

**T.C.  
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**SÜPER MANİFOLDLAR ÜZERİNDE ZAMANA BAĞLI MEKANİK  
SİSTEMLER VE GRAF DEMET UYGULAMALARI**

**DOKTORA TEZİ**

**SİMGE ŞİMŞEK**

**DENİZLİ, HAZİRAN - 2021**

T.C.  
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI



**SÜPER MANİFOLDLAR ÜZERİNDE ZAMANA BAĞLI MEKANİK  
SİSTEMLER VE GRAF DEMET UYGULAMALARI**

DOKTORA TEZİ

SİMGE ŞİMŞEK

DENİZLİ, HAZİRAN - 2021

**Bu tez çalışması Pamukkale Üniversitesi, Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi Koordinatörlüğü(PAUBAP) tarafından 2015 FBE 010 nolu proje ile desteklenmiştir.**

**Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.**

**Simge ŞİMŞEK**

# ÖZET

## SÜPER MANİFOLDLAR ÜZERİNDE ZAMANA BAĞLI MEKANİK SİSTEMLER VE GRAF DEMET UYGULAMALARI

DOKTORA TEZİ  
SİMGE ŞİMŞEK  
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI:DOÇ.DR.CANSEL AYCAN)

DENİZLİ, Haziran - 2021

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, öncelikle Süper Simetri ve Graf Teorinin tarihçesine değinilmiştir. Daha sonra, mekanik enerji sistemleri için gerekli olan demet yapılarının genel formu ele alınarak Euler-Lagrange ve Hamilton denklemlerinin elde edilmiş yöntemi anlatılmıştır. Ayrıca çalışmamızın temelini oluşturacak olan süper uzay yapısı altında temel tanımlar verilerek, süper vektör uzayı, baz kavramı ve süper uzayın harita ve atlas yapısı sunulmuştur. Son olarak, Graf Teorinin temel elemanları olan köşe(vertex) ve kenar(edge) tanımları ve bu elemanlarla birlikte problemlerin çözümünde kullanılacak olan bazı kavramlar ve Graf manifold ile Graf demet yapısının tanımı verilmiştir.

İkinci bölümde, birinci bölümde verilen mekanik enerji sistemlerini elde etmek için gerekli olan demet yapısı, zamana bağlı Süper Euler-Lagrange ve Hamilton enerji denklemlerinin çözümleri için gerekli olan geometrik yapılar, süper uzay yapısına uygun olarak tanımlanmış ve süper mekanik sistemler elde edilmiştir. Yine süper uzayda tanımlanan süper çember, süper helis ve süper logaritmik spiral eğrileri üzerinde bir parçacığın hareketi incelenmiş ve elde edilen süper enerji denklemleri kullanılarak süper enerji fonksiyonları bulunmuş, çalışmanın birer uygulaması olarak sunulmuştur.

Üçüncü bölümde, birinci bölümde verilen Graf teorinin temel tanımları, süper uzay yapısına uygun şekilde ifade edilerek, literatüre kazandırılmıştır. Bununla birlikte, ikinci bölümde süper uzayda elde edilen süper Euler-Lagrange ve Hamilton mekanik sistemler, yeni süper Graf teoriye göre tanımlanmış geometrik yapılar ile elde edilerek, süper logaritmik spiral eğrisi üzerinde süper enerji fonksiyonları yeni tanımlanan bu süper Graf yapısına bağlı bulunarak, çalışmanın uygulaması olarak sunulmuştur.

Dördüncü bölümde, birinci bölümde, ikinci bölümde ve üçüncü bölümde elde edilen sonuçların diğer uzaylarla karşılaştırması yapılmış, çalışmanın amacına uygunluğu, geçerliliği ve doğruluğu konusunda değerlendirmede bulunulmuştur.

**ANAHTAR KELİMELEER:** Süper Uzay, Süper Manifold, Demet, Lagrange Enerji Denklemleri, Hamilton Enerji Denklemleri, Süper Graf Teori

## ABSTRACT

### TIME DEPENDENT MECHANICAL SYSTEMS AND GRAPH BUNDLE APPLICATIONS ON SUPER MANIFOLDS

PH.D THESIS

ŞİMGE ŞİMŞEK

PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE  
MATHEMATICS

(SUPERVISOR:ASSOC.DR.CANSEL AYCAN)

DENİZLİ, JUNE 2021

This study consists of four sections.

In the first chapter, firstly, the history of Supersymmetry and Graph Theory is mentioned. Then, the general form of bundle structures required for mechanical energy systems is discussed and the method of obtaining Euler-Lagrange and Hamilton equations is explained. In addition, by giving basic definitions on the super space structure that will form the basis of our study, the super vector space, the concept of base and the map and atlas structure of the super space are presented. Finally, the definitions of vertex and edge, which are the basic elements of Graph Theory, and some concepts to be used in solving the problems with these elements, as well as the definition of the Graph manifold and Graph bundle structure are given.

In the second chapter, the bundle structure required to obtain the mechanical energy systems are given in the first chapter, the geometric structures required for the solution of the time dependent super Euler-Lagrange and Hamilton energy equations are defined in accordance with the super space structure and super-mechanical systems are obtained. Then, the motion of a particle on the super circle, super helix and super logarithmic spiral curves defined in the super space has been investigated and the super energy functions have been found using the obtained super energy equations, presented as an application of the study.

In the third chapter, basic definitions of Graph theory given in the first chapter have been brought to the literature by expressing them in accordance with the super space structure. However, in the second chapter, the super Euler-Lagrange and Hamilton mechanical systems obtained in the super space have been obtained with geometric structures defined according to the new Super Graph theory, and the super energy functions on the super logarithmic spiral curve are found in accordance with the new super graph structure and presented as the application of the study.

In the fourth part, the results obtained in the first part, in the second part and in the third part were compared with other spaces, and evaluations were made about the suitability, validity and accuracy of the study.

**KEYWORDS:** Super Space, Super Manifold, Bundle, Lagrangian Energy Equations, Hamiltonian Energy Equations, Super Graph Theory

# İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT .....	ii
İÇİNDEKİLER .....	iii
ŞEKİL LİSTESİ.....	v
ÖNSÖZ.....	vi
<b>1. GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>
1.1 Süper Simetri ve Graf Teori .....	1
1.2 Tarihçe.....	2
1.2.1 Süper Simetri .....	2
1.2.2 Graf Teori .....	3
1.3 Temel Kavramlar.....	5
1.3.1 Genel Demet Yapıları .....	5
1.3.2 Euler-Lagrange ve Hamilton Denklemleri .....	7
1.3.3 Süper Uzay.....	12
1.3.3.1 Dış Cebir .....	12
1.3.3.2 $Z_2$ -Graded Vektör Uzayı ve $Z_2$ -Graded Cebiri.....	14
1.3.3.3 Süper Sayılar .....	14
1.3.3.4 Süper Sayıların Süper Analitik Fonksiyonu.....	18
1.3.3.5 Reel Süper Sayılar.....	19
1.3.3.6 Süper Vektör Uzayı .....	21
1.3.3.7 Baz Kavramı.....	24
1.3.3.8 Harita ve Atlas.....	25
1.3.4 Graf .....	30
<b>2. SÜPER MANİFOLDLAR ÜZERİNDE SÜPER JET DEMET YAPILAR VE SÜPER MEKANİK ENERJİ SİSTEMLER .....</b>	<b>33</b>
2.1 Süper Demet Yapıları .....	33
2.2 Süper Euler-Lagrange Mekanik Sistemler .....	35
2.2.1 Süper Euler-Lagrange Enerji Denklemleri .....	41
2.2.2 Uygulamalar.....	48
Örnek 2.2.12 .....	48
Örnek 2.2.13 .....	54
Örnek 2.2.14 .....	61
2.3 Süper Hamilton Mekanik Sistemler .....	70
2.3.1 Süper Hamilton Enerji Denklemleri .....	73
2.3.2 Uygulamalar.....	75
Örnek 2.3.9 .....	76
Örnek 2.3.10 .....	81
Örnek 2.3.11 .....	86
<b>3. SÜPER GRAF .....</b>	<b>94</b>
3.1 Süper Graf Demet Yapıları.....	94
3.2 Süper Graf Demet Yapıları Üzerinde Euler-Lagrange Mekanik Sistemler ve Euler-Lagrange Enerji Denklemleri .....	102

Örnek 3.2.2 .....	105
3.3 Süper Graf Demet Yapıları Üzerinde Hamilton Mekanik Sistemler ve Hamilton Enerji Denklemleri .....	107
Örnek 3.3.2 .....	110
<b>4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME .....</b>	<b>114</b>
<b>5. KAYNAKLAR.....</b>	<b>119</b>
<b>6. ÖZGEÇMİŞ .....</b>	<b>123</b>



## ŞEKİL LİSTESİ

### Sayfa

Şekil 1.1: Königsberg ve 7 köprüsü .....	3
Şekil 1.2: Königsberg'in grafla gösterimi.....	4
Şekil 1.3: Süpermanifold(body+soul).....	26
Şekil 1.4: Süpermanifold(body+soul çift+soul tek).....	27
Şekil 2.1: Süper çember(body).....	49
Şekil 2.2: Süper çember(soul çift).....	49
Şekil 2.3: Süper çember(soul tek).....	50
Şekil 2.4: Süper çember eğrisi üzerindeki hareket.....	50
Şekil 2.5: DNA' nın sarmal yapısı.....	54
Şekil 2.6: DNA' nın çift sarmal yapısı.....	55
Şekil 2.7: Sağ ve sol elli sarmallar .....	55
Şekil 2.8: DNA' nın sarmal yapısı üzerinde adenin- guanin, timin ve sitozin bağlanmasına karşılık gelen hareket. ....	56
Şekil 2.9: Çift sarmal eğri üzerinde parçacıkların hareketinin vektörler ile gösterimi.....	57
Şekil 2.10: Logaritmik spiral eğrisi üzerindeki hareket .....	61
Şekil 2.11: Logaritmik spiral eğrisi üzerinde hareketin vektörler ile gösterimi.....	62
Şekil 3.1: Süper graf manifoldun diferensiyellenebilir yapısının gösterimi. ....	95
Şekil 3.2: Süper graf manifold üzerinde köşeler(vertex) ve kenarlar(edge)....	100
Şekil 3.3: Logaritmik spiral eğrisi üzerinde $\beta$ dönüşümlerine uygun olarak seçilen köşeler(vertex) ve kenarlar(edge) .....	105
Şekil 3.4: Hareketin, $\beta$ dönüşümlerine uygun olarak seçilen altı tane süper köşe(vertex) ve kenarlar(edge) ile gösterimi.....	107

## ÖNSÖZ

Bu tez çalışması, Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Doktora programında hazırlanmıştır.

Bu çalışmada, diferensiyel geometrik kavramlardan jet demet yapıları alınarak, son yıllarda matematiksel fizikte, fiziksel uygulamaları açısından önem kazanan Süper uzay üzerinde, geometrik tekniklerin kullanımı açısından özel bir konu olan analitik mekanikteki Lagrangian ve Hamiltonian enerji sistemleri incelenmiştir. Bununla birlikte yine son yıllarda Graf Teorinin çok farklı çalışma alanları içerisinde yer aldığı görülmekte olup, bu çalışmada da Süper uzay üzerinde Graf Teorinin temel tanımları yapılmış, bu tanımlar ile birlikte Graf noktalar ve oluşturulan süper Graf koordinatlar kullanılarak demet yapıları kurulmuş ve Lagrangian ve Hamiltonian enerji sistemleri incelenmiştir.

Bu çalışmaya başlamamda bana katkıda bulunan, yardım ve eleştirilerini esirgemeyen değerli hocalarım; danışmanım Doç. Dr. Cansel AYCAN, Prof. Dr. Cumali EKİCİ, Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR, Prof. Dr. Murat Kemal KARACAN, Doç. Dr. Murat BEŞENK'e teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca çalışmalarım esnasında benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen ailem ve değerli arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

# 1 GİRİŞ

## 1.1 Süper Simetri ve Graf Teori

Süper simetri, bilim insanları tarafından geliştirilen maddenin temel anayasasındaki keskin düzenleyicilik ilkesini anlama çabası gösteren matematiksel bir ilkedir. Aslında birbirinden farklıymış gibi gözüken parçacıkların gizemli bir şekilde belirli simetrik ilkelerle birbirleriyle birleşik olduğunu biliyoruz. Basketbol topu gibi dünya üzerinde bulunan simetrik nesnelere gerçeğinin de farkındayız. Bu top küreyi çevirdiğimizde, esasen döndürdüğümüzde, temel olarak aynı gözücektir. Bazı parçacıkları, bir parçacık türünden başka bir parçacık türüne dönüştürdüğümüzde, parçacığın kimliği değişmiş gibi gözükse de sonuçta parçacığı tanımlayan denklemlerin simetri nedeniyle değişmediğini belirledik. Fakat madde parçacıkları ismini verdiğimiz parçacık türleriyle kuvvet parçacıkları dediğimiz tür arasında ilişkisel bir simetriyi henüz bulabilmiş değiliz. Madde parçacıkları dediğimiz elektronlar, müonlar, kuarklar gibi parçacıklar; kuvvet parçacıkları dediğimiz fotonlar, gluonlar, bozonlar gibi parçacıklardır. Süper simetri aslında bu iki tür, bu iki sınıf parçacıklar arasındaki simetridir. Bilim insanları henüz matematiksel olarak ya da gerçek olarak gösterilemeyen bu süper simetrinin, temel parçacıklar arasındaki ilişki için olası son simetri teorisi olduğunu ispatladılar. Şimdi ise, temel parçacıkları anlayabilmemiz adına bu simetri teorisinin dünyada geçerli olup olmadığını kanıtını bulma çabası içerisindedir.

Graf Teorisini literatürde çok farklı disiplinlerin çalışma alanları içerisinde görmekteyiz. Sosyolojiden, bilgisayar bilimlerine, işletmeden, endüstri mühendisliğine kadar çok geniş alanlarda kullanımı olduğu gibi matematiğin bir çalışma alanı olarak da karşımıza çıkıyor. Bu teori, aslında gerçek bir hayat probleminin basit bir şekilde graf ile modellenmesini amaçlamaktadır. Bu model oluşturulduktan sonra ise graf teorisinde bulunan yöntemler kullanılarak problem çözülebilmekte ve ardından da tekrar gerçek hayata uygulanabilmekte ve yorumlanabilmektedir. Graf teorisi temel olarak bir problemin kenar (edge) ve düğümler (node) ile modellenmesi ve bu modelin bir çizge şeklinde gösterilmesi ilkesine dayanmaktadır.

## 1.2 Tarihçe

### 1.2.1 Süper Simetri

Süper simetri, parçacık fiziğinde uzay-zaman simetrisinin karşılığıdır ve iki temel parçacıktan oluşur. Bunlar; açısız momentumu olan bozonlar ve yarı değerli açısız momentumu olan fermiyonlardır (Quevedo 2010). Süper simetri, klasik ve kuantum fiziği arasında oluşturduğu simetriden dolayı bugün bildiğimiz hiçbir simetriye benzemez. Genel olarak, istenilen birçok matematiksel özelliklerin sağlanması ve yüksek enerjilerde hassas davranışların garantiye alınması hususunda teorik problemlerin çözümlerine olanak sağlanmıştır.

Big Bang'den sonra oluşan evren, mükemmel bir simetriye sahipti. Evrendeki madde ile anti-madde oranı birbirine eşitti. Madde ile anti-madde bir araya gelerek 'saf enerji' denilen formu oluşturmaktadır. Bu enerji ise oldukça yüksek bir enerjidir. Evren, süper simetri durumundayken galaksilerin oluşması, madde ve anti-madde arasında tam bir denge olduğu için kısa sürmüştür. Çünkü, bu denge bozulmadığı sürece saf enerji evren tarafından verimli kullanılabilirdi. Bu dengeye de 'süper simetri' denildi. Zamanla bu denge bozulmuş, evrendeki anti madde oranında düşüş yaşanmış, madde oranının sayısı hızla artmıştır. Bu bozulmanın nedeninin ilk öngörüsü, mikro ölçekli karadelik teorisine göre kabul görmüştür. Bu teoriye göre, evren süper simetri durumundayken anti-madde kanadında oluşan küçük ölçekli bir karadelik, anti-maddelerin birçoğunu içerisine çekti. İkinci teori Higgs Bozonunda ise, evren süper simetri durumundayken Higgs alanı oluşuyor ve bu alan üzerinden geçen parçacıklar kütle kazanarak maddeye dönüşüyor ve evrendeki madde oranı dolayısıyla artıyor.

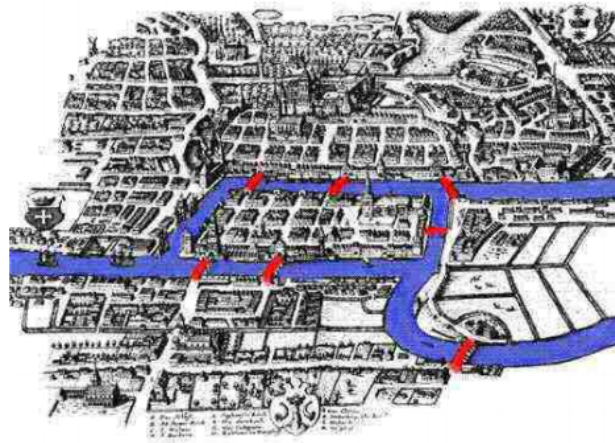
Süper manifold, anti-değişmeli koordinat kavramını içermesiyle klasik manifolddan daha geniş bir yapıya sahiptir. Süper manifold çalışmaları, geometriden, analizden, cebir ve topolojiden oluşan matematiksel düşünceleri, tanımları ve yapıları içerir. Bu yüzden, teorik fizik ve matematik problemlerini çözmek için daha güçlü bir yere sahiptir. Anti değişmeli değerlerin bulunduğu çalışmalarda, birkaç sene öncesinde fizikte süper simetri kavramının gelişmesiyle 'süper' sıfatı ön plana çıkmış ve süper matematikte yaygın olarak kullanılmaya başlanmıştır. Anti değişmeli yapılar, diferensiyel formlar, Lie cebirinde dış cebir kavramı, Weil model gibi geometri ve cebirin birçok alanında görülmektedir. 'Süper' kullanımı, ilk Cartan tanımı olan Grassman cebiri üzerinde Clifford cebirinde karşımıza çıkar. Uzun bir zaman sonrasında da konneksiyonlarda anti değişmeli fermiyon ilişkileri ile tekrar gündeme gelir. Schwinger, Green's fonksiyonlarını kullanarak Kuantum alan çalışmalarında anti değişmeli değişkenleri ortaya koymuştur. Bu anti

değişmeli değişkenlerin diferensiyel hesaplamaları Martin tarafından yapılmıştır. Berezin, fermionik nicelikleri geliştirmek için değişmeli değişken yapıları ve genel bosonik nicelikler ile karşılaştırma yapabilmek için anti değişmeli değerleri sayı olarak kullanmıştır.

Bir süper simetrik teoride, bosoniklerin ve fermiyoniklerin derecelerinden bağımsız olarak karşılıklı değişmeleri söz konusu olduğunda simetri altında değişmezliği ön plandadır. Geometrik düşünceler de anti değişmeli süper simetrik modelde değişim bu geometri liyakatına göre olmalıdır. Bu yüzden de süper manifold tanımı gereklidir. Süper simetrik modellerin öncü çalışmaları, ilk olarak 1970 lerde karşımıza çıkmaktadır. Süper simetride anti değişmeli değişkenler önemlidir. Bu durum, oldukça küçük formda olan süper Lie cebiri yapısından, daha açık olarak, Lie grubunu oluşturan çift üreteçlerde değişmeli, tek üreteçlerde anti değişmeli olan üreteçlerin meydana getirdiği ve sınıflandırıldığı simetrilerin doğal grup yapısını içermesi ile açıklanır ve fermiyonların bazı spesifik çalışmalarından bağımsız bir konumdadır. Artık daha da basit süper matematiksel yapıları klasik düşünceden  $Z_2$ 'ye genişletmek istersek de bu çift ve tek notasyonları kullanıyoruz.

Süper geometride, süper manifold yapısına götüren iki yol vardır. Birincisi, süper manifold, süper uzayda, Grassmann cebirinin çift ve tek değerli lokal koordinatlardan oluşan yapıdır. İkincisi, bir manifold üzerindeki fonksiyon demetlerinden oluşur.

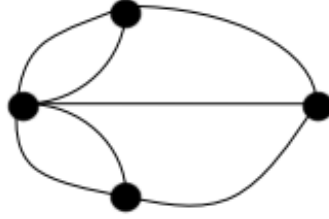
### 1.2.2 Graf Teori



Şekil 1.1: Königsberg ve 7 köprüsü

Graf Teori, 1736 yılında İsviçreli matematikçi Leonhard Euler tarafından Königsberg kasabasının 'Yedi Köprü Problemi' ele alınarak çalışılmıştır. Bu problem, Königsberg kasabasındaki Pregel nehri, Kneigh isimli adacığın etrafından akarak iki kola ayrılmaktaydı. Şekil 1.1'de gördüğümüz 7 köprü kentin 4 parçasını

birbirine bağlıyordu. Kasaba halkı eğlence amacıyla kentin farklı noktalarından hareket ederek 7 köprüyü birer kez geçip, başladıkları noktaya dönmeyi denemişler ancak hiçbiri bu geziyi başaramamış. Herkesin ortak merakı haline gelen bu problem o zamanın ünlü matematikçisi Leonhard Euler'ın ilgisini çekmiş ve Euler, problemi üzerinde daha rahat anlayabileceği ve çözebileceği bir şekilde temsil ederek işe başlamış.



Şekil 1.2: Königsberg'in grafla gösterimi

Euler, Şekil 1.2'de görüldüğü gibi kara parçalarının her birini bir noktayla, köprüleri de kenar denilen çizgilerle temsil etmiştir. Bununla birlikte artık problem graf teorisi ile "Herhangi bir noktadan harekete başlayıp, bütün kenarlardan bir ve yalnız bir defa geçerek, bütün noktaları ziyaret ettikten sonra başlangıç noktasına varabilir miyiz?" şekline gelmiştir. Euler, çalışmalarının sonucunda bunun mümkün olabilmesi için tüm noktaların çift dereceli olması gerektiğini ispatlamıştır. Yukarıdaki grafta da tüm noktaların dereceleri tek olduğundan Königsberg probleminin çözümünün mümkün olmadığı görülmüştür.

Burada Euler, noktaların tümünün derecelerinin çift olması gerektiğini ise şu şekilde elde etmişti:

Bu tür bir probleme bir noktadan başlanıldığında ve herhangi bir noktaya gelindiğinde bu noktada bir tane gelen bir tane de giden kenar olmalı ve böylece bu noktanın derecesi çift olmalıdır. Bu bütün noktalar için doğru olmalıdır, fakat biri çizime başladığımız diğeri de çizimi bitirdiğimiz nokta olmak üzere iki noktanın derecesi tek olabilir. Ancak Königsberg köprüleri probleminde, başlanılan noktaya geri dönülmesi amaçlandığından bu iki noktanın da mertebesi çift olmalıdır ve böylece ilgili grafiğin çizilebilir olması için gerek ve yeter koşul tüm noktaların derecelerinin çift olması gerekliliğidir (Biggs ve diğ. 1986).

Bu problem graf teorisinin başlangıcı olarak bilinmekte ve sonrasında konu ile ilgili birçok problem graf teorisinin tarihsel sürecinde yerini almıştır.

## 1.3 Temel Kavramlar

Bu bölümde, ileriki bölümlerde kullanılacak olan demet yapısı, mekanik sistemler, Lagrange ve Hamilton enerji denklemleri, Süper uzayın temel yapıları ve Graf Teorinin temel tanımları verilmiştir.

### 1.3.1 Genel Demet Yapıları

Bu bölümde, diferensiyel geometride önemli bir yere sahip olan manifold yapısı üzerinde demet yapısının nasıl oluşturulacağı ele alınmıştır.

**Tanım 1.3.1**  $E$  ve  $M$ ,  $C^\infty$ -manifoldlar,  $\pi : E \rightarrow M$  bir  $C^\infty$ -dönüşüm olsun. Eğer  $\pi$  bir örten submersion ise,  $(E, \pi, M)$  üçlüsüne bir lifli manifold denir. Bir  $(E, \pi, M)$  lifli manifoldunda,  $E$ ' ye total uzay,  $M$ ' ye taban uzay,  $\pi$ ' ye projeksiyon ve her bir  $p \in M$  noktası için  $E$ ' nin  $\pi^{-1}(p)$  altcümlesine de  $p$  üzerindeki lif denir (Aycan 2003, Dağlı 2012).

**Tanım 1.3.2** Bir lifli manifold  $(E, \pi, M)$ ,  $\text{boy}M = m$ ,  $\text{boy}E = m + n$  ve  $U \subset E$  açık alt cümlesi üzerinde bir koordinat sistemi,

$$y : U \rightarrow R^{m+n}$$

olsun.

$$pr_1 : R^{m+n} \rightarrow R^m$$

olmak üzere,  $a, b \in U$  ve

$$\pi(a) = \pi(b) = p \Rightarrow pr_1(y(a)) = pr_1(y(b))$$

önermesi doğru ise,  $y$  ye bir uyarlanmış koordinat sistemi denir (Aycan 2003, Dağlı 2012).

**Tanım 1.3.3** Bir lifli manifold  $(E, \pi, M)$  ve bir  $C^\infty$ -manifold  $F$  olmak üzere, eğer  $t : E \rightarrow M \times F$  dönüşümü

$$pr_1 \circ t = \pi$$

olacak şekilde bir diffeomorfizm ise  $(F, t)$  ikilisine  $\pi$ ' nin model lifi ve en azından bir trivializasyona sahip  $(E, \pi, M)$  lifli manifolduna da trivial lifli manifold denir (Aycan 2003, Dağlı 2012).

**Tanım 1.3.4** Bir lifli manifold  $(E, \pi, M)$  ve  $p \in M$  olsun.  $F_p$  bir  $C^\infty$ -manifold,  $p$ ' nin bir komşuluğu  $W_p$  ve

$$t_p : \pi^{-1}(W_p) \rightarrow W_p \times F_p$$

dönüşümü  $pr_1 \circ t_p = \pi|_{\pi^{-1}(W_p)}$  şartını sağlayan bir diffeomorfizm ise o zaman  $(W_p, t_p, F_p)$  üçlüsüne  $p$ ' nin komşuluğunda  $\pi$ ' nin bir lokal trivializasyonu ve taban uzayın her bir noktası civarında en az bir lokal trivializasyona sahip bir  $(E, \pi, M)$  lifli manifolduna da lokal trivial lifli manifold veya demet denir (Aycan 2003, Dağlı 2012).

**Tanım 1.3.5**  $M$  ve  $N$ ,  $C^\infty$ -manifoldlar,  $\varphi : M \rightarrow N$  bir  $C^\infty$ -dönüşüm,  $p \in M$  ve bir  $V_p \in T_p M$  tanjant vektörüne  $p$  noktasında teğet olan bir eğri

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$$

olsun. Bu durumda,

$$\varphi_*|_p(V_p) = W_{\varphi(p)} \in T_{\varphi(p)}N$$

tanjant vektörü,  $\varphi \circ \alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow N$  eğrisine  $\varphi(p)$  noktasında teğet olan bir tanjant vektör olmak üzere

$$\varphi_*|_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)}N$$

ile tanımlanan dönüşüme  $\varphi$ ' nin  $p \in M$  noktasındaki türev dönüşümü denir (Aycan 2003, Dağlı 2012).

Bu durumda,  $\pi_* : TE \rightarrow TM$ ,  $\pi$ ' nin türev dönüşümü olmak üzere,

$$\pi_* = (TE, \pi_*, TM)$$

üçlüsü bir demet olup;  $\pi_*$ ' ye  $\pi$ ' nin tanjant demeti denir (Aycan 2003, Dağlı 2012).

**Tanım 1.3.6:**  $(E, \pi, M)$  bir lifli manifold ve  $\varphi : M \rightarrow E$  bir dönüşüm olsun. Eğer  $\pi \circ \varphi = id_M$  koşulu gerçekleşiyorsa,  $\varphi$ ' ye  $\pi$ ' nin bir kesiti denir ve  $\pi$ ' nin tüm kesitlerinin cümlesi  $\Gamma(\pi)$  ile gösterilir (Aycan 2003, Dağlı 2012).

**Tanım 1.3.7**  $(E, \pi, M)$  bir demet ve  $p \in M$  olsun.  $\phi, \varphi \in \Gamma_p(\pi)$  kesitleri,  $p$  noktasında  $\phi(p) = \varphi(p)$  ve  $\phi(p)$  civarında  $(x_i, u^\alpha)$  uyarlanmış koordinat sisteminde

$$\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x_i}|_p = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x_i}|_p \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq \alpha \leq n$$

ise birinci mertebeden denklem olarak tanımlanır.  $\phi$ ' yı içeren denklik sınıflarına  $\phi$ ' nin  $p$  noktasındaki birinci jeti denir ve  $J_p^1 \phi$  ile gösterilir.

Buna göre,

$$\{J_p^1 \phi : p \in M, \phi \in \Gamma_p(\pi)\} \quad (1.1)$$

cümlesine  $\pi$  demetinin birinci jet manifoldu denir ve  $J^1 \pi$  ile gösterilir (Aycan 2003, Dağlı 2012).



**Tanım 1.3.8**  $(E, \pi, M)$  bir demet ve  $(U, u)$ ,  $u = (x_i, u^\alpha)$  olmak üzere  $E$  üzerinde uyarlanmış koordinat sistemi olsun. Bu durumda  $J^1\pi$  üzerinde  $(U^1, u^1)$  indirgenmiş koordinat sistemi,

$$U^1 = \{J_p^1\phi : \phi(p) \in U\} \quad u^1 = (x_i, u^\alpha, u_i^\alpha)$$

ile tanımlı olup burada

$$x_i(J_p^1\phi) = x_i(p), \quad u^\alpha(J_p^1\phi) = u^\alpha(\phi(p))$$

ve yeni  $mn$ -adet  $u_i^\alpha : U^1 \rightarrow R$  fonksiyonları ise,

$$u_i^\alpha(J_p^1\phi) = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x_i} \Big|_p \quad (1.2)$$

şeklinde belirlidir. Bu şekilde ifade edilen yeni  $u_i^\alpha$  koordinatları türevsel koordinatlar olarak adlandırılır (Giachetta ve diğ. 2002, Aycan 2003, Dağlı 2012.).

### 1.3.2 Euler-Lagrange ve Hamilton Denklemleri

Bu bölümde, Euler-Lagrange ve Hamilton denklemleri ile ilgili temel kavramlar verilecektir.

**Tanım 1.3.9**  $2m$  boyutlu bir manifold  $M$  ve  $M'$  nin tanjant demeti  $TM$  olsun.  $TM$  üzerinde  $J^2 = 0$  eşitliğini sağlayan ve  $rank J = m$  ile verilen  $(1, 1)$  tipinden  $J$  tensör alanına yaklaşık tanjant yapı denir.  $M$  manifoldu üzerinde lokal koordinatlar  $(x_i)$ ,  $1 \leq i \leq m$  ve  $TM$  üzerinde lokal koordinatlar  $(x_i, \dot{x}_i)$  olmak üzere  $TM$  üzerinde  $J$  yaklaşık tanjant yapısı,

$$J \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}, \quad J \left( \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0 \quad (1.3)$$

olarak tanımlanır (Aycan 2003, Dağlı 2012).

**Tanım 1.3.10**  $m$  boyutlu bir manifold  $M$  ve  $M'$  nin tanjant demeti  $TM$  olsun.  $TM$  üzerindeki bir vektör alanına  $M$  üzerinde semispray denir. Bu durumda  $\varepsilon$  semisprayi lokal olarak;

$$\varepsilon = \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \quad (1.4)$$

ile verilir. Burada  $\varepsilon_i$  fonksiyonları  $\varepsilon_i = \varepsilon_i(x_i, \dot{x}_i)$  olarak tanımlıdır.

Bu durumda,  $M$  manifoldu üzerinde verilen bir  $\sigma$  eğrisi eğer  $\varepsilon'$  nin bir integral eğrisi oluyorsa, bu eğriye  $\varepsilon'$  nin bir çözümü denir (Aycan 2003, Dağlı 2012).

**Tanım 1.3.11**  $J$ ,  $m$  boyutlu bir  $M$  manifoldunun tanjant demeti üzerinde bir yaklaşık tanjant yapı olsun. Bu durumda  $TM$  üzerinde lokal koordinatlar  $(x_i, \dot{x}_i)$ ,  $1 \leq i \leq m$  ve

$$\varepsilon = \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}$$

vektör alanı  $M$  üzerinde semispray olmak üzere

$$V = J\varepsilon = \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \quad (1.5)$$

ile verilen  $V$  vektör alanına Liouville vektör alanı denir (Aycan 2003, Dağlı 2012).

Buna göre,  $TM$  üzerinde tanımlı  $\varepsilon$  vektör alanının bir semispray olması için gerek ve yeter şart  $J\varepsilon = V$  olmasıdır (Rowe 2001).

**Tanım 1.3.12**  $M$  manifoldunun tanjant demeti  $TM$  üzerindeki  $p$ -formların cümlesi  $\Lambda^p(TM)$  ve  $TM$  üzerindeki vektör alanlarının cümlesi  $\chi(TM)$  olsun.

$$\begin{aligned} i_J f &= 0, \quad f \in C^\infty(TM) \\ i_J f(X_1, \dots, X_p) &= \sum_{i=1}^p w(X_1, \dots, JX_i, \dots, X_p); \quad w \in \Lambda^p(TM), \quad X_1, \dots, X_p \in \chi(TM) \end{aligned} \quad (1.6)$$

olarak tanımlı  $i_J$  fonksiyonuna düşey türev denir (Aycan 2003, Dağlı 2012).

Burada,

$$i_J(dx_i) = 0, \quad i_J(d\dot{x}_i) = dx_i$$

olur.

Ayrıca  $w \in \Lambda^p(TM)$   $p$ -formu,

$$w = \sum_{i_1 < \dots < i_p} w_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

şeklinde tanımlıdır ve diferensiyeli ise

$$dw = \sum_{i_1 < \dots < i_p} dw_{i_1, \dots, i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

olarak ifade edilen  $p + 1$ -formdur (Aycan 2003, Dağlı 2012).

$p + 1$ -formların cümlesini de  $\Lambda^{p+1}(TM)$  olarak gösterirsek

$$d_j : \Lambda^p(TM) \rightarrow \Lambda^{p+1}(TM)$$

olacak şekilde

$$d_j = [i_j d, d] = i_j d - d i_j \quad (1.7)$$

ile tanımlı  $d_j$  fonksiyonuna düşey diferensiyel denir.

$\forall X \in \chi(M)$  vektör alanı ile  $w$   $p$ -formunun  $i_X w$  iç çarpımı aşağıdaki şartları sağlayan bir  $(p - 1)$ -formdur.

- 1)  $i_X w = 0$ , eğer  $p = 0$  ise;
- 2)  $i_X w = w(X)$ , eğer  $p = 1$  ise;

3)  $i_X w(Y_1, \dots, Y_{p-1}) = w(X, Y_1, \dots, Y_{p-1})$ , eğer  $Y_1, \dots, Y_{p-1} \in \chi(M)$  ise; bu durumda  $i_X w \in \Lambda^{p-1}(M)$  olur (De Leon ve Rodrigues 1989).

**Tanım 1.3.13**  $M$ ,  $m$  boyutlu bir manifold ve  $M$ ' nin  $TM$  tanjant demeti üzerinde  $\phi$  bir 2-form olsun. Eğer  $\phi$  maksimal ranklı bir kapalı 2-form ise,  $(M, \phi)$  ikilisine simplektik manifold denir.

$TM$  üzerinde  $\phi_L = -dd_J L$  2-formu simplektik ise, bu durumda  $TM$  üzerinde tanımlı  $L : TM \rightarrow R$  fonksiyonu regüler yada non-dejeneredir denir (Aycan 2003, Holm ve diğ. 2009, Dağlı 2012).

**Tanım 1.3.14**  $M$ ,  $m$  boyutlu bir manifold ve  $TM$  tanjant demeti olsun.  $L : TM \rightarrow R$  bir  $C^\infty$ -fonksiyon olmak üzere,  $TM$  üzerindeki  $\phi_L = -dd_J L$  ile tanımlı kapalı 2-formu için  $E_L = VL - L$  eşitliğine  $L$  ile birleşen enerji fonksiyonu ve  $L$ ' ye de  $TM$  tanjant demeti üzerindeki Lagrange fonksiyonu denir.  $TM$  ise  $M$  konfigürasyon manifoldunun hız uzayı olarak adlandırılır (Aycan 2003, Dağlı 2012).

**Tanım 1.3.15**  $(M, \phi)$  simplektik manifold olmak üzere,  $L$  regüler Lagrange fonksiyonuna karşılık gelen ve  $E_L = VL - L$  eşitliği ile belirli olan enerji fonksiyonuna Hamilton enerji fonksiyonu denir ve  $H : M \rightarrow R$  ile gösterilir.

$M$  simplektik manifoldunun koordinatları ise  $(x_i, \dot{x}_i)$  olmak üzere,  $M$  üzerinde

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \quad (1.8)$$

olarak tanımlı vektör alanına Hamilton vektör alanı denir (Aycan 2003, Dağlı 2012).

**Tanım 1.3.16**  $(M, \phi)$  simplektik manifoldu üzerinde  $H$  Hamilton enerji fonksiyonu,  $X_H$  Hamilton vektör alanı olmak üzere,

$$i_{X_H} \phi = dH \quad (1.9)$$

denklemine Hamilton sistemlerinin simplektik (esas) formu yada Hamilton sistemleri dinamik denklemi denir. Bu denklemde  $\phi_L = -dd_J L$  2-form ve  $\varepsilon$  bir semispray kullanılarak elde edilen  $i_\varepsilon \phi_L = dE_L$  denklemine Lagrange sistemleri için dinamik denklemi adı verilir (Aycan 2003, Dağlı 2012).

**Teorem 1.3.17**  $i_\varepsilon \phi_L = dE_L$  denklemini sağlayan bir tek  $\varepsilon$  semisprayı vardır (De Leon ve Rodrigues 1989).

**Tanım 1.3.18**  $i_\varepsilon \phi_L = dE_L$  denklemini sağlayan bir tek  $\varepsilon$  semisprayı varsa  $E_L$  ye  $L : TM \rightarrow R$  fonksiyonu için Euler-Lagrange vektör alanı denir. Bu koşulu sağlayan  $L$  fonksiyonuna da Lagrange enerji fonksiyonu denir. Burada,

$$E_L = \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \quad (1.10)$$

ile tanımlı vektör alanıdır ve  $\varepsilon_i$  fonksiyonları  $\varepsilon_i = \varepsilon_i(x_i, \dot{x}_i)$  ile belirlidir.

$i_\varepsilon \phi_L = dE_L$  eşitliğin çözümüyle elde edilen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (1.11)$$

denkleminde Euler-Lagrange enerji denklemi denir (Crampin 1981, Aycan 2003, Holm ve diğ. 2009, Dağlı 2012).

Zamana bağlı Lagrange sistemlerini oluşturmak için jet manifoldlardan yararlanır.  $R$  bir boyutlu Öklid uzayı olmak üzere  $J^1(R, M) \cong TM$  izomorfizmi bilinmektedir.

$TM$ 'nin koordinatları  $(x_i, \dot{x}_i)$ ,  $R$ 'nin koordinatı ise  $(t)$  olmak üzere  $J^1(R, M)$  üzerindeki uyarlanmış koordinat sistemi  $(t, x_i, \dot{x}_i)$  olur. Zamana bağlı durumda yukarıda verilen Lagrange fonksiyonu  $L : J^1(R, M) \rightarrow R$  ile tanımlı  $C^\infty$ -dönüşümdür. Ayrıca, bu jet manifold üzerinde  $J^2 = 0$  eşitliğini sağlayan ve  $rank J = m$  ile verilen  $(1, 1)$  tipinden tensör alanı zamana bağlı yaklaşık tanjant yapı olarak tanımlanır.

$V$  bir Liouville vektör alanı olmak üzere, yaklaşık tanjant yapı;

$$J \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) = -V, \quad J \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}, \quad J \left( \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0 \quad (1.12)$$

koşullarını sağlamalıdır (De Leon ve Rodrigues 1989).

Zamana bağlı durumda  $\varepsilon$  semisprayi lokal olarak

$$\varepsilon = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \quad (\varepsilon_i = \varepsilon_i(t, x_i, \dot{x}_i), \quad 1 \leq i \leq m) \quad (1.13)$$

şeklinde ifade edilir.

**Tanım 1.3.19**  $L : J^1(R, M) \rightarrow R$  zamana bağlı Lagrange fonksiyonu olsun.  $J^1(R, M)$  üzerinde,

$$\alpha_L = d_J L + L dt \quad (1.14)$$

1-formuna Poincare-Cartan 1-formu ve

$$\Omega_L = dd_J L + dL \wedge dt \quad (1.15)$$

2-formuna Poincare-Cartan 2-formu denir.

Buna göre  $J^1(R, M)$  manifoldu üzerinde

$$i_\varepsilon \Omega_L = 0, \quad i_\varepsilon dt = 1 \quad (1.16)$$

denklemlerini sağlayan bir tek  $E_L$  vektör alanı vardır, buna zamana bağlı Euler-Lagrange vektör alanı denir.  $(J^1(R, M), \Omega_L, E_L)$  üçlüsüne de zamana bağlı Lagrange sistem denir (De Leon ve Rodrigues 1989).

(1.16) denklemlerinin çözümü ile elde edilen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (1.17)$$

denklemine zamana bağlı Euler-Lagrange enerji denklemi denir (De Leon ve diğ. 1996, Aycan 2003, Dağlı 2012, Sardanashvily 2013).

Burada dikkat edilirse, zamana bağlı olan durumda elde edilen (1.17) Euler-Lagrange denklemi ile zamana bağlı olmayan durumda elde edilen Euler-Lagrange denklemi (1.11) aynı çıkar. O halde, jet demet yapısında çalışmak Lagrange enerji denklemlerinin genel yapısını değiştirmez, fakat zaman parametresi çalışmaya dahil edileceği için fiziksel ve mekanik uygulamaları açısından elverişli olur.

**Tanım 1.3.20**  $T^*M$  kotanjant demetinin uyarlanmış koordinatları  $(x_i, \dot{x}_i)$  olmak üzere,

$$\lambda_M = \dot{x}_i dx_i \quad (1.18)$$

olarak tanımlı 1-formuna Liouville form denir.

Buna bağlı olarak  $T^*M$  üzerinde,

$$\phi_M = -d\lambda_M = dx_i \wedge d\dot{x}_i \quad (1.19)$$

simplektik formu kanonik simplektik form olarak adlandırılır (Sardanashvily ve Zakharov 1993, Sardanashvily 1998, Aycan 2003, Dağlı 2012).

**Tanım 1.3.21**  $(M, \phi)$  simplektik manifold ve  $H : M \rightarrow R$ ,  $M$  üzerinde tanımlı Hamilton fonksiyonu olsun.  $i_{X_H} \phi = dH$  denklemini sağlayan bir tek  $X_H$  vektör alanına,  $H$  Hamilton enerji fonksiyonu ile birleşen Hamilton vektör alanı denir.

Böylece,

$$i_{X_H} \phi = dH \quad (1.20)$$

simplektik formu kullanarak,

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_i}, \quad \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (1.21)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlere Hamilton denklemleri denir (Aycan 2003, Dağlı 2012).

Zamana bağlı Hamilton sistemler aşağıdaki şekilde ifade edilecektir.

**Tanım 1.3.22**  $(M, \phi)$  simplektik manifold ve  $H : M \rightarrow R$ ,  $M$  üzerinde tanımlı Hamilton fonksiyonu olsun.  $i_{X_{H_t}}\phi = dH_t$  denklemini sağlayan bir tek  $X_{H_t}$  vektör alanına, zamana bağlı Hamilton vektör alanı denir.

Böylece;  $X_{H_t}$  lokal olarak

$$X_{H_t} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H_t}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial H_t}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \quad (1.22)$$

şeklinde ifade edilir (Aycan 2003, Holm ve diğ. 2009, Dağlı 2012).

$\sigma : I = (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow R \times M$ ,  $\epsilon > 0$  için  $X_{H_t}$  vektör alanının bir integral eğrisi olsun. Böylece,

$$\sigma(t) = (t, x_i(t), \dot{x}_i(t)) \quad (1.23)$$

ve ayrıca  $\sigma$ ,  $X_{H_t}$ 'nin bir integral eğrisi olduğundan

$$\dot{\sigma}(t) = X_{H_t}(\sigma(t)) = \frac{\partial}{\partial t} + X_t(x_i(t), \dot{x}_i(t))$$

olur. Bu durumda

$$i_{X_{H_t}}\phi = dH_t$$

simplektik formu kullanılarak

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_i}, \quad \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (1.24)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlere zamana bağlı Hamilton denklemleri denir (Sardanashvily 1998, Aycan 2003, Dağlı 2012, Sardanashvily 2013).

### 1.3.3 Süper Uzay

Bu bölümde, çalışmamızın temel konusunu oluşturan süper uzay ile ilgili temel geometrik ve cebirsel özellikler verilmiştir.

#### 1.3.3.1 Dış Cebir

**Tanım 1.3.23**  $F$  bir cisim ve  $F = R$  veya  $C$  olsun.  $F$  üzerinde  $r$  tane vektör uzayı  $V_1, V_2, \dots, V_r$  olmak üzere,

$$f : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r \rightarrow F$$

dönüşümü  $r$ -lineer ise  $f$ 'ye  $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r$  çarpım cümlesi üzerinde  $r$ -lineer fonksiyon denir (Sağel 2003, Caston ve Fioresi 2007).

**Tanım 1.3.24**  $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r$  çarpım cümlesi üzerindeki bütün  $r$ -lineer fonksiyonlar cümlesi

$$L(V_1, V_2, \dots, V_r; F) = \{f : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r \rightarrow F; f, r\text{-lineer}\}$$

ile gösterilsin. Bu cümle,  $F$  cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

Bu vektör uzayına  $V_1^*, V_2^*, \dots, V_r^*$  dual vektör uzaylarının tensör çarpımı denir ve

$$L(V_1, V_2, \dots, V_r; F) = V_1^* \otimes V_2^* \otimes \dots \otimes V_r^*$$

ile gösterilir.  $V_1^* \otimes V_2^* \otimes \dots \otimes V_r^*$  tensör uzayının her bir elemanına  $r$ . mertebeden kovaryant tensör adı verilir. Kovaryant tensörlerin cümlesi  $\otimes^r V^*$  ile gösterilir (Sterberg 1999, Ekmekçi ve Hacısalihoğlu 2003, Sağel 2003).

**Tanım 1.3.25**  $f \in \wedge^p V^*$  ve  $g \in \wedge^q V^*$  olmak üzere

$$f \wedge g = -\frac{1}{p!q!} A_{p+q}(f \otimes g) \quad (1.25)$$

ile tanımlı  $f \wedge g \in \wedge^{p+q} V^*$  elemanına  $f$  ile  $g$  nin dış çarpımı denir.

$\wedge : \wedge V^* \times \wedge V^*$  dış çarpım işlemi  $\forall \sum_{p=0}^n f_p, \sum_{q=0}^n g_q \in \wedge V^*$  için

$$\sum_{p=0}^n f_p \wedge \sum_{q=0}^n g_q = \sum_{p+q=r=0}^n f_p \wedge g_q \quad (1.26)$$

biçiminde tanımlanır (Ekmekçi ve Hacısalihoğlu 2003).

**Tanım 1.3.26**  $\wedge V^*$  cümlesinde  $\wedge$  dış çarpım işlemi için,

$$1) \left[ \sum_{p=0}^n f_p \wedge \sum_{q=0}^n g_q \right] \wedge \left( \sum_{r=0}^n h_r \right) = \left( \sum_{p=0}^n f_p \right) \wedge \left[ \sum_{q=0}^n g_q \wedge \sum_{r=0}^n h_r \right] \quad (\text{birleşme özelliği})$$

$$2) \left[ \sum_{p=0}^n f_p + \sum_{q=0}^n g_q \right] \wedge \left( \sum_{r=0}^n h_r \right) = \left( \sum_{p=0}^n f_p \wedge \sum_{r=0}^n h_r \right) + \left( \sum_{q=0}^n g_q \wedge \sum_{r=0}^n h_r \right) \quad (\text{dağılma özelliği})$$

$$3) \lambda \left[ \sum_{p=0}^n f_p \wedge \sum_{q=0}^n g_q \right] = \left[ \left( \lambda \sum_{p=0}^n f_p \right) \wedge \sum_{q=0}^n g_q \right] = \left[ \sum_{p=0}^n f_p \wedge \left( \lambda \sum_{q=0}^n g_q \right) \right], \lambda \in R$$

(skalere ile çarpım)

özelliklerine sahip  $\wedge V^*$  vektör uzayı,  $F$  cismi üzerinde bir cebirdir. Bu cebire  $V^*$  vektör uzayının dış cebiri denir (Covolo ve Poncin 2012).

### 1.3.3.2 $Z_2$ -Graded Vektör Uzayı ve $Z_2$ -Graded Cebiri

**Tanım 1.3.27**  $V$  bir vektör uzayı olsun.  $V_{i(\text{mod}.2)}$ ,  $V$  vektör uzayının lineer alt uzayları, yani

$$V = V_0 \oplus V_1 \quad (1.27)$$

oluyorsa  $V$  vektör uzayına  $Z_2$ - Graded vektör uzayı denir (DeWitt 1984, Rothstein 1986, Rogers 2007, Caston ve Fioresi 2007).

**Tanım 1.3.28**  $V$ , bir  $Z_2$ - Graded vektör uzayı olsun.  $V, V_i V_j \subset V_{i+j(\text{mod}.2)}$  olacak biçimde bir cebir ise  $V$  ye  $Z_2$ - Graded cebiri denir (DeWitt 1984, Sardanashvily 2008, Sardanashvily 2009).

**Tanım 1.3.29**  $V$ , bir  $Z_2$ - Graded vektör uzayı olsun.  $V$  nin herhangi bir elemanı,  $V_0$  a veya  $V_1$  e ait ise bu elemana homojen eleman denir (Caston ve Fioresi 2007, Rogers 2007).

**Tanım 1.3.30**  $\forall v \in V$ , bir homojen eleman olsun. Bu homojen elemanın derecesi şu şekilde tanımlanır, eğer,  $v \neq 0$  ve  $v \in V_0$  ise  $v$  nin derecesi(paritesi) 0,  $v \neq 0$  ve  $v \in V_1$  ise  $v$  nin derecesi(paritesi) 1 olup  $|v|$  notasyonu ile gösterilir (DeWitt 1984, Rogers 2007).

**Tanım 1.3.31**  $V$  herhangi bir cebir olsun. Eğer  $a \in V_0$ ,  $b \in V_1$  için

$$ab = (-1)^{|a||b|}ba \quad (1.28)$$

sağlamyorsa  $V$  cebirine  $Z_2$ - Graded komütatif cebiri denir (DeWitt 1984, Rogers 2007, Caston ve Fioresi 2007, Sardanashvily 2009).

### 1.3.3.3 Süper Sayılar

$\varepsilon = \{\varepsilon^a, a = 1, \dots, N\}$  cümlesi bir cebir için üreteçler olmak üzere,  $\forall a, b$  için

$$\varepsilon^a \varepsilon^b = -\varepsilon^b \varepsilon^a \quad (1.29)$$

$$(\varepsilon^a)^2 = 0 \quad (1.30)$$

özelliklerine sahip ise  $L$  cebiri, Grassmann cebiri olarak adlandırılır ve  $\wedge_N$  ile gösterilir.

$N \rightarrow \infty$  için düşünülürse  $\wedge_\infty$  da bir cebir olur ve  $\varepsilon = \{1, \varepsilon^a, \varepsilon^a \varepsilon^b, \dots\}$  (indislerin farklı çarpan durumları gözönüne alınarak)  $\wedge_\infty$  için bir bazdır.



