRO ORTALAMASI

$\sum x_\nu$, kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan kompleks terimli sonsuz bir seri olsun. σ_n^α, (s_n) dizisinin (C,α) Cesàro dönüşümünün n-ci terimini göstersin. Eğer $k \geq 1$ için,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |\sigma_n^\alpha - \sigma_{n-1}^\alpha|^k < \infty$$

sağlanıyorsa, $\sum x_\nu$ serisine $|C,\alpha|_k$ toplanabilirdir denir (Flett 1957).

Bor (1987, 2016), $|C,1|_k$ toplanabilme metodunu mutlak ağırlıklı ortalama toplanabilme metoduna aşağıdaki gibi genişletti.

(p_n) pozitif sayıların bir dizisi olmak üzere

$$P_n = p_0 + p_1 + \cdots + p_n \to \infty, \qquad (n \to \infty \text{ iken}), \qquad (P_{-1} = p_{-1} = 0)$$

olsun.

(s_n) dizisinin $(\overline{N}, p_n)$ ağırlıklı ortalama dönüşüm dizisinin n-ci terimini

$$T_n = \frac{1}{P_n} \sum_{j=0}^{n} p_j \, s_j = \frac{1}{P_n} \sum_{j=0}^{n} (P_n - P_{j-1}) x_j$$

ile gösterelim. Bu durumda eğer $k \geq 1$ için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1} |\Delta T_{n-1}|^k < \infty$$

sağlanıyorsa, $\sum x_\nu$ serisine $|\overline{N}, p_n|_k$ toplanabilirdir denir (Bor 1987), burada $n \geq 1$ için

$$\Delta T_{n-1} = T_{n-1} - T_n$$

$$\Delta T_{-1} = T_0$$

dır.

Açıktır ki her n için $p_n = 1$ alınırsa $\left|\overline{N}, p_n\right|_k$ toplanabilme metodu $|C,1|_k$ mutlak Cesàro toplanabilme metoduna indirgenir.

$\sum_{i,j} x_{ij}$ kısmi toplamlar dizisi (s_{mn}) olan sonsuz bir çift seri olsun. (s_{mn}) çift dizisinin çift ağırlıklı ortalama $\left(\overline{N}, p_m, q_n\right)$ dönüşümünü

$$T_{mn} = \frac{1}{P_m Q_n} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} p_i q_j\, s_{ij}$$

ile tanımlayalım.

Eğer $k \geq 1$ için,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{n} \left(\frac{P_m Q_n}{p_m q_n}\right)^{k-1} \left|\bar{\Delta}\, T_{mn}\right|^{k} < \infty$$

koşulu sağlanıyorsa, $\sum_{i,j} x_{ij}$ serisine $\left|\overline{N}, p_m, q_n\right|_k$ toplanabilirdir denir (Sarıgöl 2020), burada $\bar{\Delta} T_{m,0} = T_{m,0} - T_{m-1,0}$, $\bar{\Delta} T_{0,n} = T_{0,n} - T_{0,n-1}$ ve

$$\bar{\Delta} T_{m,n} = T_{m,n} - T_{m-1,n} - T_{m,n-1} + T_{m-1,n-1}$$

dir

Burada dikkat edelim ki her n için $p_n = q_n = 1$ alınırsa $\left|\overline{N}, p_m, q_n\right|_k$ toplanabilme metodu $|C,1{,}1|_k$ (Rhoades 1998) toplanabilme metoduna indirgenir.

Şimdi (s_{ij}) çift dizisinin $(C,1{,}1)$ dönüşüm dizisini (T_{mn}) ile tanımlayalım. Yani,

$$T_{mn} = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} s_{ij}$$

olsun. Bu durumda, $k \geq 1$ için

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} \left|\bar{\Delta} T_{mn}\right|^{k} < \infty$$

sağlanıyorsa, $\sum_{i,j} x_{ij}$ serisine $|C,1,1|_k$ toplanabilirdir denir, burada

$$\bar{\Delta} T_{m,1} = T_{m,1} - T_{m-1,1} \ ,$$

$$\bar{\Delta} T_{1,n} = T_{1,n} - T_{1,n-1} \ ,$$

ve

$$\bar{\Delta} T_{m,n} = T_{m,n} - T_{m-1,n} - T_{m,n-1} + T_{m-1,n-1}$$

dir. Ayrıca,

$$T_{m,n} = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} s_{ij} = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{i} \sum_{s=1}^{j} x_{rs}$$

$$= \frac{1}{mn} \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} x_{rs} \sum_{i=r}^{m} \sum_{j=s}^{n} 1$$

olduğunu göz önüne alırsak, $(C,1,1)$ dönüşüm dizisi (T_{mn})

$$T_{m,n} = \frac{1}{mn} \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} x_{rs} (m-r+1)(n-s+1) \tag{4.1}$$

şeklinde bulunur.

Şimdi ise, (4.1) dikkate alınırsa, $\bar{\Delta} T_{1,1}$, $\bar{\Delta} T_{m,1}$ ve $\bar{\Delta} T_{1,n}$ ifadeleri aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\bar{\Delta} T_{1,1} = \sum_{r=1}^{1} \sum_{s=1}^{1} x_{rs} (m-r+1)(n-s+1) = \sum_{r=1}^{1} x_{r1} (2-r)(2-1) = x_{11} \ ,$$

$m \geq 2$ için,

$$\bar{\Delta}T_{m,1} = T_{m,1} - T_{m-1,1}$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{1} x_{rs}(m-r+1)(2-s)$$

$$-\frac{1}{m-1}\sum_{r=1}^{m-1}\sum_{s=1}^{1} x_{rs}(m-r)(2-s) = \frac{1}{m(m-1)}\sum_{r=2}^{m} x_{r1}(r-1)$$

ve $n \geq 2$ için,

$$\bar{\Delta}T_{1,n} = T_{1,n} - T_{1,n-1}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{1}\sum_{s=1}^{n} x_{rs}\,(2-r)(n-s+1) - \frac{1}{n-1}\sum_{r=1}^{1}\sum_{s=1}^{n-1} x_{rs}(2-r)(n-s)$$

$$= \frac{1}{n(n-1)}\sum_{s=2}^{n} x_{1s}\,(s-1)$$

ifadeleri elde edilir.

(4.1) eşitliğinden,

$$T_{m-1,n} = \frac{1}{(m-1)n}\sum_{r=1}^{m-1}\sum_{s=1}^{n} x_{rs}(m-r)(n-s+1) \qquad (4.2)$$

$$T_{m,n-1} = \frac{1}{m(n-1)}\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n-1} x_{rs}(m-r+1)(n-s) \qquad (4.3)$$

ve

$$T_{m-1,n-1} = \frac{1}{(m-1)(n-1)}\sum_{r=1}^{m-1}\sum_{s=1}^{n-1} x_{rs}(m-r)(n-s) \qquad (4.4)$$

bulunur. Böylece (4.1), (4.2), (4.3) ve (4.4) eşitliklerinden

$$\bar{\Delta}T_{mn} = \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{(m-r+1)(n-s+1)}{mn} - \frac{(m-r)(n-s+1)}{(m-1)n} - \frac{(m-r+1)(n-s)}{m(n-1)} + \frac{(m-r)(n-s)}{(m-1)(n-1)}\right]x_{rs}$$

elde edilir. Yani, $m, n \geq 2$ için,

$$\bar{\Delta}T_{mn} = \sum_{r=2}^{m}\sum_{s=2}^{n}\frac{(r-1)(s-1)}{(m-1)(n-1)mn}$$

bulunur.

Ayrıca, $y = (y_{mn})$ dizisini $m, n = 1$ için $y_{11} = x_{11}$,

$m \geq 2, n = 1$ için

$$y_{m1} = \frac{1}{m^{\frac{1}{k}}(m-1)}\sum_{r=2}^{m} x_{r1}\,(r-1),$$

$n \geq 2, m = 1$ için

$$y_{1n} = \frac{1}{n^{\frac{1}{k}}(n-1)}\sum_{s=2}^{n} x_{1s}(s-1),$$

ve $m, n \geq 2$ için

$$y_{mn} = \frac{1}{(m-1)\,(n-1)\,(mn)^{\frac{1}{k}}}\sum_{r=2}^{m}\sum_{s=2}^{n} x_{rs}(r-1)(s-1),$$

olacak şekilde tanımlarsak

$$(y_{mn})^k = (mn)^{k-1}\left|\bar{\Delta}T_{mn}\right|^k$$

elde edilir.