$N$  sonlu olduğu zaman ise,  $\wedge_N$ ,  $2^N$  tane baz elemanına sahiptir.

$$\sum_{k=0}^N \binom{N}{k} = 2^N$$

olduğundan  $\text{boy}\wedge_N = 2^N$  dir (DeWitt 1984).

**Tanım 1.3.32**  $\wedge_\infty$ un herbir elemanına *süpersayı* denir.  $Z \in \wedge_\infty$  süpersayı,  $\varepsilon^a$  gerenleri ve  $C$  kompleks sayıları yardımıyla,

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} c_{a_1 \dots a_n} \varepsilon^{a_n} \dots \varepsilon^{a_1} \quad (1.31)$$

$$Z = \frac{1}{0!} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} c_{a_1 \dots a_n} \varepsilon^{a_n} \dots \varepsilon^{a_1}$$

şeklinde yazılabilir.  $Z = Z_B + Z_S$  olarak yazılmak istenirse,

$$Z_B = \frac{1}{0!} c_0 \quad (1.32)$$

$$Z_S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} c_{a_1 \dots a_n} \varepsilon^{a_n} \dots \varepsilon^{a_1} \quad (1.33)$$

şeklindedir.  $Z$  süpersayı için,  $Z_B$  body kısım,  $Z_S$  soul kısım olarak adlandırılır (DeWitt 1984, Cartier ve diğ. 2002).

**Özellik 1.3.33** Eğer  $N$  sonlu ise,  $Z_S$  daima nilpotenttir (DeWitt 1984, Cartier ve diğ. 2002). Yani,

$$(Z_S)^{n+1} = 0$$

Buna göre,

$$Z^{-1} = Z_B^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{Z_S}{Z_B} \right)^n \quad (1.34)$$

**Teorem 1.3.34** "Bir süpersayı tersinirdir  $\iff Z_B \neq 0$ " (DeWitt 1984).

**İspat** Bilindiği üzere bir süper sayının tersinir olması için  $Z.Z^{-1} = 1$  olmalıdır.

*Gereklilik:* Bir süper sayı tersinir olsun. Yani  $Z.Z^{-1} = 1$  olsun. Dolayısıyla;

$$\begin{aligned} Z.Z^{-1} &= (Z_B + Z_S)Z_B^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{Z_S}{Z_B} \right)^n \\ &= (Z_B + Z_S)Z_B^{-1} \left( 1 - \frac{Z_S}{Z_B} + \frac{Z_S^2}{Z_B^2} - \dots \right) \\ &= \left( 1 - \frac{Z_S}{Z_B} + \frac{Z_S^2}{Z_B^2} - \dots \right) + \left( \frac{Z_S}{Z_B} - \frac{Z_S^2}{Z_B^2} + \frac{Z_S^3}{Z_B^3} - \dots \right) = 1 \end{aligned}$$

Kabulümüzden dolayı yukarıdaki eşitliğin varolması için  $Z_B \neq 0$  olmalıdır.

*Yeterlilik:*  $Z_B \neq 0$  olsun. Bir süper sayının tersinir olduğunu gösterelim. Buna göre  $Z.Z^{-1} = 1$  olduğunu göstermek yeterlidir. Özellik 1.3.33' ün ve  $Z_B \neq 0$  durumunun kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} Z.Z^{-1} &= (Z_B + Z_S)Z_B^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{Z_S}{Z_B} \right)^n \\ &= (Z_B + Z_S)Z_B^{-1} \left( 1 - \frac{Z_S}{Z_B} + \frac{Z_S^2}{Z_B^2} - \dots \right) \\ &= \left( 1 - \frac{Z_S}{Z_B} + \frac{Z_S^2}{Z_B^2} - \dots \right) + \left( \frac{Z_S}{Z_B} - \frac{Z_S^2}{Z_B^2} + \frac{Z_S^3}{Z_B^3} - \dots \right) = 1 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. İspat tamamlanmış olur.

**Özellik 1.3.35**  $f$  nin  $Z_B$  noktasındaki Taylor açılımı

$$f(Z) = f(Z_B) + f'(Z_B)(Z - Z_S) + \frac{1}{2!} f''(Z_B)(Z - Z_S)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(Z_B)(Z - Z_S)^n + \dots$$

şeklinde ifade edilir (DeWitt 1984, Caston ve Fioresi 2007, Rogers 2007, Sardanashvily 2008, Balduzzi Dottorato di ricerca XXI ciclo).

Diğer taraftan herhangi bir  $Z$  süpersayı

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} c_{a_1 \dots a_n} \varepsilon^{a_n} \dots \varepsilon^{a_1}$$

şeklinde ifade edilmiştir.  $n$  nin tek veya çift olma durumuna göre  $Z$  süpersayı

$$Z = \frac{1}{0!} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} c_{a_2 \dots a_{2n}} \varepsilon^{a_{2n}} \dots \varepsilon^{a_2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} c_{a_1 \dots a_{2n+1}} \varepsilon^{a_{2n+1}} \dots \varepsilon^{a_1} \quad (1.35)$$

toplam biçiminde ifade edilebilir.

$$U = Z_B + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} c_{a_2 \dots a_{2n}} \varepsilon^{a_{2n}} \dots \varepsilon^{a_2} \quad (1.36)$$

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} c_{a_1 \dots a_{2n+1}} \varepsilon^{a_{2n+1}} \dots \varepsilon^{a_1} \quad (1.37)$$

şeklinde yazıldığında çift sayı indisli'lere çift süpersayı, tek sayı indisli'lere tek süpersayı denir. (DeWitt 1984, Cartier ve diğ. 2002).

**Tanım 1.3.36** Komütatif olan çift süpersayılar c-sayılar ( $C_c$  ile gösterilir), anti-komütatif olan tek süpersayılar a-sayılar ( $C_a$  ile gösterilir) denir (DeWitt 1984).

**Özellik 1.3.37:** a-sayılar body kısım içermediği için, tersinir değildir (DeWitt 1984). (Teorem 1.3.34'den aşıkardır.)

**Özellik 1.3.38** İki a-sayının veya iki c-sayının çarpımı bir c-sayıdır (DeWitt 1984).

**İspat** Gerçekten;

$Z$  ve  $Z'$  iki a-sayı olsun. Buna göre,

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} c_{a_1 \dots a_{2n+1}} \varepsilon^{a_{2n+1}} \dots \varepsilon^{a_1} \quad \text{ve} \quad Z' = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} c_{a_1 \dots a_{2m+1}} \varepsilon^{a_{2m+1}} \dots \varepsilon^{a_1}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} ZZ' &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} c_{a_1 \dots a_{2n+1}} \varepsilon^{a_{2n+1}} \dots \varepsilon^{a_1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} c_{a_1 \dots a_{2m+1}} \varepsilon^{a_{2m+1}} \dots \varepsilon^{a_1} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} \frac{1}{(2n+1)!} c_{a_1 \dots a_{2m+1}} c_{a_1 \dots a_{2n}} \varepsilon^{a_{2m+1}} \dots \varepsilon^{a_1} \varepsilon^{a_{2n}} \dots \varepsilon^{a_1} \end{aligned}$$

Burada parite kavramı dikkate alınarak işlem yapılır. İşlem çarpma işlemi olup parite kavramı gözönüne alınırsa sonucun

$$ZZ' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} c_{a_2 \dots a_{2k}} \varepsilon^{a_{2k}} \dots \varepsilon^{a_2}$$

şeklinde bir c-sayı olduğu görülür. (Analiz ederken tek parite=1 ve çift parite=0 olduğu gözönüne alınır. Bu durumda; *tek parite*+*çift parite* = *tek parite*, *tek parite*+*tek parite* = *çift parite*, *çift parite*+*çift parite* = *çift parite* eşitlikleri yardımıyla sonuca ulaşılır.)

Benzer şekilde iki c-sayının çarpımı da gösterilebilir. Bu durumda;

$Z$  ve  $Z'$  iki c-sayı olsun. Buna göre,

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} c_{a_2 \dots a_{2n}} \varepsilon^{a_{2n}} \dots \varepsilon^{a_2} \quad \text{ve} \quad Z' = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} c_{a_2 \dots a_{2m}} \varepsilon^{a_{2m}} \dots \varepsilon^{a_2}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} ZZ' &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} c_{a_2 \dots a_{2n}} \varepsilon^{a_{2n}} \dots \varepsilon^{a_2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} c_{a_2 \dots a_{2m}} \varepsilon^{a_{2m}} \dots \varepsilon^{a_2} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \frac{1}{(2n)!} c_{a_2 \dots a_{2m}} c_{a_1 \dots a_{2n}} \varepsilon^{a_{2m}} \dots \varepsilon^{a_2} \varepsilon^{a_{2n}} \dots \varepsilon^{a_2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} c_{a_2 \dots a_{2k}} \varepsilon^{a_{2k}} \dots \varepsilon^{a_2} \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

**Özellik 1.3.39** Bir  $a$ -sayı ve bir  $c$ -sayının çarpımı bir  $a$ -sayıdır (DeWitt 1984).

**İspat** Gerçekten,

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} c_{a_1 \dots a_{2n+1}} \varepsilon^{a_{2n+1}} \dots \varepsilon^{a_1} \quad \text{ve} \quad Z' = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} c_{a_2 \dots a_{2m}} \varepsilon^{a_{2m}} \dots \varepsilon^{a_2}$$

olmak üzere yukarıda bahsedildiği gibi parite kavramı gözönüne alındığında,

$$ZZ' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} c_{a_1 \dots a_{2k+1}} \varepsilon^{a_{2k+1}} \dots \varepsilon^{a_1}$$

sonucuna ulaşılır.

**Özellik 1.3.40**  $a$ -sayıların karesi sıfırdır (DeWitt 1984).

**İspat** Kabul edelim ki,

$$Z' = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} c_{a_2 \dots a_{2m}} \varepsilon^{a_{2m}} \dots \varepsilon^{a_2}$$

olmak üzere

$$(Z')^2 = \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} c_{a_2 \dots a_{2m}} \varepsilon^{a_{2m}} \dots \varepsilon^{a_2} \right)^2 = 0$$

Çünkü  $(\varepsilon^a)^2 = 0$  dir.

### 1.3.3.4 Süper Sayıların Süper Analitik Fonksiyonu

$f : C_a \rightarrow \wedge_N$  olmak üzere

$$df(v) = dv \left[ \frac{d}{dv} f(v) \right] = \left[ f(v) \frac{d}{dv} \right] dv \quad (1.38)$$

dir.  $v$  ye bağlı olan  $\frac{d}{dv} f(v)$  ve  $f(v) \frac{d}{dv}$  katsayılarına sırasıyla  $f$  nin sol türevi ve sağ türevi denir (DeWitt 1984).

Yukarıdaki eşitliğin genel çözümü  $f = a + bv$  şeklindedir. Eğer  $b = b_e + b_o$  şeklinde tek ve çift kısımdan oluşuyorsa,

$$f(v) \frac{d}{dv} = b_e + b_o \quad \text{ve} \quad \frac{d}{dv} f(v) = b_e - b_o \quad (1.39)$$

olur (DeWitt 1984).

**Özellik 1.3.41** Eğer  $f$  nin görüntü kümesi  $C_c$  de ise,  $a$  çift,  $b$  tek ve

$$\frac{d}{dv} f(v) = -f(v) \frac{d}{dv} \quad (1.40)$$

dir (DeWitt 1984).

Çünkü,  $\forall v \in C_a$  için  $f(v) \in C_c$  olacağından  $a, bv \in C_c$  olmalıdır. Buna göre,  $a \in C_c$  ve  $bv \in C_c$  olur ve dolayısıyla  $b \in C_a$  olur.

**Özellik 1.3.42** Eğer  $f$  nin görüntü kümesi  $C_a$  de ise,  $a$  tek,  $b$  çift ve

$$\frac{d}{dv} f(v) = f(v) \frac{d}{dv} \quad (1.41)$$

dir (DeWitt 1984).

Çünkü,  $\forall v \in C_a$  için  $f(v) \in C_a$  olacağından  $a, bv \in C_a$  olmalıdır. Buna göre,  $a \in C_a$  ve  $bv \in C_a$  olur ve dolayısıyla  $b \in C_c$  olur.

**Tanım 1.3.43** Benzer şekilde,  $f : C_c \rightarrow \wedge_\infty$  için

$$df(u) = du \left[ \frac{d}{du} f(u) \right] = \left[ f(u) \frac{d}{du} \right] du$$

olur.  $du$  bir c-sayı olduğundan,

$$\frac{d}{du} f(u) = f(u) \frac{d}{du} \quad (1.42)$$

eşitliği vardır (DeWitt 1984).

**Özellik 1.3.44**  $f$  nin görüntü kümesi  $C_c$  de ise,  $n$  tek iken  $f_{a_1 \dots a_n} = 0$  dir (DeWitt 1984).

$f$  nin görüntü kümesi  $C_a$  de ise,  $n$  çift iken  $f_{a_1 \dots a_n} = 0$  dir (DeWitt 1984).

### 1.3.3.5 Reel Süper Sayılar

**Tanım 1.3.45** Reel süpersayıları ifade etmek için kompleks konjuge(eşleniklik) kurallarına ihtiyaç vardır. Kompleks konjuge operatörü  $()^*$  olmak üzere,

$$(Z + Z')^* = (Z)^* + (Z')^* \quad (1.43)$$

$$(ZZ')^* = (Z')^* (Z)^* \quad (1.44)$$

eşitlikleri vardır (DeWitt 1984).

$C_c$  cümlesindeki bütün reel elemanların cümlesi  $R_c$  ve  $C_a$  cümlesindeki bütün

reel elemanların cümlesi  $R_a$  ile gösterilir.

$$\text{Burada, } R_c = \{z \in C_c : z^* = z\}$$

$$R_a = \{z \in C_a : z^* = -z\}$$

şeklindedir.  $z^*$ 'ın pozitif ve negatif olma durumu c-sayı ve a-sayının parity kavramı ile ilgilidir. ( $-1^{p(z)}$  ile belirlenir.)

$\wedge_\infty$  in bazları,

$$\begin{aligned} (\varepsilon^a)^* &= \varepsilon^a \\ (\varepsilon^a \varepsilon^b \dots \varepsilon^c)^* &= \varepsilon^c \dots \varepsilon^b \varepsilon^a \end{aligned}$$

**Tanım 1.3.46** Bir  $Z$  süper sayısı için  $Z^* = Z$  ise  $Z$  süper sayısına reel,  $Z^* = -Z$  ise  $Z$  süper sayısına imajiner denir (DeWitt 1984).

**Özellik 1.3.47**  $\varepsilon^{a_1} \dots \varepsilon^{a_n}$  baz elemanları,

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{2} \text{ tek iken imajinerdir,} \\ \frac{n(n-1)}{2} \text{ çift iken reeldir} \end{aligned}$$

(DeWitt 1984).

**İspat**

Gerçekten,  $(\varepsilon^a \varepsilon^b \dots \varepsilon^c)^* = \varepsilon^c \dots \varepsilon^b \varepsilon^a$  ve  $\varepsilon^a \varepsilon^b = -\varepsilon^b \varepsilon^a$  özelliklerinden

$$\frac{n(n-1)}{2} \text{ tek iken anti-komütatif tanımından } (\varepsilon^{a_1} \dots \varepsilon^{a_n})^* = -\varepsilon^{a_n} \dots \varepsilon^{a_1}$$

$$\frac{n(n-1)}{2} \text{ çift iken komütatif tanımından } (\varepsilon^{a_1} \dots \varepsilon^{a_n})^* = \varepsilon^{a_n} \dots \varepsilon^{a_1} \text{ olur.}$$

**Sonuç 1.3.48**  $Z_S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} c_{a_1 \dots a_n} \varepsilon^{a_n} \dots \varepsilon^{a_1}$  olmak üzere,

$$Z_S \text{ reeldir} \iff \begin{cases} c_{a_1 \dots a_n} \text{ reel ve } \frac{n(n-1)}{2} \text{ çift iken} \\ c_{a_1 \dots a_n} \text{ imajiner ve } \frac{n(n-1)}{2} \text{ tek iken} \end{cases} \quad (1.45)$$

(DeWitt 1984).

**Tanım 1.3.49**  $Z \in \Lambda_\infty$  herhangi bir süpersayı olsun.

$$Z \text{ reeldir} \iff Z_B \text{ ve } Z_S \text{ reeldir}$$

gerek ve yeter şartı vardır (DeWitt 1984).

**Tanım 1.3.50**  $C_c$  cümlesindeki bütün reel elemanların cümlesi  $R_c$  ve  $C_a$  cümlesindeki bütün reel elemanların cümlesi  $R_a$  ile gösterilir (DeWitt 1984).

### Özellik 1.3.51

1) İki reel c-sayının çarpımı bir reel c-sayıdır (DeWitt 1984).

Gerçekten, Özellik 1.3.38'den iki c-sayının çarpımı bir c-sayıdır. Diğer taraftan, her iki sayı reel olduğu için ve c-sayıların pariteleri çift ( $p(c) = 0$ ) olduğu için iki reel sayının çarpımının paritesi çift olur, dolayısıyla bir reel c-sayı olur.

2) Bir reel a-sayı ile bir reel c-sayının çarpımı bir reel a-sayıdır (DeWitt 1984).

Gerçekten, Özellik 1.3.39'dan bir a-sayı ile bir c-sayının çarpımı bir a-sayıdır. Diğer taraftan, her iki sayı reel olduğu için ve pariteleri ( $p(a) = 1$  ve  $p(c) = 0$ ) olduğu için iki reel sayının çarpımının paritesi tek olur. (Dikkat edilmesi gereken nokta özellikle a-sayı ile çarpılıyor olması) Çarpım sonucu bir a-sayı olduğu ve  $p(a) = 1$  olduğundan bu a-sayının reel olması gerektiği sonucunu doğurur.

3) İki reel a-sayının çarpımı bir imajiner c-sayıdır (DeWitt 1984).

Gerçekten, Özellik 1.3.38'den iki a-sayının çarpımı bir c-sayıdır. Diğer taraftan, her iki sayı reel olduğu için ve pariteleri tek ( $p(a) = 1$ ) olduğu için iki reel sayının çarpımının paritesi tek olur. (Dikkat edilmesi gereken nokta özellikle a-sayı ile çarpılıyor olması), çarpım sonucu c-sayı olduğu ve  $p(c) = 0$  olduğu gözönüne alınırsa sonucun imajiner olmasını gerektirir.

### 1.3.3.6 Süper Vektör Uzayı

Elemanları süpervektörler olan  $G$  kümesi üzerinde  $+$  iç işlemi,  $\cdot$  dış işlemi ve  $*$  kompleks konjüge işlemi tanımlansın. Bu durumda,  $X, Y \in G, \alpha, \beta \in \Lambda_\infty$  olmak üzere, ve

$$\begin{aligned}\alpha_L & : G \rightarrow G \quad , \quad \alpha_L(X) = \alpha X \\ \alpha_R & : G \rightarrow G \quad , \quad \alpha_R(X) = X\alpha\end{aligned}$$

işlemleri için

1)  $X + Y = Y + X$

2)  $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z = X + Y + Z$

$$3) 0 \in G \text{ olmak üzere } X + 0 = 0 + X = X$$

$$4) -X + X = 0$$

5)

$$(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X \quad X(\alpha + \beta) = X\alpha + X\beta \quad 1X = X1 = X$$

$$\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y \quad (X + Y)\alpha = X\alpha + Y\alpha \quad 0X = X0 = 0$$

$$(\alpha\beta)X = \alpha(\beta X) = \alpha\beta X \quad X(\alpha\beta) = (X\alpha)\beta = X\alpha\beta \quad \alpha 0 = 0\alpha = 0$$

$$6) (\alpha X)\beta = \alpha(\beta X) = \alpha\beta X$$

Eğer,  $\alpha \in C_c$  ise  $\alpha X = X\alpha$

$$\alpha \in C_a \text{ ise } X = u + v \text{ için } \alpha u = u\alpha \text{ ve } \alpha v = -v\alpha$$

$$7) X^{**} = X$$

$$(X + Y)^* = (X)^* + (Y)^*$$

$$(\alpha X)^* = (X)^* (\alpha)^* \text{ ve } (X\alpha)^* = (\alpha)^* (X)^*$$

şartları sağlanıyorsa  $G$  bir süpervektör uzayıdır (DeWitt 1984, Yagi 1988).

**Tanım 1.3.52**  $X = u(\text{cift}) + v(\text{tek})$  süpervektörü olmak üzere, eğer,  $u = 0$  ise,  $X$ , bir a-tip süpervektördür,  $v = 0$  ise,  $X$ , bir c-tip süpervektördür (DeWitt 1984).

**Tanım 1.3.53** a-tip ve c-tip olan süpervektöre Pure süpervektör denir ve

$$\alpha X = (-1)^{\alpha X} X\alpha$$

eşitliği vardır (DeWitt 1984).

**Tanım 1.3.54** Bir  $Z$  süpervektörü için,  $Z^* = Z$  ise reel süpervektör,  $Z^* = -Z$  ise imajiner süpervektördür (DeWitt 1984).

**Özellik 1.3.55**  $Z$  kompleks süpervektörü olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}(Z + Z^*) = X^* \\ -Y &= \frac{1}{2}i(Z - Z^*) = Y^* \end{aligned}$$

olmak üzere  $Z = X + iY$  şeklinde yazılır (DeWitt 1984).

Gerçekten;  $Z = X + iY$  ve  $Z^* = X - iY = X^* + iY^*$  olsun.

$$\begin{aligned} X &= \frac{(Z + Z^*)}{2} = X^* \\ Y &= \frac{(Z - Z^*)}{2i} = -Y^* \implies -Y = \frac{(Z - Z^*)}{2}i = Y^* \end{aligned}$$



olur.

**Özellik 1.3.56**

1) Bir reel c-sayısı ile bir reel süpervektörün çarpımı bir reel süpervektördür (DeWitt 1984).

2) Bir reel a-sayısı ile bir reel c-tip süpervektörün çarpımı bir reel a-tip süpervektördür (DeWitt 1984).

3) Bir reel a-sayısı ile bir reel a-tip süpervektörün çarpımı bir imajiner c-tip süpervektördür (DeWitt 1984).

(Bu ifadelerin doğruluğu Özellik 1.3.38, Özellik 1.3.39 ve Özellik 1.3.51'den aşıkardır.)

**Tanım 1.3.57** Herhangi iki  $X$  ve  $Y$  süpervektörünün çift ve tek kısımdan oluştuğunu dikkate alırsak,

$$\begin{aligned} X &= X_{i,je}e_{i,je} + X_{jo}e_{jo} & (X &= X_i e_i + X_{je} e_{je} + X_{jo} e_{jo}) \\ Y &= Y_{i,je}e_{i,je} + Y_{jo}e_{jo} & (Y &= Y_i e_i + Y_{je} e_{je} + Y_{jo} e_{jo}) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Buna göre, bu süper vektörlerin iç çarpımı,

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle &= X_{i,je}Y_{i,je} - X_{jo}Y_{jo} \\ &= X_i Y_i + X_{je} Y_{je} - X_{jo} Y_{jo} \end{aligned} \tag{1.46}$$

olur. Burada

$$\delta_{p_1, p_2} = \begin{cases} 1, & p_1 = p_2 = \text{çift} \\ 0, & p_1 \neq p_2 \\ -1, & p_1 = p_2 = \text{tek} \end{cases}$$

şeklindedir.

**Tanım 1.3.58** Matematik ve teorik fizikte Berezinian, süpermatrislerin determinant alma yolunda bir genelleştirmedir. Herhangi iki  $X$  ve  $Y$  süpermatris olmak üzere

$$Ber(XY) = Ber(X)Ber(Y)$$

olur. Ayrıca herhangi bir  $X$  süpermatrisi

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

olsun ( $A$  ve  $D$  çift olmak üzere). Bu durumda,

$$Ber(X) = \det(A) \det(D - CA^{-1}B)^{-1}$$

şeklinde tanımlanır (DeWitt 1984, Covolo ve Poncin 2012).

### 1.3.3.7 Baz Kavramı

$G$  süpervektör uzayında süpervektörlerin kümesi  $\{e_i\}$  yi gözönüne alalım.  $c \in \Lambda_\infty$  ve  $c \neq 0$  olmak üzere  $c^i e_i = 0$  için  $e_i$  ler lineer bağımsızdır. Buna göre, her süpervektör,

$$X = X^i e_i$$

formundadır.

Standart baz  $e_i$  için  $(e_i)^* = (-1)^i e_i$  şeklindedir. Bu durumda,  $X$  reel süpervektörü için,

$$X = X^* = (X^i e_i)^* = (e_i)^* (X^i)^* = (-1)^i e_i (X^i)^*$$

olur. Burada,  $X$  c-tip ise,  $X^i$  c-tip ve  $i$  c-tip veya  $X^i$  a-tip ve  $i$  a-tip olur.

$X$  a-tip ise,  $X^i$  c-tip ve  $i$  a-tip veya  $X^i$  a-tip ve  $i$  c-tip olur.

Buna göre,

$$(X^i)^* = (-1)^{iX} X^i \quad (1.48)$$

elde edilir (DeWitt 1984).

Gerçekten;

$X = X^i e_i$  reel süper vektör olsun.

- $X$  c-tip ise;

$i$  (a-tip) tek olsun. Bu durumda,  $e_i$  bazı da tek (a-tip) olur.  $X$  c-tip ve  $X = X^i e_i$  olduğundan  $X^i$  tek(a-tip) olmalıdır. Dolayısıyla,

$$X^* = (-1)^i e_i (-1)^{iX} X^i = e_i X^i$$

olur.

$i$  (c-tip) çift olsun. Bu durumda,  $e_i$  bazı da çift (c-tip) olur.  $X$  c-tip ve  $X = X^i e_i$  olduğundan  $X^i$  çift(c-tip) olmalıdır. O halde,

$$X^* = (-1)^i e_i (-1)^{iX} X^i = e_i X^i$$

olur.

- $X$  a-tip ise;

$i$ (a-tip) tek olsun. Bu durumda,  $e_i$  bazı da tek (a-tip) olur.  $X$  a-tip ve  $X = X^i e_i$  olduğundan  $X^i$  çift(c-tip) olmalıdır. Dolayısıyla

$$X^* = (-1)^i e_i (-1)^{iX} X^i = -e_i X^i$$

olur.

$i$ (c-tip) çift olsun. Bu durumda,  $e_i$  bazı da çift (c-tip) olur.  $X$  a-tip ve  $X = X^i e_i$  olduğundan  $X^i$  tek(a-tip) olmalıdır. Dolayısıyla

$$X^* = (-1)^i e_i (-1)^{iX} X^i = -e_i X^i$$

olur.

**NOT:**  $X$  a-tip olduğundan konjügesi negatif olur. Bu durum reel olmasıyla çelişki değildir.

### 1.3.3.8 Harita ve Atlas

Bir  $M$  uzayının herhangi bir  $A$  cümlesi  $U_A$  ve  $R_c^m \times R_a^n$  'nin herhangi bir açık cümlesi  $V$  olsun.

$$\phi_A : U_A \rightarrow V \subset R_c^m \times R_a^n$$

dönüşümü 1-1 olmak üzere  $(U_A, \phi_A)$  ikilisine  $M$ 'de bir harita denir.

Bu haritaların aşağıdaki özelliklerini sağlayan  $A$  kolleksiyonuna  $M$ 'de bir atlas denir.

$$1) \bigcup_A U_A = M$$

2)  $\forall A, B$  için  $U_A \cap U_B \neq \emptyset$  olmak üzere  $\phi_A \circ \phi_B^{-1}$ ,  $U_A \cap U_B$  üzerinde diferensiyellenebilir.

Buna göre bir süpermanifold için genel olarak,

Bir  $M$  uzayının herhangi bir  $A$  cümlesi  $U_A$  ve  $R_c^m \times R_a^n$  'nin herhangi bir açık cümlesi  $V$  olsun.

$$\phi_A : U_A \rightarrow V \subset R_c^m \times R_a^n$$

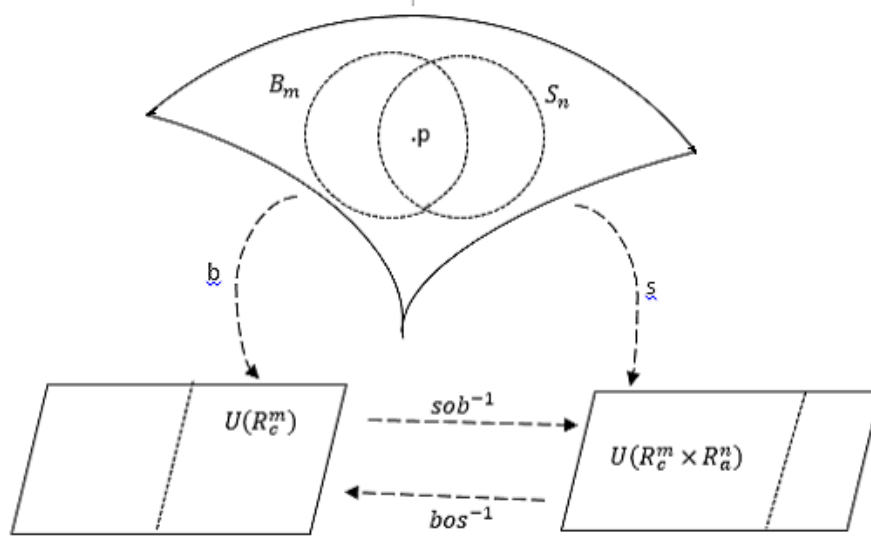
dönüşümü 1-1 olmak üzere  $(U_A, \phi_A)$  ikilisine  $M$ 'de bir süper harita denir.

Bu haritaların aşağıdaki özelliklerini sağlayan  $A$  kolleksiyonuna  $M$ 'de bir süper atlas denir.

$$1) \bigcup_A U_A = M$$

2)  $\forall A, B$  için  $U_A \cap U_B \neq \emptyset$  olmak üzere  $\phi_A \circ \phi_B^{-1}$ ,  $U_A \cap U_B$  üzerinde diferensiyellenebilir (Jadezyk ve Pilch 1981, DeWitt 1984, Sardanashily 2008, Sardanashily 2009, Covolo ve Poncin 2012).

Buna göre bir süpermanifold için genel olarak,



Şekil 1.3: Süpermanifold (body+soul)

diyagramı mevcuttur. Burada  $b$ 'ye body homeomorfizmi,  $s$ 'ye soul homeomorfizm denir. Diğer taraftan

$$s \circ b^{-1} : U(R^m) \rightarrow U(R^n)$$

ve

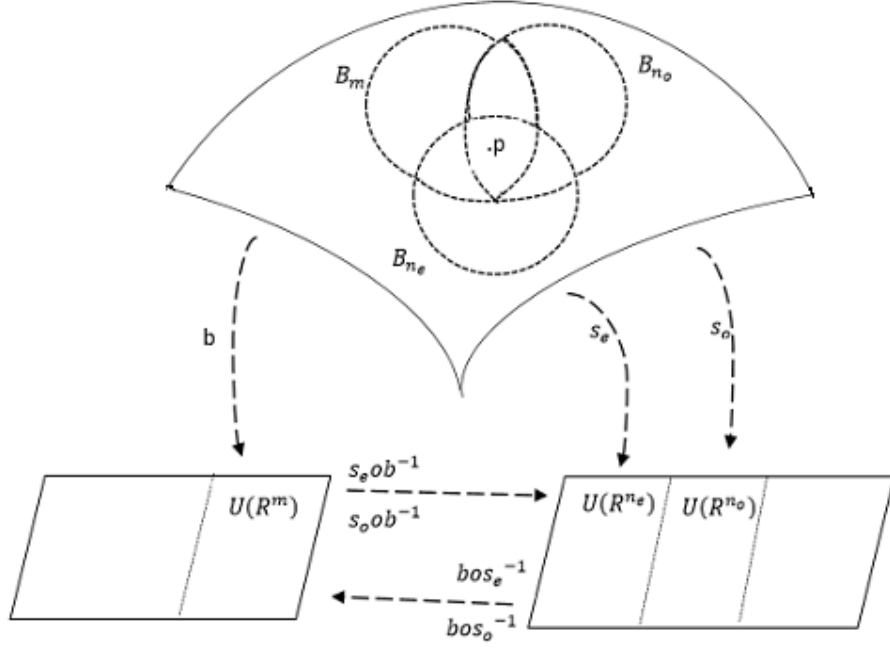
$$b \circ s^{-1} : U(R^n) \rightarrow U(R^m)$$

dönüşümleri birer diffeomorfizmdir.

Dolayısıyla,  $boyM = (m, n) = (m, n_e, n_o)$  ;

$(m, n) = (\text{body boyut}, \text{soul boyut})$

$(m, n_e, n_o) = (\text{body boyut}, \text{çift soul boyut}, \text{tek soul boyut})$  olmak üzere,



Şekil 1.4: Süpermanifold (body+soul çift+soul tek)

şeklinde ifade edilir. Burada,  $b$ 'ye body homeomorfizmi,  $s_e$ 'ye çift soul homeomorfizm,  $s_o$ 'ye tek soul homeomorfizm denir. Diğer taraftan,

$$s_e \circ b^{-1} : U(R^m) \rightarrow U(R^{n_e}), \quad s_o \circ b^{-1} : U(R^m) \rightarrow U(R^{n_o})$$

$$b \circ s_e^{-1} : U(R^{n_e}) \rightarrow U(R^m), \quad b \circ s_o^{-1} : U(R^{n_o}) \rightarrow U(R^m)$$

dönüşümleri diffeomorfizmdir.

Şimdi bir  $M$  süpermanifoldunun  $TM$  süper tanjant vektör uzayının süper vektör uzayı olduğunu gösterelim; genel anlamda  $M$ 'nin bazı

$(e_{ib}, e_{js}) = (e_{ib}, e_{js_e}, e_{js_o})$ ,  $0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n$  ( $0 \leq j_e \leq n_e, n_e < j_o \leq n_o$ ) dır.

Buna göre,  $TM$ 'nin bazı  $(\frac{\partial}{\partial e_{ib}}, \frac{\partial}{\partial e_{js_e}}, \frac{\partial}{\partial e_{js_o}})$  şeklindedir.

$X \in TM$  olsun. Bu durumda,

$$X = X_i \frac{\partial}{\partial e_{ib}} + X_{j_e} \frac{\partial}{\partial e_{js_e}} + X_{j_o} \frac{\partial}{\partial e_{js_o}} \quad (1.49)$$

şeklinde ifade edilir. Genel olarak,

$$X = X_i \frac{\partial}{\partial e_{ib}} + X_j \frac{\partial}{\partial e_{js}} \quad (1.50)$$

olarak da tanımlanabilir. Buna göre, süper vektör uzayı şartlarına göre,

$$X = X_i \frac{\partial}{\partial e_{ib}} + X_j \frac{\partial}{\partial e_{js}}, \quad Y = Y_i \frac{\partial}{\partial e_{ib}} + Y_j \frac{\partial}{\partial e_{js}}$$

iki tanjant vektör olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mathbf{1)} \quad X + Y &= (X_i + Y_i) \frac{\partial}{\partial e_{ib}} + (X_j + Y_j) \frac{\partial}{\partial e_{js}} \\ &= (Y_i + X_i) \frac{\partial}{\partial e_{ib}} + (Y_j + X_j) \frac{\partial}{\partial e_{js}} = Y + X \end{aligned}$$

$$\mathbf{2)} \quad Z = Z_i \frac{\partial}{\partial e_{ib}} + Z_j \frac{\partial}{\partial e_{js}} \text{ olmak üzere}$$

$$\begin{aligned} X + (Y + Z) &= X_i + (Y_i + Z_i) \frac{\partial}{\partial e_{ib}} + X_j + (Y_j + Z_j) \frac{\partial}{\partial e_{js}} \\ &= (X_i + Y_i) + Z_i \frac{\partial}{\partial e_{ib}} + (X_j + Y_j) + Z_j \frac{\partial}{\partial e_{js}} = (X + Y) + Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X + (Y + Z) &= X_i + (Y_i + Z_i) \frac{\partial}{\partial e_{ib}} + X_j + (Y_j + Z_j) \frac{\partial}{\partial e_{js}} \\ &= (X_i + Y_i + Z_i) \frac{\partial}{\partial e_{ib}} + (X_j + Y_j + Z_j) \frac{\partial}{\partial e_{js}} = (X + Y + Z) \end{aligned}$$

$$\mathbf{3)} \quad 0 \in TM \text{ olmak üzere } X + 0 = (X_i + 0) \frac{\partial}{\partial e_{ib}} + (X_j + 0) \frac{\partial}{\partial e_{js}} = X$$

$$\mathbf{4)} \quad X + Z = (X_i + Z_i) \frac{\partial}{\partial e_{ib}} + (X_j + Z_j) \frac{\partial}{\partial e_{js}} \text{ ifadesi için}$$

$X_i + Z_i = 0$  ve  $X_j + Z_j = 0$  olacak şekilde  $Z_i = -X_i$  ve  $Z_j = -X_j$  vardır  
ve

$$Z = -X = -X_i \frac{\partial}{\partial e_{ib}} - X_j \frac{\partial}{\partial e_{js}}$$

ters süper vektörü mevcuttur.

$$\mathbf{5)} \quad \alpha = \alpha_b + \alpha_s, \quad \beta = \beta_b + \beta_s \in \Lambda_\infty \text{ olmak üzere,}$$

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)X &= [(\alpha_b + \beta_b) + (\alpha_s + \beta_s)] \left( X_i \frac{\partial}{\partial e_{ib}} + X_j \frac{\partial}{\partial e_{js}} \right) \\ &= (\alpha_b + \beta_b) X_i \frac{\partial}{\partial e_{ib}} + (\alpha_s + \beta_s) X_j \frac{\partial}{\partial e_{js}} \\ &= \alpha_b X_i \frac{\partial}{\partial e_{ib}} + \alpha_s X_j \frac{\partial}{\partial e_{js}} + \beta_b X_i \frac{\partial}{\partial e_{ib}} + \beta_s X_j \frac{\partial}{\partial e_{js}} = \alpha X + \beta X \end{aligned}$$

biçimindedir. Benzer şekilde,  $X(\alpha + \beta) = X\alpha + X\beta$  dir.

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \alpha(X + Y) &= (\alpha_b + \alpha_s) \left( (X_i + Y_i) \frac{\partial}{\partial e_{ib}} + (X_j + Y_j) \frac{\partial}{\partial e_{js}} \right) \\ &= (\alpha_b X_i + \alpha_b Y_i) \frac{\partial}{\partial e_{ib}} + (\alpha_s X_j + \alpha_s Y_j) \frac{\partial}{\partial e_{js}} \\ &= \alpha_b X_i \frac{\partial}{\partial e_{ib}} + \alpha_s X_j \frac{\partial}{\partial e_{js}} + \alpha_b Y_i \frac{\partial}{\partial e_{ib}} + \alpha_s Y_j \frac{\partial}{\partial e_{js}} = \alpha X + \alpha Y \end{aligned}$$

olup benzer şekilde,  $(X + Y)\alpha = X\alpha + Y\alpha$  dir.

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
(\alpha\beta)X &= (\alpha_b\beta_b + \alpha_b\beta_s + \alpha_s\beta_b + \alpha_s\beta_s)(X_i\frac{\partial}{\partial e_{ib}} + X_j\frac{\partial}{\partial e_{js}}) \\
&= \alpha_b(\beta_bX_i\frac{\partial}{\partial e_{ib}}) + \alpha_s(\beta_sX_j\frac{\partial}{\partial e_{js}}) = \alpha(\beta X) \\
&= \alpha_b\beta_bX_i\frac{\partial}{\partial e_{ib}} + \alpha_s\beta_sX_j\frac{\partial}{\partial e_{js}} = \alpha\beta X
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde,  $X(\alpha\beta) = (X\alpha)\beta = X\alpha\beta$  dir.

Diğer taraftan,

$$1.X = 1(X_i\frac{\partial}{\partial e_{ib}} + X_j\frac{\partial}{\partial e_{js}}) = 1X_i\frac{\partial}{\partial e_{ib}} + 1X_j\frac{\partial}{\partial e_{js}} = X$$

elde edilir. Benzer şekilde,  $X.1 = X$  dir.

Diğer taraftan,

$$0.X = 0(X_i\frac{\partial}{\partial e_{ib}} + X_j\frac{\partial}{\partial e_{js}}) = 0X_i\frac{\partial}{\partial e_{ib}} + 0X_j\frac{\partial}{\partial e_{js}} = 0$$

biçimindedir. Benzer şekilde,  $X.0 = 0$  dir.

Diğer taraftan,

$$\alpha.0 = (\alpha_b + \alpha_s)0 = \alpha_b0 + \alpha_s0 = 0$$

ve benzer şekilde,  $0.\alpha = 0$  dir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{6)} (\alpha X)\beta &= \left[ (\alpha_b + \alpha_s)(X_i\frac{\partial}{\partial e_{ib}} + X_j\frac{\partial}{\partial e_{js}}) \right] (\beta_b + \beta_s) \\
&= \left[ (\alpha_bX_i\frac{\partial}{\partial e_{ib}} + \alpha_sX_j\frac{\partial}{\partial e_{js}}) \right] (\beta_b + \beta_s) \\
&= \alpha_b\beta_bX_i\frac{\partial}{\partial e_{ib}} + \alpha_s\beta_sX_j\frac{\partial}{\partial e_{js}} \\
&= (\alpha_b + \alpha_s) \left[ \beta_bX_i\frac{\partial}{\partial e_{ib}} + \beta_sX_j\frac{\partial}{\partial e_{js}} \right] = \alpha(\beta X)
\end{aligned}$$

Diğer taraftan,

$\alpha$ , bir c-sayı olsun. Yani,  $\alpha = z_b + z_{s_e}$  olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\alpha X &= (z_b + z_{s_e})(X_i\frac{\partial}{\partial e_{ib}} + X_{j_e}\frac{\partial}{\partial e_{j_{s_e}}} + X_{j_o}\frac{\partial}{\partial e_{j_{s_o}}}) \\
&= (z_b + z_{s_e})X_i\frac{\partial}{\partial e_{ib}} + (z_b + z_{s_e})X_{j_e}\frac{\partial}{\partial e_{j_{s_e}}} + (z_b + z_{s_e})X_{j_o}\frac{\partial}{\partial e_{j_{s_o}}} \\
&= X_i(z_b + z_{s_e})\frac{\partial}{\partial e_{ib}} + X_{j_e}(z_b + z_{s_e})\frac{\partial}{\partial e_{j_{s_e}}} + X_{j_o}(z_b + z_{s_e})\frac{\partial}{\partial e_{j_{s_o}}} \\
&= X(z_b + z_{s_e}) = X\alpha
\end{aligned}$$

bulunur.  $\alpha$ , bir a-sayı olsun. Yani,  $\alpha = z_{s_o}$  olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\alpha X &= z_{s_o} \left( \overbrace{X_i \frac{\partial}{\partial e_{ib}} + X_{je} \frac{\partial}{\partial e_{j_{s_e}}}}^u + \overbrace{X_{j_o} \frac{\partial}{\partial e_{j_{s_o}}}}^v \right) \\ &= z_{s_o} \underbrace{X_i \frac{\partial}{\partial e_{ib}} + X_{je} \frac{\partial}{\partial e_{j_{s_e}}}}_{\alpha u} - z_{s_o} \underbrace{X_{j_o} \frac{\partial}{\partial e_{j_{s_o}}}}_{-\alpha v}\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

$$\begin{aligned}7) (X^*)^* &= \left[ \left( X_i \frac{\partial}{\partial e_{ib}} \right)^* + \left( X_{je} \frac{\partial}{\partial e_{j_{s_e}}} \right)^* + \left( X_{j_o} \frac{\partial}{\partial e_{j_{s_o}}} \right)^* \right]^* \\ &= \left( X_i \frac{\partial}{\partial e_{ib}} \right)^* + \left( X_{je} \frac{\partial}{\partial e_{j_{s_e}}} \right)^* - \left( X_{j_o} \frac{\partial}{\partial e_{j_{s_o}}} \right)^* \\ &= X\end{aligned}$$

Benzer şekilde,  $(X + Y)^* = X^* + Y^*$

$$(\alpha X)^* = X^* \alpha^* \quad \text{ve} \quad (X \alpha)^* = \alpha^* X^* \quad \text{dır.}$$

### 1.3.4 Graf

Bu bölümde, graf teorisinin temel tanımları verilecektir (Biggs ve diğ. 1986, Cangül 2017, Cangül 2018).

**Tanım 1.3.59** Bir  $G$  grafi, köşe(vertex) olarak adlandırılan noktalar ve her biri bu noktaları veya noktanın kendisini birleştiren ve kenar(edge) olarak adlandırılan çizgiler topluluğudur.  $V = V(G)$  kümesi grafin köşeler kümesi ve  $E = E(G)$  kümesi grafin kenarlar kümesi olmak üzere,  $G$  grafi  $G = (V, E)$  şeklinde gösterilir (Cangül 2017, Cangül 2018).

Diğer bir tanımla, kenar(ayrıt) denilen doğru parçaları ile birleştirilmiş köşe(tepe) denilen noktalardan oluşan bir diyagrama graf denir. Yani,  $V$  ile gösterilen ve köşeler kümesi adı verilen elemanlar kümesi ile  $V \times V$  kartezyen çarpım kümesindeki sıralı ikililer ile tanımlanmış kenarların oluşturduğu  $E$  kümesinin birlikte meydana getirdiği şemaya (diyagrama) graf denir.

**Tanım 1.3.60** Bir graftaki başlangıç ve bitiş köşeleri aynı olan kenara döngü (loop) denir (Biggs ve diğ. 1986, Cangül 2017, Cangül 2018).

**Tanım 1.3.61** Bir grafta en az bir kenar yönlü ise, bu grafa yönlü aksi halde yönsüz veya yönlendirilmemiş graf denir (Biggs ve diğ. 1986, Cangül 2017, Cangül 2018).

**Tanım 1.3.62** Bir grafin herhangi iki köşesi arasında birden fazla kenar varsa bu kenarlara katlı kenar, bu tür graflara ise katlı graflar denir (Biggs ve diğ. 1986, Cangül 2017, Cangül 2018).



**Tanım 1.3.63** Katlı kenar ve döngü içermeyen graflara basit graf denir. Yani, iki köşeyi birleştiren birden fazla kenar varsa bunlara çoklu kenar, bir köşeyi kendine birleştiren bir kenara da döngü denir. Bu iki tür kenarı olmayan grafa basit graf denir (Biggs ve diğ. 1986, Cangül 2017, Cangül 2018).

**Tanım 1.3.64** Bir  $G$  grafında  $e$  kenarı  $u$  ve  $v$  köşelerini birleştiriyorsa,  $e = (u, v)$  biçiminde gösterilir.  $u$  ve  $v$  köşelerine bitişik köşeler denir (Biggs ve diğ. 1986, Cangül 2017, Cangül 2018).

**Tanım 1.3.65**  $v$  köşesi,  $G$  grafindaki herhangi bir köşe olsun.  $v$ ' ye bitişik kenarların sayısına  $v$  köşesinin derecesi denir ve  $\deg(v)$  ile gösterilir (Biggs ve diğ. 1986, Cangül 2017, Cangül 2018).

**Tanım 1.3.66** Bir köşeden farklı bir köşeye varışta kullanılan her köşe ve kenar bir kez kullanılıyorsa bu gidiş yol(path) denir. Diğer bir tanımla, bir  $G$  grafında  $G$ 'nin  $k$  tane kenarının  $uv, vw, wx, \dots, yz$  şeklindeki sıralanışına  $k$  uzunluklu bir yol denir (Biggs ve diğ. 1986, Cangül 2017, Cangül 2018).

**Tanım 1.3.67** Bir  $G$  grafının her tepe çifti arasında en az bir tane yol varsa  $G$  grafına birleştirilmiş(connected) graf denir (Biggs ve diğ. 1986, Cangül 2017, Cangül 2018).

**Tanım 1.3.68**  $G_1$  ve  $G_2$  iki graf olsun.  $G_1$ 'in herhangi iki köşesini birleştiren kenarların sayısı,  $G_2$ 'nin karşılık gelen köşelerini birleştiren kenarların sayısına eşit olsun. O halde;  $G_1$  ve  $G_2$ 'nin köşeleri arasında birebir bir eşleme varsa  $G_1$  ve  $G_2$ 'ye izomorftur denir (Biggs ve diğ. 1986, Cangül 2017, Cangül 2018).

**Tanım 1.3.69** Bir  $M$  graf manifoldu 3-manifoldtur ve kapalı, bağlantılı, yönlendirilebilir yapıya sahiptir (Berry ve Schluchter 2018, Bolker ve diğ. 2002, Buyalo ve Svetlov 2005).

**Tanım 1.3.70**  $B$  ve  $F$  graflar olmak üzere, bir  $G$  grafı ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir  $p : G \rightarrow B$  dönüşümü varsa,  $B$  baz grafı üzerinde  $F$  lifi ile birlikte bir graf demetidir.

- 1)  $G$ 'nin bitişik köşelerini,  $B$ 'deki bitişik köşelere eşler,
- 2) Kenarlar, kenarlarla eşlenir veya bir tepe noktasına kadar daraltılır,
- 3)  $\forall v \in V(B)$  köşesi için  $p^{-1}(v) \cong f$  dir ve  $\forall e \in E(B)$  kenarı için  $p^{-1}(e) \cong K \times F$  dir.

Yukarıdaki iki koşulu sağlayan dönüşüme graf dönüşümü denir.

Verilen bir  $G$  grafi için yukarıdaki özelliklere sahip farklı  $p_i : G \rightarrow B_i$  dönüşümleri bulunabilir. Bu gibi durumlarda karışıklığı önlemek adına  $(G, p_i, B_i)$  yazılır.

Şimdi bir grafın kenarları arasında tanımlanan  $\delta^*$  denklik bağıntısını tanımlayalım. Bu bağıntı ile graf demeti tanımlanabilir (Imrich ve diğ. 1997).

Dört kenardan oluşan indirgenmiş bir döngüye uyumsuz kare denir. Bu tanımla, bir yardımcı ikili  $\delta$  bağıntısını tanımlayabiliriz. Herhangi  $e, f \in E(G)$  için aşağıdaki koşullardan en az biri sağlanırsa  $e\delta f$  bağıntısını belirleriz;

- 1)  $e$  ve  $f$ , uyumsuz bir karenin zıt kenarlarıdır,
- 2)  $e$  ve  $f$ , bitişiktir ve  $e$  ve  $f$  üzerinde üretilmiş hiçbir uyumsuz kare yoktur (Imrich ve diğ. 1997).

$\delta^*$  ile  $\delta$  bağıntısının dönüşlü ve geçişli kapanışını gösterelim.  $\delta$  simetrik olduğundan  $\delta^*$  bir denklik bağıntısıdır. Farklı  $\delta^*$  denklik sınıflarına ait olan herhangi bitişik kenar çifti bir uyumsuz kare üretir.

Tanım 1.3.4'de verilen demet tanımında  $E$  ve  $M$  manifoldları yerine graf manifoldları alınırsa ve  $\pi$  aynı zamanda bir graf dönüşümü ise, Tanım 1.3.70'de verilen koşullar sağlandığında bir graf demeti elde edilir.

## 2 SÜPER MANİFOLDLAR ÜZERİNDE SÜPER JET DEMET YAPILAR VE SÜPER MEKANİK ENERJİ SİSTEMLER

Bu bölümde, ileriki bölümlerde kullanılacak olan süper demet yapısı, süper mekanik sistemler ve zamana bağlı süper mekanik sistemler, süper Lagrange enerji denklemleri, süper Hamilton enerji denklemleri ile süper uzayın temel yapıları tanımlanmıştır.

### 2.1 Süper Demet Yapıları

Bu bölümde, diferensiyel geometride önemli bir yere sahip olan süper manifold yapısı üzerinde süper demet yapısının nasıl oluşturulacağı ele alınmıştır. Çalışma yapılırken, Mangiarotti ve Sardanashvily(2000), Aycan(2003), Varadarajan(2004), Dağlı(2012) kullanılmış ve buradaki yapılar süper uzayın koordinat sistemine göre tanımlanmıştır.

**Tanım 2.1.1**  $E^*$  ve  $M^*$ , süper  $C^\infty$ -manifoldlar,  $\pi^* : E^* \rightarrow M^*$  bir süper  $C^\infty$ -dönüşüm olsun. Eğer  $\pi^*$  bir süper örten submersion ise,  $(E^*, \pi^*, M^*)$  üçlüsüne bir süper lifli manifold denir.

Bir  $(E^*, \pi^*, M^*)$  süper lifli manifoldunda,  $E^*$  manifolduna süper total uzay,  $M^*$  ye süper taban uzay,  $\pi^*$  dönüşümüne süper projeksiyon ve her bir  $p \in M^*$  noktası için  $E^*$  manifoldunun  $(\pi^*)^{-1}(p)$  altcümlesine de  $p$  üzerindeki süper lif denir.

**Tanım 2.1.2** Bir süper lifli manifold  $(E^*, \pi^*, M^*)$ ,  $boyM^* = m (m_b + m_s)$ ,  $boyE^* = m + n (m_b + m_s + n_b + n_s)$  ve  $U^* \subset E^*$  süper açık alt cümlesi üzerinde bir süper koordinat sistemi,

$$y^* : U^* \rightarrow R_*^{m+n}$$

olsun.

$$pr_1^* : R_*^{m+n} \rightarrow R_*^m$$

olmak üzere,  $a, b \in U^*$  için,

$$\pi^*(a) = \pi^*(b) = p \Rightarrow pr_1^*(y^*(a)) = pr_1^*(y^*(b))$$

önermesi doğru ise,  $y^*$  ye bir süper uyarlanmış koordinat sistemi denir(Burada,  $pr_1^*$ , birinci süper projeksiyondur) (Balduzzi Dottorato di ricerca XXI ciclo).

**Tanım 2.1.3** Bir süper lifli manifold  $(E^*, \pi^*, M^*)$  ve bir süper  $C^\infty$ -manifold  $F^*$  olmak üzere, eğer  $t^* : E^* \rightarrow M^* \times F^*$  dönüşümü

$$pr_1^* \circ t^* = \pi^*$$

olacak şekilde bir süper diffeomorfizm ise  $(F^*, t^*)$  ikilisine  $\pi^*$ ' in süper model lifi ve en azından bir trivializasyona sahip  $(E^*, \pi^*, M^*)$  süper lifli manifolduna da süper trivial lifli manifold denir.

**Tanım 2.1.4** Bir süper lifli manifold  $(E^*, \pi^*, M^*)$  ve  $p \in M^*$  olsun.  $F^*$  bir süper  $C^\infty$ -manifold,  $p$ ' nin bir süper komşuluğu  $W_p^*$  ve

$$t_p^* : \pi^{*-1}(W_p^*) \rightarrow W_p^* \times F^*$$

dönüşümü  $pr_1^* \circ t_p^* = \pi^*|_{(\pi^*)^{-1}(W_p^*)}$  şartını sağlayan bir süper diffeomorfizm ise o zaman  $(W_p^*, t_p^*, F^*)$  üçlüsüne  $p$ ' nin komşuluğunda  $\pi^*$ ' in bir süper lokal trivializasyonu ve süper taban uzayın her bir noktası civarında en az bir süper lokal trivializasyona sahip bir  $(E^*, \pi^*, M^*)$  süper lifli manifolduna da süper lokal trivial lifli manifold veya süper demet denir.

**Tanım 2.1.5**  $M^*$  ve  $N^*$ , süper  $C^\infty$ -manifoldlar,  $\varphi : M^* \rightarrow N^*$  bir süper  $C^\infty$ -dönüşüm,  $p \in M^*$  ve bir  $V_p \in T_p M^*$  süper tanjant vektörüne  $p$  noktasında teğet olan bir süper eğri

$$\alpha : I^* \subset R_* \rightarrow M^*$$

olsun. Bu durumda,

$$\varphi_*|_p(V_p) = W_{\varphi(p)}^* \in T_{\varphi(p)} N^*$$

süper tanjant vektörü,  $\varphi \circ \alpha : I^* \subset R_* \rightarrow N^*$  eğrisine  $\varphi(p)$  noktasında teğet olan bir süper tanjant vektör olmak üzere

$$\varphi_*|_p : T_p M^* \rightarrow T_{\varphi(p)} N^*$$

ile tanımlanan dönüşüme  $\varphi$ ' nin  $p \in M^*$  noktasındaki süper türev dönüşümü denir.

Bu durumda,  $\pi_* : TE^* \rightarrow TM^*$ ,  $\pi^*$ ' nin süper türev dönüşümü olmak üzere,

$$\pi_* = (TE^*, \pi_*, TM^*)$$

üçlüsü bir süper demet olup;  $\pi_*$ ' ye  $\pi^*$ ' nin süper tanjant demeti denir.

**Tanım 2.1.6**  $(E^*, \pi^*, M^*)$  bir süper lifli manifold ve  $\varphi : M^* \rightarrow E^*$  bir süper dönüşüm olsun. Eğer  $\pi^* \circ \varphi = id_{M^*}$  koşulu gerçekleşiyorsa,  $\varphi$ ' ye  $\pi^*$ ' nin bir süper kesiti denir ve  $\pi^*$ ' nin tüm süper kesitlerinin cümlesi  $\Gamma(\pi^*)$  ile gösterilir.

**Tanım 2.1.7**  $(E^*, \pi^*, M^*)$  bir süper demet ve  $p \in M^*$  olsun.  $\phi, \varphi \in \Gamma_p(\pi^*)$  süper kesitleri,  $p$  noktasında  $\phi(p) = \varphi(p)$  ve  $\phi(p)$  civarında  $(x_i, u^\alpha)$  süper uyarlanmış koordinat sisteminde

$$\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x_i} \Big|_p = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x_i} \Big|_p, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq \alpha \leq n$$

$$(i = i_b + i_s, m = m_b + m_s, \alpha = \alpha_b + \alpha_s, n = n_b + n_s)$$

ise  $\phi'$  yı içeren denklik sınıflarına  $\phi'$  nın  $p$  noktasındaki süper birinci jeti denir ve  $J_p^1 \phi$  ile gösterilir.

Buna göre,

$$\{J_p^1 \phi : p \in M^*, \phi \in \Gamma_p(\pi^*)\}$$

cümlesine  $\pi^*$  süper demetinin süper birinci jet manifoldu denir ve  $J^1 \pi^*$  ile gösterilir.

**Tanım 2.1.8**  $(E^*, \pi^*, M^*)$  bir süper demet ve  $(U^*, u^*)$ ,  $u^* = (x_i, u^\alpha)$  olmak üzere  $E^*$  üzerinde süper uyarlanmış koordinat sistemi olsun. Bu durumda  $J^1 \pi^*$  üzerinde  $(U^1, u^1)$  indirgenmiş koordinat sistemi,

$$U^1 = \{J_p^1 \phi : \phi(p) \in U\}, \quad u^1 = (x_i, u^\alpha, u_i^\alpha) = (x_{ib}, x_{is}, u^{\alpha b}, u^{\alpha s}, u_{ib}^{\alpha bs})$$

ile tanımlı olup burada

$$x_i(J_p^1 \phi) = x_i(p), \quad u^\alpha(J_p^1 \phi) = u^\alpha(\phi(p))$$

ve yeni  $mn$ -adet  $u_i^\alpha : U^1 \rightarrow R_*$  fonksiyonları ise,

$$u_i^\alpha(J_p^1 \phi) = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x_i} \Big|_p$$

şeklinde belirlidir. Bu şekilde ifade edilen yeni  $u_i^\alpha$  koordinatları süper türevsel koordinatlar olarak adlandırılır. Ancak burada genel olarak  $m.n$  adet türevsel koordinat olsa bile, bunların içindeki bazı türevsel koordinatlar dikkate alınmayacaktır. Çünkü body ve soul kısımların ayrıca çift ve tek pariteli terimlerin birbirine göre türevinden söz edilemez.

## 2.2 Süper Euler-Lagrange Mekanik Sistemler

Bu bölümde, süper Euler-Lagrange denklemleri ile ilgili temel kavramlar verilecektir.

**Tanım 2.2.1**  $m = (m_b + m_s)$  boyutlu bir süper manifold  $M^*$  ve  $M^{**}$ 'nin süper tanjant demeti  $TM^*$  olsun.  $TM^*$  üzerinde  $J^2 = 0$  eşitliğini sağlayan ve  $rank J = m$  ile verilen  $(1, 1)$  tipinden  $J$  tensör alanına süper yaklaşık tanjant yapı *denir*.

$M^*$  manifoldu üzerinde süper lokal koordinatlar

$$(x_i) = (x_{ib}, x_{is}), 1 \leq i \leq m (i = i_b + i_s, m = m_b + m_s)$$

ve  $TM^*$  üzerinde süper lokal koordinatlar

$$(x_i, \dot{x}_i) = (x_{ib}, x_{is}, \dot{x}_{ib}, \dot{x}_{is})$$

olmak üzere  $TM^*$  üzerinde  $J$  yaklaşık tanjant yapısı,

$$J \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}, \quad J \left( \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0 \quad (2.1)$$

olarak tanımlanır.

**Tanım 2.2.2**  $m = (m_b + m_s)$  boyutlu bir süper manifold  $M^*$  ve  $M^{**}$ 'nin süper tanjant demeti  $TM^*$  olsun.  $TM^*$  süper tanjant demeti üzerindeki bir süper vektör alanına  $M^*$  süper manifoldu üzerinde süper semispray *denir*. Bu durumda  $\varepsilon$  süper semisprayı lokal olarak;

$$\varepsilon = \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \quad (2.2)$$

ile verilir. Burada  $\varepsilon_i$  fonksiyonları

$$\varepsilon_i = (\varepsilon_{ib}, \varepsilon_{is}) = \varepsilon_i(x_{ib}, x_{is}, \dot{x}_{ib}, \dot{x}_{is}) \quad (2.3)$$

olarak tanımlıdır.

Bu durumda,  $M^*$  süper manifoldu üzerinde verilen bir  $\sigma$  süper eğrisi eğer  $\varepsilon'$  nin bir integral eğrisi oluyorsa, bu eğriye  $\varepsilon'$  nin bir çözümü *denir*.

**Tanım 2.2.3**  $J, m = (m_b + m_s)$  boyutlu bir  $M^*$  süper manifoldunun süper tanjant demeti üzerinde bir süper yaklaşık tanjant yapı olsun. Bu durumda  $TM^*$  süper tanjant demet üzerinde lokal koordinatlar

$$(x_i, \dot{x}_i) = (x_{ib}, x_{is}, \dot{x}_{ib}, \dot{x}_{is}), 1 \leq i \leq m (i = i_b + i_s, m = m_b + m_s)$$

ve

$$\varepsilon = \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}$$

süper vektör alanı  $M^*$  süper manifoldu üzerinde süper semispray olmak üzere

$$V = J\varepsilon = \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \quad (2.4)$$

ile verilen  $V$  süper vektör alanına süper Liouville vektör alanı denir.

Buna göre,  $TM^*$  üzerinde tanımlı  $\varepsilon$  süper vektör alanının bir süper semispray olması için gerek ve yeter şart  $J\varepsilon = V$  olmasıdır.

**Tanım 2.2.4**  $M^*$  süper manifoldunun süper tanjant demeti  $TM^*$  üzerindeki süper  $p$ -formların cümlesi  $\Lambda^p(TM^*)$  ve  $TM^*$  üzerindeki süper vektör alanlarının cümlesi  $\chi(TM^*)$  olsun.

$$\begin{aligned} i_J f &= 0, \quad f \in C^\infty(TM^*) \\ i_J f(X_1, \dots, X_p) &= \sum_{i=1}^p w(X_1, \dots, JX_i, \dots, X_p); \quad w \in \Lambda^p(TM^*), \quad X_1, \dots, X_p \in \chi(TM^*) \\ &= i_{J_b} f_b(X_{1b}, \dots, X_{pb}) + i_{J_s} f_s(X_{1s}, \dots, X_{ps}) \\ &= \sum_{i=1}^{p_b} w_b(X_{1b}, \dots, JX_{ib}, \dots, X_{pb}) + \sum_{i=1}^{p_s} w_s(X_{1s}, \dots, JX_{is}, \dots, X_{ps}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

olarak tanımlı  $i_J = (i_{J_b}, i_{J_s})$  fonksiyonuna süper düşey türev denir.

Burada,

$$i_{J_b}(dx_{ib}) = i_{J_s}(dx_{is}) = 0, \quad i_{J_b}(d\dot{x}_{ib}) = dx_{ib}, \quad i_{J_s}(d\dot{x}_{is}) = dx_{is} \quad (2.6)$$

olur.

Ayrıca  $w = (w_b, w_s) \in \Lambda^p(TM^*)$  süper  $p$ -formu,

$$\begin{aligned} w &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} w_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \\ &= \sum_{i_{1b} < \dots < i_{pb}} w_{i_{1b}, \dots, i_{pb}} dx_{i_{1b}} \wedge \dots \wedge dx_{i_{pb}} + \sum_{i_{1s} < \dots < i_{ps}} w_{i_{1s}, \dots, i_{ps}} dx_{i_{1s}} \wedge \dots \wedge dx_{i_{ps}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlıdır (Catteneo ve Schaetz 2012, Covolo ve Poncin 2012).

Diferensiyeli ise

$$\begin{aligned} dw &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} dw_{i_1, \dots, i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \\ &= \sum_{i_{1b} < \dots < i_{pb}} dw_{i_{1b}, \dots, i_{pb}} \wedge dx_{i_{1b}} \wedge \dots \wedge dx_{i_{pb}} + \sum_{i_{1s} < \dots < i_{ps}} dw_{i_{1s}, \dots, i_{ps}} \wedge dx_{i_{1s}} \wedge \dots \wedge dx_{i_{ps}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

olarak ifade edilen süper  $p + 1$ -formdur.

Süper  $p + 1$ -formların cümlesini de  $\Lambda^{p+1}(TM^*)$  olarak gösterirsek

$$d_j : \Lambda^p(TM^*) \rightarrow \Lambda^{p+1}(TM^*)$$

olacak şekilde

$$\begin{aligned} d_j &= [i_j d, d] = i_j d - d i_j \\ &= [i_{j_b} d_b, d_b] + [i_{j_s} d_s, d_s] \\ &= (i_{j_b} d_b - d_b i_{j_b}) + (i_{j_s} d_s - d_s i_{j_s}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

ile tanımlı  $d_j = (d_{j_b}, d_{j_s})$  fonksiyonu süper düşey diferansiyel olarak adlandırılır.

$\forall X \in \chi(M^*)$  süper vektör alanı ile  $w$ , süper  $p$ -formunun  $i_X w$  iç çarpımı aşağıdaki şartları sağlayan bir süper  $p - 1$ -formdur.

- 1)  $i_X w = 0$ , eğer  $p = 0$  ise;
- 2)  $i_X w = w(X)$ , eğer  $p = 1$  ise;
- 3)  $i_X w(Y_1, \dots, Y_{p-1}) = w(X, Y_1, \dots, Y_{p-1})$ , eğer  $Y_1, \dots, Y_{p-1} \in \chi(M^*)$  ise;

bu durumda  $i_X w \in \Lambda^{p-1}(M^*)$  olur.

**Tanım 2.2.5**  $M^*$ ,  $m = m_b + m_s$  boyutlu bir süper manifold ve  $M^*$ 'nin  $TM^*$  süper tanjant demeti üzerinde  $\phi$  bir süper 2-form olsun. Eğer  $\phi$  maksimal ranklı bir kapalı süper 2-form ise,  $(M^*, \phi)$  ikilisine süper simplektik manifold denir.

$TM^*$  üzerinde  $\phi_L = -dd_J L$  süper 2-formu simplektik ise, bu durumda  $TM^*$  üzerinde tanımlı  $L : TM^* \rightarrow R_*$  fonksiyonu regüler yada non-dejeneredir denir.

**Tanım 2.2.6**  $M^*$ ,  $m = m_b + m_s$  boyutlu bir manifold ve  $TM^*$  süper tanjant demeti olsun.

$L : TM^* \rightarrow R_*$  ( $L_b : TM_b \rightarrow R_{*b}$ ,  $L_s : TM_s \rightarrow R_{*s}$ ) bir süper  $C^\infty$ -fonksiyon olmak üzere,  $TM^*$  üzerindeki

$$\phi_L = -dd_J L = -d_b d_{J_b} L_b - d_s d_{J_s} L_s \quad (2.10)$$

ile tanımlı kapalı süper 2-formu için

$$E_L = VL - L = V_b L_b - L_b + V_s L_s - L_s$$

eşitliğine  $L = L_b + L_s$  ile birleşen enerji fonksiyonu ve  $L'$  ye de  $TM^*$  süper tanjant demeti üzerindeki süper Lagrange fonksiyonu denir.  $TM^*$  ise  $M^*$  konfigürasyon manifoldunun süper hız uzayı olarak adlandırılır.

**Tanım 2.2.7**  $i_\varepsilon \phi_L = dE_L$  süper Lagrange sistemleri için dinamik denklemini sağlayan bir tek  $\varepsilon$  semisprayı varsa  $E_L$  ye  $L : TM^* \rightarrow R_*$  fonksiyonu için süper



Euler-Lagrange vektör alanı denir. Bu koşulu sağlayan  $L$  fonksiyonuna da süper Lagrange enerji fonksiyonu adı verilir. Burada,

$$\begin{aligned} E_L &= \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \\ &= \dot{x}_{ib} \frac{\partial}{\partial x_{ib}} + \dot{x}_{is} \frac{\partial}{\partial x_{is}} + \varepsilon_{ib} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{ib}} + \varepsilon_{is} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{is}} \end{aligned} \quad (2.11)$$

ile tanımlı vektör alanıdır ve  $\varepsilon_i$  fonksiyonları

$$\varepsilon_i = (\varepsilon_{ib}, \varepsilon_{is}) = \varepsilon_i(\varepsilon_{ib}(x_{ib}, \dot{x}_{ib}), \varepsilon_{is}(x_{is}, \dot{x}_{is}))$$

ile belirlidir.

$i_\varepsilon \phi_L = dE_L$  eşitliğin çözümüyle elde edilen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{d}{dt_b} \left( \frac{\partial L_b}{\partial \dot{x}_{ib}} \right) - \frac{\partial L_b}{\partial x_{ib}} + \frac{d}{dt_s} \left( \frac{\partial L_s}{\partial \dot{x}_{is}} \right) - \frac{\partial L_s}{\partial x_{is}} = 0 \quad (2.12)$$

denkleminde de süper Euler-Lagrange enerji denklemi denir.

Buna göre, (2.12) ile belirli olan elde ettiğimiz süper Euler-Lagrange enerji denklemi için yapılan işlemlerden Teorem 2.2.8 elde edilmiştir.

**Teorem 2.2.8**  $M^*$ ,  $m$  boyutlu bir süper manifold olmak üzere,  $TM^*$  süper tanjant demeti üzerinde, (2.2) ile ifade edilen  $\varepsilon$  süper semisprayı, (2.10) ile verilen  $\phi_L$  kapalı süper 2-formu ve (2.11) ile ifade edilen  $E_L$  süper Euler-Lagrange vektör alanı kullanılarak  $i_\varepsilon \phi_L = dE_L$  eşitliğinin yukarıdaki gibi çözümlenmesiyle (2.12) de gösterildiği biçimde süper Euler-Lagrange enerji denklemi,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{d}{dt_b} \left( \frac{\partial L_b}{\partial \dot{x}_{ib}} \right) - \frac{\partial L_b}{\partial x_{ib}} + \frac{d}{dt_s} \left( \frac{\partial L_s}{\partial \dot{x}_{is}} \right) - \frac{\partial L_s}{\partial x_{is}} = 0$$

şeklinde elde edilir.

**Zamana bağlı süper uzayda**, Lagrange sistemlerini oluşturmak için süper jet manifoldlardan yararlanır.  $R_*$  bir boyutlu süper Öklid uzayı olmak üzere  $J^1(R_*, M^*) \cong TM^*$  izomorfizmi vardır.

$TM^*$ 'nin koordinatları

$$(x_i, \dot{x}_i) = (x_{ib}, x_{is}, \dot{x}_{ib}, \dot{x}_{is}),$$

$R_*$ 'm koordinatı ise

$$t = (t_b, t_s)$$

olmak üzere  $J^1(R_*, M^*)$  üzerindeki süper uyarlanmış koordinat sistemi

$$(t, x_i, \dot{x}_i) = (t_b, t_s, x_{ib}, x_{is}, \dot{x}_{ib}, \dot{x}_{is})$$

olur. Zamana bağlı durumda yukarıda verilen süper Lagrange fonksiyonu

$$L : J^1(R_*, M^*) \rightarrow R_*$$

tanımlı süper  $C^\infty$ - dönüşümdür. Ayrıca, bu süper jet manifold üzerinde  $J^2 = 0$  eşitliğini sağlayan ve  $rank J = m$  ile verilen  $(1, 1)$  tipinden tensör alanı zamana bağlı süper yaklaşık tanjant yapı olarak tanımlanır.

$V$  bir süper Liouville vektör alanı olmak üzere, süper yaklaşık tanjant yapı,

$$\begin{aligned} J\left(\frac{\partial}{\partial t_b}\right) &= -V_b, & J\left(\frac{\partial}{\partial t_s}\right) &= -V_s \\ J\left(\frac{\partial}{\partial x_{ib}}\right) &= \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{ib}}, & J\left(\frac{\partial}{\partial x_{is}}\right) &= \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{is}} \\ J\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_{ib}}\right) &= J\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_{is}}\right) = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

koşullarını sağlamalıdır.

Zamana bağlı durumda  $\varepsilon$  süper semisprayı lokal olarak

$$\varepsilon = \frac{\partial}{\partial t_b} + \frac{\partial}{\partial t_s} + \dot{x}_{ib} \frac{\partial}{\partial x_{ib}} + \dot{x}_{is} \frac{\partial}{\partial x_{is}} + \varepsilon_{ib} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{ib}} + \varepsilon_{is} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{is}} \quad (2.14)$$

$$\varepsilon_i = (\varepsilon_{ib}, \varepsilon_{is}) = \varepsilon_i(\varepsilon_{ib}(t_b, x_{ib}, \dot{x}_{ib}), \varepsilon_{is}(t_s, x_{is}, \dot{x}_{is})),$$

$$1 \leq i_b \leq m_b, 1 \leq i_s \leq m_s$$

şeklinde ifade edilir.

**Tanım 2.2.9**  $L : J^1(R_*, M^*) \rightarrow R_*$  zamana bağlı süper Lagrange fonksiyonu olsun.  $J^1(R_*, M^*)$  üzerinde,

$$\alpha_L = \alpha_{Lb} + \alpha_{Ls} = d_{Jb}L_b + L_b d_b t_b + d_{Js}L_s + L_s d_s t_s \quad (2.15)$$

süper 1-formuna süper Poincare-Cartan 1-formu ve

$$\begin{aligned} \Omega_L &= \Omega_{Lb} + \Omega_{Ls} \\ &= d_b d_{Jb}L_b + d_b L_b \wedge d_b t_b + d_s d_{Js}L_s + d_s L_s \wedge d_s t_s \end{aligned} \quad (2.16)$$

süper 2-formuna süper Poincare-Cartan 2-formu denir.

Buna göre  $J^1(R_*, M^*)$  süper manifoldu üzerinde

$$i_\varepsilon \Omega_L = 0, \quad i_\varepsilon dt = 1$$

denklemlerini sağlayan bir tek

$$E_L = E_{L_b} + E_{L_s}$$

süper vektör alanı vardır, buna zamana bağlı süper Euler-Lagrange vektör alanı denir.  $(J^1(R_*, M^*), \Omega_L, E_L)$  üçlüsüne de zamana bağlı süper Lagrange sistem denir. Bu denklemlerin çözümü ile elde edilen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{d}{dt_b} \left( \frac{\partial L_b}{\partial \dot{x}_{ib}} \right) - \frac{\partial L_b}{\partial x_{ib}} + \frac{d}{dt_s} \left( \frac{\partial L_s}{\partial \dot{x}_{is}} \right) - \frac{\partial L_s}{\partial x_{is}} = 0 \quad (2.17)$$

denklemine zamana bağlı süper Euler-Lagrange enerji denklemi denir.

Burada dikkat edilirse; zamana bağlı olan durumda elde edilen süper Euler-Lagrange denklemi ile zamana bağlı olmayan durumda elde edilen süper Euler-Lagrange denklemi aynı çıkar. O halde, süper jet demet yapısında çalışmak süper Lagrange enerji denklemlerinin genel yapısını değiştirmez, fakat süper uzayda zaman parametresi çalışmaya dahil edileceği için fiziksel ve mekanik uygulamaları açısından elverişlidir.

Buna göre, (2.17) ile belirli olan elde ettiğimiz zamana bağlı süper Euler-Lagrange enerji denklemi için yapılan işlemlerden Teorem 2.2.10 elde edilmiştir.

**Teorem 2.2.10**  $M^*$ ,  $m$  boyutlu bir süper manifold olmak üzere,  $J^1(R_*, M^*)$  süper jet manifoldu üzerinde, (2.14) de verilen  $\varepsilon$  süper semisprayı, (2.15) ile ifade edilen  $\alpha_L$  süper Poincare-Cartan 1-formu ve (2.16) ile verilen  $\Omega_L$  süper Poincare-Cartan 2-formu kullanılarak  $i_\varepsilon \Omega_L = 0$ ,  $i_\varepsilon dt = 1$  denklemlerinin yukarıdaki gibi çözümlenmesiyle zamana bağlı süper Euler-Lagrange enerji denklemi,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{d}{dt_b} \left( \frac{\partial L_b}{\partial \dot{x}_{ib}} \right) - \frac{\partial L_b}{\partial x_{ib}} + \frac{d}{dt_s} \left( \frac{\partial L_s}{\partial \dot{x}_{is}} \right) - \frac{\partial L_s}{\partial x_{is}} = 0$$

şeklinde elde edilir.

### 2.2.1 Süper Euler-Lagrange Enerji Denklemleri

Teorik fizikte süper uzay, body ve soul kısımlardan oluşan yapıların tammlanabildiği, burada body kısmın her zaman çift pariteli, soul kısmın da hem çift hem tek pariteli kısımlardan oluştuğunu biliyoruz.

Bu bölümde öncelikle, çalışmamızın temel alanını oluşturan süper Euler-Lagrange mekanik sistemlerini inceleyeceğiz.

Yukarıda tanımlanan  $(E^*, \pi^*, M^*)$  süper demetini ele alalım. Burada  $E^*$  manifoldu süper total manifold,  $M^*$  manifoldu süper baz manifold olarak kabul edilmişti. Ayrıca,  $E^*$  ve  $M^*$  manifoldları birer süper  $C^\infty$ - manifoldlardır. Süper uzayda çalışırken keyfi bir  $M^*$  süper manifoldu için süper demet yapısı oluşturmak fiziksel uygulamalar açısından elverişli değildir. Çünkü, bu kullanımda jet demet yapısı tanımlanırken oluşturulan türevsel koordinatların genel bir durumu söz konusu olur. Bu ise fiziksel yorumları güçleştirir. Bu sebeple oluşturacağımız süper demet yapısının süper baz manifoldunu bir boyutlu süper reel uzay  $R_*$  olarak kabul edeceğiz. Bu kabulün başka bir avantajı ise bu uzayda tanımlayacağımız koordinatı zaman parametresi olarak kabul edebilmemizdir. Zaten mekanik sistemler üzerine yapılan çalışmaların uygulamalarında baz uzay olarak reel uzayın alınması sıklıkla tercih edilmektedir.

$E^*$  ve  $R_*$  birer süper manifold olmak üzere,  $(E^*, \pi^*, R_*)$ 'in bir süper demet olduğunu görelim. Süper demet yapısı için öncelikle süper trivial yapıyı oluşturmak gerekir. Bunun için gerekli olan komütatif diyagram,

$$\begin{array}{ccc}
 E^* & \xrightarrow{\phi} & E^{m+1} \\
 \pi^* \downarrow & & \downarrow \pi_R \\
 R_* & \xrightarrow{I_R} & R
 \end{array} \quad (2.18)$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $\phi$  bir süper izomorfizm,  $\pi_R$  süper örten submersiyon ve  $I_R$  süper özdeşlik dönüşümü olmak üzere

$$\pi^* = I_R \circ \pi_R^{-1} \circ \phi^{-1}$$

olur. Diğer bir ifadeyle

$$I_R \circ \pi^* = \pi_R \circ \phi$$

olduğundan yukarıdaki diyagram komütatiftir. Sonuç olarak,  $\pi$  süper diferensiyellenebilir bir dönüşümdür. Böylece,  $(E^*, \pi^*, R_*)$  bir demet yapısı oluşturur.

Şimdi  $(E^*, \pi^*, R_*)$  süper demetini alalım. Bu demet üzerindeki jet demet yapısını  $J^1 E^*$  olarak tanımlayalım. Bu durumda, jet demetin koordinatları aşağıdaki şekilde ifade edilecektir.

$E^*$ 'in koordinatları  $(x_i) = (x_{ib}, x_{ise}, x_{iso})$  ve  $R_*$ 'in koordinatı  $(t) = (t_b, t_{se}, t_{so})$  olmak üzere,  $J^1 E^*$ 'in koordinatları

$$(t_b, t_{se}, t_{so}, x_{ib}, x_{ise}, x_{iso}, \dot{x}_{ib}, \dot{x}_{ise}, \dot{x}_{iso}) \quad (2.19)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, süper jet demet yapısından gelen  $(\dot{x}_i)$  türevsel koordinatları aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\dot{x}_{ib} = \frac{dx_{ib}}{dt_b}, \quad \dot{x}_{ise} = \frac{dx_{ise}}{dt_{ise}}, \quad \dot{x}_{iso} = \frac{dx_{iso}}{dt_{iso}} \quad (2.20)$$

$\phi \in \Gamma(\pi)$  süper kesiti ise,

$$\begin{aligned} \phi &: R_* \rightarrow E^* \\ t &\rightarrow \phi(t) \end{aligned}$$

olarak belirlidir ve  $\pi^* \circ \phi = id_{R_*}$  sağlar.  $(U, u)$  süper indirgenmiş koordinat sistemini de,

$$U = \{J_p^1 \phi : \phi(p) \in U\}$$

$$u = (t, x_i, \dot{x}_i) \quad 1 \leq i \leq m$$

olarak tanımlarız. Buna bağlı olarak, bu koordinatlar için

$$t(J_p^1 \phi) = t|_p, \quad x_i(J_p^1 \phi) = x_i(\phi(p))$$

eşitlikleri geçerli olup, yeni tanımlanan  $m+1$ -adet  $\dot{x}_i : U \rightarrow R_*$  fonksiyonları göz önüne alındığında,

$$\dot{x}_i(J_p^1 \phi) = \frac{\partial \phi_i}{\partial t}|_p, \quad 1 \leq i \leq m$$

eşitliği vardır (Bruce2014). Böylece, süper uzay için süper jet demet yapısı oluşturulmuş olur. Ancak burada dikkat edilmesi gereken önemli husus, elde edilen  $m+1$  tane türevsel koordinatın içerisindeki body ve soul kısımların birbirine göre türevleri ve parite tanımından dolayı ihmal edilmesi gereken koordinatların olduğudur.

Buna göre,  $E_*$  üzerindeki süper jet demet için süper yaklaşık tanjant yapı,

$$J : T(J^1 E^*) \rightarrow T(J^1 E^*)$$

şeklinde ifade edilen bir dönüşüm olup,  $J^2 = 0$  koşulunu sağlayan  $(1,1)$  tipinden tensör alanı olmalıdır. O halde,  $J^1 E^*$  süper demeti üzerindeki tanımlanan koordinat sistemini kullanarak aşağıdaki şekilde süper yaklaşık tanjant yapıyı oluşturabiliriz.

$$\begin{aligned} J\left(\frac{\partial}{\partial x_{ib}}\right) &= \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{ib}}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial x_{ise}}\right) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{ise}}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial x_{iso}}\right) = -\frac{\partial}{\partial \dot{x}_{iso}} \\ J\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_{ib}}\right) &= J\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_{ise}}\right) = J\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_{iso}}\right) = 0 \\ J\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) &= \dot{x}_{ib} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{ib}} + \dot{x}_{ise} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{ise}} - \dot{x}_{iso} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{iso}} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Dikkat edilirse,  $J^2 = 0$  koşulu sağlanır. Yukarıda açık ifadesi verilen  $J$  süper tensör alanı

$$J = (dx_{ib} + \dot{x}_{ib}dt_b) \times \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{ib}} + (dx_{ise} + \dot{x}_{ise}dt_{se}) \times \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{ise}} - (dx_{iso} + \dot{x}_{iso}dt_{so}) \times \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{iso}} \quad (2.22)$$

elde edilir. Süper semispray bu bölümde kullanılan süper jet demet yapısı üzerindeki ifadesi

$$\varepsilon = \frac{\partial}{\partial t_b} + \frac{\partial}{\partial t_{se}} - \frac{\partial}{\partial t_{so}} + \dot{x}_{ib} \frac{\partial}{\partial x_{ib}} + \dot{x}_{ise} \frac{\partial}{\partial x_{ise}} - \dot{x}_{iso} \frac{\partial}{\partial x_{iso}} + \varepsilon_{ib} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{ib}} + \varepsilon_{se} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{ise}} - \varepsilon_{so} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{iso}} \quad (2.23)$$

şeklinindedir. Bu süper semisprayın süper yaklaşık tanjant yapı üzerindeki değeri alınarak elde edilen süper Liouville vektör alanı ise;

$$V = 2\dot{x}_{ib} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{ib}} + 2\dot{x}_{ise} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{ise}} - 2\dot{x}_{iso} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{iso}} \quad (2.24)$$

şeklinde belirlenir.

Mekanik sistemler için enerji denklemlerinin elde edilmesinde kullanılan yukarıda verilen süper Poincare-Cartan 1-formu ve süper Poincare-Cartan 2-formu tanımlayabilmemiz için öncelikle süper diferensiyel operatörü süper jet demet yapısının koordinatları ile ifade etmemiz gerekir. O halde  $d$  süper diferensiyel operatörü

$$d = \frac{\partial}{\partial t_b} dt_b + \frac{\partial}{\partial t_{se}} dt_{se} - \frac{\partial}{\partial t_{so}} dt_{so} + \frac{\partial}{\partial x_{ib}} dx_{ib} + \frac{\partial}{\partial x_{ise}} dx_{ise} - \frac{\partial}{\partial x_{iso}} dx_{iso} \\ + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{ib}} d\dot{x}_{ib} + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{ise}} d\dot{x}_{ise} - \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{iso}} d\dot{x}_{iso} \quad (2.25)$$

olarak tanımlanır. Buna göre, süper jet demet yapısının koordinatları ile süper Poincare-Cartan 1-formu,

$$\alpha_L = d_J L + L dt \\ = \dot{x}_{ib} \frac{\partial L_b}{\partial \dot{x}_{ib}} dt_b + \dot{x}_{ise} \frac{\partial L_{se}}{\partial \dot{x}_{ise}} dt_{se} - \dot{x}_{iso} \frac{\partial L_{so}}{\partial \dot{x}_{iso}} dt_{so} \\ + \frac{\partial L_b}{\partial x_{ib}} dx_{ib} + \frac{\partial L_{se}}{\partial x_{ise}} dx_{ise} + \frac{\partial L_{so}}{\partial x_{iso}} dx_{iso} \\ + L_b dt_b + L_{se} dt_{se} - L_{so} dt_{so} \quad (2.26)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu 1-formun tekrar diferensiyellenmesi ile süper Poincare-Cartan 2-form elde edilir.

$$\begin{aligned}
\Omega_L &= dd_J L + dL \wedge dt \\
&= (dx_{ib} \wedge dt_b) \left( -\frac{\partial^2 L_b}{\partial t_b \partial \dot{x}_{ib}} + \dot{x}_{ib} \frac{\partial^2 L_b}{\partial x_{ib} \partial \dot{x}_{ib}} + \frac{\partial L_b}{\partial x_{ib}} \right) \\
&\quad + (dx_{ise} \wedge dt_{se}) \left( -\frac{\partial^2 L_{se}}{\partial t_{se} \partial \dot{x}_{ise}} + \dot{x}_{ise} \frac{\partial^2 L_{se}}{\partial x_{ise} \partial \dot{x}_{ise}} + \frac{\partial L_{se}}{\partial x_{ise}} \right) \\
&\quad + (dx_{iso} \wedge dt_{so}) \left( -\frac{\partial^2 L_{so}}{\partial t_{so} \partial \dot{x}_{iso}} + \dot{x}_{iso} \frac{\partial^2 L_{so}}{\partial x_{iso} \partial \dot{x}_{iso}} + \frac{\partial L_{so}}{\partial x_{iso}} \right) \\
&\quad + (d\dot{x}_{ib} \wedge dt_b) \left( \dot{x}_{ib} \frac{\partial^2 L_b}{\partial \dot{x}_{ib} \partial \dot{x}_{ib}} + \frac{\partial L_b}{\partial \dot{x}_{ib}} \right) \\
&\quad + (d\dot{x}_{ise} \wedge dt_{se}) \left( \dot{x}_{ise} \frac{\partial^2 L_{se}}{\partial \dot{x}_{ise} \partial \dot{x}_{ise}} + \frac{\partial L_{se}}{\partial \dot{x}_{ise}} \right) \\
&\quad + (d\dot{x}_{iso} \wedge dt_{so}) \left( \dot{x}_{iso} \frac{\partial^2 L_{so}}{\partial \dot{x}_{iso} \partial \dot{x}_{iso}} + \frac{\partial L_{so}}{\partial \dot{x}_{iso}} \right) \\
&\quad + (d\dot{x}_{ib} \wedge dx_{ib}) \left( \frac{\partial^2 L_b}{\partial \dot{x}_{ib} \partial \dot{x}_{ib}} \right) \\
&\quad + (d\dot{x}_{ise} \wedge dx_{ise}) \left( \frac{\partial^2 L_{se}}{\partial \dot{x}_{ise} \partial \dot{x}_{ise}} \right) \\
&\quad + (d\dot{x}_{iso} \wedge dx_{iso}) \left( \frac{\partial^2 L_{so}}{\partial \dot{x}_{iso} \partial \dot{x}_{iso}} \right) \tag{2.27}
\end{aligned}$$

**Teorem 2.2.11**  $(E^*, \pi^*, R_*)$  süper demet olmak üzere,  $J^1 E^*$  süper jet demet yapısı üzerinde zamana bağlı Euler-Lagrange enerji denklemi,

$$\left( \dot{x}_{ib} \frac{\partial^2 L_b}{\partial t_b \partial \dot{x}_{ib}} + \dot{x}_{ise} \frac{\partial^2 L_{se}}{\partial t_{se} \partial \dot{x}_{ise}} + \dot{x}_{iso} \frac{\partial^2 L_{so}}{\partial t_{so} \partial \dot{x}_{iso}} \right) - \left( \dot{x}_{ib} \frac{\partial L_b}{\partial x_{ib}} + \dot{x}_{ise} \frac{\partial L_{se}}{\partial x_{ise}} + \dot{x}_{iso} \frac{\partial L_{so}}{\partial x_{iso}} \right) = 0$$

ile ifade edilir.

### İspat

Süper Euler-Lagrange denklemi,  $i_\varepsilon \Omega = \Omega(\varepsilon) = 0$  diferensiyel denkleminin çözümü ile elde edilir. Buna göre, bu denklemin çözümü için gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\Omega(\varepsilon) = & \left( -\frac{\partial^2 L_b}{\partial t_b \partial \dot{x}_{ib}} + \dot{x}_{ib} \frac{\partial^2 L_b}{\partial x_{ib} \partial \dot{x}_{ib}} + \frac{\partial L_b}{\partial x_{ib}} + \varepsilon_{ib} \frac{\partial^2 L_b}{\partial \dot{x}_{ib} \partial \dot{x}_{ib}} \right) dx_{ib} \\
& + \left( -\frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial t_{s_e} \partial \dot{x}_{is_e}} + \dot{x}_{is_e} \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial x_{is_e} \partial \dot{x}_{is_e}} + \frac{\partial L_{s_e}}{\partial x_{is_e}} + \varepsilon_{is_e} \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial \dot{x}_{is_e} \partial \dot{x}_{is_e}} \right) dx_{is_e} \\
& + \left( \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial t_{s_o} \partial \dot{x}_{is_o}} - \dot{x}_{is_o} \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial x_{is_o} \partial \dot{x}_{is_o}} - \frac{\partial L_{s_o}}{\partial x_{is_o}} - \varepsilon_{is_o} \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial \dot{x}_{is_o} \partial \dot{x}_{is_o}} \right) dx_{is_o} \\
& + \left( \dot{x}_{ib} \frac{\partial^2 L_b}{\partial t_b \partial \dot{x}_{ib}} - (\dot{x}_{ib})^2 \frac{\partial^2 L_b}{\partial x_{ib} \partial \dot{x}_{ib}} - \dot{x}_{ib} \frac{\partial L_b}{\partial x_{ib}} - \dot{x}_{ib} \varepsilon_{ib} \frac{\partial^2 L_b}{\partial \dot{x}_{ib} \partial \dot{x}_{ib}} - \varepsilon_{ib} \frac{\partial L_b}{\partial \dot{x}_{ib}} \right) dt_b \\
& + \left( \dot{x}_{is_e} \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial t_{s_e} \partial \dot{x}_{is_e}} - (\dot{x}_{is_e})^2 \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial x_{is_e} \partial \dot{x}_{is_e}} - \dot{x}_{is_e} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial x_{is_e}} \right. \\
& \left. - \dot{x}_{is_e} \varepsilon_{is_e} \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial \dot{x}_{is_e} \partial \dot{x}_{is_e}} - \varepsilon_{is_e} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial \dot{x}_{is_e}} \right) dt_{s_e} \\
& + \left( -\dot{x}_{is_o} \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial t_{s_o} \partial \dot{x}_{is_o}} + (\dot{x}_{is_o})^2 \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial x_{is_o} \partial \dot{x}_{is_o}} + \dot{x}_{is_o} \frac{\partial L_{s_o}}{\partial x_{is_o}} \right. \\
& \left. + \dot{x}_{is_o} \varepsilon_{is_o} \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial \dot{x}_{is_o} \partial \dot{x}_{is_o}} + \varepsilon_{is_o} \frac{\partial L_{s_o}}{\partial \dot{x}_{is_o}} \right) dt_{s_o} \\
& + \left( \dot{x}_{ib} \frac{\partial^2 L_b}{\partial \dot{x}_{ib} \partial \dot{x}_{ib}} + \frac{\partial L_b}{\partial \dot{x}_{ib}} - \dot{x}_{ib} \frac{\partial^2 L_b}{\partial \dot{x}_{ib} \partial \dot{x}_{ib}} \right) d\dot{x}_{ib} \\
& + \left( \dot{x}_{is_e} \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial \dot{x}_{is_e} \partial \dot{x}_{is_e}} + \frac{\partial L_{s_e}}{\partial \dot{x}_{is_e}} - \dot{x}_{is_e} \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial \dot{x}_{is_e} \partial \dot{x}_{is_e}} \right) d\dot{x}_{is_e} \\
& + \left( -\dot{x}_{is_o} \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial \dot{x}_{is_o} \partial \dot{x}_{is_o}} - \frac{\partial L_{s_o}}{\partial \dot{x}_{is_o}} + \dot{x}_{is_o} \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial \dot{x}_{is_o} \partial \dot{x}_{is_o}} \right) d\dot{x}_{is_o}
\end{aligned} \tag{2.28}$$

bulunur. Bulunan denklem homojen bir süper diferensiyel denklemdir. Dolayısıyla elde edilen bu denklemde her diferensiyel terimin katsayısı sıfıra eşit olmalıdır. Buna göre, aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$1) -\frac{\partial^2 L_b}{\partial t_b \partial \dot{x}_{ib}} + \frac{\partial}{\partial x_{ib}} \left( \dot{x}_{ib} \frac{\partial L_b}{\partial \dot{x}_{ib}} + L_b \right) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{ib}} \left( \varepsilon_{ib} \frac{\partial L_b}{\partial \dot{x}_{ib}} \right) = 0$$

$$2) -\frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial t_{s_e} \partial \dot{x}_{is_e}} + \frac{\partial}{\partial x_{is_e}} \left( \dot{x}_{is_e} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial \dot{x}_{is_e}} + L_{s_e} \right) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{is_e}} \left( \varepsilon_{is_e} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial \dot{x}_{is_e}} \right) = 0$$



$$\begin{aligned}
3) \quad & \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial t_{s_o} \partial \dot{x}_{is_o}} - \frac{\partial}{\partial x_{is_o}} \left( \dot{x}_{is_o} \frac{\partial L_{s_o}}{\partial \dot{x}_{is_o}} + L_{s_o} \right) - \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{is_o}} \left( \varepsilon_{is_o} \frac{\partial L_{s_o}}{\partial \dot{x}_{is_o}} \right) = 0 \\
4) \quad & \dot{x}_{ib} \frac{\partial^2 L_b}{\partial t_b \partial \dot{x}_{ib}} - \dot{x}_{ib} \frac{\partial}{\partial x_{ib}} \left( \dot{x}_{ib} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{ib}} + L_b \right) - \varepsilon_{ib} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{ib}} \left( \dot{x}_{ib} \frac{\partial L_b}{\partial \dot{x}_{ib}} + L_b \right) = 0 \\
5) \quad & \dot{x}_{is_e} \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial t_{s_e} \partial \dot{x}_{is_e}} - \dot{x}_{is_e} \frac{\partial}{\partial x_{is_e}} \left( \dot{x}_{is_e} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{is_e}} + L_{s_e} \right) - \varepsilon_{is_e} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{is_e}} \left( \dot{x}_{is_e} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial \dot{x}_{is_e}} + L_{s_e} \right) = 0 \\
6) \quad & -\dot{x}_{is_o} \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial t_{s_o} \partial \dot{x}_{is_o}} + \dot{x}_{is_o} \frac{\partial}{\partial x_{is_o}} \left( \dot{x}_{is_o} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{is_o}} + L_{s_o} \right) + \varepsilon_{is_o} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{is_o}} \left( \dot{x}_{is_o} \frac{\partial L_{s_o}}{\partial \dot{x}_{is_o}} + L_{s_o} \right) = 0 \\
7) \quad & \left( \dot{x}_{ib} \frac{\partial^2 L_b}{\partial \dot{x}_{ib} \partial \dot{x}_{ib}} + \frac{\partial L_b}{\partial \dot{x}_{ib}} - \dot{x}_{ib} \frac{\partial^2 L_b}{\partial \dot{x}_{ib} \partial \dot{x}_{ib}} \right) = 0 \\
8) \quad & \left( \dot{x}_{is_e} \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial \dot{x}_{is_e} \partial \dot{x}_{is_e}} + \frac{\partial L_{s_e}}{\partial \dot{x}_{is_e}} - \dot{x}_{is_e} \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial \dot{x}_{is_e} \partial \dot{x}_{is_e}} \right) = 0 \\
9) \quad & \left( -\dot{x}_{is_o} \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial \dot{x}_{is_o} \partial \dot{x}_{is_o}} - \frac{\partial L_{s_o}}{\partial \dot{x}_{is_o}} + \dot{x}_{is_o} \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial \dot{x}_{is_o} \partial \dot{x}_{is_o}} \right) = 0
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Elde edilen bu denklem sistemi bir non-lineer denklem sistemi olduğu için ancak özel kabul altında çözümü mümkündür. Bu nedenle aradığımız çözüm için özel olarak,

$$\varepsilon_{ib} = \dot{x}_{ib}, \quad \varepsilon_{is_e} = \dot{x}_{is_e}, \quad \varepsilon_{is_o} = -\dot{x}_{is_o} \tag{2.30}$$

Kabulünü yapalım. Bu kabulü yaparken dikkat ettiğimiz husus, süper uzayın her bir elemanı body, çift soul ve tek soul kısımlardan oluşur ki; aynı zamanda cebirsel ve geometrik yapılar tanımlanırken parite kavramı dikkate alındığından tek soul terimin işaretinin negatif (-) olması durumudur. Bunun yansıması, süper katsayı fonksiyonları olan  $\varepsilon_{ib}, \varepsilon_{is_e}, \varepsilon_{is_o}$  'lar hem  $t = (t_b, t_{s_e}, t_{s_o})$  hem de  $x_i = (x_{ib}, x_{is_e}, x_{is_o})$  süper koordinat fonksiyonlarını içermelidir. Süper türevsel koordinatların

$$t = (t_b, t_{s_e}, t_{s_o}) \quad ve \quad x_i = (x_{ib}, x_{is_e}, x_{is_o})$$

süper koordinatlara bağlı olduğunu bildiğimize göre, süper katsayı fonksiyonlarının yerine özel olarak süper türevsel koordinatları kullanmamız uygun olur.

Euler-Lagrange enerji denkleminin süper koordinatlar ile genel formuna en uygun çözümünü veren lineer bağıntı aşağıdaki biçimde olduğu için,

$$-\dot{x}_{ib}(1) - \dot{x}_{is_e}(2) + \dot{x}_{is_o}(3) + (4) + (5) - (6) - \dot{x}_{ib}(7) - \dot{x}_{is_e}(8) + \dot{x}_{is_o}(9) = 0$$

bu çözümü gerçeklersek,

$$\begin{aligned} 0 = & \left( \dot{x}_{ib} \frac{\partial^2 L_b}{\partial t_b \partial \dot{x}_{ib}} + \dot{x}_{is_e} \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial t_{s_e} \partial \dot{x}_{is_e}} + \dot{x}_{is_o} \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial t_{s_o} \partial \dot{x}_{is_o}} \right) \\ & - \left( (\dot{x}_{ib})^2 \frac{\partial^2 L_b}{\partial x_{ib} \partial \dot{x}_{ib}} + (\dot{x}_{is_e})^2 \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial x_{is_e} \partial \dot{x}_{is_e}} + (\dot{x}_{is_o})^2 \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial x_{is_o} \partial \dot{x}_{is_o}} \right) \\ & - \left( (\dot{x}_{ib})^2 \frac{\partial^2 L_b}{\partial \dot{x}_{ib} \partial \dot{x}_{ib}} + (\dot{x}_{is_e})^2 \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial \dot{x}_{is_e} \partial \dot{x}_{is_e}} - (\dot{x}_{is_o})^2 \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial \dot{x}_{is_o} \partial \dot{x}_{is_o}} \right) \\ & - \left( \dot{x}_{ib} \frac{\partial L_b}{\partial \dot{x}_{ib}} + \dot{x}_{is_e} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial \dot{x}_{is_e}} \right) \\ & - \left( \dot{x}_{ib} \frac{\partial L_b}{\partial x_{ib}} + \dot{x}_{is_e} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial x_{is_e}} + \dot{x}_{is_o} \frac{\partial L_{s_o}}{\partial x_{is_o}} \right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

denklemini elde edilir. Bu denklem, süper jet demet yapısı üzerindeki süper Euler-Lagrange enerji denklemdir.