Şimdi, $|C,1,1|_k$ toplanabilme metoduyla toplanabilen serilerin uzayını $\left|C_{1,1}\right|_k$ ile gösterelim. Yani,

$$\left|C_{1,1}\right|_k = \left\{x = (x_{rs}) : \sum_{r,s} x_{rs} \text{ serisi } |C,1,1|_k \text{ toplanabilirdir}\right\}$$

ile ifade edilir.

Teorem 4.1 $\left|C_{1,1}\right|_k$ uzayı $1 \leq k < \infty$ için çift dizilerin koordinatsal toplama ve skalarla çarpma işlemleri altında lineer uzay olup

$$\|x\|_{\left|C_{1,1}\right|_k} = \left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1}\,|\bar{\Delta}\,T_{mn}|^k\right)^{1/k}, (1 \leq k < \infty) \tag{4.5}$$

normu ile bir Banach uzayıdır ve $\mathcal{L}_k$ uzayına norm izomorfiktir, yani $\left|C_{1,1}\right|_k \cong \mathcal{L}_k$ dır.

İspat: $x, z \in \left|C_{1,1}\right|_k$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ alalım. Bu durumda $\alpha x + \beta z \in \left|C_{1,1}\right|_k$ olduğunu gösterelim. $B(x) = \big(B_{mn}(x)\big)$ dönüşüm dizisini $B_{mn}(x) = (mn)^{1-1/k}\bar{\Delta}\,T_{mn}$ ile tanımlayalım. Bu durumda

$m, n = 1$ için

$$B_{11}(x) = x_{11},$$

$m \geq 2, n = 1$ için

$$B_{m1}(x) = \frac{1}{m^{\frac{1}{k}}(m-1)}\sum_{r=2}^{m} x_{r1}\,(r-1)$$

$n \geq 2, m = 1$ için

$$B_{1n}(x) = \frac{1}{n^{\frac{1}{k}}(n-1)}\sum_{s=2}^{n} x_{1s}(s-1)$$

ve $m, n \geq 2$ için ise

$$B_{mn}(x) = \frac{1}{(m-1)\,(n-1)\,(mn)^{\frac{1}{k}}} \sum_{r=2}^{m} \sum_{s=2}^{n} x_{rs}(r-1)(s-1)$$

olur.

Her $m, n \geq 1$ için $B_{mn}(x) = y_{mn}$ olacak şekilde $B(x) = y$ ile tanımlarsak

$(y_{mn})^k = (mn)^{k-1}\left|\bar{\Delta} T_{mn}\right|^k$ sağlandığından her $x \in \left|C_{1,1}\right|_k$ için $y = (y_{mn}) \in \mathcal{L}_k$ $(1 \leq k < \infty)$ olur.

Bu durumda her $x, z \in \left|C_{1,1}\right|_k$, her $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ve $m, n \geq 1$ için

$$B(\alpha x + \beta z) = \big(B_{mn}(\alpha x + \beta z)\big) = \big(\alpha B_{mn}(x) + \beta B_{mn}(z)\big) = \alpha B(x) + \beta B(z)$$

olduğu göz önüne alınıp üçgen ve Minkowski eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\left(\sum_{i,j} \left|B_{ij}(\alpha x + \beta z)\right|^k\right)^{\frac{1}{k}} = \left(\sum_{i,j} \left|\alpha B_{ij}(x) + \beta B_{ij}(z)\right|^k\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$\leq |\alpha| \left(\sum_{i,j} \left|B_{ij}(x)\right|^k\right)^{\frac{1}{k}} + |\beta| \left(\sum_{i,j} \left|B_{ij}(z)\right|^k\right)^{\frac{1}{k}} < \infty$$

olur. Bu ise $\alpha x + \beta z \in \left|C_{1,1}\right|_k$ olduğunu gösterir. Bu durumda $\left|C_{1,1}\right|_k$ uzayı dizilerin koordinatsal toplama ve skalarla çarpma işlemleriyle bir lineer uzay teşkil eder.