Daha önce (2.17)'de verilen zamana bağlı Euler-Lagrange enerji denklemini ile bu denklemin birinci ve sonuncu terimleri benzerdir. Sadece özel kabulümüzden kaynaklanan katsayı fonksiyonlarımız eklenmiştir. Bu fonksiyonları daha da özelleştirip, örneğin bir sabit değerini alsaydık bu katsayılar oluşmazdı. Aradaki terimler parite kavramından, yani süper uzayın body ve soul kısımdan, ayrıca soul kısmın da çift ve tek pariteden oluşmasından kaynaklanır. Bu durumda, (2.31) ile belirli olan süper Euler-Lagrange enerji denkleminin genel formu;

$$\left( \dot{x}_{ib} \frac{\partial^2 L_b}{\partial t_b \partial \dot{x}_{ib}} + \dot{x}_{is_e} \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial t_{s_e} \partial \dot{x}_{is_e}} + \dot{x}_{is_o} \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial t_{s_o} \partial \dot{x}_{is_o}} \right) - \left( \dot{x}_{ib} \frac{\partial L_b}{\partial x_{ib}} + \dot{x}_{is_e} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial x_{is_e}} + \dot{x}_{is_o} \frac{\partial L_{s_o}}{\partial x_{is_o}} \right) = 0 \quad (2.32)$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

## 2.2.2 Uygulamalar

### Örnek 2.2.12 (Süper Çember Örneği)

Süper uzayda,

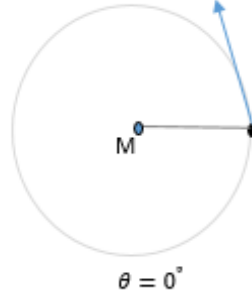
$$\alpha(\theta) = (t, r \cos \theta, r \sin \theta, u)$$

parametrik denklemini ile verilen süper çember eğrisi, aşağıdaki şekilde gösterileceği üzere üç kısımdan oluşur (Şekil 2.1, Şekil 2.2, Şekil 2.3). Bunlar;

1)  $\theta = 0^\circ$  için başlangıç noktası, süper çember eğrisinin

$$\alpha_b(\theta) = (t_b, r_b \cos \theta_b, r_b \sin \theta_b, u_b)$$

parametrik denklemi ile verilen body kısmını,

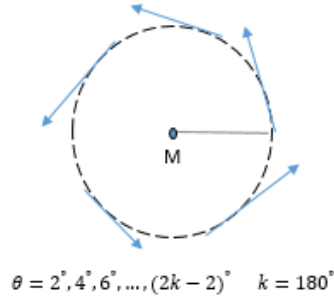


Şekil 2.1:Süper çember (body)

2)  $\theta = (2k - 2)^\circ$   $k = 2^\circ, 4^\circ, 6^\circ, \dots, 180^\circ$  için, çift pariteli olan ve

$$\alpha_{s_e}(\theta) = (t_{s_e}, r_{s_e} \cos \theta_{s_e}, r_{s_e} \sin \theta_{s_e}, u_{s_e})$$

parametrik denklemi ile verilen süper çember eğrisi üzerindeki noktalar süper çember eğrisinin çift soul kısmını,



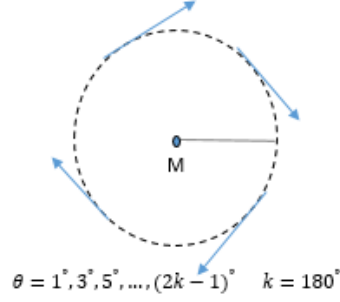
$$\theta = 2^\circ, 4^\circ, 6^\circ, \dots, (2k - 2)^\circ \quad k = 180^\circ$$

Şekil 2.2: Süper çember (soul çift)

3)  $\theta = (2k - 1)^\circ$   $k = 1^\circ, 3^\circ, 5^\circ, \dots, 180^\circ$  için, tek pariteli olan ve

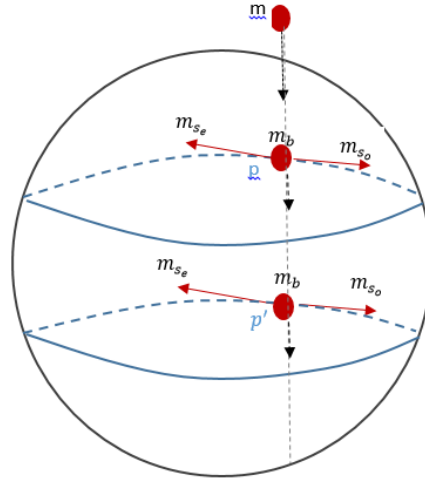
$$\alpha_{s_o}(\theta) = (t_{s_o}, r_{s_o} \cos \theta_{s_o}, r_{s_o} \sin \theta_{s_o}, u_{s_o})$$

parametrik denklemleri ile verilen süper çember eğrisi üzerindeki noktalar süper çember eğrisinin tek soul kısmını,



Şekil 2.3: Süper çember (soul tek)

temsil eder. Bu üç kısımdan oluşan süper noktalar kümesi süper çember eğrisini oluşturacağına göre bir  $m$  parçacığının bu süper çember eğrisi üzerindeki hareketini şu şekilde inceleyebiliriz.



Şekil 2.4: Süper çember eğrisi üzerindeki hareket

Şekil 2.4'de süper uzayda alınan hareketli bir  $m$  parçacığının süper çember üzerine düştükten sonra, süper çember eğrisi üzerindeki hareketi gösterilmiştir.

Bu örnekte,  $m$  parçacığının süper çember eğrisi üzerindeki hareketi esnasında ortaya çıkan süper Lagrange enerji fonksiyonunu araştıracağız. Bu kısımda da uzay zamanı  $s$  ve süper çember üzerinde geçen zamanı  $t$  parametresi ile ifade edilsin.  $t$  ve  $s$  zaman parametreleri arasındaki oramı yine  $k$  ile gösterelim.

Süper çember eğrisi üzerinde jet koordinat sistemi ;

$$(s, t, r \cos \theta, r \sin \theta, \dot{t}, \dot{r} \cos \theta, \dot{r} \sin \theta)$$

şeklinindedir. Bu jet demet koordinatlar, süper uzayda body, soul even ve soul odd kısımlar ile daha detaylı ifade edilirse,

$$\begin{aligned}
& \left( \overbrace{s_b, s_{s_e}, s_{s_o}}^s, \overbrace{t_b, t_{s_e}, t_{s_o}}^t, \overbrace{r_b \cos \theta, r_{s_e} \cos \theta, r_{s_o} \cos \theta}^{r \cos \theta}, \overbrace{r_b \sin \theta, r_{s_e} \sin \theta, r_{s_o} \sin \theta}^{r \sin \theta}, \right. \\
& \left. \overbrace{\dot{t}_b, \dot{t}_{s_e}, \dot{t}_{s_o}}^{\dot{t}}, \overbrace{\dot{r}_b \cos \theta, \dot{r}_{s_e} \cos \theta, \dot{r}_{s_o} \cos \theta}^{\dot{r} \cos \theta}, \overbrace{\dot{r}_b \sin \theta, \dot{r}_{s_e} \sin \theta, \dot{r}_{s_o} \sin \theta}^{\dot{r} \sin \theta} \right) \quad (2.33)
\end{aligned}$$

olur. Burada süper türevsel koordinatlar,

$$\begin{aligned}
\dot{t}_b &= \frac{\partial t_b}{\partial s_b} & \dot{t}_{s_e} &= \frac{\partial t_{s_e}}{\partial s_{s_e}} & \dot{t}_{s_o} &= \frac{\partial t_{s_o}}{\partial s_{s_o}} \\
\dot{r}_b &= \frac{\partial r_b}{\partial s_b} & \dot{r}_{s_e} &= \frac{\partial r_{s_e}}{\partial s_{s_e}} & \dot{r}_{s_o} &= \frac{\partial r_{s_o}}{\partial s_{s_o}}
\end{aligned}$$

biçimindedir. Süper çember jet demet koordinatları, süper enerji denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
0 &= 2\dot{t}_b \frac{\partial^2 L_b}{\partial s_b \partial \dot{t}_b} + 2\dot{t}_{s_e} \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial s_{s_e} \partial \dot{t}_{s_e}} + 2\dot{t}_{s_o} \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial s_{s_o} \partial \dot{t}_{s_o}} \\
&+ 4\dot{r}_b \frac{\partial^2 L_b}{\partial s_b \partial \dot{r}_b} + 4\dot{r}_{s_e} \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial s_{s_e} \partial \dot{r}_{s_e}} + 4\dot{r}_{s_o} \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial s_{s_o} \partial \dot{r}_{s_o}} \\
&- 2(\dot{t}_b)^2 \frac{\partial^2 L_b}{\partial t_b \partial \dot{t}_b} - 2(\dot{t}_{s_e})^2 \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial t_{s_e} \partial \dot{t}_{s_e}} - 2(\dot{t}_{s_o})^2 \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial t_{s_o} \partial \dot{t}_{s_o}} \\
&- 4(\dot{r}_b)^2 \frac{\partial^2 L_b}{\partial r_b \partial \dot{r}_b} - 4(\dot{r}_{s_e})^2 \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial r_{s_e} \partial \dot{r}_{s_e}} - 4(\dot{r}_{s_o})^2 \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial r_{s_o} \partial \dot{r}_{s_o}} \\
&- 2\dot{t}_b \frac{\partial L_b}{\partial t_b} - 2\dot{t}_{s_e} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial t_{s_e}} - 2\dot{t}_{s_o} \frac{\partial L_{s_o}}{\partial t_{s_o}} \\
&- 4\dot{r}_b \frac{\partial L_b}{\partial r_b} - 4\dot{r}_{s_e} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial r_{s_e}} - 4\dot{r}_{s_o} \frac{\partial L_{s_o}}{\partial r_{s_o}} \\
&- 2(\dot{t}_b)^2 \frac{\partial^2 L_b}{\partial \dot{t}_b \partial \dot{t}_b} - 2(\dot{t}_{s_e})^2 \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial \dot{t}_{s_e} \partial \dot{t}_{s_e}} + 2(\dot{t}_{s_o})^2 \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial \dot{t}_{s_o} \partial \dot{t}_{s_o}} \\
&- 4(\dot{r}_b)^2 \frac{\partial^2 L_b}{\partial \dot{r}_b \partial \dot{r}_b} - 4(\dot{r}_{s_e})^2 \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial \dot{r}_{s_e} \partial \dot{r}_{s_e}} + 4(\dot{r}_{s_o})^2 \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial \dot{r}_{s_o} \partial \dot{r}_{s_o}} \\
&- 2\dot{t}_b \frac{\partial L_b}{\partial \dot{t}_b} - 2\dot{t}_{s_e} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial \dot{t}_{s_e}} - 4\dot{r}_b \frac{\partial L_b}{\partial \dot{r}_b} - 4\dot{r}_{s_e} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial \dot{r}_{s_e}}
\end{aligned} \quad (2.34)$$

süper Lagrange enerji denklemi elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_b}{\partial \dot{r}_b} &= \lambda_b & \frac{\partial L_{s_e}}{\partial \dot{r}_{s_e}} &= \lambda_{s_e} & \frac{\partial L_{s_o}}{\partial \dot{r}_{s_o}} &= -\lambda_{s_o} \\
\frac{\partial L_b}{\partial \dot{t}_b} &= \mu_b & \frac{\partial L_{s_e}}{\partial \dot{t}_{s_e}} &= \mu_{s_e} & \frac{\partial L_{s_o}}{\partial \dot{t}_{s_o}} &= -\mu_{s_o} \\
t_b &= k_b s_b & t_{s_e} &= k_{s_e} s_{s_e} & t_{s_o} &= k_{s_o} s_{s_o}
\end{aligned} \quad (2.35)$$

kabulleri altında (2.34) denklemini düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}
0 = & -2\dot{t}_b \frac{\partial L_b}{\partial t_b} - 2\dot{t}_{s_e} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial t_{s_e}} - 2\dot{t}_{s_o} \frac{\partial L_{s_o}}{\partial t_{s_o}} - 4\dot{r}_b \frac{\partial L_b}{\partial r_b} - 4\dot{r}_{s_e} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial r_{s_e}} - 4\dot{r}_{s_o} \frac{\partial L_{s_o}}{\partial r_{s_o}} \\
& -2\dot{t}_b \frac{\partial L_b}{\partial t_b} - 2\dot{t}_{s_e} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial t_{s_e}} - 4\dot{r}_b \frac{\partial L_b}{\partial r_b} - 4\dot{r}_{s_e} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial r_{s_e}}
\end{aligned} \tag{2.36}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
0 = & -\frac{\partial t_b}{\partial s_b} \frac{\partial L_b}{\partial t_b} - \frac{\partial t_{s_e}}{\partial s_{s_e}} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial t_{s_e}} - \frac{\partial t_{s_o}}{\partial s_{s_o}} \frac{\partial L_{s_o}}{\partial t_{s_o}} \\
& -2\frac{\partial r_b}{\partial s_b} \frac{\partial L_b}{\partial r_b} - 2\frac{\partial r_{s_e}}{\partial s_{s_e}} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial r_{s_e}} - 2\frac{\partial r_{s_o}}{\partial s_{s_o}} \frac{\partial L_{s_o}}{\partial r_{s_o}} \\
& -\frac{\partial t_b}{\partial s_b} \frac{\partial L_b}{\partial \dot{t}_b} - \frac{\partial t_{s_e}}{\partial s_{s_e}} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial \dot{t}_{s_e}} - 2\frac{\partial r_b}{\partial s_b} \frac{\partial L_b}{\partial \dot{r}_b} - 2\frac{\partial r_{s_e}}{\partial s_{s_e}} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial \dot{r}_{s_e}}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

olur. Özel koşullar dikkate alınır; (2.37) denklemini

$$\begin{aligned}
0 = & -3\frac{\partial L_b}{\partial s_b} - 3\frac{\partial L_{s_e}}{\partial s_{s_e}} - 3\frac{\partial L_{s_o}}{\partial s_{s_o}} \\
& -\dot{t}_b\mu_b - \dot{t}_{s_e}\mu_{s_e} - 2\dot{r}_b\lambda_b - 2\dot{r}_{s_e}\lambda_{s_e} \\
= & 2\lambda_b \frac{\partial r_b}{\partial s_b} + \mu_b \frac{\partial t_b}{\partial r_b} \frac{\partial r_b}{\partial s_b} + 2\lambda_{s_e} \frac{\partial r_{s_e}}{\partial s_{s_e}} + \mu_{s_e} \frac{\partial t_{s_e}}{\partial r_{s_e}} \frac{\partial r_{s_e}}{\partial s_{s_e}} \\
& + 3\frac{\partial L_b}{\partial r_b} \frac{\partial r_b}{\partial s_b} + 3\frac{\partial L_{s_e}}{\partial r_{s_e}} \frac{\partial r_{s_e}}{\partial s_{s_e}} + 3\frac{\partial L_{s_o}}{\partial r_{s_o}} \frac{\partial r_{s_o}}{\partial s_{s_o}} \\
= & \frac{\partial r_b}{\partial s_b} \left[ 2\lambda_b + \mu_b \frac{\partial t_b}{\partial r_b} + 3\frac{\partial L_b}{\partial r_b} \right] \\
& + \frac{\partial r_{s_e}}{\partial s_{s_e}} \left[ 2\lambda_{s_e} + \mu_{s_e} \frac{\partial t_{s_e}}{\partial r_{s_e}} + 3\frac{\partial L_{s_e}}{\partial r_{s_e}} \right] + \frac{\partial r_{s_o}}{\partial s_{s_o}} \left[ 3\frac{\partial L_{s_o}}{\partial r_{s_o}} \right]
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada,  $r$ 'nin  $s$ 'ye göre türevi sıfır olamayacağı için, yani

$$\frac{\partial r_b}{\partial s_b} \neq 0, \quad \frac{\partial r_{s_e}}{\partial s_{s_e}} \neq 0, \quad \frac{\partial r_{s_o}}{\partial s_{s_o}} \neq 0$$

olacağından

$$\begin{aligned}
\left[ 2\lambda_b + \mu_b \frac{\partial t_b}{\partial r_b} + 3\frac{\partial L_b}{\partial r_b} \right] &= 0 \\
\left[ 2\lambda_{s_e} + \mu_{s_e} \frac{\partial t_{s_e}}{\partial r_{s_e}} + 3\frac{\partial L_{s_e}}{\partial r_{s_e}} \right] &= 0 \\
\left[ 3\frac{\partial L_{s_o}}{\partial r_{s_o}} \right] &= 0
\end{aligned} \tag{2.38}$$

olur. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\left[ 2\lambda_b + \mu_b \frac{\partial t_b}{\partial r_b} + 3 \frac{\partial L_b}{\partial r_b} \right] &= 0 \Rightarrow L_b = -\frac{2}{3}\lambda_b r_b - \frac{1}{3}\mu_b t_b \\
\left[ 2\lambda_{s_e} + \mu_{s_e} \frac{\partial t_{s_e}}{\partial r_{s_e}} + 3 \frac{\partial L_{s_e}}{\partial r_{s_e}} \right] &= 0 \Rightarrow L_{s_e} = -\frac{2}{3}\lambda_{s_e} r_{s_e} - \frac{1}{3}\mu_{s_e} t_{s_e} \\
\left[ 3 \frac{\partial L_{s_o}}{\partial r_{s_o}} \right] &= 0 \Rightarrow L_{s_o} = -c_{s_o}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

elde edilir. Diğer taraftan (2.35) de verilen özel koşullara göre;

body kısım için,

$$\begin{aligned}
L_b &= \lambda_b \dot{r}_b = -\frac{2}{3}\lambda_b r_b - \frac{1}{3}\mu_b t_b \\
\Rightarrow \frac{\partial r_b}{\partial s_b} &= -\frac{2}{3}r_b - \frac{1}{3}\frac{\mu_b}{\lambda_b} t_b \\
\Rightarrow \frac{\partial r_b}{\partial s_b} &= -\frac{2}{3}r_b - \frac{1}{3}\frac{\frac{\partial L_b}{\partial \dot{r}_b}}{\frac{\partial L_b}{\partial r_b}} t_b \\
\Rightarrow \frac{\partial r_b}{\partial s_b} \left( 1 + \frac{t_b}{3k_b} \right) &= -\frac{2}{3}r_b \\
\Rightarrow \frac{dr_b}{r_b} &= -2 \left( \frac{k_b}{3k_b + t_b} \right) ds_b \\
\Rightarrow \frac{dr_b}{r_b} &= -2 \left( \frac{k_b}{k_b(3 + s_b)} \right) ds_b \\
\Rightarrow \ln r_b &= -2 \ln(3 + s_b) + \ln c_b \\
\Rightarrow r_b &= \frac{c_b}{\left( 3 + \frac{t_b}{k_b} \right)^2}
\end{aligned} \tag{2.40}$$

çift soul kısım için,

$$\begin{aligned}
L_{s_e} &= \lambda_{s_e} \dot{r}_{s_e} = -\frac{2}{3}\lambda_{s_e} r_{s_e} - \frac{1}{3}\mu_{s_e} t_{s_e} \\
\Rightarrow \frac{\partial r_{s_e}}{\partial s_{s_e}} &= -\frac{2}{3}r_{s_e} - \frac{1}{3}\frac{\mu_{s_e}}{\lambda_{s_e}} t_{s_e} \\
\Rightarrow \frac{\partial r_{s_e}}{\partial s_{s_e}} &= -\frac{2}{3}r_{s_e} - \frac{1}{3}\frac{\frac{\partial L_{s_e}}{\partial \dot{r}_{s_e}}}{\frac{\partial L_{s_e}}{\partial r_{s_e}}} t_{s_e} \\
\Rightarrow \frac{\partial r_{s_e}}{\partial s_{s_e}} \left( 1 + \frac{t_{s_e}}{3k_{s_e}} \right) &= -\frac{2}{3}r_{s_e} \\
\Rightarrow \frac{dr_{s_e}}{r_{s_e}} &= -2 \left( \frac{k_{s_e}}{3k_{s_e} + t_{s_e}} \right) ds_{s_e} \\
\Rightarrow \frac{dr_{s_e}}{r_{s_e}} &= -2 \left( \frac{k_{s_e}}{k_{s_e}(3 + s_{s_e})} \right) ds_{s_e} \\
\Rightarrow \ln r_{s_e} &= -2 \ln(3 + s_{s_e}) + \ln c_{s_e} \\
\Rightarrow r_{s_e} &= \frac{c_{s_e}}{\left( 3 + \frac{t_{s_e}}{k_{s_e}} \right)^2}
\end{aligned} \tag{2.41}$$

tek soul kısım için,

$$L_{s_o} = c_{s_o} \quad (2.42)$$

bulunur. Buna göre,(2.40), (2.41) ve (2.42) eşitliklerinden

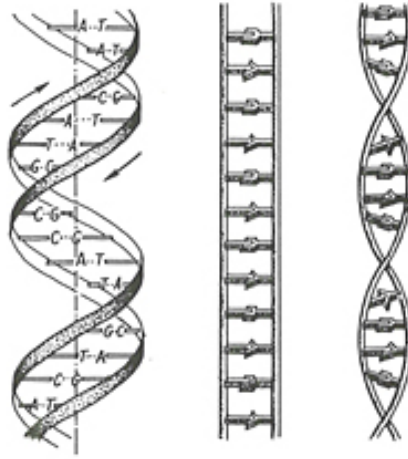
$$\begin{aligned} L &= L_b + L_{s_e} + L_{s_o} \\ &= -\frac{2}{3}\lambda_b \frac{c_b}{\left(3 + \frac{t_b}{k_b}\right)^2} - \frac{1}{3}\mu_b t_b - \frac{2}{3}\lambda_{s_e} \frac{c_{s_e}}{\left(3 + \frac{t_{s_e}}{k_{s_e}}\right)^2} - \frac{1}{3}\mu_{s_e} t_{s_e} - c_{s_o} \end{aligned} \quad (2.43)$$

süper Lagrange enerji değeri elde edilir.

### Örnek 2.2.13 (Süper Helis Örneği)

Bu örnekte, süper uzayda bir süper helis yapısını tanımlayarak, bu helis üzerinde bir cismin hareketini inceleyeceğiz.

Süper helis yapısının ikili sarmal şeklinde olacağı kaynaklarca ifade edilmiştir. Geometrik olarak çift sarmal, aynı eksene sahip, bir öteleme işlemi ile farkedilen iki eşlenik sarmaldır (Şekil 2.5). Bu ise, geometrik olarak bu eğrilerin öteleme işlemiyle birbirine dönüşebileceğini ifade eder. Yani, bir sarmal diğerinin eksen boyunca ötelenmiş halidir.



Şekil 2.5: DNA'nın sarmal yapısı

Moleküler biyolojide çift sarmal terimi DNA yapısına atfen kullanılır. DNA'nın özelliklerine bağlı olarak çift sarmalın dönme yönü sağ veya sol elle olur. Doğal şartlarda tamamen sağ ellidir. Biz de çalışmamızda bu doğal yolu kullanacağız. DNA yapısının çift sarmal yapısı, Şekil 2.6 ile resmedilmiştir.

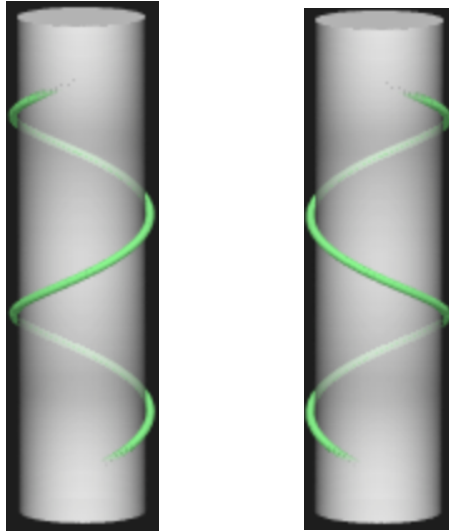




Şekil 2.6: DNA' nın çift sarmal yapısı

Diğer yandan, sarmal helisin üç boyutlu burğu şekilli yapısı gündelik hayatta değerlendirilirse; silindirik yay, vida, minare merdiveni örnekleri gösterilebilir.

Sarmallar, dönüş yönlerine göre sağ eli ve sol eli olarak nitelendirilirler.

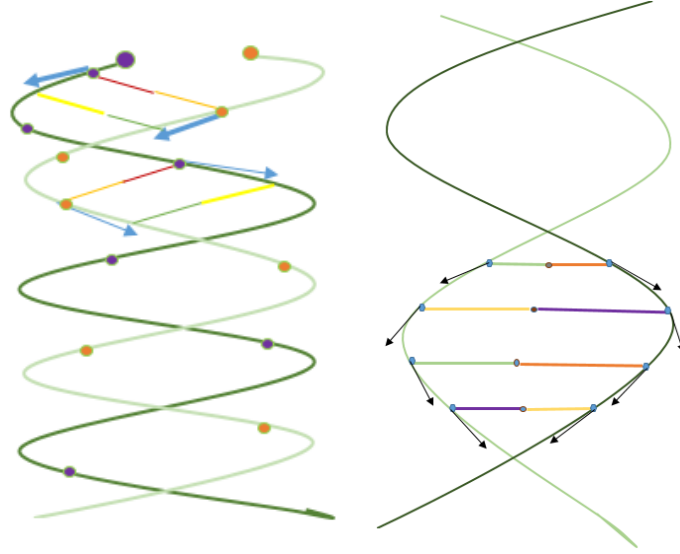


Şekil 2.7:Sağ ve sol eli sarmallar

Sağ eli sarmalı şu şekilde tanımlayabiliriz; sarmalı sağ elle tuttuğumuzu varsayalım. Baş parmağımız sarmalın eksenine paralel yönde kalsın, diğer parmaklarımız da sarmalın oyuklarının içine yerleşsin. Eğer, parmaklarımızın uçları baş parmağımıza doğru yönlenmişse sarmal sağ ellidir, aksi halde sol ellidir denir. Basit bir deyişle, sarmalın saat yönünde dönmesi, sarmalın kendimizden uzaklaşıyor gibi görünmesine neden oluyorsa, bu sarmal sağ ellidir. Aksi durumda sol eli olur.

Sağ eli sarmallar döndürülerek veya çevrilerek sol eli bir sarmala dönüşmezler. Ancak aynadan yansması sol eli görülür. Bu durum sol eli sarmal için de geçerlidir (Yılmaz ve diğ. 2005, Boi ve diğ. 2011, Pohl and Roberts 1978).

Burada çalışmamızda ele aldığımız süper helisi DNA yapısı ile karşılaştırdığımızda; bizim çalışmamızda bir  $m$  parçacığının sarmalın biri üzerinde hareketi, DNA'yı oluşturan adenin, guanin, timin ve sitozinlerin sarmal üzerinde birbirine bağlanması gibi düşünülebilir. Bu hareketi(bağlanmayı) aşağıdaki şekilde resmedebiliriz (Şekil 2.8).



Şekil 2.8: DNA' nın sarmal yapısı üzerinde adenin,guanin, timin ve sitozin bağlanmasına karşılık gelen hareket

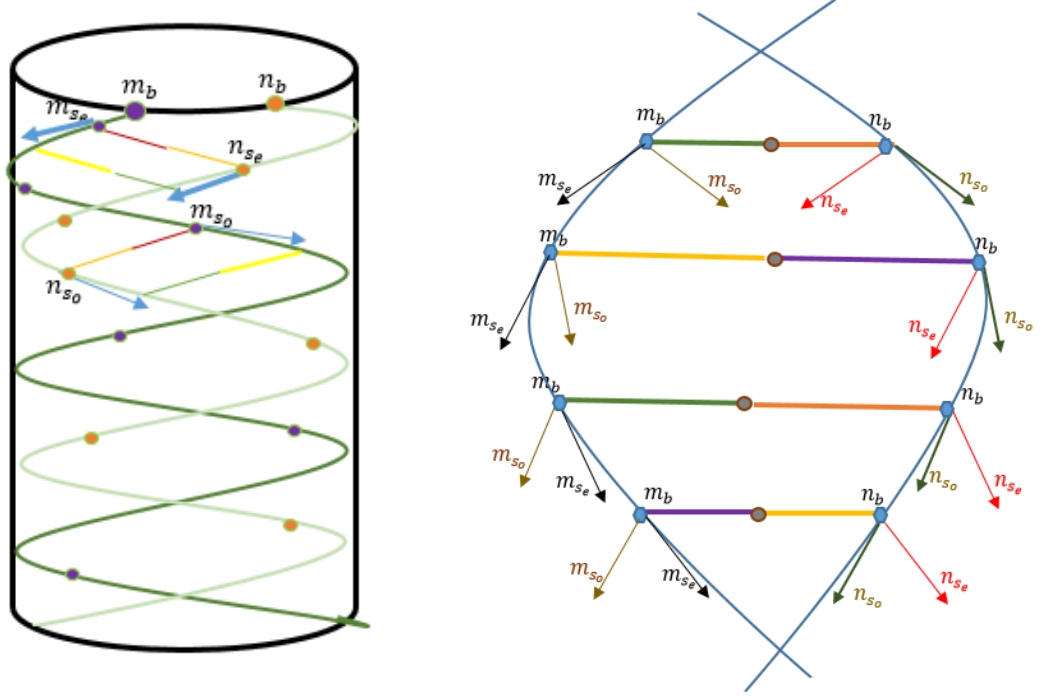
Bu yapılan fiziksel yorum, çalışmamızın gerek biyolojide gerekse diğer fen alanlarında bazı yapıların vektörler yardımıyla çalışılabileceğini ifade eder.

Süper uzayda, süper helis eğrisinin denklemi,

$$\begin{aligned}
 \alpha(r, \theta) &= (t, r \cos \theta, r \sin \theta, k\theta) \\
 &= \alpha_b(r_b, \theta_b) + \alpha_{s_e}(r_{s_e}, \theta_{s_e}) + \alpha_{s_o}(r_{s_o}, \theta_{s_o}) \\
 &= (t_b, r_b \cos \theta, r_b \sin \theta, k_b\theta, t_{s_e}, r_{s_e} \cos \theta, \\
 &\quad r_{s_e} \sin \theta, k_{s_e}\theta, t_{s_o}, r_{s_o} \cos \theta, r_{s_o} \sin \theta, k_{s_o}\theta)
 \end{aligned}
 \tag{2.44}$$

ile ifade edilebilmektedir. Biz bu eğri üzerinde bir  $m$  parçacığının herhangi bir noktadan, ki bu nokta başlangıç noktası kabul edilmek üzere( DNA zincirinin de belli bir kesiti alınıp incelenmesi durumunda), harekete başlaması sonucu oluşan

enerji denklemlerini inceleyeceğiz. Şekil 2.9'da da görüleceği üzere, bu hareketi incelerken, her iki sarmalın üzerinde aynı özellikte olan iki  $m$  ve  $n$  parçacıkları serbest bırakıldığında, çift soul süper teğet vektörlerin ve tek soul süper teğet vektörlerin ötelenmeleri sonucunda çözüm yapılması gerektiği dikkat edilmelidir.



Şekil 2.9: Çift sarmal eğri üzerinde parçacıkların hareketinin vektörlerle gösterimi

Buna göre öncelikle süper helis eğrisi üzerinde süper jet koordinat sistemi kuralım. Süper helis eğrisi üzerinde süper jet koordinat sistemi;

$$\begin{aligned} & (s_b, s_{s_e}, s_{s_o}, t_b, t_{s_e}, t_{s_o}, r_b \cos \theta, r_{s_e} \cos \theta, r_{s_o} \cos \theta, r_b \sin \theta, r_{s_e} \sin \theta, r_{s_o} \sin \theta, \\ & k_b \theta, k_{s_e} \theta, k_{s_o} \theta, \dot{t}_b, \dot{t}_{s_e}, \dot{t}_{s_o}, \dot{r}_b \cos \theta, \dot{r}_{s_e} \cos \theta, \dot{r}_{s_o} \cos \theta, \dot{r}_b \sin \theta, \dot{r}_{s_e} \sin \theta, \dot{r}_{s_o} \sin \theta, 0, 0, 0) \end{aligned} \quad (2.45)$$

ile belirlenir. Burada süper türevsel koordinatlar açık olarak ifade edilirse,

$$\begin{aligned} \dot{t}_b &= \frac{\partial t_b}{\partial s_b} & \dot{t}_{s_e} &= \frac{\partial t_{s_e}}{\partial s_{s_e}} & \dot{t}_{s_o} &= \frac{\partial t_{s_o}}{\partial s_{s_o}} \\ \dot{r}_b &= \frac{\partial r_b}{\partial s_b} & \dot{r}_{s_e} &= \frac{\partial r_{s_e}}{\partial s_{s_e}} & \dot{r}_{s_o} &= \frac{\partial r_{s_o}}{\partial s_{s_o}} \end{aligned}$$

şeklinde yazılır.

Yukarıda verilen süper jet koordinatları süper Euler-Lagrange enerji denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
0 = & 2\dot{t}_b \frac{\partial^2 L_b}{\partial s_b \partial \dot{t}_b} + 2\dot{t}_{s_e} \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial s_{s_e} \partial \dot{t}_{s_e}} + 2\dot{t}_{s_o} \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial s_{s_o} \partial \dot{t}_{s_o}} \\
& + 4\dot{r}_b \frac{\partial^2 L_b}{\partial s_b \partial \dot{r}_b} + 4\dot{r}_{s_e} \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial s_{s_e} \partial \dot{r}_{s_e}} + 4\dot{r}_{s_o} \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial s_{s_o} \partial \dot{r}_{s_o}} \\
& - 2(\dot{t}_b)^2 \frac{\partial^2 L_b}{\partial t_b \partial \dot{t}_b} - 2(\dot{t}_{s_e})^2 \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial t_{s_e} \partial \dot{t}_{s_e}} - 2(\dot{t}_{s_o})^2 \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial t_{s_o} \partial \dot{t}_{s_o}} \\
& - 4(\dot{r}_b)^2 \frac{\partial^2 L_b}{\partial r_b \partial \dot{r}_b} - 4(\dot{r}_{s_e})^2 \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial r_{s_e} \partial \dot{r}_{s_e}} - 4(\dot{r}_{s_o})^2 \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial r_{s_o} \partial \dot{r}_{s_o}} \\
& - 2\dot{t}_b \frac{\partial L_b}{\partial t_b} - 2\dot{t}_{s_e} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial t_{s_e}} - 2\dot{t}_{s_o} \frac{\partial L_{s_o}}{\partial t_{s_o}} \\
& - 4\dot{r}_b \frac{\partial L_b}{\partial r_b} - 4\dot{r}_{s_e} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial r_{s_e}} - 4\dot{r}_{s_o} \frac{\partial L_{s_o}}{\partial r_{s_o}} \\
& - 2(\dot{t}_b)^2 \frac{\partial^2 L_b}{\partial \dot{t}_b \partial \dot{t}_b} - 2(\dot{t}_{s_e})^2 \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial \dot{t}_{s_e} \partial \dot{t}_{s_e}} + 2(\dot{t}_{s_o})^2 \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial \dot{t}_{s_o} \partial \dot{t}_{s_o}} \\
& - 4(\dot{r}_b)^2 \frac{\partial^2 L_b}{\partial \dot{r}_b \partial \dot{r}_b} - 4(\dot{r}_{s_e})^2 \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial \dot{r}_{s_e} \partial \dot{r}_{s_e}} + 4(\dot{r}_{s_o})^2 \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial \dot{r}_{s_o} \partial \dot{r}_{s_o}} \\
& - 2\dot{t}_b \frac{\partial L_b}{\partial \dot{t}_b} - 2\dot{t}_{s_e} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial \dot{t}_{s_e}} - 4\dot{r}_b \frac{\partial L_b}{\partial \dot{r}_b} - 4\dot{r}_{s_e} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial \dot{r}_{s_e}}
\end{aligned} \tag{2.46}$$

süper Lagrange enerji denklemi elde edilir. (2.35) ile verilen özel koşullar dikkate alındığında, yani,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_b}{\partial \dot{r}_b} &= \lambda_b & \frac{\partial L_{s_e}}{\partial \dot{r}_{s_e}} &= \lambda_{s_e} & \frac{\partial L_{s_o}}{\partial \dot{r}_{s_o}} &= -\lambda_{s_o} \\
\frac{\partial L_b}{\partial \dot{t}_b} &= \mu_b & \frac{\partial L_{s_e}}{\partial \dot{t}_{s_e}} &= \mu_{s_e} & \frac{\partial L_{s_o}}{\partial \dot{t}_{s_o}} &= -\mu_{s_o} \\
t_b &= k_b s_b & t_{s_e} &= k_{s_e} s_{s_e} & t_{s_o} &= k_{s_o} s_{s_o}
\end{aligned}$$

kabulleri altında (2.46) denklemi düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}
0 = & -2\dot{t}_b \frac{\partial L_b}{\partial t_b} - 2\dot{t}_{s_e} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial t_{s_e}} - 2\dot{t}_{s_o} \frac{\partial L_{s_o}}{\partial t_{s_o}} - 4\dot{r}_b \frac{\partial L_b}{\partial r_b} - 4\dot{r}_{s_e} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial r_{s_e}} - 4\dot{r}_{s_o} \frac{\partial L_{s_o}}{\partial r_{s_o}} \\
& - 2\dot{t}_b \frac{\partial L_b}{\partial \dot{t}_b} - 2\dot{t}_{s_e} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial \dot{t}_{s_e}} - 4\dot{r}_b \frac{\partial L_b}{\partial \dot{r}_b} - 4\dot{r}_{s_e} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial \dot{r}_{s_e}}
\end{aligned} \tag{2.47}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
0 = & -\frac{\partial t_b}{\partial s_b} \frac{\partial L_b}{\partial t_b} - \frac{\partial t_{s_e}}{\partial s_{s_e}} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial t_{s_e}} - \frac{\partial t_{s_o}}{\partial s_{s_o}} \frac{\partial L_{s_o}}{\partial t_{s_o}} - 2 \frac{\partial r_b}{\partial s_b} \frac{\partial L_b}{\partial r_b} - 2 \frac{\partial r_{s_e}}{\partial s_{s_e}} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial r_{s_e}} - 2 \frac{\partial r_{s_o}}{\partial s_{s_o}} \frac{\partial L_{s_o}}{\partial r_{s_o}} \\
& - \frac{\partial t_b}{\partial s_b} \frac{\partial L_b}{\partial \dot{t}_b} - \frac{\partial t_{s_e}}{\partial s_{s_e}} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial \dot{t}_{s_e}} - 2 \frac{\partial r_b}{\partial s_b} \frac{\partial L_b}{\partial \dot{r}_b} - 2 \frac{\partial r_{s_e}}{\partial s_{s_e}} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial \dot{r}_{s_e}}
\end{aligned} \tag{2.48}$$

olup (2.48) denkleminde (2.35) koşulları kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
0 &= -3\frac{\partial L_b}{\partial s_b} - 3\frac{\partial L_{s_e}}{\partial s_{s_e}} - 3\frac{\partial L_{s_o}}{\partial s_{s_o}} \\
&\quad -\dot{t}_b\mu_b - \dot{t}_{s_e}\mu_{s_e} - 2\dot{r}_b\lambda_b - 2\dot{r}_{s_e}\lambda_{s_e} \\
&= 2\lambda_b\frac{\partial r_b}{\partial s_b} + \mu_b\frac{\partial t_b}{\partial r_b}\frac{\partial r_b}{\partial s_b} + 2\lambda_{s_e}\frac{\partial r_{s_e}}{\partial s_{s_e}} + \mu_{s_e}\frac{\partial t_{s_e}}{\partial r_{s_e}}\frac{\partial r_{s_e}}{\partial s_{s_e}} \\
&\quad + 3\frac{\partial L_b}{\partial r_b}\frac{\partial r_b}{\partial s_b} + 3\frac{\partial L_{s_e}}{\partial r_{s_e}}\frac{\partial r_{s_e}}{\partial s_{s_e}} + 3\frac{\partial L_{s_o}}{\partial r_{s_o}}\frac{\partial r_{s_o}}{\partial s_{s_o}} \\
&= \frac{\partial r_b}{\partial s_b} \left[ 2\lambda_b + \mu_b\frac{\partial t_b}{\partial r_b} + 3\frac{\partial L_b}{\partial r_b} \right] \\
&\quad + \frac{\partial r_{s_e}}{\partial s_{s_e}} \left[ 2\lambda_{s_e} + \mu_{s_e}\frac{\partial t_{s_e}}{\partial r_{s_e}} + 3\frac{\partial L_{s_e}}{\partial r_{s_e}} \right] + \frac{\partial r_{s_o}}{\partial s_{s_o}} \left[ 3\frac{\partial L_{s_o}}{\partial r_{s_o}} \right]
\end{aligned}$$

bulunur. Burada,  $r$ 'nin  $s$ 'ye göre türevi sıfırdan farklı olacağından, yani,

$$\frac{\partial r_b}{\partial s_b} \neq 0, \quad \frac{\partial r_{s_e}}{\partial s_{s_e}} \neq 0, \quad \frac{\partial r_{s_o}}{\partial s_{s_o}} \neq 0$$

durumu sonucunda

$$\begin{aligned}
\left[ 2\lambda_b + \mu_b\frac{\partial t_b}{\partial r_b} + 3\frac{\partial L_b}{\partial r_b} \right] &= 0 \\
\left[ 2\lambda_{s_e} + \mu_{s_e}\frac{\partial t_{s_e}}{\partial r_{s_e}} + 3\frac{\partial L_{s_e}}{\partial r_{s_e}} \right] &= 0 \\
\left[ 3\frac{\partial L_{s_o}}{\partial r_{s_o}} \right] &= 0
\end{aligned} \tag{2.49}$$

elde edilir. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\left[ 2\lambda_b + \mu_b\frac{\partial t_b}{\partial r_b} + 3\frac{\partial L_b}{\partial r_b} \right] &= 0 \Rightarrow L_b = -\frac{2}{3}\lambda_b r_b - \frac{1}{3}\mu_b t_b \\
\left[ 2\lambda_{s_e} + \mu_{s_e}\frac{\partial t_{s_e}}{\partial r_{s_e}} + 3\frac{\partial L_{s_e}}{\partial r_{s_e}} \right] &= 0 \Rightarrow L_{s_e} = -\frac{2}{3}\lambda_{s_e} r_{s_e} - \frac{1}{3}\mu_{s_e} t_{s_e} \\
\left[ 3\frac{\partial L_{s_o}}{\partial r_{s_o}} \right] &= 0 \Rightarrow L_{s_o} = -c_{s_o}
\end{aligned} \tag{2.50}$$

bulunur. Diğer taraftan (2.35) de verilen özel koşullara göre;

body kısım için,

$$\begin{aligned}
L_b &= \lambda_b \dot{r}_b = -\frac{2}{3}\lambda_b r_b - \frac{1}{3}\mu_b t_b \\
&\Rightarrow \frac{\partial r_b}{\partial s_b} = -\frac{2}{3}r_b - \frac{1}{3}\frac{\mu_b}{\lambda_b}t_b \\
&\Rightarrow \frac{\partial r_b}{\partial s_b} = -\frac{2}{3}r_b - \frac{1}{3}\frac{\frac{\partial L_b}{\partial t_b}}{\frac{\partial L_b}{\partial \dot{r}_b}}t_b \\
&\Rightarrow \frac{\partial r_b}{\partial s_b} \left(1 + \frac{t_b}{3k_b}\right) = -\frac{2}{3}r_b \\
&\Rightarrow \frac{dr_b}{r_b} = -2 \left(\frac{k_b}{3k_b + t_b}\right) ds_b \\
&\Rightarrow \frac{dr_b}{r_b} = -2 \left(\frac{k_b}{k_b(3 + s_b)}\right) ds_b \\
&\Rightarrow \ln r_b = -2 \ln(3 + s_b) + \ln c_b \\
&\Rightarrow r_b = \frac{c_b}{\left(3 + \frac{t_b}{k_b}\right)^2}
\end{aligned} \tag{2.51}$$

çift soul kısım için,

$$\begin{aligned}
L_{s_e} &= \lambda_{s_e} \dot{r}_{s_e} = -\frac{2}{3}\lambda_{s_e} r_{s_e} - \frac{1}{3}\mu_{s_e} t_{s_e} \\
&\Rightarrow \frac{\partial r_{s_e}}{\partial s_{s_e}} = -\frac{2}{3}r_{s_e} - \frac{1}{3}\frac{\mu_{s_e}}{\lambda_{s_e}}t_{s_e} \\
&\Rightarrow \frac{\partial r_{s_e}}{\partial s_{s_e}} = -\frac{2}{3}r_{s_e} - \frac{1}{3}\frac{\frac{\partial L_{s_e}}{\partial t_{s_e}}}{\frac{\partial L_{s_e}}{\partial \dot{r}_{s_e}}}t_{s_e} \\
&\Rightarrow \frac{\partial r_{s_e}}{\partial s_{s_e}} \left(1 + \frac{t_{s_e}}{3k_{s_e}}\right) = -\frac{2}{3}r_{s_e} \\
&\Rightarrow \frac{dr_{s_e}}{r_{s_e}} = -2 \left(\frac{k_{s_e}}{3k_{s_e} + t_{s_e}}\right) ds_{s_e} \\
&\Rightarrow \frac{dr_{s_e}}{r_{s_e}} = -2 \left(\frac{k_{s_e}}{k_{s_e}(3 + s_{s_e})}\right) ds_{s_e} \\
&\Rightarrow \ln r_{s_e} = -2 \ln(3 + s_{s_e}) + \ln c_{s_e} \\
&\Rightarrow r_{s_e} = \frac{c_{s_e}}{\left(3 + \frac{t_{s_e}}{k_{s_e}}\right)^2}
\end{aligned} \tag{2.52}$$

tek soul kısım için,

$$L_{s_o} = -c_{s_o} \tag{2.53}$$

bulunur. Buna göre,

$$\begin{aligned}
L &= L_b + L_{s_e} + L_{s_o} \\
&= -\frac{2}{3}\lambda_b \frac{c_b}{\left(3 + \frac{t_b}{k_b}\right)^2} - \frac{1}{3}\mu_b t_b - \frac{2}{3}\lambda_{s_e} \frac{c_{s_e}}{\left(3 + \frac{t_{s_e}}{k_{s_e}}\right)^2} - \frac{1}{3}\mu_{s_e} t_{s_e} - c_{s_o}
\end{aligned} \tag{2.54}$$

süper helis eğrisi için süper Lagrange enerji değeri elde edilir.

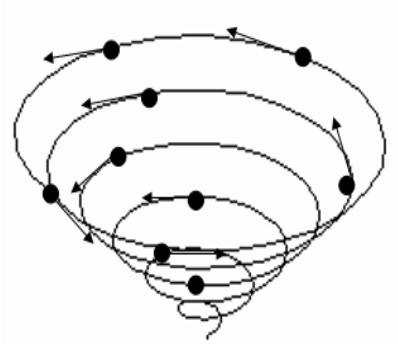
### Örnek 2.2.14 (Süper Logaritmik Spiral Örneği)

Bu örnekte, süper uzay-da bir süper logaritmik spiral eğrisini tanımlayarak, bu eğri üzerinde bir cismin hareketini inceleyeceğiz ve Euler-Lagrange enerji değerini hesaplayacağız.

Logaritmik spiral (eş açılı spiral), ilk olarak 17. yüzyılda René Descartes ve Jakob Bernoulli tarafından tanımlanmış ve incelenmiş olan, bir şahinin avına yaklaşırken izlediği yolda, kasırgaların şeklinde, notilus gibi pek çok deniz canlısının kabuğunun inşasında da karşımıza çıkan doğada sıkça rastlanan bir spiral çeşididir. Logaritmik spiralin en önemli özelliği, orijinden çıkan her doğru spirali aynı açı ile keser. Kutupsal koordinatlarda  $r = ae^{b\theta}$  şeklinde ifade edilen bu spiralin parametrik koordinatlardaki ifadesi aşağıdaki şekildedir (Mukhopadhyay 2004).

$$\begin{aligned}x(\theta) &= r(\theta) \cos \theta = ae^{b\theta} \cos \theta \\y(\theta) &= r(\theta) \sin \theta = ae^{b\theta} \sin \theta\end{aligned}$$

Logaritmik spiral eğrisi üzerinde bir parçacığın hareketi aşağıdaki şekilde resmedilebilir (Şekil 2.10).



Şekil 2.10: Logaritmik spiral eğrisi üzerinde hareket

Logaritmik spiral eğrisi,

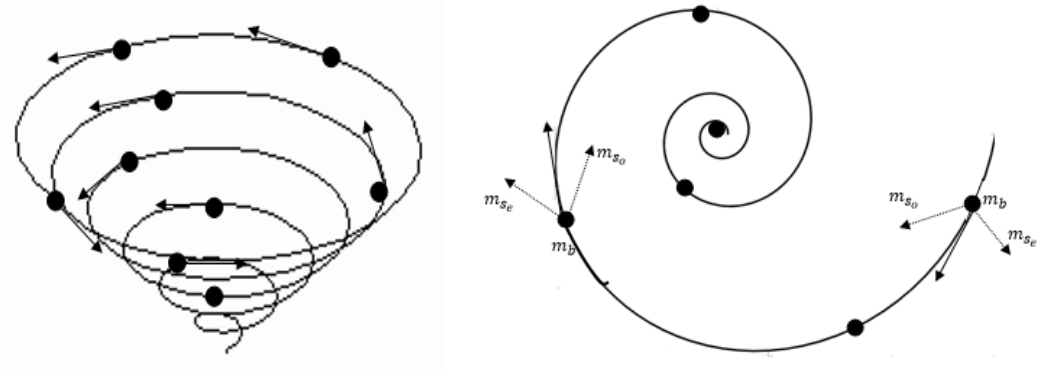
$$\alpha(t, r) = (t, a(t)e^{b(t)\theta} \cos \theta, a(t)e^{b(t)\theta} \sin \theta)$$

şeklinde ifade edilir. Bu koordinatlar süper uzayda body ve soul kısımları da içerecek şekilde daha açık olarak

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= (t, a(t)e^{b(t)\theta} \cos \theta, a(t)e^{b(t)\theta} \sin \theta) \\&= (t_b, t_{s_e}, t_{s_o}, a_b(t_b)e^{b_b(t_b)\theta} \cos \theta, a_{s_e}(t_{s_e})e^{b_{s_e}(t_{s_e})\theta} \cos \theta, a_{s_o}(t_{s_o})e^{b_{s_o}(t_{s_o})\theta} \cos \theta, \\&\quad a_b(t_b)e^{b_b(t_b)\theta} \sin \theta, a_{s_e}(t_{s_e})e^{b_{s_e}(t_{s_e})\theta} \sin \theta, a_{s_o}(t_{s_o})e^{b_{s_o}(t_{s_o})\theta} \sin \theta)\end{aligned}\tag{2.55}$$

biçiminde yazılabilir.

Bir 'm' parçacığının süper uzayda süper logaritmik spiral eğrisi üzerindeki hareketini,



Şekil 2.11: Logaritmik spiral eğrisi üzerinde hareketinin vektörler ile gösterimi şeklinde gösterebiliriz (Şekil 2.11). Parçacığın bu eğri üzerindeki hareketini tanımlamak için süper jet demet koordinatlarını kullanmamız gerekir. Buna göre süper logaritmik spiral için süper jet demet koordinat sistemi,

$$\left( s, t, a(t)e^{b(t)\theta} \cos \theta, a(t)e^{b(t)\theta} \sin \theta, \dot{t}(a(t)e^{b(t)\theta}) \cos \theta, (a(t)e^{b(t)\theta}) \dot{\theta} \sin \theta \right)$$

şeklinde ifade edilir. Bu jet demet koordinatlar, body, soul even ve soul odd kısımlar ile daha ayrıntılı ifade edildiğinde,

$$s = s_b, s_{s_e}, s_{s_o},$$

$$t = t_b, t_{s_e}, t_{s_o},$$

$$a(t)e^{b(t)\theta} \cos \theta = (a_b e^{b_b \theta} \cos \theta, a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} \cos \theta, a_{s_o} e^{b_{s_o} \theta} \cos \theta)$$

$$a(t)e^{b(t)\theta} \sin \theta = (a_b e^{b_b \theta} \sin \theta, a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} \sin \theta, a_{s_o} e^{b_{s_o} \theta} \sin \theta)$$

$$(a(t)e^{b(t)\theta}) \dot{\theta} \cos \theta = (\dot{a}_b e^{b_b \theta} \cos \theta + \theta \dot{b}_b a_b e^{b_b \theta} \cos \theta, \dot{a}_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} \cos \theta + \theta \dot{b}_{s_e} a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} \cos \theta,$$

$$\dot{a}_{s_o} e^{b_{s_o} \theta} \cos \theta + \theta \dot{b}_{s_o} a_{s_o} e^{b_{s_o} \theta} \cos \theta)$$

$$(a(t)e^{b(t)\theta}) \dot{\theta} \sin \theta = (\dot{a}_b e^{b_b \theta} \sin \theta + \theta \dot{b}_b a_b e^{b_b \theta} \sin \theta, \dot{a}_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} \sin \theta + \theta \dot{b}_{s_e} a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} \sin \theta,$$

$$\dot{a}_{s_o} e^{b_{s_o} \theta} \sin \theta + \theta \dot{b}_{s_o} a_{s_o} e^{b_{s_o} \theta} \sin \theta)$$



ve

$$\begin{aligned} a_b e^{b_b \theta} &= r_b \quad , \quad \dot{a}_b e^{b_b \theta} = \dot{r}_b \\ a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} &= r_{s_e} \quad , \quad \dot{a}_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} = \dot{r}_{s_e} \\ a_{s_o} e^{b_{s_o} \theta} &= r_{s_o} \quad , \quad \dot{a}_{s_o} e^{b_{s_o} \theta} = \dot{r}_{s_o} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \left( \overbrace{s_b, s_{s_e}, s_{s_o}}^s, \overbrace{t_b, t_{s_e}, t_{s_o}}^t, \overbrace{r_b \cos \theta, r_{s_e} \cos \theta, r_{s_o} \cos \theta}^{r \cos \theta}, \overbrace{r_b \sin \theta, r_{s_e} \sin \theta, r_{s_o} \sin \theta}^{r \sin \theta} \right), \\ & \left( \overbrace{\dot{t}_b, \dot{t}_{s_e}, \dot{t}_{s_o}}^{\dot{t}}, \overbrace{\dot{r}_b \cos \theta, \dot{r}_{s_e} \cos \theta, \dot{r}_{s_o} \cos \theta}^{\dot{r} \cos \theta}, \overbrace{\dot{r}_b \sin \theta, \dot{r}_{s_e} \sin \theta, \dot{r}_{s_o} \sin \theta}^{\dot{r} \sin \theta} \right) \end{aligned} \quad (2.56)$$

şeklinde yazılır. Burada süper türevsel koordinatları açıkça ifade edersek,

$$\begin{aligned} \dot{t}_b &= \frac{\partial t_b}{\partial s_b} \quad , \quad \dot{t}_{s_e} = \frac{\partial t_{s_e}}{\partial s_{s_e}} \quad , \quad \dot{t}_{s_o} = \frac{\partial t_{s_o}}{\partial s_{s_o}} \\ \dot{r}_b &= \frac{\partial r_b}{\partial s_b} = \dot{a}_b e^{b_b \theta} + \theta \dot{b}_b a_b e^{b_b \theta} \\ \dot{r}_{s_e} &= \frac{\partial r_{s_e}}{\partial s_{s_e}} = \dot{a}_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} + \theta \dot{b}_{s_e} a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} \\ \dot{r}_{s_o} &= \frac{\partial r_{s_o}}{\partial s_{s_o}} = \dot{a}_{s_o} e^{b_{s_o} \theta} + \theta \dot{b}_{s_o} a_{s_o} e^{b_{s_o} \theta} \end{aligned}$$

olur. Burada,

$$r_b = a_b e^{b_b \theta} \quad , \quad r_{s_e} = a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} \quad , \quad r_{s_o} = a_{s_o} e^{b_{s_o} \theta}$$

şeklinde yazılır. Bu süper jet demet koordinatlar yukarıda verilen (2.31) ifadesindeki Euler-Lagrange denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
0 = & 2\dot{t}_b \frac{\partial^2 L_b}{\partial s_b \partial \dot{t}_b} + 2\dot{t}_{s_e} \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial s_{s_e} \partial \dot{t}_{s_e}} + 2\dot{t}_{s_o} \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial s_{s_o} \partial \dot{t}_{s_o}} \\
& + 4(\dot{a}_b e^{b_b \theta} + \theta \dot{b}_b a_b e^{b_b \theta}) \frac{\partial^2 L_b}{\partial s_b \partial (\dot{a}_b e^{b_b \theta} + \theta \dot{b}_b a_b e^{b_b \theta})} \\
& + 4(\dot{a}_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} + \theta \dot{b}_{s_e} a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta}) \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial s_{s_e} \partial (\dot{a}_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} + \theta \dot{b}_{s_e} a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta})} \\
& + 4(\dot{a}_{s_o} e^{b_{s_o} \theta} + \theta \dot{b}_{s_o} a_{s_o} e^{b_{s_o} \theta}) \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial s_{s_o} \partial (\dot{a}_{s_o} e^{b_{s_o} \theta} + \theta \dot{b}_{s_o} a_{s_o} e^{b_{s_o} \theta})} \\
& - 2(\dot{t}_b)^2 \frac{\partial^2 L_b}{\partial \dot{t}_b \partial \dot{t}_b} - 2(\dot{t}_{s_e})^2 \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial \dot{t}_{s_e} \partial \dot{t}_{s_e}} - 2(\dot{t}_{s_o})^2 \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial \dot{t}_{s_o} \partial \dot{t}_{s_o}} \\
& - 4(\dot{a}_b e^{b_b \theta} + \theta \dot{b}_b a_b e^{b_b \theta})^2 \frac{\partial^2 L_b}{\partial a_b e^{b_b \theta} \partial (\dot{a}_b e^{b_b \theta} + \theta \dot{b}_b a_b e^{b_b \theta})} \\
& - 4(\dot{a}_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} + \theta \dot{b}_{s_e} a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta})^2 \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} \partial (\dot{a}_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} + \theta \dot{b}_{s_e} a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta})} \\
& - 4(\dot{a}_{s_o} e^{b_{s_o} \theta} + \theta \dot{b}_{s_o} a_{s_o} e^{b_{s_o} \theta})^2 \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial a_{s_o} e^{b_{s_o} \theta} \partial (\dot{a}_{s_o} e^{b_{s_o} \theta} + \theta \dot{b}_{s_o} a_{s_o} e^{b_{s_o} \theta})} \\
& - 2\dot{t}_b \frac{\partial L_b}{\partial \dot{t}_b} - 2\dot{t}_{s_e} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial \dot{t}_{s_e}} - 2\dot{t}_{s_o} \frac{\partial L_{s_o}}{\partial \dot{t}_{s_o}} \\
& - 4(\dot{a}_b e^{b_b \theta} + \theta \dot{b}_b a_b e^{b_b \theta}) \frac{\partial L_b}{\partial a_b e^{b_b \theta}} - 4(\dot{a}_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} + \theta \dot{b}_{s_e} a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta}) \frac{\partial L_{s_e}}{\partial a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta}} \\
& - 4(\dot{a}_{s_o} e^{b_{s_o} \theta} + \theta \dot{b}_{s_o} a_{s_o} e^{b_{s_o} \theta}) \frac{\partial L_{s_o}}{\partial a_{s_o} e^{b_{s_o} \theta}} \\
& - 2(\dot{t}_b)^2 \frac{\partial^2 L_b}{\partial \dot{t}_b \partial \dot{t}_b} - 2(\dot{t}_{s_e})^2 \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial \dot{t}_{s_e} \partial \dot{t}_{s_e}} + 2(\dot{t}_{s_o})^2 \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial \dot{t}_{s_o} \partial \dot{t}_{s_o}} \\
& - 4(\dot{a}_b e^{b_b \theta} + \theta \dot{b}_b a_b e^{b_b \theta})^2 \frac{\partial^2 L_b}{\partial (\dot{a}_b e^{b_b \theta} + \theta \dot{b}_b a_b e^{b_b \theta}) \partial (\dot{a}_b e^{b_b \theta} + \theta \dot{b}_b a_b e^{b_b \theta})} \\
& - 4(\dot{a}_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} + \theta \dot{b}_{s_e} a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta})^2 \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial (\dot{a}_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} + \theta \dot{b}_{s_e} a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta}) \partial (\dot{a}_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} + \theta \dot{b}_{s_e} a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta})} \\
& + 4(\dot{a}_{s_o} e^{b_{s_o} \theta} + \theta \dot{b}_{s_o} a_{s_o} e^{b_{s_o} \theta})^2 \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial (\dot{a}_{s_o} e^{b_{s_o} \theta} + \theta \dot{b}_{s_o} a_{s_o} e^{b_{s_o} \theta}) \partial (\dot{a}_{s_o} e^{b_{s_o} \theta} + \theta \dot{b}_{s_o} a_{s_o} e^{b_{s_o} \theta})} \\
& - 2\dot{t}_b \frac{\partial L_b}{\partial \dot{t}_b} - 2\dot{t}_{s_e} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial \dot{t}_{s_e}} - 4(\dot{a}_b e^{b_b \theta} + \theta \dot{b}_b a_b e^{b_b \theta}) \frac{\partial L_b}{\partial (\dot{a}_b e^{b_b \theta} + \theta \dot{b}_b a_b e^{b_b \theta})} \\
& - 4(\dot{a}_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} + \theta \dot{b}_{s_e} a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta}) \frac{\partial L_{s_e}}{\partial (\dot{a}_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} + \theta \dot{b}_{s_e} a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta})}
\end{aligned} \tag{2.57}$$

süper Euler-Lagrange enerji denklemi elde edilir. (2.57) denklemi düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
0 = & -2\dot{t}_b \frac{\partial L_b}{\partial t_b} - 2\dot{t}_{s_e} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial t_{s_e}} - 2\dot{t}_{s_o} \frac{\partial L_{s_o}}{\partial t_{s_o}} - 4 \left( \dot{a}_b e^{b_b\theta} + \theta \dot{b}_b a_b e^{b_b\theta} \right) \frac{\partial L_b}{\partial a_b e^{b_b\theta}} \\
& -4 \left( \dot{a}_{s_e} e^{b_{s_e}\theta} + \theta \dot{b}_{s_e} a_{s_e} e^{b_{s_e}\theta} \right) \frac{\partial L_{s_e}}{\partial a_{s_e} e^{b_{s_e}\theta}} - 4 \left( \dot{a}_{s_o} e^{b_{s_o}\theta} + \theta \dot{b}_{s_o} a_{s_o} e^{b_{s_o}\theta} \right) \frac{\partial L_{s_o}}{\partial a_{s_o} e^{b_{s_o}\theta}} \\
& -2\dot{t}_b \frac{\partial L_b}{\partial t_b} - 2\dot{t}_{s_e} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial t_{s_e}} - 4 \left( \dot{a}_b e^{b_b\theta} + \theta \dot{b}_b a_b e^{b_b\theta} \right) \frac{\partial L_b}{\partial \left( \dot{a}_b e^{b_b\theta} + \theta \dot{b}_b a_b e^{b_b\theta} \right)} \\
& -4 \left( \dot{a}_{s_e} e^{b_{s_e}\theta} + \theta \dot{b}_{s_e} a_{s_e} e^{b_{s_e}\theta} \right) \frac{\partial L_{s_e}}{\partial \left( \dot{a}_{s_e} e^{b_{s_e}\theta} + \theta \dot{b}_{s_e} a_{s_e} e^{b_{s_e}\theta} \right)}
\end{aligned} \tag{2.58}$$

elde edilir. (2.58) de türevsel terimler açık olarak yazılırsa,

$$\begin{aligned}
0 = & -\frac{\partial t_b}{\partial s_b} \frac{\partial L_b}{\partial t_b} - \frac{\partial t_{s_e}}{\partial s_{s_e}} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial t_{s_e}} - \frac{\partial t_{s_o}}{\partial s_{s_o}} \frac{\partial L_{s_o}}{\partial t_{s_o}} \\
& -2 \frac{\partial a_b e^{b_b\theta}}{\partial s_b} \frac{\partial L_b}{\partial a_b e^{b_b\theta}} - 2 \frac{\partial a_{s_e} e^{b_{s_e}\theta}}{\partial s_{s_e}} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial a_{s_e} e^{b_{s_e}\theta}} \\
& -2 \frac{\partial a_{s_o} e^{b_{s_o}\theta}}{\partial s_{s_o}} \frac{\partial L_{s_o}}{\partial a_{s_o} e^{b_{s_o}\theta}} - \frac{\partial t_b}{\partial s_b} \frac{\partial L_b}{\partial \dot{t}_b} - \frac{\partial t_{s_e}}{\partial s_{s_e}} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial \dot{t}_{s_e}} \\
& -2 \frac{\partial a_b e^{b_b\theta}}{\partial s_b} \frac{\partial L_b}{\partial \dot{a}_b e^{b_b\theta} + \theta \dot{b}_b a_b e^{b_b\theta}} - 2 \frac{\partial a_{s_e} e^{b_{s_e}\theta}}{\partial s_{s_e}} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial \dot{a}_{s_e} e^{b_{s_e}\theta} + \theta \dot{b}_{s_e} a_{s_e} e^{b_{s_e}\theta}}
\end{aligned} \tag{2.59}$$

bulunur. (2.35) ile verilen özel koşullar dikkate alınırsa, yani,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_b}{\partial \dot{r}_b} &= \lambda_b & \frac{\partial L_{s_e}}{\partial \dot{r}_{s_e}} &= \lambda_{s_e} & \frac{\partial L_{s_o}}{\partial \dot{r}_{s_o}} &= -\lambda_{s_o} \\
\frac{\partial L_b}{\partial \dot{t}_b} &= \mu_b & \frac{\partial L_{s_e}}{\partial \dot{t}_{s_e}} &= \mu_{s_e} & \frac{\partial L_{s_o}}{\partial \dot{t}_{s_o}} &= -\mu_{s_o} \\
t_b &= k_b s_b & t_{s_e} &= k_{s_e} s_{s_e} & t_{s_o} &= k_{s_o} s_{s_o}
\end{aligned}$$

olur. Burada,

$$\begin{aligned}
\dot{r}_b &= \dot{a}_b e^{b_b\theta} + \theta \dot{b}_b a_b e^{b_b\theta} \\
\dot{r}_{s_e} &= \dot{a}_{s_e} e^{b_{s_e}\theta} + \theta \dot{b}_{s_e} a_{s_e} e^{b_{s_e}\theta} \\
\dot{r}_{s_o} &= \dot{a}_{s_o} e^{b_{s_o}\theta} + \theta \dot{b}_{s_o} a_{s_o} e^{b_{s_o}\theta}
\end{aligned}$$

kabulleri altında (2.59) denklemi düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
0 &= -3\frac{\partial L_b}{\partial s_b} - 3\frac{\partial L_{s_e}}{\partial s_{s_e}} - 3\frac{\partial L_{s_o}}{\partial s_{s_o}} - \dot{t}_b\mu_b - \dot{t}_{s_e}\mu_{s_e} \\
&\quad - 2\left(\dot{a}_b e^{b_b\theta} + \theta\dot{b}_b a_b e^{b_b\theta}\right)\lambda_b - 2\left(\dot{a}_{s_e} e^{b_{s_e}\theta} + \theta\dot{b}_{s_e} a_{s_e} e^{b_{s_e}\theta}\right)\lambda_{s_e} \\
&= 2\lambda_b \frac{\partial a_b e^{b_b\theta}}{\partial s_b} + \mu_b \frac{\partial t_b}{\partial a_b e^{b_b\theta}} \frac{\partial a_b e^{b_b\theta}}{\partial s_b} + 2\lambda_{s_e} \frac{\partial a_{s_e} e^{b_{s_e}\theta}}{\partial s_{s_e}} + \mu_{s_e} \frac{\partial t_{s_e}}{\partial a_{s_e} e^{b_{s_e}\theta}} \frac{\partial a_{s_e} e^{b_{s_e}\theta}}{\partial s_{s_e}} \\
&\quad + 3\frac{\partial L_b}{\partial a_b e^{b_b\theta}} \frac{\partial a_b e^{b_b\theta}}{\partial s_b} + 3\frac{\partial L_{s_e}}{\partial a_{s_e} e^{b_{s_e}\theta}} \frac{\partial a_{s_e} e^{b_{s_e}\theta}}{\partial s_{s_e}} + 3\frac{\partial L_{s_o}}{\partial a_{s_o} e^{b_{s_o}\theta}} \frac{\partial a_{s_o} e^{b_{s_o}\theta}}{\partial s_{s_o}} \\
&= \frac{\partial a_b e^{b_b\theta}}{\partial s_b} \left[ 2\lambda_b + \mu_b \frac{\partial t_b}{\partial a_b e^{b_b\theta}} + 3\frac{\partial L_b}{\partial a_b e^{b_b\theta}} \right] \\
&\quad + \frac{\partial a_{s_e} e^{b_{s_e}\theta}}{\partial s_{s_e}} \left[ 2\lambda_{s_e} + \mu_{s_e} \frac{\partial t_{s_e}}{\partial a_{s_e} e^{b_{s_e}\theta}} + 3\frac{\partial L_{s_e}}{\partial a_{s_e} e^{b_{s_e}\theta}} \right] + \frac{\partial a_{s_o} e^{b_{s_o}\theta}}{\partial s_{s_o}} \left[ 3\frac{\partial L_{s_o}}{\partial a_{s_o} e^{b_{s_o}\theta}} \right]
\end{aligned} \tag{2.60}$$

bulunur. Burada,  $r = ae^{b\theta}$  nın  $s$ 'ye göre türevi sıfırdan farklı olacağından, yani,

$$\frac{\partial r_b}{\partial s_b} \neq 0, \quad \frac{\partial r_{s_e}}{\partial s_{s_e}} \neq 0, \quad \frac{\partial r_{s_o}}{\partial s_{s_o}} \neq 0$$

durumu sonucunda

$$\begin{aligned}
\left[ 2\lambda_b + \mu_b \frac{\partial t_b}{\partial a_b e^{b_b\theta}} + 3\frac{\partial L_b}{\partial a_b e^{b_b\theta}} \right] &= 0 \\
\left[ 2\lambda_{s_e} + \mu_{s_e} \frac{\partial t_{s_e}}{\partial a_{s_e} e^{b_{s_e}\theta}} + 3\frac{\partial L_{s_e}}{\partial a_{s_e} e^{b_{s_e}\theta}} \right] &= 0 \\
\left[ 3\frac{\partial L_{s_o}}{\partial a_{s_o} e^{b_{s_o}\theta}} \right] &= 0
\end{aligned} \tag{2.61}$$

elde edilir. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\left[ 2\lambda_b + \mu_b \frac{\partial t_b}{\partial a_b e^{b_b\theta}} + 3\frac{\partial L_b}{\partial a_b e^{b_b\theta}} \right] &= 0 \Rightarrow L_b = -\frac{2}{3}\lambda_b a_b e^{b_b\theta} - \frac{1}{3}\mu_b t_b \\
\left[ 2\lambda_{s_e} + \mu_{s_e} \frac{\partial t_{s_e}}{\partial a_{s_e} e^{b_{s_e}\theta}} + 3\frac{\partial L_{s_e}}{\partial a_{s_e} e^{b_{s_e}\theta}} \right] &= 0 \Rightarrow L_{s_e} = -\frac{2}{3}\lambda_{s_e} a_{s_e} e^{b_{s_e}\theta} - \frac{1}{3}\mu_{s_e} t_{s_e} \\
\left[ 3\frac{\partial L_{s_o}}{\partial a_{s_o} e^{b_{s_o}\theta}} \right] &= 0 \Rightarrow L_{s_o} = -c_{s_o}
\end{aligned} \tag{2.62}$$

bulunur. Diğer taraftan (2.35) de verilen özel koşullara göre;

body kısım için,

$$\begin{aligned}
L_b &= \lambda_b \left( \dot{a}_b e^{b_b \theta} + \theta \dot{b}_b a_b e^{b_b \theta} \right) = -\frac{2}{3} \lambda_b a_b e^{b_b \theta} - \frac{1}{3} \mu_b t_b \\
\Rightarrow \frac{\partial a_b e^{b_b \theta}}{\partial s_b} &= -\frac{2}{3} a_b e^{b_b \theta} - \frac{1}{3} \frac{\mu_b t_b}{\lambda_b} \\
\Rightarrow \frac{\partial a_b e^{b_b \theta}}{\partial s_b} &= -\frac{2}{3} a_b e^{b_b \theta} - \frac{1}{3} \frac{\frac{\partial L_b}{\partial t_b}}{\frac{\partial L_b}{\partial t_b}} t_b \\
&\quad \frac{\partial \left( \dot{a}_b e^{b_b \theta} + \theta \dot{b}_b a_b e^{b_b \theta} \right)}{\partial L_b} \\
\Rightarrow \frac{\partial a_b e^{b_b \theta}}{\partial s_b} \left( 1 + \frac{t_b}{3k_b} \right) &= -\frac{2}{3} a_b e^{b_b \theta} \\
\Rightarrow \frac{da_b e^{b_b \theta}}{a_b e^{b_b \theta}} &= -2 \left( \frac{k_b}{3k_b + t_b} \right) ds_b \\
\Rightarrow \frac{da_b e^{b_b \theta}}{a_b e^{b_b \theta}} &= -2 \left( \frac{k_b}{k_b (3 + s_b)} \right) ds_b \\
\Rightarrow \ln a_b e^{b_b \theta} &= -2 \ln (3 + s_b) + \ln c_b \\
\Rightarrow r_b = a_b e^{b_b \theta} &= \frac{c_b}{\left( 3 + \frac{t_b}{k_b} \right)^2} \tag{2.63}
\end{aligned}$$

çift soul kısım için,

$$\begin{aligned}
L_{s_e} &= \lambda_{s_e} \left( \dot{a}_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} + \theta \dot{b}_{s_e} a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} \right) = -\frac{2}{3} \lambda_{s_e} a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} - \frac{1}{3} \mu_{s_e} t_{s_e} \\
\Rightarrow \frac{\partial a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta}}{\partial s_{s_e}} &= -\frac{2}{3} a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} - \frac{1}{3} \frac{\mu_{s_e} t_{s_e}}{\lambda_{s_e}} \\
\Rightarrow \frac{\partial a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta}}{\partial s_{s_e}} &= -\frac{2}{3} a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} - \frac{1}{3} \frac{\frac{\partial L_{s_e}}{\partial t_{s_e}}}{\frac{\partial L_{s_e}}{\partial t_{s_e}}} t_{s_e} \\
&\quad \frac{\partial \left( \dot{a}_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} + \theta \dot{b}_{s_e} a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} \right)}{\partial L_{s_e}} \\
\Rightarrow \frac{\partial a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta}}{\partial s_{s_e}} \left( 1 + \frac{t_{s_e}}{3k_{s_e}} \right) &= -\frac{2}{3} a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} \\
\Rightarrow \frac{da_{s_e} e^{b_{s_e} \theta}}{a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta}} &= -2 \left( \frac{k_{s_e}}{3k_{s_e} + t_{s_e}} \right) ds_{s_e} \\
\Rightarrow \frac{da_{s_e} e^{b_{s_e} \theta}}{a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta}} &= -2 \left( \frac{k_{s_e}}{k_{s_e} (3 + s_{s_e})} \right) ds_{s_e} \\
\Rightarrow \ln a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} &= -2 \ln (3 + s_{s_e}) + \ln c_{s_e} \\
\Rightarrow r_{s_e} = a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} &= \frac{c_{s_e}}{\left( 3 + \frac{t_{s_e}}{k_{s_e}} \right)^2} \tag{2.64}
\end{aligned}$$

tek soul kısım için,

$$L_{s_o} = -c_{s_o} \tag{2.65}$$

bulunur. Buna göre,

$$\begin{aligned}
L &= L_b + L_{s_e} + L_{s_o} \\
&= -\frac{2}{3}\lambda_b \frac{c_b}{\left(3 + \frac{t_b}{k_b}\right)^2} - \frac{1}{3}\mu_b t_b - \frac{2}{3}\lambda_{s_e} \frac{c_{s_e}}{\left(3 + \frac{t_{s_e}}{k_{s_e}}\right)^2} - \frac{1}{3}\mu_{s_e} t_{s_e} - c_{s_o}
\end{aligned} \tag{2.66}$$

süper logaritmik spiral eğrisi için süper Lagrange enerji değeri elde edilir.

Örnek 2.2.12, Örnek 2.2.13 ve Örnek 2.2.14'de kullandığımız çözüm yolunda görüldüğü üzere, zamana bağlı Euler-Lagrange enerji denklemlerini elde ederken, demet yapısını kurma aşamasında iki zaman parametresi (dünya zaman ve uzay zaman) ile çalıştık. Buradaki amacımız, en genel anlamdaki sonuca ulaşarak, hem zaman değişkeni için hem de enerji değeri için daha ayrıntılı yorum yapabilmektir.

Şimdi bu örnekte ele aldığımız süper logaritmik spiral eğrisi üzerinde hareketi tek bir zaman parametresi kullanarak inceleyelim ve Euler-Lagrange enerji denklemini bu tek bir zaman parametresini kullanarak çözelim. Buna göre, (2.55) ile belirli olan süper logaritmik spiral eğrisinin koordinatlarını gözönüne aldığımızda,

$$x(\theta) = r(\theta) \cos \theta = a e^{b\theta} \cos \theta$$

$$y(\theta) = r(\theta) \sin \theta = a e^{b\theta} \sin \theta$$

parametrik koordinatları ile ifade edilebilir. Zamana bağlı Euler-Lagrange enerji sistemini kurarak enerji değerini elde etmek için, jet demet yapısını oluşturacağız, dolayısıyla tek zaman parametresi ile oluşturulan bu jet demet yapının koordinat sistemi, (2.56) de açıklamış olduğumuz şekilde türevsel koordinatların hesaplanması ile

$$\begin{aligned}
&(t, a(t)e^{b(t)\theta} \cos \theta, a(t)e^{b(t)\theta} \sin \theta, \\
&a_t e^{b(t)\theta} \cos \theta + a b_t e^{b(t)\theta} \cos \theta, a_t e^{b(t)\theta} \cos \theta + a b_t e^{b(t)\theta} \cos \theta) \\
= &(t_b, t_{s_e}, t_{s_o}, a_b(t_b)e^{b_b(t_b)\theta} \cos \theta, a_{s_e}(t_{s_e})e^{b_{s_e}(t_{s_e})\theta} \cos \theta, a_{s_o}(t_{s_o})e^{b_{s_o}(t_{s_o})\theta} \cos \theta, \\
&a_b(t_b)e^{b_b(t_b)\theta} \sin \theta, a_{s_e}(t_{s_e})e^{b_{s_e}(t_{s_e})\theta} \sin \theta, a_{s_o}(t_{s_o})e^{b_{s_o}(t_{s_o})\theta} \sin \theta, \\
&a_{t_b} e^{b_b(t_b)\theta} \cos \theta + a_b b_{t_b} e^{b_b(t_b)\theta} \cos \theta, a_{t_{s_e}} e^{b_{s_e}(t_{s_e})\theta} \cos \theta + a_{s_e} b_{t_{s_e}} e^{b_{s_e}(t_{s_e})\theta} \cos \theta, \\
&a_{t_{s_o}} e^{b_{s_o}(t_{s_o})\theta} \cos \theta + a_{s_o} b_{t_{s_o}} e^{b_{s_o}(t_{s_o})\theta} \cos \theta, \\
&a_{t_b} e^{b_b(t_b)\theta} \sin \theta + a_b b_{t_b} e^{b_b(t_b)\theta} \sin \theta, a_{t_{s_e}} e^{b_{s_e}(t_{s_e})\theta} \sin \theta + a_{s_e} b_{t_{s_e}} e^{b_{s_e}(t_{s_e})\theta} \sin \theta, \\
&a_{t_{s_o}} e^{b_{s_o}(t_{s_o})\theta} \sin \theta + a_{s_o} b_{t_{s_o}} e^{b_{s_o}(t_{s_o})\theta} \sin \theta)
\end{aligned}$$

şeklinde olur.

Benzer şekilde bu çözüm için izlenen yol, (2.31) süper Euler-Lagrange denkleminin genel formu olan (2.32) de uygulanırsa,

$$r_{t_b} \frac{\partial^2 L_b}{\partial t_b \partial r_{t_b}} + r_{t_{s_e}} \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial t_{s_e} \partial r_{t_{s_e}}} + r_{t_{s_o}} \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial t_{s_o} \partial r_{t_{s_o}}} - r_{t_b} \frac{\partial L_b}{\partial r_b} - r_{t_{s_e}} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial r_{s_e}} - r_{t_{s_o}} \frac{\partial L_{s_o}}{\partial r_{s_o}} = 0$$

Euler-Lagrange enerji denklemi elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned} r_b &= a_b(t_b) e^{b_b(t_b)\theta} \quad , \quad r_{t_b} = \frac{\partial r_b}{\partial t_b} = a_{t_b} e^{b_b(t_b)\theta} + a_b b_{t_b} e^{b_b(t_b)\theta} \\ r_{s_e} &= a_{s_e}(t_{s_e}) e^{b_{s_e}(t_{s_e})\theta} \quad , \quad r_{t_{s_e}} = \frac{\partial r_{s_e}}{\partial t_{s_e}} = a_{t_{s_e}} e^{b_{s_e}(t_{s_e})\theta} + a_{s_e} b_{t_{s_e}} e^{b_{s_e}(t_{s_e})\theta} \\ r_{s_o} &= a_{s_o}(t_{s_o}) e^{b_{s_o}(t_{s_o})\theta} \quad , \quad r_{t_{s_o}} = \frac{\partial r_{s_o}}{\partial t_{s_o}} = a_{t_{s_o}} e^{b_{s_o}(t_{s_o})\theta} + a_{s_o} b_{t_{s_o}} e^{b_{s_o}(t_{s_o})\theta} \end{aligned}$$

şeklinindedir. Yukarıdaki enerji denkleminin çözümü ile elde edeceğimiz enerji fonksiyonu,

$$L = L(r, t) = L_b(r_b, t_b) + L_{s_e}(r_{s_e}, t_{s_e}) + L_{s_o}(r_{s_o}, t_{s_o})$$

formunda, yani, yarıçap  $r$  ve zaman  $t$  ye bağlı elde edilmelidir. Buna göre,

$$\frac{\partial L_b}{\partial t_b} = \lambda_b \quad , \quad \frac{\partial L_{s_e}}{\partial t_{s_e}} = \lambda_{s_e} \quad , \quad \frac{\partial L_{s_o}}{\partial t_{s_o}} = \lambda_{s_o}$$

özel koşulları yukarıda elde ettiğimiz enerji denkleminde yerine yazılırsa,

$$r_{t_b} \left( \frac{\partial \lambda_b}{\partial r_{t_b}} - \frac{\partial L_b}{\partial r_b} \right) + r_{t_{s_e}} \left( \frac{\partial \lambda_{s_e}}{\partial r_{t_{s_e}}} - \frac{\partial L_{s_e}}{\partial r_{s_e}} \right) + r_{t_{s_o}} \left( \frac{\partial \lambda_{s_o}}{\partial r_{t_{s_o}}} - \frac{\partial L_{s_o}}{\partial r_{s_o}} \right) = 0$$

elde edilir. Burada, yarıçap  $r$  değeri sıfır olamayacağı için denklemin çözümü,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \lambda_b}{\partial r_{t_b}} - \frac{\partial L_b}{\partial r_b} \right) &= 0 \\ \left( \frac{\partial \lambda_{s_e}}{\partial r_{t_{s_e}}} - \frac{\partial L_{s_e}}{\partial r_{s_e}} \right) &= 0 \\ \left( \frac{\partial \lambda_{s_o}}{\partial r_{t_{s_o}}} - \frac{\partial L_{s_o}}{\partial r_{s_o}} \right) &= 0 \end{aligned}$$

durumları için mevcuttur. Bu eşitliklerin çözümünden,

$$L_b = \frac{r_b c_b + k_b}{\ln t_b} \quad , \quad L_{s_e} = \frac{r_{s_e} c_{s_e} + k_{s_e}}{\ln t_{s_e}} \quad , \quad L_{s_o} = \frac{r_{s_o} c_{s_o} + k_{s_o}}{\ln t_{s_o}}$$

elde edilir. Buna göre, Euler-Lagrange enerji fonksiyonu,

$$\begin{aligned} L &= L_b + L_{s_e} + L_{s_o} \\ &= \frac{r_b(\theta) c_b + k_b}{\ln t_b} + \frac{r_{s_e}(\theta) c_{s_e} + k_{s_e}}{\ln t_{s_e}} + \frac{r_{s_o}(\theta) c_{s_o} + k_{s_o}}{\ln t_{s_o}} \\ &= \frac{r(\theta) c + k}{\ln t} \\ &= \frac{a(t) e^{b(t)} . c + k}{\ln t} \end{aligned} \tag{2.67}$$

şeklinde bulunur. Görüldüğü üzere (2.66)'de ve (2.67)'de elde ettiğimiz her iki durumdaki süper Euler-Lagrange enerji değeri  $r$  ve  $t$  ye bağlıdır.

## 2.3 Süper Hamilton Mekanik Sistemler

Bu bölümde, analitik mekaniğin önemli konularından bir diğeri olan Hamilton mekanik sistemlerini süper uzayda inceleyeceğiz. Öncelikle, Bölüm-2.1 de verilen süper jet demet yapısı üzerinde, süper Hamilton enerji denklemini elde etmek için gerekli geometrik yapıları tanımlayacağız. Daha sonra bulunan süper enerji denkleminin bazı örnekler üzerinde uygulamalarını göstereceğiz.

**Tanım 2.3.1**  $(M^*, \phi)$  süper simplektik manifold olmak üzere,  $L$  regüler süper Lagrange fonksiyonuna karşılık gelen ve

$$E_L = VL - L$$

eşitliği ile belirli olan enerji fonksiyonuna süper Hamilton enerji fonksiyonu denir ve  $H : M^* \rightarrow R_*$  ile gösterilir.

$M^*$  süper simplektik manifoldunun koordinatları ise  $(x_i, \dot{x}_i) = (x_{ib}, x_{is}\dot{x}_{ib}, \dot{x}_{is})$  olmak üzere,  $M^*$  üzerinde

$$\begin{aligned} X_H &= \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \\ &= \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_{ib}} \frac{\partial}{\partial x_{ib}} - \frac{\partial H}{\partial x_{ib}} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{ib}} + \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_{is}} \frac{\partial}{\partial x_{is}} - \frac{\partial H}{\partial x_{is}} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{is}} \end{aligned} \quad (2.68)$$

olarak tanımlı vektör alanına süper Hamilton vektör alanı denir (Catteneo ve Schaetz 2010).

**Tanım 2.3.2**  $(M^*, \phi)$  süper simplektik manifoldu üzerinde  $H$  süper Hamilton enerji fonksiyonu,  $X_H$  süper Hamilton vektör alanı olmak üzere ve (2.25) ile verilen  $d$  süper diferensiyel formunun kullanılmasıyla;

$$i_{X_H} \phi = dH \quad (2.69)$$

denkleminde süper Hamilton sistemlerinin süper simplektik (esas) formu ya da süper Hamilton sistemleri dinamik denklemi denir.

**Tanım 2.3.3**  $T^*M^*$  süper kotanjant demetinin süper uyarlanmış koordinatları  $(x_i, \dot{x}_i) = (x_{ib}, x_{is}\dot{x}_{ib}, \dot{x}_{is})$  olmak üzere,

$$\lambda_{M^*} = \dot{x}_i dx_i = \dot{x}_{ib} dx_{ib} + \dot{x}_{is} dx_{is} \quad (2.70)$$



olarak tanımlı 1-formuna süper Liouville form denir.

Buna bağlı olarak  $T^*M^*$  üzerinde,

$$\begin{aligned}\phi_{M^*} &= -d\lambda_M^* = dx_i \wedge dx_i \\ &= dx_{ib} \wedge d\dot{x}_{ib} + dx_{is} \wedge d\dot{x}_{is}\end{aligned}\quad (2.71)$$

süper simplektik formu süper kanonik simplektik form olarak adlandırılır.

**Tanım 2.3.4**  $(M^*, \phi)$  simplektik manifold ve  $H : M^* \rightarrow R$ ,  $M^*$  üzerinde tanımlı süper Hamilton fonksiyonu olsun.  $i_{X_H}\phi = dH$  denklemini sağlayan bir tek  $X_H$  süper vektör alanına,  $H$  Hamilton enerji fonksiyonu ile birleşen süper Hamilton vektör alanı denir.

Böylece,

$$i_{X_H}\phi = dH$$

süper simplektik form kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_{ib}}{\partial t_b} &= \frac{\partial H_b}{\partial \dot{x}_{ib}}, & \frac{\partial \dot{x}_{ib}}{\partial t_b} &= -\frac{\partial H_b}{\partial x_{ib}} \\ \frac{\partial x_{is}}{\partial t_s} &= \frac{\partial H_s}{\partial \dot{x}_{is}}, & \frac{\partial \dot{x}_{is}}{\partial t_s} &= -\frac{\partial H_s}{\partial x_{is}}\end{aligned}\quad (2.72)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlere süper Hamilton denklemleri denir.

Buna göre,(2.72) ile belirli olan elde ettiğimiz süper Hamilton enerji denklemi, Teorem 2.3.5 ile ifade edilir.

**Teorem 2.3.5:**  $M^*$ ,  $m$  boyutlu bir süper manifold olmak üzere,  $T^*M^*$  süper kotanjant demeti üzerinde,  $X_H$ , (2.68) ile ifade edilen süper Hamilton vektör alanı,  $\phi$ , (2.71) ile verilen süper kanonik simplektik form ve  $H$  süper Hamilton fonksiyonu ile  $i_{X_H}\phi = dH$  eşitliğinin çözümlenmesi sonucunda süper Hamilton enerji denklemleri (2.72) de ifade edildiği gibi,

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_{ib}}{\partial t_b} &= \frac{\partial H_b}{\partial \dot{x}_{ib}}, & \frac{\partial \dot{x}_{ib}}{\partial t_b} &= -\frac{\partial H_b}{\partial x_{ib}} \\ \frac{\partial x_{is}}{\partial t_s} &= \frac{\partial H_s}{\partial \dot{x}_{is}}, & \frac{\partial \dot{x}_{is}}{\partial t_s} &= -\frac{\partial H_s}{\partial x_{is}}\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

**Zamana bağlı süper Hamilton sistemler**, aşağıdaki şekilde ifade edilecektir.

**Tanım 2.3.6**  $(M^*, \phi)$  simplektik manifold ve  $H : M^* \rightarrow R_*$ ,  $M^*$  üzerinde tanımlı süper Hamilton fonksiyonu olsun.  $i_{X_{H_t}}\phi = dH_t$  denklemini sağlayan bir tek  $X_{H_t}$  süper vektör alanına, zamana bağlı süper Hamilton vektör alanı denir.

Böylece;  $X_{H_t}$  lokal olarak

$$\begin{aligned} X_{H_t} &= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H_t}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial H_t}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \\ &= \frac{\partial}{\partial t_b} + \frac{\partial}{\partial t_s} + \frac{\partial H_{t_b}}{\partial x_{ib}} \frac{\partial}{\partial x_{ib}} + \frac{\partial H_{t_s}}{\partial x_{is}} \frac{\partial}{\partial x_{is}} - \frac{\partial H_{t_b}}{\partial x_{ib}} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{ib}} - \frac{\partial H_{t_s}}{\partial x_{is}} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{is}} \end{aligned} \quad (2.73)$$

şeklinde ifade edilir (Holm ve diğ. 2009).

$\sigma : I = (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow R_* \times M^*$ ,  $\epsilon > 0$  için  $X_{H_t}$  süper vektör alanının bir süper integral eğrisi olsun (Bruce 2014). Böylece,

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= (t, x_i(t), \dot{x}_i(t)) \\ &= (t_b, t_s, x_{ib}(t_b), x_{is}(t_s), \dot{x}_{ib}(t_b), \dot{x}_{is}(t_s)) \end{aligned} \quad (2.74)$$

ve ayrıca  $\sigma$ ,  $X_{H_t}$ 'nin bir süper integral eğrisi olduğundan

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(t) &= X_{H_t}(\sigma(t)) = \frac{\partial}{\partial t} + X_t(x_i(t), \dot{x}_i(t)) \\ &= \frac{\partial}{\partial t_b} + \frac{\partial}{\partial t_s} + X_{t_b}(x_{ib}(t_b), \dot{x}_{ib}(t_b)) + X_{t_s}(x_{is}(t_s), \dot{x}_{is}(t_s)) \end{aligned} \quad (2.75)$$

olur. Bu durumda

$$i_{X_{H_t}} \phi = dH_t$$

süper simplektik formu kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_{ib}}{\partial t_b} &= \frac{\partial H_b}{\partial \dot{x}_{ib}}, & \frac{\partial \dot{x}_{ib}}{\partial t_b} &= -\frac{\partial H_b}{\partial x_{ib}} \\ \frac{\partial x_{is}}{\partial t_s} &= \frac{\partial H_s}{\partial \dot{x}_{is}}, & \frac{\partial \dot{x}_{is}}{\partial t_s} &= -\frac{\partial H_s}{\partial x_{is}} \end{aligned} \quad (2.76)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlere zamana bağlı süper Hamilton denklemleri denir.

Buna göre, (2.76) ile belirli olan elde ettiğimiz zamana bağlı süper Hamilton enerji denklemi, Teorem 2.3.7 ile ifade edilir.

**Teorem 2.3.7**  $M^*$ ,  $m$  boyutlu bir süper manifold olmak üzere,  $(M^*, \phi)$  simplektik manifoldu üzerinde, (2.73) ile ifade edilen  $X_{H_t}$  zamana bağlı süper Hamilton vektör alanı,  $\sigma$  süper integral eğrisi ve  $H_t$  süper Hamilton fonksiyonu ile birlikte  $i_{X_{H_t}} \phi = dH_t$  eşitliğinin çözümlenmesiyle (2.76)'da ifade edildiği gibi zamana bağlı süper Hamilton enerji denklemleri,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_{ib}}{\partial t_b} &= \frac{\partial H_b}{\partial \dot{x}_{ib}}, & \frac{\partial \dot{x}_{ib}}{\partial t_b} &= -\frac{\partial H_b}{\partial x_{ib}} \\ \frac{\partial x_{is}}{\partial t_s} &= \frac{\partial H_s}{\partial \dot{x}_{is}}, & \frac{\partial \dot{x}_{is}}{\partial t_s} &= -\frac{\partial H_s}{\partial x_{is}} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

### 2.3.1 Süper Hamilton Enerji Denklemleri

Bölüm 2.1’de tanımladığımız  $J^1E^*$  süper jet demetini ele alalım. Bu demet yapısı üzerindeki süper indirgenmiş koordinat sistemi (2.19) ile belirlenmiştir. Hatta süper jet demet yapısından gelen süper türevsel koordinatlar burada da (2.20) ile aynı biçimde ifade edilir. Buna göre, verilen koordinat sistemi kullanılarak bölüm 1.3.2’de herhangi bir demet üzerinde tanımlı olan süper Hamilton mekanik sistemlerini süper jet demet yapısı üzerinde oluşturabiliriz. Aşağıda sırasıyla bu geometrik yapılar tanımlanmıştır.

Bölüm 2.1’de süper uzayın Öklid uzayına eş değer olduğunu, dolayısıyla bir manifold yapısına sahip olduğunu belirtmiştik. Buna göre süper uzay üzerinde bir süper kotanjant manifold yapısının da var olduğu açıktır. Bu süper kotanjant yapı ile burada da (2.70) ile verilen süper Liouville form tanımlanabilir. O halde, süper jet demet yapısı üzerinde süper Liouville form

$$\lambda = \dot{x}_{ib}dx_{ib} + \dot{x}_{ise}dx_{ise} - \dot{x}_{iso}dx_{iso} \quad (2.77)$$

eşitliği ile ifade edilir. (2.25) ile tanımlanan süper diferensiyel operatör kullanılarak elde edilen  $\phi = -d\lambda$  süper kanonik simplektik formu aşağıdaki biçimdedir.

$$\phi = -d\lambda = dx_{ib} \wedge d\dot{x}_{ib} + dx_{ise} \wedge d\dot{x}_{ise} - dx_{iso} \wedge d\dot{x}_{iso} \quad (2.78)$$

Süper uzayda Hamilton enerji denklemlerinin ispatı için gerekli olan diğer geometrik yapıları, aşağıda verdiğimiz süper Hamilton enerji denklemlerinin elde edilmesini gösteren teoremin ispat kısmında sunacağız.

**Teorem 2.3.8** ( $E^*, \pi^*, R_*$ ) süper demet olmak üzere,  $J^1E^*$  süper jet demet yapısı üzerinde zamana bağlı Hamilton enerji denklemleri,

$$\frac{\partial H_b}{\partial \dot{x}_{ib}} = \frac{dx_{ib}}{dt_b}, \quad \frac{\partial H_{se}}{\partial \dot{x}_{ise}} = \frac{dx_{ise}}{dt_{se}}, \quad \frac{\partial H_{so}}{\partial \dot{x}_{iso}} = \frac{dx_{iso}}{dt_{so}}$$

ve

$$-\frac{\partial H_b}{\partial x_{ib}} = \frac{d\dot{x}_{ib}}{dt_b}, \quad -\frac{\partial H_{se}}{\partial x_{ise}} = \frac{d\dot{x}_{ise}}{dt_{se}}, \quad -\frac{\partial H_{so}}{\partial x_{iso}} = \frac{d\dot{x}_{iso}}{dt_{so}}$$

ile ifade edilir.

**İspat** Öncelikle,  $i_{X_H}\phi = dH$  süper simplektik formunu sağlayan  $X_H$  süper vektör alanının süper Hamilton vektör alanı olarak tanımlandığını biliyoruz. Süper jet demet yapısı üzerinde süper Hamilton vektör alanı,

$$\begin{aligned}
X_H = & \frac{\partial}{\partial t_b} + \frac{\partial}{\partial t_{s_e}} + \frac{\partial}{\partial t_{s_o}} + \varepsilon_{ib} \frac{\partial}{\partial x_{ib}} + \varepsilon_{is_e} \frac{\partial}{\partial x_{is_e}} + \varepsilon_{is_o} \frac{\partial}{\partial x_{is_o}} \\
& + \mu_{ib} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{ib}} + \mu_{is_e} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{is_e}} + \mu_{is_o} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{is_o}}
\end{aligned} \tag{2.79}$$

olarak ifade edilir. Böylece, (2.69) eşitliği kullanılırsa,

$$i_{X_H} \phi = \varepsilon_{ib} d\dot{x}_{ib} + \varepsilon_{is_e} d\dot{x}_{is_e} - \varepsilon_{is_o} d\dot{x}_{is_o} - \mu_{ib} dx_{ib} - \mu_{is_e} dx_{is_e} + \mu_{is_o} dx_{is_o} \tag{2.80}$$

eşitliği bulunur. Süper Hamilton enerji fonksiyonunun diferensiyeli ise

$$\begin{aligned}
dH = & \frac{\partial H_b}{\partial t_b} dt_b + \frac{\partial H_{s_e}}{\partial t_{s_e}} dt_{s_e} - \frac{\partial H_{s_o}}{\partial t_{s_o}} dt_{s_o} \\
& + \frac{\partial H_b}{\partial x_{ib}} dx_{ib} + \frac{\partial H_{s_e}}{\partial x_{is_e}} dx_{is_e} - \frac{\partial H_{s_o}}{\partial x_{is_o}} dx_{is_o} \\
& + \frac{\partial H_b}{\partial \dot{x}_{ib}} d\dot{x}_{ib} + \frac{\partial H_{s_e}}{\partial \dot{x}_{is_e}} d\dot{x}_{is_e} - \frac{\partial H_{s_o}}{\partial \dot{x}_{is_o}} d\dot{x}_{is_o}
\end{aligned} \tag{2.81}$$

şekindedir. Bu süper 1-formların eşitlenmesiyle  $i_{X_H} \phi = dH$  süper simplektik formu gerçekleşir. Bu eşitliğin sağlanmasıyla çözüme gidilirse,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_b}{\partial t_b} &= \frac{\partial H_{s_e}}{\partial t_{s_e}} = \frac{\partial H_{s_o}}{\partial t_{s_o}} = 0 \\
-\frac{\partial H_b}{\partial x_{ib}} &= \mu_{ib}, \quad \frac{\partial H_{s_e}}{\partial x_{is_e}} = -\mu_{is_e}, \quad \frac{\partial H_{s_o}}{\partial x_{is_o}} = -\mu_{is_o} \\
\frac{\partial H_b}{\partial \dot{x}_{ib}} &= \varepsilon_{ib}, \quad \frac{\partial H_{s_e}}{\partial \dot{x}_{is_e}} = \varepsilon_{is_e}, \quad -\frac{\partial H_{s_o}}{\partial \dot{x}_{is_o}} = -\varepsilon_{is_o}
\end{aligned} \tag{2.82}$$

eşitlikleri elde edilir. Sonuç olarak, (2.82)'de elde edilen eşitliklerin (2.79) süper Hamilton vektör alanında yerine yazılmasıyla,

$$\begin{aligned}
X_H = & \frac{\partial}{\partial t_b} + \frac{\partial}{\partial t_{s_e}} + \frac{\partial}{\partial t_{s_o}} \\
& + \frac{\partial H_b}{\partial \dot{x}_{ib}} \frac{\partial}{\partial x_{ib}} + \frac{\partial H_{s_e}}{\partial \dot{x}_{is_e}} \frac{\partial}{\partial x_{is_e}} + \frac{\partial H_{s_o}}{\partial \dot{x}_{is_o}} \frac{\partial}{\partial x_{is_o}} \\
& - \frac{\partial H_b}{\partial x_{ib}} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{ib}} - \frac{\partial H_{s_e}}{\partial x_{is_e}} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{is_e}} - \frac{\partial H_{s_o}}{\partial x_{is_o}} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{is_o}}
\end{aligned} \tag{2.83}$$

süper Hamilton vektör alanı bulunur. Diğer taraftan, (2.74) ile tanımlanan süper integral eğrisi süper jet demet yapısı üzerinde,

$$\begin{aligned}\alpha & : I \subset R^* \longrightarrow J^1 E^* \\ t & = (t_b, t_{s_e}, t_{s_o}) \longrightarrow \alpha(t) = (t_b, t_{s_e}, t_{s_o}, x_{ib}, x_{is_e}, x_{is_o}, \dot{x}_{ib}, \dot{x}_{is_e}, \dot{x}_{is_o})\end{aligned}$$

şeklinde olup, bu süper integral eğrisinin  $X_H(\alpha(t)) = \alpha'(t)$  denklemini sağlayacağını biliyoruz. Buna göre, herhangi bir  $t$  anında  $\alpha$  eğrisinin

$$\begin{aligned}\alpha'(t) & = \frac{dt_b}{dt_b} \frac{\partial}{\partial t_b} + \frac{dt_{s_e}}{dt_{s_e}} \frac{\partial}{\partial t_{s_e}} + \frac{dt_{s_o}}{dt_{s_o}} \frac{\partial}{\partial t_{s_o}} \\ & + \frac{dx_{ib}}{dt_b} \frac{\partial}{\partial x_{ib}} + \frac{dx_{is_e}}{dt_{s_e}} \frac{\partial}{\partial x_{is_e}} + \frac{dx_{is_o}}{dt_{s_o}} \frac{\partial}{\partial x_{is_o}} \\ & + \frac{d\dot{x}_{ib}}{dt_b} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{ib}} + \frac{d\dot{x}_{is_e}}{dt_{s_e}} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{is_e}} + \frac{d\dot{x}_{is_o}}{dt_{s_o}} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{is_o}}\end{aligned}$$

süper hız vektörü kullanılarak  $X_H(\alpha(t)) = \alpha'(t)$  denklemi çözüldüğünde,

$$\frac{\partial H_b}{\partial \dot{x}_{ib}} = \frac{dx_{ib}}{dt_b}, \quad \frac{\partial H_{s_e}}{\partial \dot{x}_{is_e}} = \frac{dx_{is_e}}{dt_{s_e}}, \quad \frac{\partial H_{s_o}}{\partial \dot{x}_{is_o}} = \frac{dx_{is_o}}{dt_{s_o}}$$

ve

$$-\frac{\partial H_b}{\partial x_{ib}} = \frac{d\dot{x}_{ib}}{dt_b}, \quad -\frac{\partial H_{s_e}}{\partial x_{is_e}} = \frac{d\dot{x}_{is_e}}{dt_{s_e}}, \quad -\frac{\partial H_{s_o}}{\partial x_{is_o}} = \frac{d\dot{x}_{is_o}}{dt_{s_o}} \quad (2.84)$$

eşitlikleri elde edilir. (2.84) eşitliklerine süper uzayın zamana bağlı süper Hamilton enerji denklemleri denir.