Şimdi, $\left|C_{1,1}\right|_k$ uzayının (4.5) bağıntısında verilen $\|.\|_{\left|C_{1,1}\right|_k}$ fonksiyonu ile normlu uzay olduğunu gösterelim.

$i)$ $\|x\|_{\left|C_{1,1}\right|_k} = \left(\sum_{i,j} \left|B_{ij}(x)\right|^k\right)^{\frac{1}{k}} \geq 0.$

$ii)$ $\|x\|_{\left|C_{1,1}\right|_k} = 0,$ yani

$$\|x\|_{|C_{1,1}|_k} = \left(\sum_{i,j} \left| B_{ij}(x) \right|^k \right)^{\frac{1}{k}} = 0$$

olsun. Bu durumda $\forall\ i,j \geq 1$ için

$$B_{ij}(x) = 0$$

ve dolayısıyla $\forall\ i,j \geq 1$ için

$$x_{ij} = 0$$

olur. Bu ise, $x = \theta$ olduğunu gösterir, burada θ sıfır vektörü gösterir.

Tersine $x = \theta$ ise,

$$\|x\|_{|C_{1,1}|_k} = 0$$

olur.

$iii)$ Herhangi bir $x \in \left|C_{1,1}\right|_k$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için,

$$\|\lambda x\|_{|C_{1,1}|_k} = \left(\sum_{i,j} \left| B_{ij}(\lambda x) \right|^k \right)^{\frac{1}{k}} = |\lambda| \left(\sum_{i,j} \left| B_{ij}(x) \right|^k \right)^{\frac{1}{k}} = |\lambda| \|x\|_{|C_{1,1}|_k}$$

olur.

$iv)$ Herhangi $x, z \in \left|C_{1,1}\right|_k$ için üçgen ve Minkowski eşitsizliklerinden,

$$\|x + z\|_{|C_{1,1}|_k} = \left(\sum_{i,j} \left| B_{ij}(x + z) \right|^k \right)^{\frac{1}{k}}$$

$$= \left(\sum_{i,j} \left| B_{ij}(x) + B_{ij}(z) \right|^k \right)^{\frac{1}{k}}$$

$$\leq \left(\sum_{i,j} \left| B_{ij}(x) \right|^k \right)^{\frac{1}{k}} + \left(\sum_{i,j} \left| B_{ij}(z) \right|^k \right)^{\frac{1}{k}}$$

$$= \|x\|_{\left|C_{1,1}\right|_k} + \|z\|_{\left|C_{1,1}\right|_k}$$

bulunur. Böylece, $\left|C_{1,1}\right|_k$ uzayı üzerinde tanımlı $\|.\|_{\left|C_{1,1}\right|_k}$ fonksiyonu bir norm olup, $\left(\left|C_{1,1}\right|_k, \|.\|_{\left|C_{1,1}\right|_k}\right)$ ikilisi bir normlu uzaydır.

$\left|C_{1,1}\right|_k$ uzayının $\mathcal{L}_k$ uzayına norm izomorfik olduğunu kanıtlamak için, $1 \leq k < \infty$ için $\left|C_{1,1}\right|_k$ ve $\mathcal{L}_k$ uzayları arasında lineer, birebir ve örten bir B dönüşümün olduğunu gösterelim. Bu amaçla B dönüşümünü

$$B : \left|C_{1,1}\right|_k \rightarrow \mathcal{L}_k$$

$$x \rightarrow y = B(x)$$

ile tanımlayalım. Burada $B(x) = y = (y_{mn})$ dönüşümü $m, n \geq 1$ için

$$y_{mn} = B_{mn}(x) = (mn)^{1-1/k}\,\bar{\Delta}\,T_{mn}$$

ile tanımlıdır.