### 2.3.2 Uygulamalar

Bu kısımda, (2.84) ile verilen süper Hamilton enerji denkleminin bazı yüzeyler üzerinde incelenmesine dair örnekler verilmiştir. Burada amaç, süper enerji fonksiyonunu  $t$  zaman ve  $x$  konum değerine göre elde ederek, süper Hamilton enerji değerini hesaplamaktır. Bu sayede oluşan hareket ve hareket esnasında ortaya çıkan süper Hamilton enerjisi için matematiksel hesaplamaların yanı sıra fiziksel yorum da yapılabilir. Bu çalışma ile teorik fizikte kullanılan bazı matematiksel kavramları daha somut hale getirebiliriz. Ayrıca bulunan diferensiyel denklemlerin çözümlenebilir olduğunu görüp, okuyucuya çözüm metotları hakkında bilgi

vermektedir. Çözüm fonksiyonunun bulunması ise ortaya çıkan enerji değerini hesaplamayı avantajlı kılar.

### Örnek 2.3.9 (Süper Çember Örneği)

Örnek 2.2.12’de Euler-Lagrange enerji değerini hesapladığımız süper çember eğrisini alalım. Yukarıda Şekil 2.1, Şekil 2.2, Şekil 2.3 ile resmedilen süper çember üzerindeki bir  $m$  parçacığının hareketi Şekil 2.4’de gösterilmiştir. Bu örnekte, süper uzayda,

$$\alpha(\theta) = (t, r \cos \theta, r \sin \theta, u)$$

parametrik denklemi ile belirli olan süper çember eğrisini göz önüne aldığımızda, Şekil 2.4’de gördüğümüz süper uzayda alınan hareketli bir  $m$  parçacığının süper çember üzerine düştükten sonra, süper çember eğrileri üzerindeki hareketi esnasında ortaya çıkan süper Hamilton enerji fonksiyonunu araştıracağız. Bu kısımda da uzay zamanı  $s$  ve süper çember üzerinde geçen zamanı  $t$  parametresi ile ifade edilsin.  $t$  ve  $s$  zaman parametreleri arasındaki oranı yine  $k$  ile gösterelim.

Süper çember eğrisi üzerinde süper jet koordinat sistemi (2.33) ile belirlenmiş olup

$$\begin{aligned} & (s, t, r \cos \theta, r \sin \theta, \dot{r} \cos \theta, \dot{r} \sin \theta) \\ = & (s_b, s_{s_e}, s_{s_o}, t_b, t_{s_e}, t_{s_o}, r_b \cos \theta, r_{s_e} \cos \theta, r_{s_o} \cos \theta, r_b \sin \theta, r_{s_e} \sin \theta, r_{s_o} \sin \theta, \\ & \dot{t}_b, \dot{t}_{s_e}, \dot{t}_{s_o}, \dot{r}_b \cos \theta, \dot{r}_{s_e} \cos \theta, \dot{r}_{s_o} \cos \theta, \dot{r}_b \sin \theta, \dot{r}_{s_e} \sin \theta, \dot{r}_{s_o} \sin \theta) \end{aligned}$$

şeklindedir.

Şimdi (2.33) koordinatlarını (2.84) denkleminde yerine yazarak süper Hamilton enerji fonksiyonunu bulmaya çalışalım;

$$\begin{aligned} 1) \frac{dt_b}{ds_b} &= \frac{\partial H_b}{\partial \dot{t}_b} & 2) \frac{dt_{s_e}}{ds_{s_e}} &= \frac{\partial H_{s_e}}{\partial \dot{t}_{s_e}} \\ 3) \frac{dt_{s_o}}{ds_{s_o}} &= \frac{\partial H_{s_o}}{\partial \dot{t}_{s_o}} & 4) \frac{dr_b \cos \theta}{ds_b} &= \frac{\partial H_b}{\partial \dot{r}_b \cos \theta} \\ 5) \frac{dr_{s_e} \cos \theta}{ds_{s_e}} &= \frac{\partial H_{s_e}}{\partial \dot{r}_{s_e} \cos \theta} & 6) \frac{dr_{s_o} \cos \theta}{ds_{s_o}} &= \frac{\partial H_{s_o}}{\partial \dot{r}_{s_o} \cos \theta} \\ 7) \frac{dr_b \sin \theta}{ds_b} &= \frac{\partial H_b}{\partial \dot{r}_b \sin \theta} & 8) \frac{dr_{s_e} \sin \theta}{ds_{s_e}} &= \frac{\partial H_{s_e}}{\partial \dot{r}_{s_e} \sin \theta} \\ 9) \frac{dr_{s_o} \sin \theta}{ds_{s_o}} &= \frac{\partial H_{s_o}}{\partial \dot{r}_{s_o} \sin \theta} & 10) \frac{dt_b}{ds_b} &= -\frac{\partial H_b}{\partial t_b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
11) \quad \frac{dt_{s_e}}{ds_{s_e}} &= -\frac{\partial H_{s_e}}{\partial t_{s_e}} & 12) \quad \frac{dt_{s_o}}{ds_{s_o}} &= -\frac{\partial H_{s_o}}{\partial t_{s_o}} \\
13) \quad \frac{d\dot{r}_b \cos \theta}{ds_b} &= -\frac{\partial H_b}{\partial r_b \cos \theta} & 14) \quad \frac{d\dot{r}_{s_e} \cos \theta}{ds_{s_e}} &= -\frac{\partial H_{s_e}}{\partial r_{s_e} \cos \theta} \\
15) \quad \frac{d\dot{r}_{s_o} \cos \theta}{ds_{s_o}} &= -\frac{\partial H_{s_o}}{\partial r_{s_o} \cos \theta} & 16) \quad \frac{d\dot{r}_b \sin \theta}{ds_b} &= -\frac{\partial H_b}{\partial r_b \sin \theta} \\
17) \quad \frac{d\dot{r}_{s_e} \sin \theta}{ds_{s_e}} &= -\frac{\partial H_{s_e}}{\partial r_{s_e} \sin \theta} & 18) \quad \frac{d\dot{r}_{s_o} \sin \theta}{ds_{s_o}} &= -\frac{\partial H_{s_o}}{\partial r_{s_o} \sin \theta}
\end{aligned} \tag{2.85}$$

süper Hamilton denklemleri elde edilir.

(2.85) denklemlerindeki (1), (2), (3) ve (10), (11), (12) düzenlenirse,

$$\frac{dt_b}{ds_b} = \dot{t}_b = \frac{\partial H_b}{\partial t_b}, \quad \frac{dt_{s_e}}{ds_{s_e}} = \dot{t}_{s_e} = \frac{\partial H_{s_e}}{\partial t_{s_e}}, \quad \frac{dt_{s_o}}{ds_{s_o}} = \dot{t}_{s_o} = \frac{\partial H_{s_o}}{\partial t_{s_o}} \tag{2.86}$$

$$\frac{dt_b}{ds_b} = -\frac{\partial H_b}{\partial t_b}, \quad \frac{dt_{s_e}}{ds_{s_e}} = -\frac{\partial H_{s_e}}{\partial t_{s_e}}, \quad \frac{dt_{s_o}}{ds_{s_o}} = -\frac{\partial H_{s_o}}{\partial t_{s_o}} \tag{2.87}$$

eşitlikleri bulunur. Aşağıdaki ortak çözümler yapıldığında,

$$\begin{aligned}
(4) + (7) &= 2 \frac{\partial H_b}{\partial \dot{r}_b} = \dot{r}_b \\
(5) + (8) &= 2 \frac{\partial H_{s_e}}{\partial \dot{r}_{s_e}} = \dot{r}_{s_e} \\
(6) + (9) &= 2 \frac{\partial H_{s_o}}{\partial \dot{r}_{s_o}} = \dot{r}_{s_o}
\end{aligned} \tag{2.88}$$

ve

$$\begin{aligned}
(13) + (16) &= -2 \frac{\partial H_b}{\partial r_b} = \frac{d\dot{r}_b}{ds_b} \\
(14) + (17) &= -2 \frac{\partial H_{s_e}}{\partial r_{s_e}} = \frac{d\dot{r}_{s_e}}{ds_{s_e}} \\
(15) + (18) &= -2 \frac{\partial H_{s_o}}{\partial r_{s_o}} = \frac{d\dot{r}_{s_o}}{ds_{s_o}}
\end{aligned} \tag{2.89}$$

elde edilir. (2.88) ve (2.89) denklem sistemlerinin ortak çözümünden,

$$\begin{aligned}
-2 \frac{\partial H_b}{\partial r_b} &= \frac{d\dot{r}_b}{ds_b} = 2 \frac{\partial^2 H_b}{\partial s_b \partial \dot{r}_b} \\
-2 \frac{\partial H_{s_e}}{\partial r_{s_e}} &= \frac{d\dot{r}_{s_e}}{ds_{s_e}} = 2 \frac{\partial^2 H_{s_e}}{\partial s_{s_e} \partial \dot{r}_{s_e}} \\
-2 \frac{\partial H_{s_o}}{\partial r_{s_o}} &= \frac{d\dot{r}_{s_o}}{ds_{s_o}} = 2 \frac{\partial^2 H_{s_o}}{\partial s_{s_o} \partial \dot{r}_{s_o}}
\end{aligned} \tag{2.90}$$

bulunur. Diğer yandan (2.86) ve (2.87) denklemlerinin eşitlenmesiyle,

$$\begin{aligned}
\frac{d\dot{t}_b}{ds_b} &= \frac{\partial^2 H_b}{\partial s_b \partial \dot{t}_b} = -\frac{\partial H_b}{\partial t_b} \\
\frac{d\dot{t}_{s_e}}{ds_{s_e}} &= \frac{\partial^2 H_{s_e}}{\partial s_{s_e} \partial \dot{t}_{s_e}} = -\frac{\partial H_{s_e}}{\partial t_{s_e}} \\
\frac{d\dot{t}_{s_o}}{ds_{s_o}} &= \frac{\partial^2 H_{s_o}}{\partial s_{s_o} \partial \dot{t}_{s_o}} = -\frac{\partial H_{s_o}}{\partial t_{s_o}}
\end{aligned} \tag{2.91}$$

elde edilir. (2.90) 'da  $t$ 'ye göre türev alınırsa,

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial^2 H_b}{\partial t_b \partial r_b} &= \frac{\partial^3 H}{\partial t_b \partial s_b \partial \dot{r}_b} \\
-\frac{\partial^2 H_{s_e}}{\partial t_{s_e} \partial r_{s_e}} &= \frac{\partial^3 H}{\partial t_{s_e} \partial s_{s_e} \partial \dot{r}_{s_e}} \\
-\frac{\partial^2 H_{s_o}}{\partial t_{s_o} \partial r_{s_o}} &= \frac{\partial^3 H}{\partial t_{s_o} \partial s_{s_o} \partial \dot{r}_{s_o}}
\end{aligned} \tag{2.92}$$

Diğer taraftan (2.91) 'de  $r$ 'ye göre türev alınırsa,

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial^2 H_b}{\partial t_b \partial r_b} &= \frac{\partial^3 H_b}{\partial r_b \partial s_b \partial \dot{t}_b} \\
-\frac{\partial^2 H_{s_e}}{\partial t_{s_e} \partial r_{s_e}} &= \frac{\partial^3 H_{s_e}}{\partial r_{s_e} \partial s_{s_e} \partial \dot{t}_{s_e}} \\
-\frac{\partial^2 H_{s_o}}{\partial t_{s_o} \partial r_{s_o}} &= \frac{\partial^3 H_{s_o}}{\partial r_{s_o} \partial s_{s_o} \partial \dot{t}_{s_o}}
\end{aligned} \tag{2.93}$$

(2.92) ve (2.93) denklemlerinin birbirine eşitlenmesi ile



body kısım için,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial s_b} \left( \frac{\partial^2 H_b}{\partial t_b \partial \dot{r}_b} \right) = \frac{\partial}{\partial s_b} \left( \frac{\partial^2 H_b}{\partial r_b \partial \dot{t}_b} \right) \\
\Rightarrow & \frac{\partial}{\partial t_b} \left( \frac{\partial H_b}{\partial \dot{r}_b} \right) = \frac{\partial}{\partial r_b} \left( \frac{\partial H_b}{\partial \dot{t}_b} \right) \\
\Rightarrow & \frac{\partial}{\partial t_b} \left( \frac{\dot{r}_b}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial r_b} (\dot{t}_b) \\
\Rightarrow & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t_b} \left( \frac{dr_b}{ds_b} \right) = \frac{\partial}{\partial r_b} \left( \frac{dt_b}{ds_b} \right)
\end{aligned} \tag{2.94}$$

çift soul kısım için,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial s_{s_e}} \left( \frac{\partial^2 H_{s_e}}{\partial t_{s_e} \partial \dot{r}_{s_e}} \right) = \frac{\partial}{\partial s_{s_e}} \left( \frac{\partial^2 H_{s_e}}{\partial r_{s_e} \partial \dot{t}_{s_e}} \right) \\
\Rightarrow & \frac{\partial}{\partial t_{s_e}} \left( \frac{\partial H_{s_e}}{\partial \dot{r}_{s_e}} \right) = \frac{\partial}{\partial r_{s_e}} \left( \frac{\partial H_{s_e}}{\partial \dot{t}_{s_e}} \right) \\
\Rightarrow & \frac{\partial}{\partial t_{s_e}} \left( \frac{\dot{r}_{s_e}}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial r_{s_e}} (\dot{t}_{s_e}) \\
\Rightarrow & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t_{s_e}} \left( \frac{dr_{s_e}}{ds_{s_e}} \right) = \frac{\partial}{\partial r_{s_e}} \left( \frac{dt_{s_e}}{ds_{s_e}} \right)
\end{aligned} \tag{2.95}$$

tek soul kısım için,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial s_{s_o}} \left( \frac{\partial^2 H_{s_o}}{\partial t_{s_o} \partial \dot{r}_{s_o}} \right) = \frac{\partial}{\partial s_{s_o}} \left( \frac{\partial^2 H_{s_o}}{\partial r_{s_o} \partial \dot{t}_{s_o}} \right) \\
\Rightarrow & \frac{\partial}{\partial t_{s_o}} \left( \frac{\partial H_{s_o}}{\partial \dot{r}_{s_o}} \right) = \frac{\partial}{\partial r_{s_o}} \left( \frac{\partial H_{s_o}}{\partial \dot{t}_{s_o}} \right) \\
\Rightarrow & \frac{\partial}{\partial t_{s_o}} \left( \frac{\dot{r}_{s_o}}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial r_{s_o}} (\dot{t}_{s_o}) \\
\Rightarrow & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t_{s_o}} \left( \frac{dr_{s_o}}{ds_{s_o}} \right) = \frac{\partial}{\partial r_{s_o}} \left( \frac{dt_{s_o}}{ds_{s_o}} \right)
\end{aligned} \tag{2.96}$$

elde edilir. (2.94), (2.95) ve (2.96)'nın  $\lambda$  sabitine göre çözümünden;

$$\begin{aligned}\frac{d^2 r_b}{dt_b ds_b} &= 2 \frac{d^2 t_b}{dr_b ds_b} \Rightarrow \frac{dr_b}{dt_b} = 2 \frac{dt_b}{dr_b} \\ \frac{d^2 r_{s_e}}{dt_{s_e} ds_{s_e}} &= 2 \frac{d^2 t_{s_e}}{dr_{s_e} ds_{s_e}} \Rightarrow \frac{dr_{s_e}}{dt_{s_e}} = 2 \frac{dt_{s_e}}{dr_{s_e}} \\ \frac{d^2 r_{s_o}}{dt_{s_o} ds_{s_o}} &= 2 \frac{d^2 t_{s_o}}{dr_{s_o} ds_{s_o}} \Rightarrow \frac{dr_{s_o}}{dt_{s_o}} = 2 \frac{dt_{s_o}}{dr_{s_o}}\end{aligned}\tag{2.97}$$

bulunur. Buna göre,

$$\begin{aligned}\frac{2}{\lambda_b} &= \lambda_b \Rightarrow \lambda_b = \sqrt{2} \\ \frac{2}{\lambda_{s_e}} &= \lambda_{s_e} \Rightarrow \lambda_{s_e} = \sqrt{2} \\ \frac{2}{\lambda_{s_o}} &= \lambda_{s_o} \Rightarrow \lambda_{s_o} = -\sqrt{2}\end{aligned}\tag{2.98}$$

değerleri elde edilir. Sonuç olarak, süper yarıçap değeri  $s$  ve süper zaman  $t$  parametrelerine göre;

$$\begin{aligned}\frac{dr_b}{dt_b} &= \sqrt{2} \Rightarrow r_b = \sqrt{2}t_b = \sqrt{2}k_b s_b \\ \frac{dr_{s_e}}{dt_{s_e}} &= \sqrt{2} \Rightarrow r_{s_e} = \sqrt{2}t_{s_e} = \sqrt{2}k_{s_e} s_{s_e} \\ \frac{dr_{s_o}}{dt_{s_o}} &= -\sqrt{2} \Rightarrow r_{s_o} = -\sqrt{2}t_{s_o} = -\sqrt{2}k_{s_o} s_{s_o}\end{aligned}\tag{2.99}$$

olur. Bu değerler (2.88)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}2 \frac{\partial H_b}{\partial \dot{r}_b} &= \dot{r}_b \Rightarrow H_b = \frac{(\dot{r}_b)^2}{4} = \frac{(\dot{t}_b)^2}{2} = \frac{(k_b)^2}{2} \\ 2 \frac{\partial H_{s_e}}{\partial \dot{r}_{s_e}} &= \dot{r}_{s_e} \Rightarrow H_{s_e} = \frac{(\dot{r}_{s_e})^2}{4} = \frac{(\dot{t}_{s_e})^2}{2} = \frac{(k_{s_e})^2}{2} \\ 2 \frac{\partial H_{s_o}}{\partial \dot{r}_{s_o}} &= \dot{r}_{s_o} \Rightarrow H_{s_o} = -\frac{(\dot{r}_{s_o})^2}{4} = -\frac{(\dot{t}_{s_o})^2}{2} = -\frac{(k_{s_o})^2}{2}\end{aligned}\tag{2.100}$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}H &= H_b + H_{s_e} + H_{s_o} \\ &= \frac{(k_b)^2}{2} + \frac{(k_{s_e})^2}{2} - \frac{(k_{s_o})^2}{2}\end{aligned}\tag{2.101}$$

süper çember eğrisi üzerinde bir parçacığın süper Hamilton enerji değeri elde edilmiş olur.

### Örnek 2.3.10 (Süper Helis Örneği)

Örnek 2.2.13’de Euler-Lagrange enerji değerini hesapladığımız süper helis eğrisini alalım. Yukarıda Şekil 2.8 ve Şekil 2.9 ile resmedilen ve süper uzayda, (2.44)de

$$\begin{aligned}
\alpha(r, \theta) &= (t, r \cos \theta, r \sin \theta, k\theta) \\
&= \alpha_b(r_b, \theta_b) + \alpha_{s_e}(r_{s_e}, \theta_{s_e}) + \alpha_{s_o}(r_{s_o}, \theta_{s_o}) \\
&= (t_b, r_b \cos \theta, r_b \sin \theta, k_b\theta, t_{s_e}, r_{s_e} \cos \theta, r_{s_e} \sin \theta, k_{s_e}\theta, \\
&\quad t_{s_o}, r_{s_o} \cos \theta, r_{s_o} \sin \theta, k_{s_o}\theta)
\end{aligned}$$

parametrik denklemi ile belirli olan süper helis eğrisini göz önüne aldığımızda, süper uzayda alınan hareketli bir  $m$  parçacığının süper helis üzerine düştükten sonra, süper helis eğrileri yani her iki sarmal üzerindeki hareketi esnasında ortaya çıkan süper Hamilton enerji fonksiyonunu araştıracağız. Bu kısımda da yine uzay zamani  $s$  ve süper helis üzerinde geçen zamani  $t$  parametresi ile ifade edilsin.  $t$  ve  $s$  zaman parametreleri arasındaki oranı yine  $k$  ile gösterelim.

Süper helis eğrisi üzerinde süper jet koordinat sistemi (2.45) ile belirlenmiş olup;

$$\begin{aligned}
&(s_b, s_{s_e}, s_{s_o}, t_b, t_{s_e}, t_{s_o}, r_b \cos \theta, r_{s_e} \cos \theta, r_{s_o} \cos \theta, r_b \sin \theta, r_{s_e} \sin \theta, r_{s_o} \sin \theta, k_b\theta, k_{s_e}\theta, \\
&\quad k_{s_o}\theta, \dot{t}_b, \dot{t}_{s_e}, \dot{t}_{s_o}, \dot{r}_b \cos \theta, \dot{r}_{s_e} \cos \theta, \dot{r}_{s_o} \cos \theta, \dot{r}_b \sin \theta, \dot{r}_{s_e} \sin \theta, \dot{r}_{s_o} \sin \theta, 0, 0, 0)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada süper türevsel koordinatları açık olarak ifade ettiğimizde,

$$\begin{aligned}
\dot{t}_b &= \frac{\partial t_b}{\partial s_b} & \dot{t}_{s_e} &= \frac{\partial t_{s_e}}{\partial s_{s_e}} & \dot{t}_{s_o} &= \frac{\partial t_{s_o}}{\partial s_{s_o}} \\
\dot{r}_b &= \frac{\partial r_b}{\partial s_b} & \dot{r}_{s_e} &= \frac{\partial r_{s_e}}{\partial s_{s_e}} & \dot{r}_{s_o} &= \frac{\partial r_{s_o}}{\partial s_{s_o}}
\end{aligned}$$

olur.

Yukarıda verilen süper jet koordinatları (2.84) ile belirli olan süper Hamilton enerji denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
1) \frac{dt_b}{ds_b} &= \frac{\partial H_b}{\partial \dot{t}_b} & 2) \frac{dt_{s_e}}{ds_{s_e}} &= \frac{\partial H_{s_e}}{\partial \dot{t}_{s_e}} \\
3) \frac{dt_{s_o}}{ds_{s_o}} &= \frac{\partial H_{s_o}}{\partial \dot{t}_{s_o}} & 4) \frac{dr_b \cos \theta}{ds_b} &= \frac{\partial H_b}{\partial \dot{r}_b \cos \theta} \\
5) \frac{dr_{s_e} \cos \theta}{ds_{s_e}} &= \frac{\partial H_{s_e}}{\partial \dot{r}_{s_e} \cos \theta} & 6) \frac{dr_{s_o} \cos \theta}{ds_{s_o}} &= \frac{\partial H_{s_o}}{\partial \dot{r}_{s_o} \cos \theta} \\
7) \frac{dr_b \sin \theta}{ds_b} &= \frac{\partial H_b}{\partial \dot{r}_b \sin \theta} & 8) \frac{dr_{s_e} \sin \theta}{ds_{s_e}} &= \frac{\partial H_{s_e}}{\partial \dot{r}_{s_e} \sin \theta} \\
9) \frac{dr_{s_o} \sin \theta}{ds_{s_o}} &= \frac{\partial H_{s_o}}{\partial \dot{r}_{s_o} \sin \theta} & 10) \frac{dt_b}{ds_b} &= -\frac{\partial H_b}{\partial t_b} \\
11) \frac{dt_{s_e}}{ds_{s_e}} &= -\frac{\partial H_{s_e}}{\partial t_{s_e}} & 12) \frac{dt_{s_o}}{ds_{s_o}} &= -\frac{\partial H_{s_o}}{\partial t_{s_o}} \\
13) \frac{dr_b \cos \theta}{ds_b} &= -\frac{\partial H_b}{\partial r_b \cos \theta} & 14) \frac{dr_{s_e} \cos \theta}{ds_{s_e}} &= -\frac{\partial H_{s_e}}{\partial r_{s_e} \cos \theta} \\
15) \frac{dr_{s_o} \cos \theta}{ds_{s_o}} &= -\frac{\partial H_{s_o}}{\partial r_{s_o} \cos \theta} & 16) \frac{dr_b \sin \theta}{ds_b} &= -\frac{\partial H_b}{\partial r_b \sin \theta} \\
17) \frac{dr_{s_e} \sin \theta}{ds_{s_e}} &= -\frac{\partial H_{s_e}}{\partial r_{s_e} \sin \theta} & 18) \frac{dr_{s_o} \sin \theta}{ds_{s_o}} &= -\frac{\partial H_{s_o}}{\partial r_{s_o} \sin \theta} \\
19) -\frac{\partial H_b}{\partial t_b} &= \frac{\partial 0}{\partial s_b} & 20) -\frac{\partial H_{s_e}}{\partial t_{s_e}} &= \frac{\partial 0}{\partial s_{s_e}} \\
21) -\frac{\partial H_{s_o}}{\partial t_{s_o}} &= \frac{\partial 0}{\partial s_{s_o}} & &
\end{aligned}
\tag{2.102}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler içerisinde çözüme dahil olmayan eşitlikler şunlardır;

$$22) \quad \frac{dH_b}{d0} = \frac{\partial t_b}{\partial s_b} \quad 23) \quad \frac{dH_{s_e}}{d0} = \frac{dt_{s_e}}{ds_{s_e}} \quad 24) \quad \frac{dH_{s_o}}{d0} = \frac{dt_{s_o}}{ds_{s_o}} \quad .
\tag{2.103}$$

Bu denklem sisteminde dikkat edilirse ilk on sekiz(18) denklem çember eğrisine ait olan Hamilton enerji denklemleridir. Dolayısıyla Örnek 2.3.9'da yapılan ortak çözümler ve düzenlemelere benzer olarak, 2.102'de elde edilen denklemlerdeki (1),

(2), (3) ve (10), (11), (12) düzenlenirse,

$$\frac{dt_b}{ds_b} = \dot{t}_b = \frac{\partial H_b}{\partial \dot{t}_b}, \quad \frac{dt_{s_e}}{ds_{s_e}} = \dot{t}_{s_e} = \frac{\partial H_{s_e}}{\partial \dot{t}_{s_e}}, \quad \frac{dt_{s_o}}{ds_{s_o}} = \dot{t}_{s_o} = \frac{\partial H_{s_o}}{\partial \dot{t}_{s_o}} \quad (2.104)$$

$$\frac{d\dot{t}_b}{ds_b} = -\frac{\partial H_b}{\partial t_b}, \quad \frac{d\dot{t}_{s_e}}{ds_{s_e}} = -\frac{\partial H_{s_e}}{\partial t_{s_e}}, \quad \frac{d\dot{t}_{s_o}}{ds_{s_o}} = -\frac{\partial H_{s_o}}{\partial t_{s_o}} \quad (2.105)$$

eşitlikleri bulunur. Aşağıdaki ortak çözümler yapıldığında,

$$(4) + (7) = 2\frac{\partial H_b}{\partial \dot{r}_b} = \dot{r}_b$$

$$(5) + (8) = 2\frac{\partial H_{s_e}}{\partial \dot{r}_{s_e}} = \dot{r}_{s_e}$$

$$(6) + (9) = 2\frac{\partial H_{s_o}}{\partial \dot{r}_{s_o}} = \dot{r}_{s_o} \quad (2.106)$$

$$(13) + (16) = -2\frac{\partial H_b}{\partial r_b} = \frac{d\dot{r}_b}{ds_b}$$

$$(14) + (17) = -2\frac{\partial H_{s_e}}{\partial r_{s_e}} = \frac{d\dot{r}_{s_e}}{ds_{s_e}}$$

$$(15) + (18) = -2\frac{\partial H_{s_o}}{\partial r_{s_o}} = \frac{d\dot{r}_{s_o}}{ds_{s_o}} \quad (2.107)$$

elde edilir. (2.106) ve (2.107) 'nin ortak çözümünden,

$$\begin{aligned} -2\frac{\partial H_b}{\partial r_b} &= \frac{d\dot{r}_b}{ds_b} = 2\frac{\partial^2 H_b}{\partial s_b \partial \dot{r}_b} \\ -2\frac{\partial H_{s_e}}{\partial r_{s_e}} &= \frac{d\dot{r}_{s_e}}{ds_{s_e}} = 2\frac{\partial^2 H_{s_e}}{\partial s_{s_e} \partial \dot{r}_{s_e}} \\ -2\frac{\partial H_{s_o}}{\partial r_{s_o}} &= \frac{d\dot{r}_{s_o}}{ds_{s_o}} = 2\frac{\partial^2 H_{s_o}}{\partial s_{s_o} \partial \dot{r}_{s_o}} \end{aligned} \quad (2.108)$$

(2.104) ve (2.105) denklemlerinin eşitlenmesiyle,

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{t}_b}{ds_b} &= \frac{\partial^2 H_b}{\partial s_b \partial \dot{t}_b} = -\frac{\partial H_b}{\partial t_b} \\ \frac{d\dot{t}_{s_e}}{ds_{s_e}} &= \frac{\partial^2 H_{s_e}}{\partial s_{s_e} \partial \dot{t}_{s_e}} = -\frac{\partial H_{s_e}}{\partial t_{s_e}} \\ \frac{d\dot{t}_{s_o}}{ds_{s_o}} &= \frac{\partial^2 H_{s_o}}{\partial s_{s_o} \partial \dot{t}_{s_o}} = -\frac{\partial H_{s_o}}{\partial t_{s_o}} \end{aligned} \quad (2.109)$$

(2.108) nin  $t$ 'ye göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial^2 H_b}{\partial t_b \partial r_b} &= \frac{\partial^3 H}{\partial t_b \partial s_b \partial \dot{r}_b} \\
-\frac{\partial^2 H_{s_e}}{\partial t_{s_e} \partial r_{s_e}} &= \frac{\partial^3 H}{\partial t_{s_e} \partial s_{s_e} \partial \dot{r}_{s_e}} \\
-\frac{\partial^2 H_{s_o}}{\partial t_{s_o} \partial r_{s_o}} &= \frac{\partial^3 H}{\partial t_{s_o} \partial s_{s_o} \partial \dot{r}_{s_o}}
\end{aligned} \tag{2.110}$$

bulunur. Diğer taraftan (2.109) nin  $r$ 'ye göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial^2 H_b}{\partial t_b \partial r_b} &= \frac{\partial^3 H_b}{\partial r_b \partial s_b \partial \dot{t}_b} \\
-\frac{\partial^2 H_{s_e}}{\partial t_{s_e} \partial r_{s_e}} &= \frac{\partial^3 H_{s_e}}{\partial r_{s_e} \partial s_{s_e} \partial \dot{t}_{s_e}} \\
-\frac{\partial^2 H_{s_o}}{\partial t_{s_o} \partial r_{s_o}} &= \frac{\partial^3 H_{s_o}}{\partial r_{s_o} \partial s_{s_o} \partial \dot{t}_{s_o}}
\end{aligned} \tag{2.111}$$

elde edilir. (2.110) ve (2.111) denklemlerinin birbirine eşitlenmesi ile body kısım için,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s_b} \left( \frac{\partial^2 H_b}{\partial t_b \partial \dot{r}_b} \right) &= \frac{\partial}{\partial s_b} \left( \frac{\partial^2 H_b}{\partial r_b \partial \dot{t}_b} \right) \\
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t_b} \left( \frac{\partial H_b}{\partial \dot{r}_b} \right) &= \frac{\partial}{\partial r_b} \left( \frac{\partial H_b}{\partial \dot{t}_b} \right) \\
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t_b} \left( \frac{\dot{r}_b}{2} \right) &= \frac{\partial}{\partial r_b} \left( \dot{t}_b \right) \\
\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t_b} \left( \frac{dr_b}{ds_b} \right) &= \frac{\partial}{\partial r_b} \left( \frac{dt_b}{ds_b} \right)
\end{aligned} \tag{2.112}$$

çift soul kısım için,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s_{s_e}} \left( \frac{\partial^2 H_{s_e}}{\partial t_{s_e} \partial \dot{r}_{s_e}} \right) &= \frac{\partial}{\partial s_{s_e}} \left( \frac{\partial^2 H_{s_e}}{\partial r_{s_e} \partial \dot{t}_{s_e}} \right) \\
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t_{s_e}} \left( \frac{\partial H_{s_e}}{\partial \dot{r}_{s_e}} \right) &= \frac{\partial}{\partial r_{s_e}} \left( \frac{\partial H_{s_e}}{\partial \dot{t}_{s_e}} \right) \\
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t_{s_e}} \left( \frac{\dot{r}_{s_e}}{2} \right) &= \frac{\partial}{\partial r_{s_e}} \left( \dot{t}_{s_e} \right) \\
\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t_{s_e}} \left( \frac{dr_{s_e}}{ds_{s_e}} \right) &= \frac{\partial}{\partial r_{s_e}} \left( \frac{dt_{s_e}}{ds_{s_e}} \right)
\end{aligned} \tag{2.113}$$

tek soul kısım için,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial s_{s_o}} \left( \frac{\partial^2 H_{s_o}}{\partial t_{s_o} \partial \dot{r}_{s_o}} \right) = \frac{\partial}{\partial s_{s_o}} \left( \frac{\partial^2 H_{s_o}}{\partial r_{s_o} \partial \dot{t}_{s_o}} \right) \\
& \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t_{s_o}} \left( \frac{\partial H_{s_o}}{\partial \dot{r}_{s_o}} \right) = \frac{\partial}{\partial r_{s_o}} \left( \frac{\partial H_{s_o}}{\partial \dot{t}_{s_o}} \right) \\
& \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t_{s_o}} \left( \frac{\dot{r}_{s_o}}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial r_{s_o}} (\dot{t}_{s_o}) \\
& \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t_{s_o}} \left( \frac{dr_{s_o}}{ds_{s_o}} \right) = \frac{\partial}{\partial r_{s_o}} \left( \frac{dt_{s_o}}{ds_{s_o}} \right)
\end{aligned} \tag{2.114}$$

şeklindedir. (2.112), (2.113) ve (2.114) eşitliklerinin  $\lambda$  sabitine göre çözümünden,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 r_b}{dt_b ds_b} &= 2 \frac{d^2 t_b}{dr_b ds_b} \Rightarrow \frac{dr_b}{dt_b} = 2 \frac{dt_b}{dr_b} \\
\frac{d^2 r_{s_e}}{dt_{s_e} ds_{s_e}} &= 2 \frac{d^2 t_{s_e}}{dr_{s_e} ds_{s_e}} \Rightarrow \frac{dr_{s_e}}{dt_{s_e}} = 2 \frac{dt_{s_e}}{dr_{s_e}} \\
\frac{d^2 r_{s_o}}{dt_{s_o} ds_{s_o}} &= 2 \frac{d^2 t_{s_o}}{dr_{s_o} ds_{s_o}} \Rightarrow \frac{dr_{s_o}}{dt_{s_o}} = 2 \frac{dt_{s_o}}{dr_{s_o}}
\end{aligned} \tag{2.115}$$

elde edilir. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\lambda_b} &= \lambda_b \Rightarrow \lambda_b = \sqrt{2} \\
\frac{2}{\lambda_{s_e}} &= \lambda_{s_e} \Rightarrow \lambda_{s_e} = \sqrt{2} \\
\frac{2}{\lambda_{s_o}} &= \lambda_{s_o} \Rightarrow \lambda_{s_o} = -\sqrt{2}
\end{aligned} \tag{2.116}$$

değerleri bulunur. Sonuç olarak, süper yarıçap değeri  $s$  ve  $t$  parametrelerine göre,

$$\begin{aligned}
\frac{dr_b}{dt_b} &= \sqrt{2} \Rightarrow r_b = \sqrt{2} t_b = \sqrt{2} k_b s_b \\
\frac{dr_{s_e}}{dt_{s_e}} &= \sqrt{2} \Rightarrow r_{s_e} = \sqrt{2} t_{s_e} = \sqrt{2} k_{s_e} s_{s_e} \\
\frac{dr_{s_o}}{dt_{s_o}} &= -\sqrt{2} \Rightarrow r_{s_o} = -\sqrt{2} t_{s_o} = -\sqrt{2} k_{s_o} s_{s_o}
\end{aligned} \tag{2.117}$$

olur. Bu değerler, (2.106)'da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
2\frac{\partial H_b}{\partial \dot{r}_b} &= \dot{r}_b \Rightarrow H_b = \frac{(\dot{r}_b)^2}{4} = \frac{(\dot{t}_b)^2}{2} = \frac{(k_b)^2}{2} \\
2\frac{\partial H_{s_e}}{\partial \dot{r}_{s_e}} &= \dot{r}_{s_e} \Rightarrow H_{s_e} = \frac{(\dot{r}_{s_e})^2}{4} = \frac{(\dot{t}_{s_e})^2}{2} = \frac{(k_{s_e})^2}{2} \\
2\frac{\partial H_{s_o}}{\partial \dot{r}_{s_o}} &= \dot{r}_{s_o} \Rightarrow H_{s_o} = -\frac{(\dot{r}_{s_o})^2}{4} = -\frac{(\dot{t}_{s_o})^2}{2} = -\frac{(k_{s_o})^2}{2}
\end{aligned} \tag{2.118}$$

bulunur ve dolayısıyla

$$\begin{aligned}
H &= H_b + H_{s_e} + H_{s_o} \\
&= \frac{(k_b)^2}{2} + \frac{(k_{s_e})^2}{2} - \frac{(k_{s_o})^2}{2}
\end{aligned} \tag{2.119}$$

şeklinde süper helis eğrisi için bir parçacığın süper Hamilton enerji değeri elde edilmiş olur.

Elde edilen bu sonuç (19), (20) ve (21) eşitliklerinin de doğruluğunu kanıtlar.

### Örnek 2.3.11 (Süper Logaritmik Spiral Örneği)

Örnek 2.2.14'de Euler-Lagrange enerji değerini hesapladığımız süper logaritmik spiral eğrisini alalım. Yukarıda Şekil 2.10 ve Şekil 2.11 ile resmedilen ve süper uzayda, (2.55)'de

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= (t, a(t)e^{b(t)\theta} \cos \theta, a(t)e^{b(t)\theta} \sin \theta) \\
&= (t_b, t_{s_e}, t_{s_o}, a_b(t_b)e^{b_b(t_b)\theta} \cos \theta, a_{s_e}(t_{s_e})e^{b_{s_e}(t_{s_e})\theta} \cos \theta, a_{s_o}(t_{s_o})e^{b_{s_o}(t_{s_o})\theta} \cos \theta, \\
&\quad a_b(t_b)e^{b_b(t_b)\theta} \sin \theta, a_{s_e}(t_{s_e})e^{b_{s_e}(t_{s_e})\theta} \sin \theta, a_{s_o}(t_{s_o})e^{b_{s_o}(t_{s_o})\theta} \sin \theta)
\end{aligned}$$

parametrik denklemi ile belirli olan süper logaritmik spiral eğrisini göz önüne aldığımızda, süper uzayda alınan hareketli bir  $m$  parçacığının süper logaritmik spiral üzerine düştükten sonra, süper spiral eğrileri üzerindeki hareketi esnasında ortaya çıkan süper Hamilton enerji fonksiyonunu araştıracağız. Bu kısımda da yine uzay zamanı  $s$  ve süper logaritmik spiral üzerinde geçen zamanı  $t$  parametresi ile ifade edilsin.  $t$  ve  $s$  zaman parametreleri arasındaki oranı yine  $k$  ile göstereyim.

Süper logaritmik spiral eğrisi üzerinde süper jet koordinat sistemi (2.56) ile



belirlenmiş olup,

$$\begin{aligned} & \left( \overbrace{s_b, s_{s_e}, s_{s_o}}^s, \overbrace{t_b, t_{s_e}, t_{s_o}}^t, \overbrace{r_b \cos \theta, r_{s_e} \cos \theta, r_{s_o} \cos \theta}^{r \cos \theta}, \overbrace{r_b \sin \theta, r_{s_e} \sin \theta, r_{s_o} \sin \theta}^{r \sin \theta} \right), \\ & \left( \overbrace{\dot{t}_b, \dot{t}_{s_e}, \dot{t}_{s_o}}^{\dot{t}}, \overbrace{\dot{r}_b \cos \theta, \dot{r}_{s_e} \cos \theta, \dot{r}_{s_o} \cos \theta}^{\dot{r} \cos \theta}, \overbrace{\dot{r}_b \sin \theta, \dot{r}_{s_e} \sin \theta, \dot{r}_{s_o} \sin \theta}^{\dot{r} \sin \theta} \right) \end{aligned}$$

şeklinindedir. Burada süper türevsel koordinatları açık olarak ifade ettiğimizde,

$$\begin{aligned} \dot{t}_b &= \frac{\partial t_b}{\partial s_b}, & \dot{t}_{s_e} &= \frac{\partial t_{s_e}}{\partial s_{s_e}}, & \dot{t}_{s_o} &= \frac{\partial t_{s_o}}{\partial s_{s_o}} \\ \dot{r}_b &= \frac{\partial r_b}{\partial s_b} = \dot{a}_b e^{b_b \theta} + \theta \dot{b}_b a_b e^{b_b \theta} \\ \dot{r}_{s_e} &= \frac{\partial r_{s_e}}{\partial s_{s_e}} = \dot{a}_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} + \theta \dot{b}_{s_e} a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} \\ \dot{r}_{s_o} &= \frac{\partial r_{s_o}}{\partial s_{s_o}} = \dot{a}_{s_o} e^{b_{s_o} \theta} + \theta \dot{b}_{s_o} a_{s_o} e^{b_{s_o} \theta} \end{aligned}$$

olur. Burada,

$$r_b = a_b e^{b_b \theta}, \quad r_{s_e} = a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta}, \quad r_{s_o} = a_{s_o} e^{b_{s_o} \theta}$$

şeklinde yazılır.

Yukarıda verilen süper jet koordinatları (2.84) ile belirli olan süper Hamilton enerji denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} 1) \frac{dt_b}{ds_b} &= \frac{\partial H_b}{\partial \dot{t}_b} \\ 2) \frac{dt_{s_e}}{ds_{s_e}} &= \frac{\partial H_{s_e}}{\partial \dot{t}_{s_e}} \\ 3) \frac{dt_{s_o}}{ds_{s_o}} &= \frac{\partial H_{s_o}}{\partial \dot{t}_{s_o}} \\ 4) \frac{da_b e^{b_b \theta} \cos \theta}{ds_b} &= \frac{\partial H_b}{\partial e^{b_b \theta} \cos \theta (\dot{a}_b + a_b \dot{b}_b \theta)} \\ 5) \frac{da_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} \cos \theta}{ds_{s_e}} &= \frac{\partial H_{s_e}}{\partial e^{b_{s_e} \theta} \cos \theta (\dot{a}_{s_e} + a_{s_e} \dot{b}_{s_e} \theta)} \\ 6) \frac{da_{s_o} e^{b_{s_o} \theta} \cos \theta}{ds_{s_o}} &= \frac{\partial H_{s_o}}{\partial e^{b_{s_o} \theta} \cos \theta (\dot{a}_{s_o} + a_{s_o} \dot{b}_{s_o} \theta)} \\ 7) \frac{da_b e^{b_b \theta} \sin \theta}{ds_b} &= \frac{\partial H_b}{\partial e^{b_b \theta} \sin \theta (\dot{a}_b + a_b \dot{b}_b \theta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8) \frac{da_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} \sin \theta}{ds_{s_e}} &= \frac{\partial H_{s_e}}{\partial e^{b_{s_e} \theta} \sin \theta (a_{s_e} \dot{\phantom{a}} + a_{s_e} \dot{b}_{s_e} \theta)} \\
9) \frac{da_{s_o} e^{b_{s_o} \theta} \sin \theta}{ds_{s_o}} &= \frac{\partial H_{s_o}}{\partial e^{b_{s_o} \theta} \sin \theta (a_{s_o} \dot{\phantom{a}} + a_{s_o} \dot{b}_{s_o} \theta)} \\
10) \frac{dt_b}{ds_b} &= -\frac{\partial H_b}{\partial t_b} \\
11) \frac{dt_{s_e}}{ds_{s_e}} &= -\frac{\partial H_{s_e}}{\partial t_{s_e}} \\
12) \frac{dt_{s_o}}{ds_{s_o}} &= -\frac{\partial H_{s_o}}{\partial t_{s_o}} \\
13) \frac{de^{b_b \theta} \cos \theta (a_b \dot{\phantom{a}} + a_b \dot{b}_b \theta)}{ds_b} &= -\frac{\partial H_b}{\partial a_b e^{b_b \theta} \cos \theta} \\
14) \frac{de^{b_{s_e} \theta} \cos \theta (a_{s_e} \dot{\phantom{a}} + a_{s_e} \dot{b}_{s_e} \theta)}{ds_{s_e}} &= -\frac{\partial H_{s_e}}{\partial a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} \cos \theta} \\
15) \frac{de^{b_{s_o} \theta} \cos \theta (a_{s_o} \dot{\phantom{a}} + a_{s_o} \dot{b}_{s_o} \theta)}{ds_{s_o}} &= -\frac{\partial H_{s_o}}{\partial a_{s_o} e^{b_{s_o} \theta} \cos \theta} \\
16) \frac{de^{b_b \theta} \sin \theta (a_b \dot{\phantom{a}} + a_b \dot{b}_b \theta)}{ds_b} &= -\frac{\partial H_b}{\partial a_b e^{b_b \theta} \sin \theta} \\
17) \frac{de^{b_{s_e} \theta} \sin \theta (a_{s_e} \dot{\phantom{a}} + a_{s_e} \dot{b}_{s_e} \theta)}{ds_{s_e}} &= -\frac{\partial H_{s_e}}{\partial a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} \sin \theta} \\
18) \frac{de^{b_{s_o} \theta} \sin \theta (a_{s_o} \dot{\phantom{a}} + a_{s_o} \dot{b}_{s_o} \theta)}{ds_{s_o}} &= -\frac{\partial H_{s_o}}{\partial a_{s_o} e^{b_{s_o} \theta} \sin \theta}
\end{aligned} \tag{2.120}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklem sisteminde dikkat edilirse on sekiz(18) denklem çember eğrisine ait olan Hamilton enerji denklemleridir. Dolayısıyla Örnek 2.3.9’da yapılan ortak çözümler ve düzenlemelere benzer olarak, elde edilen denklemlerindeki (1), (2), (3) ve (10), (11), (12) düzenlenirse,

$$\frac{dt_b}{ds_b} = \dot{t}_b = \frac{\partial H_b}{\partial \dot{t}_b}, \quad \frac{dt_{s_e}}{ds_{s_e}} = \dot{t}_{s_e} = \frac{\partial H_{s_e}}{\partial \dot{t}_{s_e}}, \quad \frac{dt_{s_o}}{ds_{s_o}} = \dot{t}_{s_o} = \frac{\partial H_{s_o}}{\partial \dot{t}_{s_o}} \tag{2.121}$$

$$\frac{\dot{t}_b}{ds_b} = -\frac{\partial H_b}{\partial t_b}, \quad \frac{\dot{t}_{s_e}}{ds_{s_e}} = -\frac{\partial H_{s_e}}{\partial t_{s_e}}, \quad \frac{\dot{t}_{s_o}}{ds_{s_o}} = -\frac{\partial H_{s_o}}{\partial t_{s_o}} \tag{2.122}$$

eşitlikleri bulunur. Aşağıdaki ortak çözümler yapıldığında,

$$\begin{aligned}
(4) + (7) &= 2 \frac{\partial H_b}{\partial e^{b_b \theta} (\dot{a}_b + a_b \dot{b}_b \theta)} = e^{b_b \theta} (\dot{a}_b + a_b \dot{b}_b \theta) \\
(5) + (8) &= 2 \frac{\partial H_{s_e}}{\partial e^{b_{s_e} \theta} (\dot{a}_{s_e} + a_{s_e} \dot{b}_{s_e} \theta)} = e^{b_{s_e} \theta} (\dot{a}_{s_e} + a_{s_e} \dot{b}_{s_e} \theta) \\
(6) + (9) &= 2 \frac{\partial H_{s_o}}{\partial e^{b_{s_o} \theta} (\dot{a}_{s_o} + a_{s_o} \dot{b}_{s_o} \theta)} = e^{b_{s_o} \theta} (\dot{a}_{s_o} + a_{s_o} \dot{b}_{s_o} \theta) \quad (2.123)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(13) + (16) &= -2 \frac{\partial H_b}{\partial a_b e^{b_b \theta}} = \frac{d e^{b_b \theta} (\dot{a}_b + a_b \dot{b}_b \theta)}{d s_b} \\
(14) + (17) &= -2 \frac{\partial H_{s_e}}{\partial a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta}} = \frac{d e^{b_{s_e} \theta} (\dot{a}_{s_e} + a_{s_e} \dot{b}_{s_e} \theta)}{d s_{s_e}} \\
(15) + (18) &= -2 \frac{\partial H_{s_o}}{\partial a_{s_o} e^{b_{s_o} \theta}} = \frac{d e^{b_{s_o} \theta} (\dot{a}_{s_o} + a_{s_o} \dot{b}_{s_o} \theta)}{d s_{s_o}} \quad (2.124)
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.123) ve (2.124) 'nin ortak çözümünden,

$$\begin{aligned}
-2 \frac{\partial H_b}{\partial a_b e^{b_b \theta}} &= \frac{d e^{b_b \theta} (\dot{a}_b + a_b \dot{b}_b \theta)}{d s_b} = 2 \frac{\partial^2 H_b}{\partial s_b \partial e^{b_b \theta} (\dot{a}_b + a_b \dot{b}_b \theta)} \\
-2 \frac{\partial H_{s_e}}{\partial a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta}} &= \frac{d e^{b_{s_e} \theta} (\dot{a}_{s_e} + a_{s_e} \dot{b}_{s_e} \theta)}{d s_{s_e}} = 2 \frac{\partial^2 H_{s_e}}{\partial s_{s_e} \partial e^{b_{s_e} \theta} (\dot{a}_{s_e} + a_{s_e} \dot{b}_{s_e} \theta)} \\
-2 \frac{\partial H_{s_o}}{\partial a_{s_o} e^{b_{s_o} \theta}} &= \frac{d e^{b_{s_o} \theta} (\dot{a}_{s_o} + a_{s_o} \dot{b}_{s_o} \theta)}{d s_{s_o}} = 2 \frac{\partial^2 H_{s_o}}{\partial s_{s_o} \partial e^{b_{s_o} \theta} (\dot{a}_{s_o} + a_{s_o} \dot{b}_{s_o} \theta)} \quad (2.125)
\end{aligned}$$

bulunur. (2.121) ve (2.122) denklemlerinin eşitlenmesiyle,

$$\begin{aligned}
\frac{d \dot{t}_b}{d s_b} &= \frac{\partial^2 H_b}{\partial s_b \partial \dot{t}_b} = - \frac{\partial H_b}{\partial t_b} \\
\frac{d \dot{t}_{s_e}}{d s_{s_e}} &= \frac{\partial^2 H_{s_e}}{\partial s_{s_e} \partial \dot{t}_{s_e}} = - \frac{\partial H_{s_e}}{\partial t_{s_e}} \\
\frac{d \dot{t}_{s_o}}{d s_{s_o}} &= \frac{\partial^2 H_{s_o}}{\partial s_{s_o} \partial \dot{t}_{s_o}} = - \frac{\partial H_{s_o}}{\partial t_{s_o}} \quad (2.126)
\end{aligned}$$

olup (2.125) nin  $t$ 'ye göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial^2 H_b}{\partial t_b \partial a_b e^{b_b \theta}} &= \frac{\partial^3 H}{\partial t_b \partial s_b \partial e^{b_b \theta} (a_b + a_b \dot{b}_b \theta)} \\
-\frac{\partial^2 H_{s_e}}{\partial t_{s_e} \partial a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta}} &= \frac{\partial^3 H}{\partial t_{s_e} \partial s_{s_e} \partial e^{b_{s_e} \theta} (a_{s_e} + a_{s_e} \dot{b}_{s_e} \theta)} \\
-\frac{\partial^2 H_{s_o}}{\partial t_{s_o} \partial a_{s_o} e^{b_{s_o} \theta}} &= \frac{\partial^3 H}{\partial t_{s_o} \partial s_{s_o} \partial e^{b_{s_o} \theta} (a_{s_o} + a_{s_o} \dot{b}_{s_o} \theta)}
\end{aligned} \tag{2.127}$$

elde edilir. Diğer taraftan, (2.126) nin  $r$ 'ye göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial^2 H_b}{\partial t_b \partial a_b e^{b_b \theta}} &= \frac{\partial^3 H_b}{\partial a_b e^{b_b \theta} \partial s_b \partial \dot{t}_b} \\
-\frac{\partial^2 H_{s_e}}{\partial t_{s_e} \partial a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta}} &= \frac{\partial^3 H_{s_e}}{\partial a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} \partial s_{s_e} \partial \dot{t}_{s_e}} \\
-\frac{\partial^2 H_{s_o}}{\partial t_{s_o} \partial a_{s_o} e^{b_{s_o} \theta}} &= \frac{\partial^3 H_{s_o}}{\partial a_{s_o} e^{b_{s_o} \theta} \partial s_{s_o} \partial \dot{t}_{s_o}}
\end{aligned} \tag{2.128}$$

bulunur. (2.127) ve (2.128) denklemlerinin birbirine eşitlenmesi ile body kısım için,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s_b} \left( \frac{\partial^2 H_b}{\partial t_b \partial e^{b_b \theta} (a_b + a_b \dot{b}_b \theta)} \right) &= \frac{\partial}{\partial s_b} \left( \frac{\partial^2 H_b}{\partial a_b e^{b_b \theta} \partial \dot{t}_b} \right) \\
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t_b} \left( \frac{\partial H_b}{\partial e^{b_b \theta} (a_b + a_b \dot{b}_b \theta)} \right) &= \frac{\partial}{\partial a_b e^{b_b \theta}} \left( \frac{\partial H_b}{\partial \dot{t}_b} \right) \\
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t_b} \left( \frac{e^{b_b \theta} (a_b + a_b \dot{b}_b \theta)}{2} \right) &= \frac{\partial}{\partial a_b e^{b_b \theta}} (\dot{t}_b) \\
\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t_b} \left( \frac{da_b e^{b_b \theta}}{ds_b} \right) &= \frac{\partial}{\partial a_b e^{b_b \theta}} \left( \frac{dt_b}{ds_b} \right)
\end{aligned} \tag{2.129}$$