B dönüşümünün lineer olduğu açıktır. Şimdi, $x \in \left|C_{1,1}\right|_k$ için $B(x) = \theta$ olsun. Bu durumda her $m, n \geq 1$ için $B_{mn}(x) = 0$ olur, bu da $\forall\, r, s \geq 1$ için $x_{rs} = 0$ olduğunu gösterir. Yani, $x = \theta$ olur. Bu durumda B dönüşümü birebirdir.

Ayrıca $y = (y_{mn}) \in \mathcal{L}_k$, $(1 \leq k < \infty)$ dizisi için $x = (x_{rs}) \in \left|C_{1,1}\right|_k$ dizisi bulmaya çalışalım. $m, n \geq 2$ için

$$y_{mn} = \frac{1}{m^{\frac{1}{k}} n^{\frac{1}{k}} (m-1)\,(n-1)} \sum_{r=2}^{m} \sum_{s=2}^{n} x_{rs}\,(r-1)(s-1)$$

olduğundan

$$y_{mn} m^{\frac{1}{k}} n^{\frac{1}{k}} (m-1)\,(n-1) \;=\sum_{r=2}^{m}\sum_{s=2}^{n} x_{rs}(r-1)(s-1) \tag{4.6}$$

ve

$$y_{m,n-1} m^{\frac{1}{k}} (n-1)^{\frac{1}{k}} (m-1)\,(n-2) \;=\sum_{r=2}^{m}\sum_{s=2}^{n-1} x_{rs}(r-1)(s-1) \tag{4.7}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece (4.6) ve (4.7) eşitliklerinden

$$m^{\frac{1}{k}}(m-1)\,\left[y_{mn} n^{\frac{1}{k}}(n-1) - y_{m,n-1}(n-1)^{\frac{1}{k}}(n-2)\right] = \sum_{r=2}^{m} x_{rn}\,(r-1)(n-1)$$

eşitliği elde edilir. Benzer işlemler yapılarak

$m,n \geq 2$ için

$$\begin{aligned} x_{mn} = \frac{1}{(n-1)(m-1)} \Bigg[\; & m^{\frac{1}{k}}(m-1)\left(y_{mn}\, n^{\frac{1}{k}}(n-1) - y_{m,n-1}(n-1)^{\frac{1}{k}}(n-2)\right) \\ & - (m-1)^{\frac{1}{k}}(m-2)\Big(y_{m-1,n} n^{\frac{1}{k}}(n-1) \\ & - y_{m-1,n-1}(n-1)^{\frac{1}{k}}(n-2)\Big)\Bigg] \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca $n=1, m \geq 2$ için

$$y_{m1} m^{\frac{1}{k}}(m-1) = \sum_{r=2}^{m} x_{r1}(r-1) \tag{4.8}$$

olduğundan

$$y_{m-1,1}(m-1)^{\frac{1}{k}}(m-2) = \sum_{r=2}^{m-1} x_{r1}(r-1) \tag{4.9}$$

elde edilir. (4.8) ve (4.9) eşitlikleri göz önüne alınırsa, $n=1, m \geq 2$ için

$$x_{m1} = \frac{1}{m-1}\left(y_{m1}m^{\frac{1}{k}}(m-1) - y_{m-1,1}(m-1)^{\frac{1}{k}}(m-2)\right)$$

bulunur. Benzer olarak, $m = 1, n \geq 2$ için

$$y_{1n}n^{\frac{1}{k}}(n-1) = \sum_{s=2}^{n} x_{1s}(s-1) \tag{4.10}$$

olduğundan

$$y_{1,n-1}(n-1)^{\frac{1}{k}}(n-2) = \sum_{s=2}^{n-1} x_{1s}(s-1) \tag{4.11}$$

bulunur. (4.10) ve (4.11) ifadeleri dikkate alınırsa, $m = 1, n \geq 2$ için

$$x_{1n} = \frac{1}{n-1}\left(y_{1n}n^{\frac{1}{k}}(n-1) - y_{1,n-1}(n-1)^{\frac{1}{k}}(n-2)\right)$$

bulunur. Ayrıca $m = n = 1$ için $x_{11} = y_{11}$ dir.

Dolayısıyla,

$$\|x\|_{|C_{1,1}|_k} = \|B(x)\|_{\mathcal{L}_k} = \left(\sum_{m,n} |B_{mn}(x)|^k\right)^{1/k} = \|y\|_{\mathcal{L}_k} < \infty$$

elde edilir.

Böylece $x \in |C_{1,1}|_k$ ve $1 \leq k < \infty$ için, B dönüşümü lineer, norm koruyan, birebir ve örtendir. Dolayısıyla, $|C_{1,1}|_k$ uzayı $\mathcal{L}_k$ uzayına norm izomorfiktir.

Şimdi $|C_{1,1}|_k$ uzayının (4.5) normu ile bir Banach uzayı olduğunu gösterelim. Boos (2000)' de Sonuç 6.3.41'in b) kısmını dikkate alalım: "(ψ, F_1) ve $(\wedge, F_2)$ yarınormlu uzaylar ve

$$B : (\psi, F_1) \to (\wedge, F_2)$$

dönüşümü de bir izometrik izomorfizm olsun. Bu durumda (ψ, F_1) uzayının tam olması için gerek ve yeter şart $(\wedge, F_2)$ uzayının tam olmasıdır. Özel olarak, (ψ, F_1) uzayının bir Banach uzayı olması için gerek ve yeter şart $(\wedge, F_2)$ uzayının Banach uzayı olmasıdır."

Bu teoremin ispatında tanımlanan B dönüşümü $|C_{1,1}|_k$ uzayından $\mathcal{L}_k$ uzayına bir izometrik izomorfizm ve Başar ve Sever (2009) Teorem 2.1'den $\mathcal{L}_k$ uzayı bir Banach uzayı olduğundan $|C_{1,1}|_k$ uzayı da Banach uzayıdır. Bu ise ispatı tamamlar.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Mursaleen ve Başar (2014) tarafından verilen Cesàro dönüşümleri sınırlı, Pringsheim manada yakınsak, Pringsheim manada sıfıra yakınsak, Pringsheim manada yakınsak ve sınırlı, regüler yakınsak, mutlak $q-$ toplanabilen çift dizilerin $\widetilde{\mathcal{M}}_u,\ \widetilde{\mathcal{C}}_p,\ \widetilde{\mathcal{C}}_{0p},\ \widetilde{\mathcal{C}}_{bp},\ \widetilde{\mathcal{C}}_r\ ve\ \widetilde{\mathcal{L}}_q$ uzaylarının özellikleri ve bu çalışmada yer alan uzayların dualleri ve matris karakterizasyonlarıyla ilgili teoremler detaylı incelenmiştir ve verilen teoremlerdeki ispat teknikleri ayrıntılarıyla incelenmiştir. Ayrıca, birinci mertebeden Cesàro ortalamasını mutlak toplanabilme kavramıyla birleştirmek suretiyle tanımlanan $|C_{1,1}|_k$ (Sarıgöl 2020) mutlak çift seri uzayının $\mathcal{L}_k$ çift dizi uzayına norm izomorfik olan bir Banach uzayı olduğu gösterilmiştir. Bu tez çalışmasında görülen teknikler $|C_{1,1}|_k$ uzayının bazı topolojik özelliklerinin incelenmesi ve matris karakterizasyonlarıyla ilgili yayın çalışmalarına zemin hazırlamıştır.

6. KAYNAKLAR

Altay, B. and Başar, F., “Matrix mappings on the space $bs(p)$ and its $\alpha-, \beta-$ and $\gamma-$duals”, *Aligarh Bull. Math*., 21, 79–91, (2002).

Altay, B. and Başar, F., “On the space of sequences of p-bounded variation and related matrix mappings”, *Ukrainian Math. J.*, 55(1), 136–147, (2003).

Altay, B. and Başar, F., “Some new spaces of double sequences”, *J. Math. Anal.Appl.*, 309(1), 70–90, (2005).