çift soul kısım için,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s_{s_e}} \left( \frac{\partial^2 H_{s_e}}{\partial t_{s_e} \partial e^{b_{s_e} \theta} (a_{s_e} + a_{s_e} \dot{b}_{s_e} \theta)} \right) &= \frac{\partial}{\partial s_{s_e}} \left( \frac{\partial^2 H_{s_e}}{\partial a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} \partial \dot{t}_{s_e}} \right) \\
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t_{s_e}} \left( \frac{\partial H_{s_e}}{\partial e^{b_{s_e} \theta} (a_{s_e} + a_{s_e} \dot{b}_{s_e} \theta)} \right) &= \frac{\partial}{\partial a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta}} \left( \frac{\partial H_{s_e}}{\partial \dot{t}_{s_e}} \right) \\
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t_{s_e}} \left( \frac{e^{b_{s_e} \theta} (a_{s_e} + a_{s_e} \dot{b}_{s_e} \theta)}{2} \right) &= \frac{\partial}{\partial a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta}} (\dot{t}_{s_e}) \\
\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t_{s_e}} \left( \frac{da_{s_e} e^{b_{s_e} \theta}}{ds_{s_e}} \right) &= \frac{\partial}{\partial a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta}} \left( \frac{dt_{s_e}}{ds_{s_e}} \right)
\end{aligned} \tag{2.130}$$

tek soul kısım için,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial s_{s_o}} \left( \frac{\partial^2 H_{s_o}}{\partial t_{s_o} \partial e^{b_{s_o} \theta} (a_{s_o} \dot{+} a_{s_o} \dot{b}_{s_o} \theta)} \right) = \frac{\partial}{\partial s_{s_o}} \left( \frac{\partial^2 H_{s_o}}{\partial a_{s_o} e^{b_{s_o} \theta} \partial \dot{t}_{s_o}} \right) \\
\Rightarrow & \frac{\partial}{\partial t_{s_o}} \left( \frac{\partial H_{s_o}}{\partial e^{b_{s_o} \theta} (a_{s_o} \dot{+} a_{s_o} \dot{b}_{s_o} \theta)} \right) = \frac{\partial}{\partial a_{s_o} e^{b_{s_o} \theta}} \left( \frac{\partial H_{s_o}}{\partial \dot{t}_{s_o}} \right) \\
\Rightarrow & \frac{\partial}{\partial t_{s_o}} \left( \frac{e^{b_{s_o} \theta} (a_{s_o} \dot{+} a_{s_o} \dot{b}_{s_o} \theta)}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial a_{s_o} e^{b_{s_o} \theta}} (\dot{t}_{s_o}) \\
\Rightarrow & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t_{s_o}} \left( \frac{da_{s_o} e^{b_{s_o} \theta}}{ds_{s_o}} \right) = \frac{\partial}{\partial a_{s_o} e^{b_{s_o} \theta}} \left( \frac{dt_{s_o}}{ds_{s_o}} \right)
\end{aligned}$$

(2.131)

(2.129), (2.130) ve (2.131) eşitliklerinin

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= \frac{dae^{b\theta}}{dt} = \lambda \\
\frac{dr_b}{dt_b} &= \frac{da_b e^{b_b \theta}}{dt_b} = \lambda_b \\
\frac{dr_{s_e}}{dt_{s_e}} &= \frac{da_{s_e} e^{b_{s_e} \theta}}{dt_{s_e}} = \lambda_{s_e} \\
\frac{dr_{s_o}}{dt_{s_o}} &= \frac{da_{s_o} e^{b_{s_o} \theta}}{dt_{s_o}} = \lambda_{s_o}
\end{aligned}$$

sabitine göre çözümünden,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 a_b e^{b_b \theta}}{dt_b ds_b} &= 2 \frac{d^2 t_b}{da_b e^{b_b \theta} ds_b} \Rightarrow \frac{da_b e^{b_b \theta}}{dt_b} = 2 \frac{dt_b}{da_b e^{b_b \theta}} \\
\frac{d^2 a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta}}{dt_{s_e} ds_{s_e}} &= 2 \frac{d^2 t_{s_e}}{da_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} ds_{s_e}} \Rightarrow \frac{da_{s_e} e^{b_{s_e} \theta}}{dt_{s_e}} = 2 \frac{dt_{s_e}}{da_{s_e} e^{b_{s_e} \theta}} \\
\frac{d^2 a_{s_o} e^{b_{s_o} \theta}}{dt_{s_o} ds_{s_o}} &= 2 \frac{d^2 t_{s_o}}{da_{s_o} e^{b_{s_o} \theta} ds_{s_o}} \Rightarrow \frac{da_{s_o} e^{b_{s_o} \theta}}{dt_{s_o}} = 2 \frac{dt_{s_o}}{da_{s_o} e^{b_{s_o} \theta}}
\end{aligned}$$

(2.132)

elde edilir. Buna göre,

$$\begin{aligned}\frac{2}{\lambda_b} &= \lambda_b \Rightarrow \lambda_b = \sqrt{2} \\ \frac{2}{\lambda_{s_e}} &= \lambda_{s_e} \Rightarrow \lambda_{s_e} = \sqrt{2} \\ \frac{2}{\lambda_{s_o}} &= \lambda_{s_o} \Rightarrow \lambda_{s_o} = -\sqrt{2}\end{aligned}$$

değerleri bulunur. Sonuç olarak, süper yarıçap değeri  $s$  ve  $t$  parametrelerine göre,

$$\begin{aligned}\frac{da_b e^{b_b \theta}}{dt_b} &= \sqrt{2} \Rightarrow a_b e^{b_b \theta} = \sqrt{2} t_b \\ \frac{da_{s_e} e^{b_{s_e} \theta}}{dt_{s_e}} &= \sqrt{2} \Rightarrow a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} = \sqrt{2} t_{s_e} \\ \frac{da_{s_o} e^{b_{s_o} \theta}}{dt_{s_o}} &= -\sqrt{2} \Rightarrow a_{s_o} e^{b_{s_o} \theta} = -\sqrt{2} t_{s_o}\end{aligned}\quad (2.133)$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}\frac{da_b e^{b_b \theta}}{dt_b} &= \sqrt{2} \Rightarrow a_b e^{b_b \theta} = \sqrt{2} t_b = \sqrt{2} k_b s_b \\ \frac{da_{s_e} e^{b_{s_e} \theta}}{dt_{s_e}} &= \sqrt{2} \Rightarrow a_{s_e} e^{b_{s_e} \theta} = \sqrt{2} t_{s_e} = \sqrt{2} k_{s_e} s_{s_e} \\ \frac{da_{s_o} e^{b_{s_o} \theta}}{dt_{s_o}} &= -\sqrt{2} \Rightarrow a_{s_o} e^{b_{s_o} \theta} = -\sqrt{2} t_{s_o} = -\sqrt{2} k_{s_o} s_{s_o}\end{aligned}\quad (2.134)$$

olup, bu değerler (2.123)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}2 \frac{\partial H_b}{\partial e^{b_{s_o} \theta} (a_{s_o} + a_{s_o} \dot{b}_{s_o} \theta)} &= e^{b_{s_o} \theta} (a_{s_o} + a_{s_o} \dot{b}_{s_o} \theta) \\ \Rightarrow H_b &= \frac{\left( e^{b_{s_o} \theta} (a_{s_o} + a_{s_o} \dot{b}_{s_o} \theta) \right)^2}{4} = \frac{(\dot{t}_b)^2}{2} = \frac{(k_b)^2}{2} \\ 2 \frac{\partial H_{s_e}}{\partial e^{b_{s_e} \theta} (a_{s_e} + a_{s_e} \dot{b}_{s_e} \theta)} &= e^{b_{s_e} \theta} (a_{s_e} + a_{s_e} \dot{b}_{s_e} \theta) \\ \Rightarrow H_{s_e} &= \frac{\left( e^{b_{s_e} \theta} (a_{s_e} + a_{s_e} \dot{b}_{s_e} \theta) \right)^2}{4} = \frac{(\dot{t}_{s_e})^2}{2} = \frac{(k_{s_e})^2}{2} \\ 2 \frac{\partial H_{s_o}}{\partial e^{b_{s_o} \theta} (a_{s_o} + a_{s_o} \dot{b}_{s_o} \theta)} &= e^{b_{s_o} \theta} (a_{s_o} + a_{s_o} \dot{b}_{s_o} \theta) \\ \Rightarrow H_{s_o} &= -\frac{\left( e^{b_{s_o} \theta} (a_{s_o} + a_{s_o} \dot{b}_{s_o} \theta) \right)^2}{4} = -\frac{(\dot{t}_{s_o})^2}{2} = -\frac{(k_{s_o})^2}{2}\end{aligned}\quad (2.135)$$

bulunur ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} H &= H_b + H_{s_e} + H_{s_o} \\ &= \frac{(k_b)^2}{2} + \frac{(k_{s_e})^2}{2} - \frac{(k_{s_o})^2}{2} \end{aligned} \quad (2.136)$$

süper logaritmik spiral eğrisi üzerinde bir parçacığın süper Hamilton enerji değeri elde edilmiş olur.

## 3 SÜPER GRAF

### 3.1 Süper Graf Demet Yapıları

Bu bölümde, graf teorisinin bölüm 1.3.4' de verilen temel tanımlarından yararlanarak, geometrik yapılar, süper uzay yapısına uygun olarak tanımlanacaktır.

**Tanım 3.1.1**  $\Gamma(V_*, E_*)$  grafi ve M süper mani-foldu ve bu manifold üzerinde köşelerin kümesi  $V_*$ , kenarların kümesi  $E_*$  olsun;  $V_i, V_j$  ler  $V_*$  in herhangi iki alt cümlesi olmak üzere,

$$E_* = V_i \times V_j \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

olur. Buna göre,  $V_i \times V_j$  nin herhangi bir açık alt cümlesi  $U_{V_i \times V_j}$  ve  $R^m \times R^{n_e} \times R^{n_o}$  nun bir açık alt cümlesi  $U_{R^m \times R^{n_e} \times R^{n_o}}$  olsun. Bu cümleler üzerinde aşağıdaki şekilde homeomorfizmler tanımlanabilir;

$$\beta_* : U_{V_i \times V_j} \rightarrow U_{R^m \times R^{n_e} \times R^{n_o}} \quad (3.2)$$

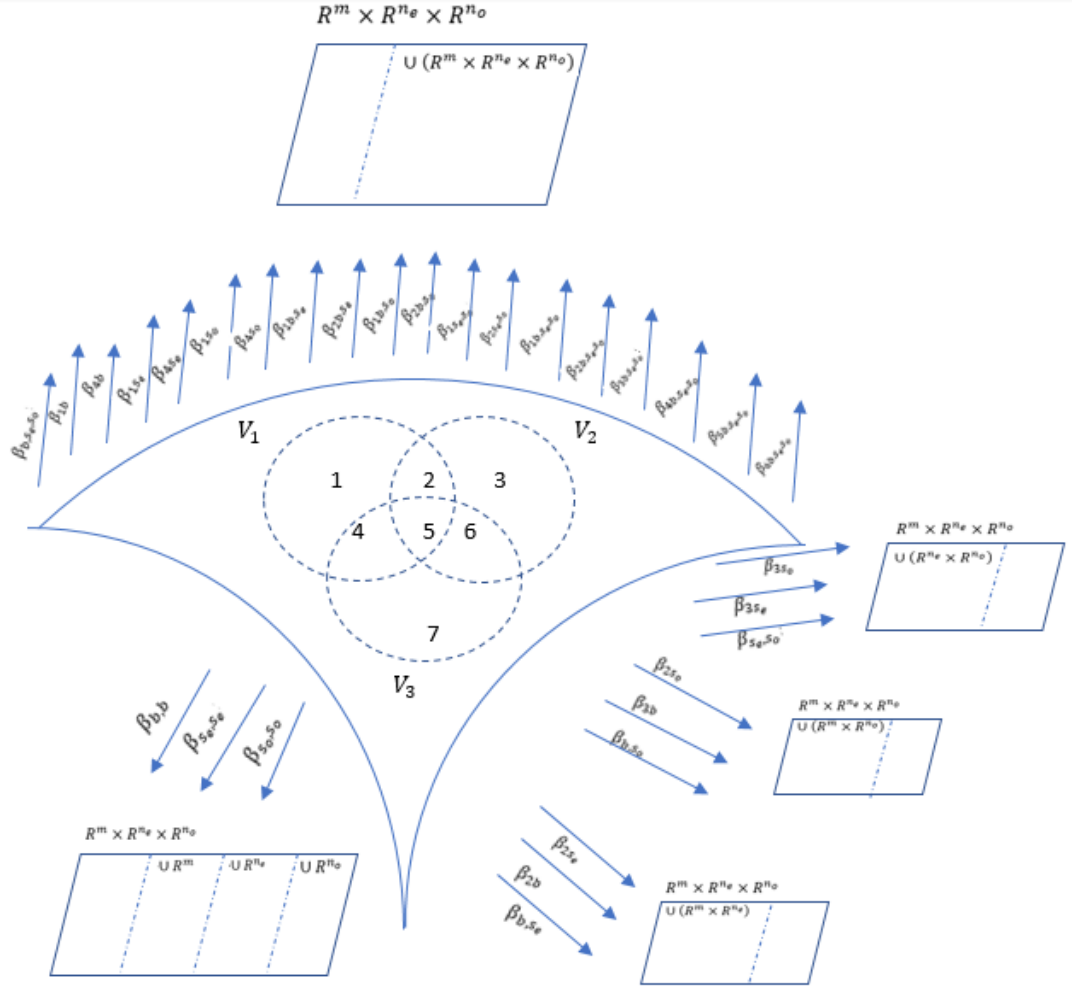
dönüşümü 1-1 olmak üzere  $(U_{V_i \times V_j}, \beta_*)$  ikilisine M de bir süper graf harita denir. Buna göre,

- 1)  $\cup_{V_i \times V_j} U_{V_i \times V_j} = M$
- 2)  $\forall V_{i_1} \times V_{j_1}, V_{i_2} \times V_{j_2}$  için  $V_{i_1} \times V_{j_1} \cap V_{i_2} \times V_{j_2} \neq \emptyset$  olmak üzere  $\beta_* \circ (\beta_{**})^{-1}$  dönüşümü diferensiyellenebilirdir.

Yukarıdaki şartları sağlayan  $V_i \times V_j$  koleksiyonuna M'de bir süper graf atlas denir.

**Tanım 3.1.2** Yukarıda tanımladığımız süper graf harita ve süper graf atlas yapıları ile birlikte *süper graf manifoldunu* aşağıdaki şekilde resmedebiliriz (Şekil 3.1).





Şekil 3.1: Süper graf manifoldun diferensiyellenebilir yapısının gösterimi

Burada,  $V_1$  body kısım ( $b$ ) a sahip olan köşelerin açık alt cümlesi,

$V_2$  soul çift kısım ( $s_e$ ) a sahip olan köşelerin açık alt cümlesi,

$V_3$  soul tek kısım ( $s_o$ ) a sahip olan köşelerin açık alt cümlesi olsun. Buna

göre,

1. **bölgede** herhangi  $x$  ve  $y$  elemanları (köşeleri) için  $x = x_b, y = y_b$
  2. **bölgede** herhangi  $x$  ve  $y$  elemanları (köşeleri) için  $x = x_b + x_{s_e}, y = y_b + y_{s_e}$
  3. **bölgede** herhangi  $x$  ve  $y$  elemanları (köşeleri) için  $x = x_{s_e}, y = y_{s_e}$
  4. **bölgede** herhangi  $x$  ve  $y$  elemanları (köşeleri) için  $x = x_b + x_{s_o}, y = y_b + y_{s_o}$
  5. **bölgede** herhangi  $x$  ve  $y$  elemanları (köşeleri) için  $x = x_b + x_{s_e} + x_{s_o}, y = y_b + y_{s_e} + y_{s_o}$
  6. **bölgede** herhangi  $x$  ve  $y$  elemanları (köşeleri) için  $x = x_{s_e} + x_{s_o}, y = y_{s_e} + y_{s_o}$
  7. **bölgede** herhangi  $x$  ve  $y$  elemanları (köşeleri) için  $x = x_{s_o}, y = y_{s_o}$
- şekindedir.

Yukarıdaki şekilde resmettiğimiz süper graf manifold yapısı için tanımlanan homeomorfizmler aşağıdaki gibidir.

$$\beta_{b,b} : V_1(1) \times V_1(1) \rightarrow \cup R^m$$

Burada,  $V_1(1) \times V_1(1)$  kartezyen çarpım tanım kümesinin elemanları  $e(x_b, y_b)$  şeklinde tanımlanan kenarlardır(ayrıntlar).

$$\beta_{s_e, s_e} : V_2(3) \times V_2(3) \rightarrow \cup R^{n_e}$$

Burada,  $V_2(3) \times V_2(3)$  kartezyen çarpım tanım kümesinin elemanları  $e(x_{s_e}, y_{s_e})$  şeklinde tanımlanan kenarlardır(ayrıntlar).

$$\beta_{s_o, s_o} : V_3(7) \times V_3(7) \rightarrow \cup R^{n_o}$$

Burada,  $V_3(7) \times V_3(7)$  kartezyen çarpım tanım kümesinin elemanları  $e(x_{s_o}, y_{s_o})$  şeklinde tanımlanan kenarlardır(ayrıntlar).

$$\beta_{b, s_e} : V_1V_2(2) \times V_1V_2(2) \rightarrow \cup(R^m \times R^{n_e})$$

Burada,  $V_1V_2(2) \times V_1V_2(2)$  kartezyen çarpım tanım kümesinin elemanları  $e(x_b + x_{s_e}, y_b + y_{s_e})$  şeklinde tanımlanan kenarlardır(ayrıntlar).

$$\beta_{b, s_o} : V_1V_3(4) \times V_1V_3(4) \rightarrow \cup(R^m \times R^{n_o})$$

Burada,  $V_1V_3(4) \times V_1V_3(4)$  kartezyen çarpım tanım kümesinin elemanları  $e(x_b + x_{s_o}, y_b + y_{s_o})$  şeklinde tanımlanan kenarlardır(ayrıntlar).

$$\beta_{s_e, s_o} : V_2V_3(6) \times V_2V_3(6) \rightarrow \cup(R^{n_e} \times R^{n_o})$$

Burada,  $V_2V_3(6) \times V_2V_3(6)$  kartezyen çarpım tanım kümesinin elemanları  $e(x_{s_e} + x_{s_o}, y_{s_e} + y_{s_o})$  şeklinde tanımlanan kenarlardır(ayrıntlar).

$$\beta_{b, s_e, s_o} : V_1V_2V_3(5) \times V_1V_2V_3(5) \rightarrow \cup(R^m \times R^{n_e} \times R^{n_o})$$

Burada,  $V_1V_2V_3(5) \times V_1V_2V_3(5)$  kartezyen çarpım tanım kümesinin elemanları  $e(x_b + x_{s_e} + x_{s_o}, y_b + y_{s_e} + y_{s_o})$  şeklinde tanımlanan kenarlardır(ayrıntlar).

$$\beta_{1b} : V_1(1) \times V_2V_3(6) \rightarrow \cup(R^m \times R^{n_e} \times R^{n_o})$$

Burada,  $V_1(1) \times V_2V_3(6)$  kartezyen çarpım tanım kümesinin elemanları  $e(x_b, y_{s_e} + y_{s_o})$  şeklinde tanımlanan kenarlardır(ayrıntlar).

$$\beta_{2b} : V_1(1) \times V_1V_2(2) \rightarrow \cup(R^m \times R^{n_e})$$

Burada,  $V_1(1) \times V_1V_2(2)$  kartezyen çarpım tanım kümesinin elemanları  $e(x_b, y_b + y_{s_e})$  şeklinde tanımlanan kenarlardır(ayrıntlar).

$$\beta_{3b} : V_1(1) \times V_1V_3(4) \rightarrow \cup(R^m \times R^{n_o})$$

Burada,  $V_1(1) \times V_1V_3(4)$  kartezyen çarpım tanım kümesinin elemanları  $e(x_b, y_b + y_{s_o})$  şeklinde tanımlanan kenarlardır(ayrıntlar).

$$\beta_{4b} : V_1(1) \times V_1V_2V_3(5) \rightarrow \cup(R^m \times R^{n_e} \times R^{n_o})$$

Burada,  $V_1(1) \times V_1V_2V_3(5)$  kartezyen çarpım tanım kümesinin elemanları  $e(x_b, y_b + y_{s_e} + y_{s_o})$  şeklinde tanımlanan kenarlardır(ayrıntlar).

$$\beta_{1s_e} : V_2(3) \times V_1V_3(4) \rightarrow \cup(R^m \times R^{n_e} \times R^{n_o})$$

Burada,  $V_2(3) \times V_1V_3(4)$  kartezyen çarpım tanım kümesinin elemanları  $e(x_{s_e}, y_b + y_{s_o})$  şeklinde tanımlanan kenarlardır(ayrıntlar).

$$\beta_{2s_e} : V_2(3) \times V_1V_2(2) \rightarrow \cup(R^m \times R^{n_e})$$

Burada,  $V_2(3) \times V_1V_2(2)$  kartezyen çarpım tanım kümesinin elemanları  $e(x_{s_e}, y_b + y_{s_e})$  şeklinde tanımlanan kenarlardır(ayrıntlar).

$$\beta_{3s_e} : V_2(3) \times V_2V_3(6) \rightarrow \cup(R^{n_e} \times R^{n_o})$$

Burada,  $V_2(3) \times V_2V_3(6)$  kartezyen çarpım tanım kümesinin elemanları  $e(x_{s_e}, y_{s_e} + y_{s_o})$  şeklinde tanımlanan kenarlardır(ayrıntlar).

$$\beta_{4s_e} : V_2(3) \times V_1V_2V_3(5) \rightarrow \cup(R^m \times R^{n_e} \times R^{n_o})$$

Burada,  $V_2(3) \times V_1V_2V_3(5)$  kartezyen çarpım tanım kümesinin elemanları  $e(x_{s_e}, y_b + y_{s_e} + y_{s_o})$  şeklinde tanımlanan kenarlardır(ayrıntlar).

$$\beta_{1s_o} : V_3(7) \times V_1V_2(2) \rightarrow \cup(R^m \times R^{n_e} \times R^{n_o})$$

Burada,  $V_3(7) \times V_1V_2(2)$  kartezyen çarpım tanım kümesinin elemanları  $e(x_{s_o}, y_b + y_{s_e})$  şeklinde tanımlanan kenarlardır(ayrıntlar).

$$\beta_{2s_o} : V_3(7) \times V_1V_3(4) \rightarrow \cup(R^m \times R^{n_o})$$

Burada,  $V_3(7) \times V_1V_3(4)$  kartezyen çarpım tanım kümesinin elemanları  $e(x_{s_o}, y_b + y_{s_o})$  şeklinde tanımlanan kenarlardır(ayrıntlar).

$$\beta_{3s_o} : V_3(7) \times V_2V_3(6) \rightarrow \cup(R^{n_e} \times R^{n_o})$$

Burada,  $V_3(7) \times V_2V_3(6)$  kartezyen çarpım tanım kümesinin elemanları  $e(x_{s_o}, y_{s_e} + y_{s_o})$  şeklinde tanımlanan kenarlardır(ayrıntlar).

$$\beta_{4s_o} : V_3(7) \times V_1V_2V_3(5) \rightarrow \cup(R^m \times R^{n_e} \times R^{n_o})$$

Burada,  $V_3(7) \times V_1V_2V_3(5)$  kartezyen çarpım tanım kümesinin elemanları  $e(x_{s_o}, y_b + y_{s_e} + y_{s_o})$  şeklinde tanımlanan kenarlardır(ayrıntlar).

$$\beta_{1b,s_e} : V_1V_2(2) \times V_3(7) \rightarrow \cup(R^m \times R^{n_e} \times R^{n_o})$$

Burada,  $V_1V_2(2) \times V_3(7)$  kartezyen çarpım tanım kümesinin elemanları  $e(x_b + x_{s_e}, y_{s_o})$  şeklinde tanımlanan kenarlardır(ayrıntlar).

$$\beta_{2b,s_e} : V_1V_2(2) \times V_1V_2V_3(5) \rightarrow \cup(R^m \times R^{n_e} \times R^{n_o})$$

Burada,  $V_1V_2(2) \times V_1V_2V_3(5)$  kartezyen çarpım tanım kümesinin elemanları  $e(x_b + x_{s_e}, y_b + y_{s_e} + y_{s_o})$  şeklinde tanımlanan kenarlardır(ayrıntlar).

$$\beta_{1b,s_o} : V_1V_3(4) \times V_2(3) \rightarrow \cup(R^m \times R^{n_e} \times R^{n_o})$$

Burada,  $V_1V_3(4) \times V_2(3)$  kartezyen çarpım tanım kümesinin elemanları  $e(x_b + x_{s_o}, y_{s_e})$  şeklinde tanımlanan kenarlardır(ayrıntlar).

$$\beta_{2b,s_o} : V_1V_3(4) \times V_1V_2V_3(5) \rightarrow \cup(R^m \times R^{n_e} \times R^{n_o})$$

Burada,  $V_1V_3(4) \times V_1V_2V_3(5)$  kartezyen çarpım tanım kümesinin elemanları  $e(x_b + x_{s_o}, y_b + y_{s_e} + y_{s_o})$  şeklinde tanımlanan kenarlardır(ayrıntlar).

$$\beta_{1s_e,s_o} : V_2V_3(6) \times V_1(1) \rightarrow \cup(R^m \times R^{n_e} \times R^{n_o})$$

Burada,  $V_2V_3(6) \times V_1(1)$  kartezyen çarpım tanım kümesinin elemanları  $e(x_{s_e} + x_{s_o}, y_b)$  şeklinde tanımlanan kenarlardır(ayrıntlar).

$$\beta_{2s_e, s_o} : V_2V_3(6) \times V_1V_2V_3(5) \rightarrow \cup(R^m \times R^{n_e} \times R^{n_o})$$

Burada,  $V_2V_3(6) \times V_1V_2V_3(5)$  kartezyen çarpım tanım kümesinin elemanları  $e(x_{s_e} + x_{s_o}, y_b + y_{s_e} + y_{s_o})$  şeklinde tanımlanan kenarlardır(ayrıntlar).

$$\beta_{1b, s_e, s_o} : V_1V_2V_3(5) \times V_1(1) \rightarrow \cup(R^m \times R^{n_e} \times R^{n_o})$$

Burada,  $V_1V_2V_3(5) \times V_1(1)$  kartezyen çarpım tanım kümesinin elemanları  $e(x_b + x_{s_e} + x_{s_o}, y_b)$  şeklinde tanımlanan kenarlardır(ayrıntlar).

$$\beta_{2b, s_e, s_o} : V_1V_2V_3(5) \times V_2(3) \rightarrow \cup(R^m \times R^{n_e} \times R^{n_o})$$

Burada,  $V_1V_2V_3(5) \times V_2(3)$  kartezyen çarpım tanım kümesinin elemanları  $e(x_b + x_{s_e} + x_{s_o}, y_{s_e})$  şeklinde tanımlanan kenarlardır(ayrıntlar).

$$\beta_{3b, s_e, s_o} : V_1V_2V_3(5) \times V_3(7) \rightarrow \cup(R^m \times R^{n_e} \times R^{n_o})$$

Burada,  $V_1V_2V_3(5) \times V_3(7)$  kartezyen çarpım tanım kümesinin elemanları  $e(x_b + x_{s_e} + x_{s_o}, y_{s_o})$  şeklinde tanımlanan kenarlardır(ayrıntlar).

$$\beta_{4b, s_e, s_o} : V_1V_2V_3(5) \times V_1V_2(2) \rightarrow \cup(R^m \times R^{n_e} \times R^{n_o})$$

Burada,  $V_1V_2V_3(5) \times V_1V_2(2)$  kartezyen çarpım tanım kümesinin elemanları  $e(x_b + x_{s_e} + x_{s_o}, y_b + y_{s_e})$  şeklinde tanımlanan kenarlardır(ayrıntlar).

$$\beta_{5b, s_e, s_o} : V_1V_2V_3(5) \times V_1V_3(4) \rightarrow \cup(R^m \times R^{n_e} \times R^{n_o})$$

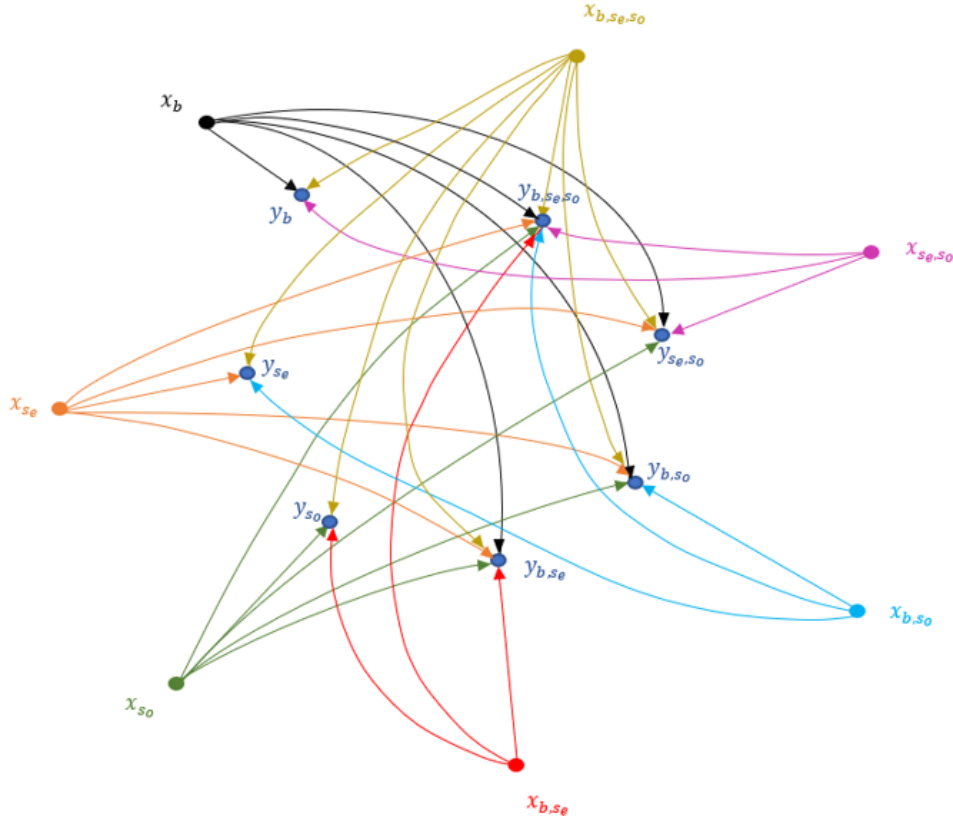
Burada,  $V_1V_2V_3(5) \times V_1V_3(4)$  kartezyen çarpım tanım kümesinin elemanları  $e(x_b + x_{s_e} + x_{s_o}, y_b + y_{s_o})$  şeklinde tanımlanan kenarlardır(ayrıntlar).

$$\beta_{6b, s_e, s_o} : V_1V_2V_3(5) \times V_2V_3(6) \rightarrow \cup(R^m \times R^{n_e} \times R^{n_o})$$

Burada,  $V_1V_2V_3(5) \times V_2V_3(6)$  kartezyen çarpım tanım kümesinin elemanları  $e(x_b + x_{s_e} + x_{s_o}, y_{s_e} + y_{s_o})$  şeklinde tanımlanan kenarlardır(ayrıntlar).

Bu homeomorfizmlere göre, graf teori yardımıyla süper graf manifold üzerinde köşelerin birleşimi ile elde ettiğimiz kenarlar aşağıdaki şekilde resmedilebilir. Yukarıdaki her bir  $\beta$  dönüşümü dikkate alınır, aynı kısma(parta) sahip olan köşeler arasında kenarlar doğrusal, farklı kısma sahip köşeler arasındaki kenarlar eğrisel olacaktır. Çünkü farklı parta sahip köşeler birleşirken koordinat sıralaması dikkate

alınmak şartıyla(body, soul çift, soul tek) bu birleşim yönlenecek şöyle ki; çift pariteden çift pariteye birleşimde saat yönünün tersi yani, pozitif yönlendirme; çift pariteden tek pariteye ya da tek pariteden çift pariteye birleşimde saat yönü yani, negatif yönlendirme olacaktır. Buna göre, süper uzaydaki koordinat yapısına uygun olarak tanımladığımız süper köşeler ve süper kenarlar, süper graf olarak aşağıdaki şekilde resmedilecektir (Şekil 3.2).



Şekil 3.2: Süper graf manifold üzerinde köşeler(vertex) ve kenarlar(edge)

**Tanım 3.1.3**  $E^*$  ve  $M^*$ , süper  $C^\infty$ -manifoldlar olsun. Yukarıda tanımladığımız süper graf atlas ve süper graf harita yapıları ile birlikte ayrıca süper graf  $C^\infty$ -manifoldlar olarak da tanımlanabilirler. Dolayısıyla,  $E^*$  ve  $M^*$ , süper graf  $C^\infty$ -manifoldlar ve  $\pi^{*g} : E^* \rightarrow M^*$  bir süper graf  $C^\infty$ -dönüşümü (bunu özel olarak vertex-edge dönüşüm olarak da tanımlayabiliriz, yani aldığımız her köşelerin birleşiminin oluşturduğu kenarlar yine bu köşelerin bu dönüşüm ile karşılık geleceği köşelerin birleşiminin oluşturduğu kenarlara dönüşecektir) bir örten submersiyon ise,  $(E^*, \pi^{*g}, M^*)$  üçlüsüne *süper graf lifli manifold* denir. Burada  $E^*$  süper graf total uzay,  $M^*$  süper graf taban uzay,  $\pi^{*g}$  süper graf projeksiyon ve  $\forall e \in M^*$  kenarı için  $E^*$ 'ın  $(\pi^{*g})^{-1}(e)$  alt cümlesine de *süper graf lif* denir.

Buna göre, süper manifoldlar üzerinde tanımlı olan koordinat sistemi benzer şekilde süper graf manifold üzerinde de köşeler ve bunların oluşturduğu kenarlar ile tanımlanabilecektir.

**Tanım 3.1.4**  $boyM^* = m = (m_b + m_{s_e} + m_{s_o})$  ve  $boyE^* = m + n = (m_b + m_{s_e} + m_{s_o} + n_b + n_{s_e} + n_{s_o})$  olmak üzere,  $U_{V_i \times V_j}^* \subset E^*$  süper açık alt cümlesi üzerinde bir süper graf koordinat sistemi,

$$y^{*g} : U_{V_i \times V_j}^* \rightarrow R^{m_b+n_b} \times R^{m_{s_e}+n_{s_e}} \times R^{m_{s_o}+n_{s_o}} \quad (3.3)$$

olsun.

$$pr_1^{*g} : R^{m_b+n_b} \times R^{m_{s_e}+n_{s_e}} \times R^{m_{s_o}+n_{s_o}} \rightarrow R^{m_b} \times R^{m_{s_e}} \times R^{m_{s_o}}$$

olmak üzere  $a, b \in U_{V_i \times V_j}^*$  için (burada  $a$  ve  $b$  birer kenar, örneğin  $a$  kenarı  $a_{i*} \in V_i$  ve  $a_{j*} \in V_j$  köşelerinin birleşimi olan kenardır)

$$\pi^{*g}(a) = \pi^{*g}(b) = e \implies pr_1^{*g}(y^{*g}(a)) = pr_1^{*g}(y^{*g}(b))$$

önermesi doğru ise,  $y^{*g}$  e bir süper graf uyarlanmış koordinat sistemi denir.

**Tanım 3.1.5** Yukarıda yapılan süper graf tanımlamalarına göre kenarlar her bir başlangıç köşelerine doğru yönlendirilebilir olduğu için birinci jetler tanjant vektörlerle aynı olacaktır. Dolayısıyla,  $T^*E \cong J\pi^{*g}$  olur ve  $(E^*, \pi^{*g}, M^*)$  süper graf demeti üzerinde süper graflar yardımıyla zamana bağlı mekanik sistemlerin hesaplanması için gerekli olan demet yapısı  $(J\pi^{*g}, \pi^{*g}, M^*)$  şeklinde tanımlanacaktır. Buna göre, süper graf jet demet yapısının koordinat sistemi,

$$(x, y, u) = (x_b + x_{s_e} + x_{s_o}, y_b + y_{s_e} + y_{s_o}, u_b + u_{s_e} + u_{s_o}), \quad x \in M^*, y \in E^*, u \in J\pi^{*g*} \quad (3.4)$$

şekindedir. Burada  $x, y$  köşeleri için,  $u = (x, y) \implies y - x = u$  kenarına ( $x$ 'den  $y$ 'ye doğru yönlü bir vektör) karşılık gelir. Graf teoride bu şekilde tanımlanan  $u$  koordinatı artık jet demet yapısında türevsel koordinata karşılık gelecektir. Buna göre süper graf manifoldu üzerinde tanımlanan türevsel koordinat bileşeni  $u$  şu şekilde ifade edilir;

$$\frac{\partial y_b}{\partial x_b} = u_b \quad \text{şeklinde olup } u_b, \quad x_b \quad \text{ve } y_b \quad \text{köşelerinin birleşimi olan} \\ e(x_b, y_b) \quad \text{kenarına karşılık gelecektir,}$$

$$\frac{\partial y_{s_e}}{\partial x_{s_e}} = u_{s_e} \quad \text{şeklinde olup } u_{s_e}, \quad x_{s_e} \quad \text{ve } y_{s_e} \quad \text{köşelerinin birleşimi olan} \\ e(x_{s_e}, y_{s_e}) \quad \text{kenarına karşılık gelecektir,}$$

$\frac{\partial y_{s_o}}{\partial x_{s_o}} = u_{s_o}$  şeklinde olup  $u_{s_o}$ ,  $x_{s_o}$  ve  $y_{s_o}$  köşelerinin birleşimi olan  $e(x_{s_o}, y_{s_o})$  kenarına karşılık gelecektir.

Burada, önceki bölümde ifade ettiğimiz gibi, süper uzaydaki demet yapısının tanımından dolayı, body partın body parta göre türevi, soul çift partın sol çift parta göre türevi, sol tek partın sol tek parta göre türevi alınabileceğinden, kenar(edge) koordinatlarının bileşenleri de bu şekilde hareket edilerek ifade edilir. Örneğin; yukarıda süper graf manifold üzerinde tanımladığımız

$$\beta_{3b,s_e,s_o} : V_1 V_2 V_3(5) \times V_3(7) \rightarrow \cup(R^m \times R^{n_e} \times R^{n_o})$$

homeomorfizmi göz önüne alınırsa ve  $V_1 V_2 V_3(5) \times V_3(7)$  kartezyen çarpım tanım kümesinin elemanları  $e(x_b + x_{s_e} + x_{s_o}, y_{s_o})$  şeklinde tanımlanan ayrıtlar olduğu kullanılırsa, buna göre, süper graf jet demet yapısının koordinatları aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$\underbrace{(x_b + x_{s_e} + x_{s_o})}_x, \underbrace{y_{s_o}}_y, \underbrace{(-x_b, -x_{s_e}, y_{s_o} - x_{s_o})}_{u_{s_o}}$$

$u$

## 3.2 Süper Graf Demet Yapıları Üzerinde Euler-Lagrange

### Mekanik Sistemler ve Euler-Lagrange Enerji Denklemleri

Bu bölümde, süper graf demet yapısının özellikleri ile birlikte süper graf jet demet koordinatlarını kullanarak Euler-Lagrange mekanik sistemlerini kuracağız. Zamana bağlı Euler-Lagrange enerji denklemlerini elde etmek için kurduğumuz bu mekanik sistem üzerinde, Bölüm 2' de de süper uzaydaki genel formların ele alındığı üzere gerekli olan geometrik yapıları artık süper graf tanımlarıyla oluşturmamız gerekiyor. Süper graf jet demet yapısının koordinat sistemine baktığımızda, her ne kadar bir zaman parametresi görmesek de aslında  $u$  türevsel koordinat bileşenini göz önüne aldığımızda  $x$  köşesinden  $y$  köşesine giden birleşmenin bir vektör olduğunu ve bu yönlendirmenin de zamana bağlı gerçekleştiğini düşünürüz. Buna göre, 3-boyutlu graf demet yapısı ile çalışırken fiziksel olarak zaman, çalışmamız için doğal bir parametre gereksinimi durumunda olur. Dolayısıyla, gerekli olan geometrik yapılar, süper graf demet koordinat sistemi ile ifade edilebilir ve bu yapılar ile ilgili Bölüm 2' de ayrıntılı olarak incelenen



bütün ispatlar geçerliliğini, bu süper graf demet koordinat sistemi ile oluşturulan yapılar için de koruyacaktır. Buna göre süper graf demet yapısı için, süper yaklaşık tanjant yapı;

$$J = (dy_b + u_b dx_b) \times \frac{\partial}{\partial u_b} + (dy_{s_e} + u_{s_e} dx_{s_e}) \times \frac{\partial}{\partial u_{s_e}} - (dy_{s_o} + u_{s_o} dx_{s_o}) \times \frac{\partial}{\partial u_{s_o}} \quad (3.5)$$

süper semi-spray;

$$\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_b} + \frac{\partial}{\partial x_{s_e}} - \frac{\partial}{\partial x_{s_o}} + u_b \frac{\partial}{\partial y_b} + u_{s_e} \frac{\partial}{\partial y_{s_e}} - u_{s_o} \frac{\partial}{\partial y_{s_o}} + \varepsilon_{ib} \frac{\partial}{\partial u_b} + \varepsilon_{s_e} \frac{\partial}{\partial u_{s_e}} - \varepsilon_{s_o} \frac{\partial}{\partial u_{s_o}} \quad (3.6)$$

şeklinde ifade edilir. Dolayısıyla,  $V$  süper Liouville vektör alanı;

$$V = J(\varepsilon) = 2u_b \frac{\partial}{\partial u_b} + 2u_{s_e} \frac{\partial}{\partial u_{s_e}} - 2u_{s_o} \frac{\partial}{\partial u_{s_o}} \quad (3.7)$$

olur. Poincare Cartan 1-formunu ve Poincare Cartan 2-formunu tanımlayabilmek için gerekli olan  $d$  diferensiyeli;

$$d = \frac{\partial}{\partial x_b} dx_b + \frac{\partial}{\partial x_{s_e}} dx_{s_e} - \frac{\partial}{\partial x_{s_o}} dx_{s_o} + \frac{\partial}{\partial y_b} dy_b + \frac{\partial}{\partial y_{s_e}} dy_{s_e} - \frac{\partial}{\partial y_{s_o}} dy_{s_o} \\ + \frac{\partial}{\partial u_b} du_b + \frac{\partial}{\partial u_{s_e}} du_{s_e} - \frac{\partial}{\partial u_{s_o}} du_{s_o} \quad (3.8)$$

şeklinde ve buna göre Poincare Cartan 1-formu;

$$\alpha_L = d_J L + L dt \\ = u_b \frac{\partial L_b}{\partial u_b} dx_b + u_{s_e} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial u_{s_e}} dx_{s_e} - u_{s_o} \frac{\partial L_{s_o}}{\partial u_{s_o}} dx_{s_o} \\ + \frac{\partial L_b}{\partial u_b} dy_b + \frac{\partial L_{s_e}}{\partial u_{s_e}} dy_{s_e} + \frac{\partial L_{s_o}}{\partial u_{s_o}} dy_{s_o} \\ + L_b dx_b + L_{s_e} dx_{s_e} - L_{s_o} dx_{s_o} \quad (3.9)$$

ve Poincare Cartan 2-formu;

$$\begin{aligned}
\Omega_L &= dd_J L + dL \wedge dx \\
&= (dy_b \wedge dx_b) \left( -\frac{\partial^2 L_b}{\partial x_b \partial u_b} + u_b \frac{\partial^2 L_b}{\partial y_b \partial u_b} + \frac{\partial L_b}{\partial y_b} \right) \\
&\quad + (dy_{s_e} \wedge dx_{s_e}) \left( -\frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial x_{s_e} \partial u_{s_e}} + u_{s_e} \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial y_{s_e} \partial u_{s_e}} + \frac{\partial L_{s_e}}{\partial y_{s_e}} \right) \\
&\quad + (dy_{s_o} \wedge dx_{s_o}) \left( -\frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial x_{s_o} \partial u_{s_o}} + u_{s_o} \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial y_{s_o} \partial u_{s_o}} + \frac{\partial L_{s_o}}{\partial y_{s_o}} \right) \\
&\quad + (du_b \wedge dx_b) \left( u_b \frac{\partial^2 L_b}{\partial u_b \partial u_b} + \frac{\partial L_b}{\partial u_b} \right) \\
&\quad + (du_{s_e} \wedge dx_{s_e}) \left( u_{s_e} \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial u_{s_e} \partial u_{s_e}} + \frac{\partial L_{s_e}}{\partial u_{s_e}} \right) \\
&\quad + (du_{s_o} \wedge dx_{s_o}) \left( u_{s_o} \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial u_{s_o} \partial u_{s_o}} + \frac{\partial L_{s_o}}{\partial u_{s_o}} \right) \\
&\quad + (du_b \wedge dy_b) \left( \frac{\partial^2 L_b}{\partial u_b \partial u_b} \right) \\
&\quad + (du_{s_e} \wedge dy_{s_e}) \left( \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial u_{s_e} \partial u_{s_e}} \right) \\
&\quad + (du_{s_o} \wedge dy_{s_o}) \left( \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial u_{s_o} \partial u_{s_o}} \right)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

olur. Buna göre,  $i_\varepsilon \Omega = \Omega(\varepsilon) = 0$  denkleminin çözümü yapıldığında süper Euler-Lagrange denklemini verdiği için, (2.29) da belirli olan dokuz(9) adet denklem burada da elde edilecektir. Elde edilen bu non-lineer denklem sistemi sadece süper graf demet yapısı koordinatları ile değişiklik gösterecek olup, çözüm yolu benzer biçimde yapılacaktır. Dolayısıyla;

$$\varepsilon_{ib} = u_b, \quad \varepsilon_{is_e} = u_{s_e}, \quad \varepsilon_{is_o} = -u_{s_o} \tag{3.11}$$

koşulu altında,

$$-u_b(1) - u_{s_e}(2) + u_{s_o}(3) + (4) + (5) - (6) - u_b(7) - u_{s_e}(8) + u_{s_o}(9) = 0 \tag{3.12}$$

çözümü yapıldığında,

$$\begin{aligned}
u_b \frac{\partial^2 L_b}{\partial x_b \partial u_b} + u_{s_e} \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial x_{s_e} \partial u_{s_e}} + u_{s_o} \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial x_{s_o} \partial u_{s_o}} - u_b \frac{\partial L_b}{\partial y_b} - u_{s_e} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial y_{s_e}} - u_{s_o} \frac{\partial L_{s_o}}{\partial y_{s_o}} &= 0 \\
u \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial u} - u \frac{\partial L}{\partial y} &= 0 \\
u \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial L}{\partial x} \right) - u \frac{\partial L}{\partial y} &= 0
\end{aligned} \tag{3.13}$$

şeklinde süper uzayda süper graf demet yapısı koordinatları ile Euler-Lagrange enerji denklemi elde edilir.

Bu ise, aşağıdaki Teorem 3.2.1'i ispatlar.

**Teorem 3.2.1**  $E^*$  ve  $M^*$  süper manifoldlar,  $(E^*, \pi^{*g}, M^*)$  süper graf demet olsun.  $(J\pi^{*g}, \pi^{*g}, M^*)$  süper graf jet demet yapısı üzerinde süper Euler-Lagrange enerji denklemi,

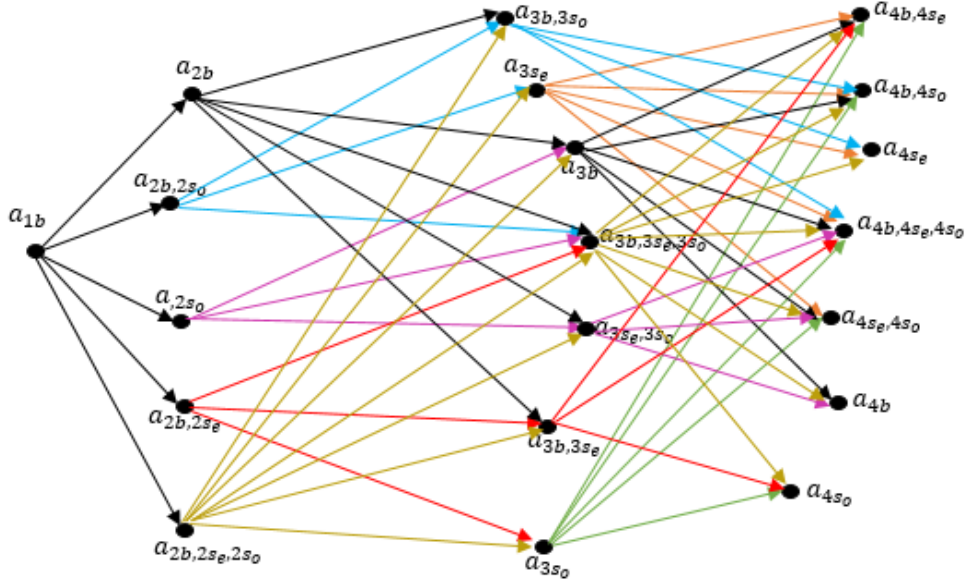
$$u_b \frac{\partial^2 L_b}{\partial x_b \partial u_b} + u_{s_e} \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial x_{s_e} \partial u_{s_e}} + u_{s_o} \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial x_{s_o} \partial u_{s_o}} - u_b \frac{\partial L_b}{\partial y_b} - u_{s_e} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial y_{s_e}} - u_{s_o} \frac{\partial L_{s_o}}{\partial y_{s_o}} = 0$$

ile ifade edilir.