Başar, F. and Sever, Y., “The space $\mathcal{L}_q$ of double sequences, Math”, *J. Okayama Univ.*, 51, 149–157, (2009).

Boos, J. “Classical and Modern Methods in Summability”, *Oxford MathematicalMonographs. Oxford Science Publications. Oxford University Press, Oxford,* (2000).

Bor, H. and Thorpe, B., “On some absolute summability methods”, Analysis 7,145–152, (1987).

Bor, H., “Some equivalence theorems on absolute summability methods”, *Acta Math. Hungar.* 149(1), 208–214, (2016).

Burkill, J. C. and Burkill, H., *A Second Course in Mathematical Analysis*, Cambridge University Press. London, (1980).

Flett, T.M., “On an extension of absolute summability and theorems of Littlewood and Paley”, *Proc. London Math. Soc*., 7, 113–141. (1957).

Gökhan, A. and Çolak, R., “The double sequence spaces $c_2^P(p)$ and $c_2^{BP}(p)$”, *Appl. Math. Comput.*, 157(2), 109–147, (2004).

Gökhan, A. and Çolak, R., “Double sequence space $\ell_2^\infty(p)$”, *ibid.*, 160(1), 147–153, (2005).

Hamilton, H. J., “Transformations of multiple sequences”, *Duke Mathematical Journal*, 2(1), 29-60, (1936).

Hardy, G. H., “On the convergence of certain multiple series”, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 19, 86-95, (1916 − 1919).

Jardas, C. and Sarapa, N., “On the summability of pairs of sequences”, *Glasnik Matematicki. Serija III,* 26(46), 67-78, (1991).

Kojima, T., “On the theory of double sequence”, *Tôhoku Mathematical Journal*, 21, 3-14, (1922).

Maddox, I. J., *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, (1970).

Móricz, F.,“Extensions of the spaces c and c_0 from single to double sequences”,*Acta Math. Hungar*, 57, 129–136, (1991).

Móricz, F. and Rhoades, B.E., “Almost convergence of double sequences and strong regularity of summability matrices”, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,* 104(2), 283-294, (1988).

Mursaleen, M. and Edely, O. H. H., “Statistical convergence of double sequences”, *J. Math. Anal. Appl.,* 288(1), 223–231, (2003).

Mursaleen, M., “Almost strongly regular matrices and a core theorem for double sequences”, *J. Math. Anal. Appl.*, 293(2), 523–531, (2004).

Mursaleen, M. and Edely, O. H. H., “Almost convergence and a core theorem for double sequences”, *J. Math. Anal. Appl.*, 293(2), 532–540, (2004).

Mursaleen, M. and Başar, F., “Domain of Cesaro mean of order one in some spaces of double sequences”, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 51, 335-356, (2014).

Pringsheim, A., “Zur Theorie der zweifach unendlichen Zahlenfolgen”, *Mathematische Annalen*, 53(3), 289-321, (1900).

Rhoades, B. E., “Absolute comparison theorems for double weighted mean and double Cesaro means”, *Math. Slovaca*, 48, 285–301, (1998).

Robison, G. M., “Divergent double sequences and series”, *Amer. Math. Soc. Trans.*, 28, 50–73, (1926).

Sarıgöl, M. A., "On local properties of factored Fourier series", *App. Math. Comput.*, 216, 3386-3390, (2010).

Sarıgöl, M. A., “On equivalence of absolute double weighted mean methods”, *Quaestiones Mathematicae*, 1-10, (2020).

Zeltser, M., “Investigation of Double sequence spaces by soft and hard analitical methods”, *Dissertationes Mathematicae Universtaties Tartuensis 25, Tartu University Press, Univ. of Tartu, Faculty of Mathematics and Computer Science,* Tartu, (2001).

Zeltser, M., “On conservative matrix methods for double sequence spaces”, *ActaMath. Hung.*, 95(3), 225–242, (2002).

Zeltser, M., Mursaleen, M. and Mohiuddine, S. A., “On almost conservativematrix methods for double sequence spaces”, *Publ. Math.*,Debrecen, 75, 387–399, (2009).