**Örnek 3.2.2:**

Bölüm 2'de yer alan, Örnek 2.2.14'de süper logaritmik spiral eğrisi üzerinde hesapladığımız Euler-Lagrange enerji değerini burada graf köşeleri kullanarak hesaplayacağız. Bu yöntem, yani graf noktaları kullanmak, eğrinin eğriliklerindeki değişime göre hareketin daha elverişli incelenmesine imkan sağlayacaktır.

Aşağıdaki şekilde resmedildiği gibi logaritmik spiral eğrisi üzerinde hareketin bir kesitini graf noktalar ile gösterebiliriz (Şekil 3.3). Bunun için, logaritmik spiral eğrisi üzerinde hareket, köşeler ve kenarlar diferensiyellenebilir graf manifold üzerinde tanımladığımız  $\beta$  dönüşümlerine uygun olarak seçilerek incelenecektir.



Şekil 3.3: Logaritmik spiral eğrisi üzerinde  $\beta$  dönüşümlerine uygun olarak seçilen köşeler(vertex) ve kenarlar(edge)

Tanım 3.1.5'de verilen süper graf demet yapısının koordinatları, bu eğri üzerinde

$$(x, y, u) = \left( \overbrace{x_b(\theta), x_{s_e}(\theta), x_{s_o}(\theta)}^x, \overbrace{y_b(\theta), y_{s_e}(\theta), y_{s_o}(\theta)}^y, \overbrace{u_b(\theta), u_{s_e}(\theta), u_{s_o}(\theta)}^u \right)$$

şeklinde olacağından, süper logaritmik spiral eğrisinin graf demet koordinatları aşağıdaki biçimde gösterilir.

$$(t, a(t)e^{b(t)\theta} \cos \theta, a(t)e^{b(t)\theta} \sin \theta, a(t)e^{b(t)\theta} \sin \theta - a(t)e^{b(t)\theta} \cos \theta)$$

Burada,  $t$  zaman parametresi ve

$$x = r(t) \cos \theta = a(t)e^{b(t)\theta} \cos \theta$$

$$y = r(t) \sin \theta = a(t)e^{b(t)\theta} \sin \theta$$

$$u = r(t) \sin \theta - r(t) \cos \theta = a(t)e^{b(t)\theta} \sin \theta - a(t)e^{b(t)\theta} \cos \theta$$

olmak üzere, süper graf demet koordinatları, body, soul even ve soul odd kısımlara göre ayrıntılı olarak ifade edildiğinde,

$$\begin{aligned} & (t_b, t_{s_e}, t_{s_o}, a_b(t_b)e^{b_b(t_b)\theta} \cos \theta, a_{s_e}(t_{s_e})e^{b_{s_e}(t_{s_e})\theta} \cos \theta, a_{s_o}(t_{s_o})e^{b_{s_o}(t_{s_o})\theta} \cos \theta, \\ & a_b(t_b)e^{b_b(t_b)\theta} \sin \theta, a_{s_e}(t_{s_e})e^{b_{s_e}(t_{s_e})\theta} \sin \theta, a_{s_o}(t_{s_o})e^{b_{s_o}(t_{s_o})\theta} \sin \theta, \\ & a_b(t_b)e^{b_b(t_b)\theta} \sin \theta - a_b(t_b)e^{b_b(t_b)\theta} \cos \theta, a_{s_e}(t_{s_e})e^{b_{s_e}(t_{s_e})\theta} \sin \theta - a_{s_e}(t_{s_e})e^{b_{s_e}(t_{s_e})\theta} \cos \theta, \\ & a_{s_o}(t_{s_o})e^{b_{s_o}(t_{s_o})\theta} \sin \theta - a_{s_o}(t_{s_o})e^{b_{s_o}(t_{s_o})\theta} \cos \theta) \end{aligned} \quad (3.14)$$

şeklinde yazılır. Bu süper graf demet koordinatları (2.31) deki süper Euler-Lagrange enerji denkleminin genel formu olan (2.32)

$$\left( \dot{x}_{ib} \frac{\partial^2 L_b}{\partial t_b \partial \dot{x}_{ib}} + \dot{x}_{is_e} \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial t_{s_e} \partial \dot{x}_{is_e}} + \dot{x}_{is_o} \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial t_{s_o} \partial \dot{x}_{is_o}} \right) - \left( \dot{x}_{ib} \frac{\partial L_b}{\partial x_{ib}} + \dot{x}_{is_e} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial x_{is_e}} + \dot{x}_{is_o} \frac{\partial L_{s_o}}{\partial x_{is_o}} \right) = 0$$

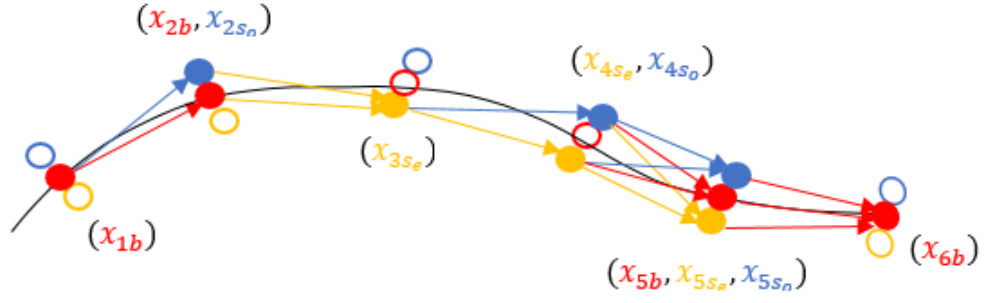
denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\cos \theta} \left( r_b \frac{\partial^2 L_b}{\partial r_b \partial r_b} + r_{s_e} \frac{\partial^2 L_{s_e}}{\partial r_{s_e} \partial r_{s_e}} + r_{s_o} \frac{\partial^2 L_{s_o}}{\partial r_{s_o} \partial r_{s_o}} \right) \\ & - (1 - \cot \theta) \left( r_b \frac{\partial L_b}{\partial r_b} + r_{s_e} \frac{\partial L_{s_e}}{\partial r_{s_e}} + r_{s_o} \frac{\partial L_{s_o}}{\partial r_{s_o}} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

bulunur. Buna göre,  $\varepsilon(\theta) = \cos \theta - \cot \theta \cos ec\theta$  katsayısı kabulü ile Lagrange enerji değeri,

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{\varepsilon(\theta)} \left( e^{\varepsilon(\theta)r_b(t)} c_b + k_b + e^{\varepsilon(\theta)r_{s_e}(t)} c_{s_e} + k_{s_e} + e^{\varepsilon(\theta)r_{s_o}(t)} c_{s_o} + k_{s_o} \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon(\theta)} e^{\varepsilon(\theta)r(t)} c + k \end{aligned} \quad (3.16)$$

elde edilir.



Şekil 3.4: Hareketin,  $\beta$  dönüşümlerine uygun olarak seçilen altı tane süper köşe(vertex) ve kenarlar(edge) ile gösterimi

Örneğin, yukarıdaki şekilde Şekil 3.4'de belirli olan süper logaritmik spiral eğrisi üzerinde diferensiyellenebilir graf manifold yapısındaki  $\beta$  dönüşümlerine uygun olarak belirlenen altı graf noktayı izleyen parçacığın hareketini incelersek, bu hareket sonundaki Lagrange enerji değeri;

$$\begin{aligned}
L = \frac{1}{\varepsilon(\theta)} [ & (e^{\varepsilon(\theta)a_{1b}(t)}e^{b_{1b}(t)}) \\
& + (e^{\varepsilon(\theta)a_{2b}(t)}e^{b_{2b}(t)} + e^{\varepsilon(\theta)a_{2s_e}(t)}e^{b_{2s_e}(t)}) \\
& + (e^{\varepsilon(\theta)a_{3s_e}(t)}e^{b_{3s_e}(t)}) \\
& + (e^{\varepsilon(\theta)a_{4s_e}(t)}e^{b_{4s_e}(t)} - e^{\varepsilon(\theta)a_{4s_o}(t)}e^{b_{4s_o}(t)}) \\
& + (e^{\varepsilon(\theta)a_{5b}(t)}e^{b_{5b}(t)} + e^{\varepsilon(\theta)a_{5s_e}(t)}e^{b_{5s_e}(t)} - e^{\varepsilon(\theta)a_{5s_o}(t)}e^{b_{5s_o}(t)}) \\
& + e^{\varepsilon(\theta)a_{6b}(t)}e^{b_{6b}(t)} ] c + k
\end{aligned} \tag{3.17}$$

olarak bulunur.

### 3.3 Süper Graf Demet Yapıları Üzerinde Hamilton Mekanik Sistemler ve Hamilton Enerji Denklemleri

Bu bölümde, süper graf demet yapısının özellikleri ile birlikte süper graf jet demet koordinatlarını kullanarak Hamilton mekanik sistemlerini kuracağız. Zamana bağlı Hamilton enerji denklemlerini elde etmek için kurduğumuz bu mekanik sistem üzerinde, Bölüm 2'de de süper uzaydaki genel formlarının ele alındığı üzere gerekli olan geometrik yapıları artık süper graf tanımlarıyla oluşturacağız. Süper graf jet demet yapısının koordinat sistemine baktığımızda, Bölüm 3.2'de de ifade ettiğimiz gibi, her ne kadar bir zaman parametresi görmesek de aslında  $u$  türevsel koordinat bileşenini göz önüne aldığımızda  $x$  köşesinden  $y$  köşesine giden birleşmenin bir vektör olduğunu ve bu yönelmenin de zamana bağlı

gerçekleştiğini düşündürür. Buna göre, 3-boyutlu graf demet yapısı ile çalışırken fiziksel olarak zaman, çalışmamız için doğal bir parametre gereksinimi durumunda olur. Dolayısıyla, gerekli olan geometrik yapılar, süper graf demet koordinat sistemi ile ifade edilebilir ve bu yapılar ile ilgili Bölüm 2’de ayrıntılı olarak incelenen bütün ispatlar geçerliliğini bu süper graf demet koordinat sistemi ile oluşturulan yapılar için de koruyacaktır. Buna göre, Hamilton mekanik sistemler için gerekli olan geometrik yapılar süper graf demet yapısı üzerinde şu şekilde tanımlanacaktır;

süper Liouville form,

$$\lambda = u_b dy_b + u_{s_e} dy_{s_e} - u_{s_o} dy_{s_o} \quad (3.18)$$

eşitliği ile ifade edilir. (2.25) ile tanımlanan süper diferensiyel operatör kullanılarak elde edilen  $\phi = -d\lambda$  süper kanonik simplektik formu aşağıdaki biçimdedir.

$$\phi = -d\lambda = dy_b \wedge du_b + dy_{s_e} \wedge du_{s_e} - dy_{s_o} \wedge du_{s_o} \quad (3.19)$$

Graf demet üzerinde Hamilton enerji denklemlerinin ispatı için gerekli olan diğer geometrik yapıları, aşağıda verdiğimiz Hamilton enerji denklemlerinin elde edilmesini gösteren teoremin ispat kısmında sunacağız.

**Teorem 3.3.1**  $E^*$  ve  $M^*$  süper manifoldlar,  $(E^*, \pi^{*g}, M^*)$  süper graf demet olsun.  $(J\pi^{*g}, \pi^{*g}, M^*)$  süper graf jet demet yapısı üzerinde süper Hamilton enerji denklemleri,

$$\frac{\partial H_b}{\partial u_b} = \frac{dy_b}{dx_b}, \quad \frac{\partial H_{s_e}}{\partial u_{s_e}} = \frac{dy_{s_e}}{dx_{s_e}}, \quad \frac{\partial H_{s_o}}{\partial u_{s_o}} = \frac{dy_{s_o}}{dx_{s_o}}$$

ve

$$-\frac{\partial H_b}{\partial y_b} = \frac{du_b}{dx_b}, \quad -\frac{\partial H_{s_e}}{\partial y_{s_e}} = \frac{du_{s_e}}{dx_{s_e}}, \quad -\frac{\partial H_{s_o}}{\partial y_{s_o}} = \frac{du_{s_o}}{dx_{s_o}}$$

ile ifade edilir.

**İspat** Öncelikle,  $i_{X_H}\phi = dH$  süper simplektik formunu sağlayan  $X_H$  süper vektör alanının süper Hamilton vektör alanı olarak tanımlandığını biliyoruz. Süper graf jet demet yapısı üzerinde süper Hamilton vektör alanı,

$$\begin{aligned}
X_H &= \frac{\partial}{\partial x_b} + \frac{\partial}{\partial x_{s_e}} + \frac{\partial}{\partial x_{s_o}} + \varepsilon_b \frac{\partial}{\partial y_b} + \varepsilon_{s_e} \frac{\partial}{\partial y_{s_e}} + \varepsilon_{s_o} \frac{\partial}{\partial y_{s_o}} \\
&\quad + \mu_b \frac{\partial}{\partial u_b} + \mu_{s_e} \frac{\partial}{\partial u_{s_e}} + \mu_{s_o} \frac{\partial}{\partial u_{s_o}}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

şeklinde ifade edilir. Böylece, (2.69) eşitliği kullanılarak

$$i_{X_H} \phi = \varepsilon_b du_b + \varepsilon_{s_e} du_{s_e} - \varepsilon_{s_o} du_{s_o} - \mu_b dy_b - \mu_{s_e} dy_{s_e} + \mu_{s_o} dy_{s_o} \tag{3.21}$$

eşitliği bulunur. Süper Hamilton enerji fonksiyonunun diferensiyeli ise

$$\begin{aligned}
dH &= \frac{\partial H_b}{\partial x_b} dx_b + \frac{\partial H_{s_e}}{\partial x_{s_e}} dx_{s_e} - \frac{\partial H_{s_o}}{\partial x_{s_o}} dx_{s_o} \\
&\quad + \frac{\partial H_b}{\partial y_b} dy_b + \frac{\partial H_{s_e}}{\partial y_{s_e}} dy_{s_e} - \frac{\partial H_{s_o}}{\partial y_{s_o}} dy_{s_o} \\
&\quad + \frac{\partial H_b}{\partial u_b} du_b + \frac{\partial H_{s_e}}{\partial u_{s_e}} du_{s_e} - \frac{\partial H_{s_o}}{\partial u_{s_o}} du_{s_o}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

şeklinindedir. Bu süper 1-formların eşitlenmesiyle  $i_{X_H} \phi = dH$  süper simplektik formu gerçekleşir. Bu eşitliğin sağlanmasıyla çözüme gidilirse,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_b}{\partial x_b} &= \frac{\partial H_{s_e}}{\partial x_{s_e}} = \frac{\partial H_{s_o}}{\partial x_{s_o}} = 0 \\
-\frac{\partial H_b}{\partial y_b} &= \mu_b, \quad \frac{\partial H_{s_e}}{\partial y_{s_e}} = -\mu_{s_e}, \quad \frac{\partial H_{s_o}}{\partial y_{s_o}} = -\mu_{s_o} \\
\frac{\partial H_b}{\partial u_b} &= \varepsilon_b, \quad \frac{\partial H_{s_e}}{\partial u_{s_e}} = \varepsilon_{s_e}, \quad -\frac{\partial H_{s_o}}{\partial u_{s_o}} = -\varepsilon_{s_o}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

eşitlikleri elde edilir. Sonuç olarak, (2.82)'de elde edilen eşitliklerin (2.79) süper Hamilton vektör alanında yerine yazılmasıyla,

$$\begin{aligned}
X_H &= \frac{\partial}{\partial x_b} + \frac{\partial}{\partial x_{s_e}} + \frac{\partial}{\partial x_{s_o}} \\
&\quad + \frac{\partial H_b}{\partial u_b} \frac{\partial}{\partial y_b} + \frac{\partial H_{s_e}}{\partial u_{s_e}} \frac{\partial}{\partial y_{s_e}} + \frac{\partial H_{s_o}}{\partial u_{s_o}} \frac{\partial}{\partial y_{s_o}} \\
&\quad - \frac{\partial H_b}{\partial y_b} \frac{\partial}{\partial u_b} - \frac{\partial H_{s_e}}{\partial y_{s_e}} \frac{\partial}{\partial u_{s_e}} - \frac{\partial H_{s_o}}{\partial y_{s_o}} \frac{\partial}{\partial u_{s_o}}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

süper Hamilton vektör alanı bulunur. Diğer taraftan, (2.74) ile tanımlanan süper integral eğrisi süper graf jet demet yapısı üzerinde,

$$\begin{aligned} \alpha & : I \subset R^* \longrightarrow J^1 E^* \\ t & \longrightarrow \alpha(t) = (x_b, x_{s_e}, x_{s_o}, y_b, y_{s_e}, y_{s_o}, u_b, u_{s_e}, u_{s_o}) \end{aligned} \quad (3.25)$$

şeklinde olup, bu süper integral eğrisinin  $X_H(\alpha(t)) = \alpha'(t)$  denklemini sağlayacağını biliyoruz. Buna göre, herhangi bir  $t$  anında  $\alpha$  eğrisinin

$$\begin{aligned} \alpha'(t) & = \frac{dx_b}{dx_b} \frac{\partial}{\partial x_b} + \frac{dx_{s_e}}{dx_{s_e}} \frac{\partial}{\partial x_{s_e}} + \frac{dx_{s_o}}{dx_{s_o}} \frac{\partial}{\partial x_{s_o}} \\ & + \frac{dy_b}{dx_b} \frac{\partial}{\partial y_b} + \frac{dy_{s_e}}{dx_{s_e}} \frac{\partial}{\partial y_{s_e}} + \frac{dy_{s_o}}{dx_{s_o}} \frac{\partial}{\partial y_{s_o}} \\ & + \frac{du_b}{dx_b} \frac{\partial}{\partial u_b} + \frac{du_{s_e}}{dx_{s_e}} \frac{\partial}{\partial u_{s_e}} + \frac{du_{s_o}}{dx_{s_o}} \frac{\partial}{\partial u_{s_o}} \end{aligned} \quad (3.26)$$

süper hız vektörü kullanılarak  $X_H(\alpha(t)) = \alpha'(t)$  denklemi çözüldüğünde,

$$\frac{\partial H_b}{\partial u_b} = \frac{dy_b}{dx_b}, \quad \frac{\partial H_{s_e}}{\partial u_{s_e}} = \frac{dy_{s_e}}{dx_{s_e}}, \quad \frac{\partial H_{s_o}}{\partial u_{s_o}} = \frac{dy_{s_o}}{dx_{s_o}}$$

ve

$$-\frac{\partial H_b}{\partial y_b} = \frac{du_b}{dx_b}, \quad -\frac{\partial H_{s_e}}{\partial y_{s_e}} = \frac{du_{s_e}}{dx_{s_e}}, \quad -\frac{\partial H_{s_o}}{\partial y_{s_o}} = \frac{du_{s_o}}{dx_{s_o}} \quad (3.27)$$

olacak şekilde süper uzayda graf demet yapısı üzerinde (3.27) ile ifade edilen süper Hamilton enerji denklemleri elde edilir.

### Örnek 3.3.2

Örnek 3.2.2' de süper logaritmik spiral eğrisi üzerinde ve süper graf demet yapısı için hesapladığımız Euler-Lagrange enerji değerini bu örnekte Hamilton enerji değeri için hesaplayacağız. Tanım 3.1.5'de verilen süper graf demet yapısının koordinatları, bu eğri üzerinde

$$(x, y, u) = (x_b(\theta), x_{s_e}(\theta), x_{s_o}(\theta), y_b(\theta), y_{s_e}(\theta), y_{s_o}(\theta), u_b(\theta), u_{s_e}(\theta), u_{s_o}(\theta))$$

şeklinde olup, süper logaritmik spiral eğrisinin de koordinatları (3.14) ile belirlidir. Burada, işlemlerde kolaylık olması açısından  $a(t)e^{b(t)\theta} = r(t)$  kısaltması yapılırsa, süper logaritmik spiral eğrisi üzerinde süper graf demet yapısı için koordinatlar,



$$\begin{aligned}
& (t, a(t)e^{b(t)\theta} \cos \theta, a(t)e^{b(t)\theta} \sin \theta, a(t)e^{b(t)\theta} \sin \theta - a(t)e^{b(t)\theta} \cos \theta) \\
= & (t_b, t_{s_e}, t_{s_o}, r_b(t) \cos \theta, r_{s_e}(t) \cos \theta, r_{s_o}(t) \cos \theta, \\
& r_b(t) \sin \theta, r_{s_e}(t) \sin \theta, r_{s_o}(t) \sin \theta, \\
& r_b(t)(\sin \theta - \cos \theta), r_{s_e}(t)(\sin \theta - \cos \theta), \\
& r_{s_o}(t)(\sin \theta - \cos \theta)) \tag{3.28}
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Bu süper graf jet demet yapısı için tanımladığımız koordinatlar, (3.27) de elde ettiğimiz süper Hamilton enerji denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$\frac{\partial H_b}{\partial r_b(\sin \theta - \cos \theta)} = \frac{dr_b \sin \theta}{dr_b \cos \theta} \implies \frac{\partial H_b}{\partial r_b} = \frac{dr_b}{dr_b} \tan \theta (\sin \theta - \cos \theta) \tag{3.29}$$

$$-\frac{\partial H_b}{\partial r_b \sin \theta} = \frac{dr_b(\sin \theta - \cos \theta)}{dr_b \cos \theta} \implies \frac{\partial H_b}{\partial r_b} = -\frac{dr_b}{dr_b} \tan \theta (\sin \theta - \cos \theta) \tag{3.30}$$

(3.29) ve (3.30) denklemlerinden,

$$\frac{\partial H_{s_e}}{\partial r_{s_e}(\sin \theta - \cos \theta)} = \frac{dr_{s_e} \sin \theta}{dr_{s_e} \cos \theta} \implies \frac{\partial H_{s_e}}{\partial r_{s_e}} = \frac{dr_{s_e}}{dr_{s_e}} \tan \theta (\sin \theta - \cos \theta) \tag{3.32}$$

$$-\frac{\partial H_{s_e}}{\partial r_{s_e} \sin \theta} = \frac{dr_{s_e}(\sin \theta - \cos \theta)}{dr_{s_e} \cos \theta} \implies \frac{\partial H_{s_e}}{\partial r_{s_e}} = -\frac{dr_{s_e}}{dr_{s_e}} \tan \theta (\sin \theta - \cos \theta) \tag{3.33}$$

(3.32) ve (3.33) denklemlerinden,

$$H_{s_e} = \pm r_{s_e} \tan \theta (\sin \theta - \cos \theta) + c_{s_e} \tag{3.34}$$

elde edilir.

$$\frac{\partial H_{s_o}}{\partial r_{s_o}(\sin \theta - \cos \theta)} = \frac{dr_{s_o} \sin \theta}{dr_{s_o} \cos \theta} \implies \frac{\partial H_{s_o}}{\partial r_{s_o}} = \frac{dr_{s_o}}{dr_{s_o}} \tan \theta (\sin \theta - \cos \theta) \tag{3.35}$$

$$-\frac{\partial H_{s_o}}{\partial r_{s_o} \sin \theta} = \frac{dr_{s_o}(\sin \theta - \cos \theta)}{dr_{s_o} \cos \theta} \implies \frac{\partial H_{s_o}}{\partial r_{s_o}} = -\frac{dr_{s_o}}{dr_{s_o}} \tan \theta (\sin \theta - \cos \theta) \tag{3.36}$$

(3.32) ve (3.33) denklemlerinden,

$$H_{s_o} = \pm r_{s_o} \tan \theta (\sin \theta - \cos \theta) + c_{s_o} \quad (3.37)$$

elde edilir. Buna göre, süper Hamilton enerji fonksiyonu,

$$\begin{aligned} H &= H_b + H_{s_e} + H_{s_o} \\ &= \pm \tan \theta (\sin \theta - \cos \theta) (r_b + r_{s_e} + r_{s_o}) + c_b + c_{s_e} + c_{s_o} \end{aligned} \quad (3.38)$$

bulunur.

Burada,

$$u_b = y_b - x_b = r_b \sin \theta - r_b \cos \theta$$

$$u_{s_e} = y_{s_e} - x_{s_e} = r_{s_e} \sin \theta - r_{s_e} \cos \theta$$

$$u_{r_{s_o}} = y_{r_{s_o}} - x_{r_{s_o}} = r_{r_{s_o}} \sin \theta - r_{r_{s_o}} \cos \theta$$

koordinat eşitlikleri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} H &= \pm \tan \theta (u_b + u_{s_e} + u_{s_o}) + c_b + c_{s_e} + c_{s_o} \\ &= \pm \tan \theta u + c \end{aligned} \quad (3.39)$$

elde edilir.

$u$ ,  $x$  ve  $y$  köşe noktaları arasındaki kenarı ifade ettiğinden, (3.39)'da  $u$ , bağlantıyı oluşturduğu köşe noktalar arasındaki uzunluğu ifade eder ki, bu da, ayrıca  $\theta$  açısı da sabit olduğundan  $\tan \theta u + c$  toplamının sabit bir değere karşılık geleceğini gösterir. Dolayısıyla, Hamilton enerji değeri yine sabit olarak bulunmuş olur. Buradaki pozitiflik ve negatiflik durumu yön ve parite kavramı ile ilgili olup, Hamilton enerji değerinin sabitliğine engel bir durum değildir. Ayrıca, (3.38)'de  $H$ 'nin tanımlı olabilmesi için  $\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}$  olmalıdır.  $\theta = 0$  ve  $\theta = \frac{\pi}{2}$  iken bir spiral tanımlayamayacağımız için graf demet yapısı ile çalışırken de bulduğumuz enerji değerinin kabullerle uyumlu olduğu söylenebilir.

Sonuç olarak, (3.38) denklemi logaritmik spiral eğrisi koordinatlarına göre,

$$H = \pm \tan \theta (\sin \theta - \cos \theta) (a_b(t_b) e^{b_b(t_b)\theta} + a_{s_e}(t_{s_e}) e^{b_{s_e}(t_{s_e})\theta} + a_{s_o}(t_{s_o}) e^{b_{s_o}(t_{s_o})\theta}) + c_b + c_{s_e} + c_{s_o} \quad (3.40)$$

şeklinde ifade edilir.

Örneğin, Şekil 3.4’de belirli olan süper logaritmik spiral eğrisi üzerinde diferensiyellenebilir graf manifold yapısındaki  $\beta$  dönüştürmelerine uygun olarak belirlenen altı graf noktayı izleyen parçacığın hareketini incelersek, bu hareket sonundaki Hamilton enerji değeri,

$$\begin{aligned}
H = & \tan \theta (\sin \theta - \cos \theta) [(a_{1b}(t_b)e^{b_{1b}(t_b)\theta}) \\
& + (a_{2b}(t_b)e^{b_{2b}(t_b)\theta} - a_{2s_o}(t_{s_o})e^{b_{2s_o}(t_{s_o})\theta}) \\
& + (a_{3s_e}(t_{s_e})e^{b_{3s_e}(t_{s_e})\theta}) \\
& + (a_{4s_e}(t_{s_e})e^{b_{4s_e}(t_{s_e})\theta} - a_{4s_o}(t_{s_o})e^{b_{4s_o}(t_{s_o})\theta}) \\
& + (a_{5b}(t_b)e^{b_{5b}(t_b)\theta} + a_{5s_e}(t_{s_e})e^{b_{5s_e}(t_{s_e})\theta} - a_{5s_o}(t_{s_o})e^{b_{5s_o}(t_{s_o})\theta}) \\
& + a_{6b}(t_b)e^{b_{6b}(t_b)\theta}] + c
\end{aligned} \tag{3.41}$$

olarak elde edilir.

## 4 SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Son yıllarda, zamana bağlı olan mekanik sistemlerde, o mekanik sistemi ifade eden Lagrange-Hamilton mekanik denklemleri ve sistemin enerji geçiş denklemleri ile herhangi bir zaman aralığında enerji dağılım-kayıp seviyelerini elde etmek için çalışan araştırmacıların başında M. De Leon, G. Sardanashvily, M Mangiarotti, Carden, Titorenka, Carinena v.b. gelmektedir. Bulunan ve zamanla geliştirilen bu ilke ve yöntemlerin tümü bugün analitik dinamik olarak bilinmektedir.

Diğer yandan süper manifoldlar, 1970'lerde Berezin, Leites ve Konstant tarafından kuantum teorisi için matematiksel bir yapı olarak tanıtılmıştır.

Süper manifoldlar üzerine çalışmalar devam ederken süper simetri keşfedilmiş ve bu çalışmalar bu katkı ile devam etmiştir. Bu arada, Ronan Plesser'a ait çalışmalarda ayna simetrisi yapısına benzer olarak süper simetri geliştirilmiş ve üzerinde mekanik ve kinematik çalışmalar yapılabileceği görülmüştür.

(Tozak ve diğ. 2018) çalışmalarında, süper uzayda eğriyi tanımlayarak, skalar çarpım ve ortogonallik için yeni yaklaşımlarda bulunmuşlardır. Bunun yanısıra, araştırmacıların yapmış olduğu çalışmalarda kinematik sistemlerin analitik hesaplama metotlarıyla hareket denklemlerini elde ettikleri görülmektedir. Biz, bu çalışmada, hareketin başlangıcından itibaren hareketli parçacığın konumunun ve hızının nasıl değişeceği, hareketin nasıl sonlanacağı hakkında daha kolay modelleme yapabilmek için özellikle uzay-zaman kavramı ile çalışmayı tercih ettik. Bu sayede kurulacak modelleme ile sistemin konum-hız grafiklerinin daha kolay elde edileceğini düşündük.

Süper manifoldlar üzerinde hız kavramını tanımlamak için, mekanik çalışmalarda bize kolaylık sağlaması açısından jet manifold ve jet demet yapılarından yararlandık. Bu sayede fiziksel yorumların yapılabilmesi ve sonuçların daha güvenilir çıkması amaçlanmıştır.

Çalışmamızın birinci bölümünde, daha önceki yüksek lisans ve doktora çalışmalarımızda (Aycan 1999, Aycan 2003, Dağlı 2012) elde ettiğimiz ve diğer bazı araştırmacıların çalışmalarında (Crampin 1981, De Leon ve Rodrigues 1989, De Leon ve diğ.1996, Giechetta ve diğ. 2002, Mangiarotti ve Sardanashvily 2000, Sardanashvily 1998, Sardanashvily 2013) sundukları; çalışmamızın temelini teşkil eden mekanik yapıların, jet demetlerin temel unsurlarını sunduk. Ayrıca, süper uzay yapısında gerekli olan temel kavramları da ifade ettik. Fakat sayfa 17-18 de verilen süper sayılarla ilgili özelliklerin çalıştığımız kaynaklarda ispatlarını bulamadığımız için bu özelliklerin daha iyi anlaşılması adına her birini ayrı ayrı ispatladık. Bu ispatlar konunun daha iyi anlaşılması, ileriki sayfalarda sayı tip-

lerinin daha iyi analiz edilmesi için önem taşımaktadır. Sayfa 22 de süper vektör uzayı yapısını da gerekli aksiyomların sağlandığını görmek için detaylı olarak inceledik. Yine sayfa 25 ve 26 da tanımladığımız süper manifoldun harita ve atlas yapısını, diferensiyel yapının diyagramını göz önüne alarak Şekil 1.3 ve Şekil 1.4 üzerinde gösterdik. Kullandığımız kaynaklarda, koordinat sistemleri üstü kapalı geçildiği için, bu yapının daha net olarak tanıtılmasını amaçladık.

İkinci bölümde, süper demetlerin üzerinde jet yapılarını oluşturduk. Burada jet koordinatları bulmak için süper uzayda türevin nasıl alındığını bilmemiz gerekiyordu. Burada dikkat edilmesi gereken husus, türev alırken fonksiyonların tek pariteye sahip oldukları kısımlarından negatif(-) işaretinin gelmesidir. Eğer, (-) işareti dikkate alınmazsa sonuçlar süper simetrik uzay modeli ile uyumsuz çıkmaktadır. Bu nedenle parite kavramı, fonksiyonlarda da aynen sayılar gibi even-odd (çift-tek) yapıları önemlidir. Bu bölümde, ayrıca, baz uzay olarak reel uzayı almaktaki amacımız, henüz farklı uzay yapıları için süper simetri çalışmalarının olmaması, diğer yandan reel uzayda bulduğumuz sonuçları klasik sonuçlarla ve önceki çalışmalarımızdaki sonuçlarla karşılaştırmamızın daha uygun olmasıdır. Tabi ki jet koordinatlar tanımlanırken tek ve çift kısımlar için türevin detaylı değerlendirilmesi gerekiyordu. Bu nedenle, koordinatlarımızı, body ve soul kısımlarının yanı sıra body, çift soul ve tek soul kısımlar olarak şekilde ele aldık. Buna göre jet koordinatlarımızı belirledik. Bu detaylı inceleme, bize enerji denklemlerinin çözümünde koordinat sayısının artması bakımından büyük bir zorluk getirdiği gibi, enerji denklemlerinin elde edilip yorumlanmasında da detaylı bir sonuç elde etmemizi sağlamıştır. Bu bölümün sonunda çember, helis ve logaritmik spiral eğrileri üzerinde bir hareketli parçacığın enerji denklemlerini çıkardığımız üç örnek sunduk. Süper uzayda, teğet vektörü çizerken sağ el kuralından yararlandığımızı biliyorduk. Ama bu çalışma için vektörün even-odd kısımları göz önüne alındığında bu çizimler nasıl olur sorusu önemliydi. Yaptığımız araştırmalar, bizi yön kavramına götürdü. Böylece Şekil 2.2 ve Şekil 2.3 ortaya çıktı.

Sonuçta, gerekli denklemler çözüldüğünde (2.43) ile verilen çember için Euler-Lagrange enerji denklemi elde edildi. Bizim Lagrange enerji yapıları üzerine daha önce yaptığımız çalışmalarımızda Lagrange enerji denklemleri uzay ve dünya zamanları arasındaki orana dayalı olarak üstel fonksiyona bağlı çıkmaktaydı (Dağlı 2012). Bundan farklı olarak bu çalışmada, sadece uzay ve dünya zaman arasındaki orana dayalı ama polinomsal bir fonksiyona benzer sonuçlar bulunmuştur. Üstel fonksiyonlara dayalı sonuçlar bulduğumuz çalışmalarımızda zaman aralığı genişledikçe enerjinin çok fazla düşüşe geçtiği söylenmekteydi (Dağlı 2012). Fakat ilginçtir ki, fonksiyon tipimiz farklı olsa da aynı yorumlar, bu çalışmadaki

sonuçlar için de geçerlidir. Yani, elde edilen sonuçlarda, enerji korunumları ile ilgili yapılabilecek yorumlar aynıdır. Bu ise bize çalışmamızın geçerliliği ve doğruluğu konusunda net bir açıklama getirmektedir. Yine Örnek 2.2.13'de süper helis yapısını çalışmak için ele aldığımızda, araştırmalarımızın sonucu DNA modeli ile karşılaştık. Yine ilginçtir ki biyologlarla yaptığımız çalışmalarda, even vektörlerin ve odd vektörlerin incelenmesinde helisin bir kanadı üzerindeki vektörlerin paralel taşınmasıyla diğer kanada getirilmesi ile (basit bir öteleme hareketi ile) adenintimin, guanin-sitozin bağlarının süper vektörler ile açıklanabileceğini elde ettik. Ayrıca, DNA yapısında iki helis kanadı arasındaki uzunluk hep sabit olduğundan katı hareket(öteleme) burada çok uygun bir matematiksel yapı olacaktır. Adenintimin, guanin-sitozin yapılarının süpervektör olarak ele alınması da, uzunluğun sabit olmasının hız vektörlerinin boylarının sabit olmasını gerektirir. Bu da bize süper jeodezik yapıları çağrıştırır. Kaldı ki helis eğrisi üzerinde elde ettiğimiz sonuçlarda, detaylı çözümlmeye gittiğimizde eğri ile vektörler arasındaki açılar daima  $45^\circ$  ve  $135^\circ$  olması gerektiği sonucuna ulaştık. Bu da çift(even) süper vektörlerde  $45^\circ$ , tek(odd) süper vektörlerde  $135^\circ$ , kısaca sadece yön kavramı ile düşündüğümüzde  $45^\circ$  ye bağlı kalan sabit bir açı yapısını görmemizi sağladı.

Diğer yandan, iki vektörün başlangıç noktası arasında kalan eğri parçasının uzunluğu biyolojide ester bağı olarak adlandırılır. Bu ester bağı bulmak için yaptığımız çalışma matematiksel anlamda yine çok önemlidir. Elde ettiğimiz süper helis yani DNA sarmalı için elde ettiğimiz (2.54)'deki Lagrange enerjisini bu kimyasal ve biyolojik özelliklerle ele aldığımızda, enerji denklemlerinin sonuçlarında bilinen sabit oranın ne kadar gerçekçi olduğunu görürüz.

Örnek 2.2.14'de aldığımız logaritmik spiral eğrisi, yine süper uzay yapısına uygun formda tanımlanarak, bu eğri üzerinde Örnek 2.2.12 ve Örnek 2.2.13'de çalıştığımız mantıkla, hareket incelenmiş olup (2.66) ile belirli olan Lagrange enerjisi elde edildi. (2.29)'da verilen süper Euler-Lagrange enerji sistemi için elde ettiğimiz denklemlerin çözümünde kullandığımız özel kabulümüzdeki katsayı fonksiyonlarımız ile ifade edilecek şekilde (2.31) ile belirli olan Euler-Lagrange enerji denklemini elde etmiştik. Zamana bağlı Euler-Lagrange enerji denkleminin, (2.17) deki genel formu ile bu (2.31)'de elde ettiğimiz süper Lagrange enerji denklemini karşılaştırdığımızda, (2.31)'deki birinci ve sonuncu terimlerin, (2.17)'deki genel formdaki denklemin terimleri ile aynı olduğunu, diğer farklı olan terimlerin kabulümüz olan katsayı fonksiyonlarından ileri geldiğini görmekteyiz. Bu katsayı fonksiyonlarını daha da özelleştirip, örneğin bir sabit değerini alsaydık bu katsayılar oluşmayacak, dolayısıyla, (2.32) de ifade edilen süper Euler-Lagrange enerji denkleminin genel formu elde edilecektir. Buna göre, süper logaritmik spiral

eğrisi için (2.32) denklemini üzerinde enerji değerini hesap ettiğimizde, (2.67)'deki Euler-Lagrange enerji değeri elde edilmiştir. Her iki sonucun  $r$  ve  $t$  ye bağlı olduğu görülmekte, bu da çalışmamızın doğruluğunu kanıtlamaktadır.

Yine ikinci bölümde, süper Hamilton enerji denklemlerini elde ettik. Yine bu sonuçların daha önce yaptığımız çalışmalarımız (Dağlı 2012) ile uyumlu olduğunu gördük. Burada da Hamilton fonksiyonlarının tek(odd) kısımlarından gelen (-) işareti parite ile alakalı olup, tek kısımlar ele alınmadığı durumda, sonuç gerek Minkowski uzayı gerekse Kahler yapısındaki sonuçlarla uyumludur.

Hamilton enerjisi, Lagrange enerjisinden farklı olarak tamamen sabit bir yapıdadır. Bulduğumuz sonuçların gerek Minkowski uzayı gerek kompleks uzay gerekse süper uzayda hep paralel sonuçlar olması, çalışmamızın geçerliliğini bir kez daha desteklemektedir. Süper uzayda yine fark, enerji fonksiyonlarının da even-odd(çift-tek) olarak ayrılmasının zorunluluğundan gelmektedir.

Üçüncü bölümde, çalışmalarımıza özel bir anlam kazandıran Graf Teoriye yer verdik. Literatürde, Graf teorisinin çok farklı alanlarda, örneğin temel bilim dallarındaki problemlerin çözümünde, elektrik konularında devrelerde, bilgisayar oyunlarında ve bilgisayar bilimlerinin birçok alanında, ulaşım hususunda güzergah belirlemede (navigasyon uygulamalarında) kullanıldığını görüyoruz. Çünkü, Graf teori hayatımızdaki problemleri basite indirgeyerek daha kolay çözüme ulaşmayı sağlıyor. Matematikte, özellikle de diferensiyel geometri ve fiziksel matematik alanında düşündüğümüzde, Graf teori, bir yolun en kısa sürede tamamlanması adına mümkün olan hareketi planlamak için seçilebilecek en elverişli çalışma alanlarından biridir. Bu nedenle, çalışmamızda da süper uzayda süper graf manifold yapısını kurarak mekanik sistemleri oluşturabilmek ve yorumlayabilmek için süper graf demet yapısını tanımladık. Kurduğumuz bu diferensiyellenebilir süper graf manifold yapısı üzerinde, tanım gereği otuz bir tane topolojik dönüşüm tanımlayarak, süper uzayda body, soul çift ve soul tek kısımlardan oluşan koordinat yapısını Graf teoriye uyarladık ve inceledik. Ayrıca, zamana bağlı mekanik sistemler için gerekli olan jet demeti tanımladık ve buradaki türevsel koordinatların graflar ile temsil edilebileceğini, geometrik yorumunu da yaparak kanıtlamış olduk. Bunun sonucunda, türevsel koordinatların kenarlar(edge) ile ele alınarak zamana bağlı mekanik sistemlerin çözülebileceğini gördük ve bunun sonucunda (3.13)'de süper uzayda Graf teori yardımıyla Euler-Lagrange enerji denklemini ve (3.27)'de Hamilton enerji denklemlerini elde ettik. Elde edilen bu enerji denklemlerinin, genel formları ile aynı olduğu sonucuna ulaştık. Bunun sonucunda, Örnek 3.2.2 ve Örnek 3.3.2'de elde edilen enerji denklemlerini kullanarak süper uzayda tanımladığımız logaritmik spiral eğrisi üzerinde hareketi inceledik, Lagrange ve

Hamilton enerji değerlerini bulduk. Bu sonuçlar, Bölüm 2’de yer alan örnek 2.2.14 ve örnek 2.3.11’deki sonuçlarla karşılaştırılınca yine benzer sonuçların elde edildiğini göstermiş olduk. Buna göre, kullandığımız bu Graf teori sayesinde, zamana bağlı mekanik sistemler için incelemelerin ve czmlerin daha kısa ve daha seri yapılabileceğini ispatlamış olduk.

Son olarak, tüm bu enerji denklemleri herhangi bir manifold üzerinde klasik anlamda tanımlanmış Lagrange ve Hamilton denklemlerine indirgenebilir. Fizikçiler, Hamilton enerjide sabitliğin, hareketin kararlığı anlamına geldiğini söylerler. O halde, gerek helis gerek çember gerekse logaritmik spiral örneklerinde elde ettiğimiz sonuçlar, cismin süper uzayda da yaptığı hareketin kararlı bir hareket olduğunu ifade eder. Hamilton enerjide elde edilen kararlılık durumu Lagrange enerjide değişir. Fizikçilerin çalışmalarında da Lagrange enerji, zamana dayalı olarak farklılık gösterir. Zamanın çok fazla genişlemesi veya hareketin çok hızlanması durumunda, cismin gözlenen hareketi doğrusal olur. Bunu bir jetin havada hareketini izlerken, arkasında bıraktığı çizgiyi doğrusal formda gzlemememiz ile açıklayabiliriz.

Bu tezde (2.54) ve (2.43) Lagrange enerji denklemlerinde  $t \rightarrow \infty$  konumunda bu denklemlerin sabit değer aldığını grtrtz. O halde sonuçlarımız, fiziksel realite ile örtüşmektedir. Yine bu denklemlerin birbirleriyle aynı çıkması, genel olarak enerji yapısının korunumlu olduğunu da ispatlar. Dolayısıyla, bu çalışmamızın diferensiyel geometrinin temel bilimler ve mühendislik uygulamaları açısından önemli bir yer taşıyacağını düşünmekteyiz.



## 5. KAYNAKLAR

Aycan, C., “Jet Demetler Üzerinde Yükseltmeler ve Prolongasyon Bağlıları ”, Yüksek Lisans Tezi, Pamukkale Üniversitesi *Fen Bilimleri Enstitüsü*, Geometri Anabilim Dalı, Denizli, (1999).

Aycan, C., “Genişletilmiş Jet Demetleri Üzerine Euler-Lagrange ve Hamilton Denklemlerinin Liftleri”, Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi *Fen Bilimleri Enstitüsü*, Geometri Anabilim Dalı, Eskişehir, (2003).

Balduzzi, L., “Supermanifolds, super Lie group, and super Harish-Chandra pairs: functorial methods and actions (A mathematical approach to supersymmetry)”, Tesi di Dottorato, Università degli Studi di Genova, Facoltà di Scienze Matematiche, *Fisiche e Naturali Scuola di Dottorato in Scienze Fisiche*, (Dottorato di ricerca XXI ciclo).

Bartocci, C. and Bruzzo, U., *The Geometry Of Supermanifolds*, Italy: Springer Netherlands, (1991).

Berry, T., Schluchter, S., “Applications of Topological Graph Theory to 2-Manifold Learning”, *Cornell University Library.*, arXiv:1809.0005v1, (2018).

Biggs, N. L., Lloyd, E. K., Wilson, R. J. *Graph Theory*, Clarendon Press-Oxford(1986).

Boi, L., Bartocci, C. and Sinigaglia, C., *New Trends In Geometry: Their Role In The Natural And Life Sciences*, London: Imperial College Press, (2011).

Bolker, E., Guillemin, V., Holm, T., “How is a Graph Like a Manifold”, *Cornell University Library.*, arXiv:0206.103v1, (2002).

Bruce, A.J., “On Curves And Jets Of Curves On Supermanifolds”, *Cornell University Library.*, arXiv:1401.5267v2, (2014).

Buyalo, S., Svetlov, P., “Topological And Geometric Properties Of Graph Manifolds”, *St.Petersburg Math. J.*, 16(2), 297-340, (2005).

- Cangül, İ.N., *Graph Theory*, 1. Dora Yayıncılık, İstanbul, (2017).
- Cangül, İ.N., Delen S., “A New Graph Invariant”, *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, 6(1), 30-33, (2018).
- Cartier, P., DeWitt-Morette, C., Ihl, M., Saemann, C., and Bell, M. E., “Supermanifolds – Application To Supersymmetry”, *Cornell University Library.*, arXiv:math-ph/0202026v1, (2002).
- Caston, L. and Fioresi, R., “Mathematical Foundations Of Supersymmetry”, *Cornell University Library.*, arXiv:0710.5742v1, (2007).
- Cattaneo, A.S. and Schaetz, F., “Introduction to supergeometry”, *Cornell University Library.*, arXiv:1011.3401v2, (2010).
- Covolo, T. and Poncin, N., “Lectures on Supergeometry”, *University Of Luxembourg Library.*, <http://hdl.handle.net/10993/14295>, (2012).
- Crampin, M., “On the Differential Geometry of Euler-Lagrange Equations, and the Inverse Problem of Lagrangian Dynamics”, *Jour. Of Phys. A- Math. Gen.*, 14, (1981).
- Dağlı, S., “Minkowski 4-Uzayında Jet Yapılar Ve Mekanik Sistemler”, Yüksek Lisans Tezi, Pamukkale Üniversitesi *Fen Bilimleri Enstitüsü*, Geometri Anabilim Dalı, Denizli, (2012).
- De Leon, M. and Rodrigues P. R., *Methods Of Differential Geometry in Analytical Mechanics*, North Holland: Elsevier Science Pub., (1989).
- De Leon, M., Marrero, J. C. And Martin De Diego, D., “Time-Dependent Mechanical Systems With Non-Linear Constraints”, (eds J. Szenthe), *New Developments in Differential Geometry*, Budapest: Springer Netherlands, 221-234, (1996).
- DeWitt, B., *Supermanifolds*, USA: Cambridge University Press., (1984).
- Ekmekçi, N., Hacısalıhoğlu H. H., *Tensör Geometri*, Hacısalıhoğlu Yayınları, (2003).

Giachetta, G., Mangiarotti, L., and Sardanashvily, G., “Geometric Quantization Of Mechanical Systems With Time-Dependent Parameters”, *Jour. Of Math. Phys.*, 43-(6), (2002).

Holm, D. D., Schmah, T. and Stoica, C., *Geometric Mechanics And Symmetry*, New York: Oxford University Press, (2009).

Imrich, W., Pisanski, T., Zerovnik, J., “Recognizing Cartesian Graph Bundles”, *Discrete Math.*, 167/168, 393-403, (1997).

Jadezyk, A. and Pilch, K., “Superspaces And Supersymmetries”, *Commun. Math. Phys.*, 78, 373-390, (1981).

Mangiarotti, L. and Sardanashvily, G., *Connections In Classical And Quantum Field Theory*, Singapore: World Scientific Pub., (2000).

Mukhopadhyay, U., “Logarithmic Spiral-A Splendid Curve”, *Indian Academy of Sciences*, V:9, I:11, 39-45, (2004).

Quevedo, F., “Cambridge Lectures On Supersymmetry And Extra Dimensions”, *Cornell University Library.*, arXiv:1011.1491v1, (2010).

Pohl, W. F., Roberts, G. W., “Topological Considerations In The Theory Of Replication Of DNA”, *Journal Of Mathematical Biology* 6, 383-402, (1978).

Rogers, A., *Supermanifolds, Theory And Applications*, Singapore: World Scientific Pub., (2007).

Rothstein, M. J., “The Axioms Of Supermanifolds And a New Structure Arising From Them”, *Trans. Of The American Math. Society*, 297-(1), 159-180, (1986).

Rowe, E.G.P., *Geometrical Physics In Minkowski Spacetime*, London: Springer, (2001).

Sağel, M. K., *Vektörel Analiz Ve Tensör Analize Giriş*, A. Ü. F. F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, No:67, (2003).

- Sardanashvily, G. and Zakharov, O., “On Application Of The Hamilton Formalism in Fibred Manifolds To Field Theory”, *Dif. Geo. And Its App.*, 3, 245-263, (1993).
- Sardanashvily, G., “Hamiltonian time-dependent mechanics”, *Jour. Of Math. Phys.*, 39-(5), (1998).
- Sardanashvily, G., “Supermetrics On Supermanifold”, *Int. Jour. Of Geo. Math. in Mod. Phys.*, 5-(2), 271-286, (2008).
- Sardanashvily, G., “Lectures On Supergeometry”, *Cornell University Library.*, arXiv:0910.0092v1, (2009).
- Sardanashvily, G., “Fibre Bundle Formulation Of The Time-dependent Mechanics”, *Cornell University Library.*, arXiv:1303.1735v1, (2013).
- Sternberg, S., *Lectures On Differential Geometry*, AMS Chelsea Publishing, Second edition, (1999).
- Tozak, H., Ekici, C., and Aycan, C., “On Bertrand Supercurves in Super-Euclidean Space”, *Bulletin Of Mathematical Analysis and Applications*, 10(4) (14-30), ISSN: 1821-1291, 2018.
- Varadarajan, V. S., *Supersymmetry For Mathematicians: An Introduction (Courant Lecture Notes)*, USA: American Mathematical Society., (2004).
- Yagi, K., “Super Manifolds”, *Osaka Jour. Math.*, 25, (1988).
- Yılmaz, G., Pirinççi, B. and Erdoğan, M., “DNA'nın Topolojisi Ve Geometrisi”, *Hasan Ali Yüce Eğitim Fakültesi Dergisi.*, 3, (2005).