T. C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI

ETKİN SİCİM ALAN TEORİLERİNİN RIEMANN-SAL OLMAYAN GEOMETRİLER CİNSİNDEN YORUMU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Muzaffer ADAK

HAZİRAN 1997
DENİZLİ

T. C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI

ETKİN SİCİM ALAN TEORİLERİNİN RIEMANN-SAL OLMAYAN GEOMETRİLER CİNSİNDEN YORUMU

Muzaffer ADAK

Tez Savunma Tarihi : 24.06.1997

Tezin Danışmanı : Prof. Dr. Tekin DERELİ

Haziran -1997
DENİZLİ

Muzaffer ADAK tarafından YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırlanan "Etkin Sicim Alan Teorilerinin Riemann-sal Olmayan Geometriler Cinsinden Yorumu" başlıklı bu çalışma, jürimizce Pamukkale Üniversitesi Lisansüstü Öğretim ve Sınav Yönergesinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

25/06/1997

Üye: Prof. Dr. Tekin DERELİ

Üye: Prof. Dr. Hasan ERDOĞAN

Üye: Doç. Dr. Nuri KOLSUZ

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 18.06.1997 tarih ve 18/1 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hikmet RENDE
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması, Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı Yüksek Lisans programında yapılmıştır.

Bu tez çalışmam için danışmanlığımı kabul eden, çalışmalarımda bana değerli katkılarda bulunan ve tüm çalışmalarımı yönlendiren Sayın Hocam Prof. Dr. Tekin DERELİ'ye; çalışmalarım sırasında yardım ve desteklerini esirgemeyen değerli hocalarım Prof. Dr. Hasan ERDOĞAN'a, Doç. Dr. M.Nuri KOLSUZ'a, Yrd. Doç. Dr. Mehmet BAYLAN ve Pamukkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü elemanlarına ve bu tezin yazımı esnasında yardımlarını esirgemeyen arkadaşım O.D.T.Ü. Araş. Gör. Mustafa ULUDOĞAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Muzaffer ADAK

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Riemann-sal olmayan uzay-zaman geometrilerinde gravitasyon alan denklemleri bir eylemden varyasyon ilkesiyle çıkartılmıştır. Şartlı ve şartsız varyasyon ilkeleri karşılaştırılmıştır. Burulma tensörü aksiyon alanı, metrik gradyant tensörü dilaton alanı cinsinden verilerek R^2-eylemi indirgenmiş; böylece yeni aksiyon-dilaton-graviton etkileşme türleri belirlenmiştir.

ABSTRACT

Gravitational field equations for non-Riemannian space-time geometries are derived by variational principle from an action. Constrained and unconstrained variational principles are compared. The torsion tensor is given in terms of the axion field, metric gradient tensor in terms of the dilaton field and the R^2-action is reduced. Thus various new types of axion-dilaton-graviton interactions are determined.

SİMGELER ve KISALTMALAR

M : Manifold

g : Metrik

∇ : Bağlantı

$\{x^\mu\}$: Koordinat Fonksiyonları

i : İç Çarpım

T(M) : Teğet Uzayı

$T^*(M)$: Koteğet Uzayı

η_{ab} : Minkowski Metriği

$\{e^a\}$: Ortonormal Baz 1-formları

$\{X_b\}$: Ortonormal Referans Çerçevesi

$\wedge$: Dış Çarpım

$\Lambda^b(M)$: p-formları Uzayı

d : Dış Türev Operatörü

$\Lambda^a{}_b$: Bağlantı 1-formları

D : Dış Kovaryant Türev Operatörü

Q_{ab} : Metrik Gradyantı 1-formları

$\Omega^a{}_b$: Metrikle Uyumlu Bağlantı 1-formları

T^a : Burulma 2-formları

$\omega^a{}_b$: Levi-Civita Bağlantı 1-formları

$K^a{}_b$: Ko-burulma 1-formları

$q^a{}_b$: Anti-Simetrik Bağlantı 1-formları

$R^a{}_b$: Eğrilik 2-formları

I : Eylem

L : Lagrange Yoğunluk 4-formu

$\mathcal{L}$: Lagrange Fonksiyonu

κ : Evrensel Gravitasyon Etkileşmesi Sabiti

λ : Kozmolojik Sabit

$*$: Hodge Dualite Operatörü

δ : Sonsuz Küçük Varyasyon

λ_a : Lagrange Çarpanı 2-formları

ϕ : Dilaton Skaları (0-formu)

H : Aksiyon 3-formu

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu tez çalışmasında, etkin sicim alan teorilerinin diferansiyel geometrik yorumunun irdelenmesi amaçlanmıştır. Çok yüksek enerjili etkileşmelerde eğer Planck ölçeğine yaklaşılması mümkün olsaydı maddeyi oluşturan cisimler ve bunlar arasındaki temel kuvvetler uzay-zamanda hareket eden bir relativistik sicim teorisiyle tarif edilebilirdi. Böyle bir teori kapsamında gravitasyon ve diğer doğa kuvvetleri birleştirilmektedir. Kapalı sicimlerin birer nokta tanecik gibi göründükleri daha düşük enerjilerde etkin sicim alan teorileri verilerek bunların incelenmesi sicim modellerinin öngörülerini anlamanın bir yoludur.

Hiç madde olmadığında Einstein'in kütle-çekim teorisi bir geometrik eylem ilkesinden türetilebilir. Eylem yoğunluğu Levi-Civita bağlantısının eğriliğiyle ilişkili eğrilik skaları terimleriyle mükemmel olarak açıklanabilir. Levi-Civita bağlantısı ∇ sıfır-burulmalı ve metrikle uyumludur. Tamamen manifoldun metrik yapısına bağlı olduğu için kullanışlı bir referans bağlantısıdır. Maddenin kütle-çekimiyle etkileşmesini tarif eden eylemde ilave terimler oluşturmak için böyle bir metrik yapısı kullanılabilir. Ancak bu durumda bu oluşumun *ad hoc* tabiatından kurtulmak için yol gösteren bir ilkeye ihtiyaç vardır. Böyle etkileşmeler bazen çok daha genel bağlantılardan türetilebilir. Örnek olarak burulmalı fakat metrikle uyumlu bağlantıların gravitonla skalar alanlar arasındaki etkileşmeleri tarif edebildiği gösterilmiştir [1]. Daha genel olarak etkin sicim alanı denklemlerinin burulmalı ve metrikle uyumlu olmayan bir bağlantı cinsinden daha basit hale geldiği bilinmektedir [2],[3]. Bu yaklaşımlarda teori Levi-Civita bağlantısı terimleriyle yeniden yazılabilir. Böylece burulma ve metrik gradyantı tensörleri Einstein-sal kütle-çekim için madde-alan etkileşmelerinin ifadesi olarak yorumlanabilir. Tekrar sicim teorisine dönersek, bu birleşik modelden beklentimiz tüm madde etkileşmelerini belirlemesidir. Düşük enerjili sicim teorisi uzay-zamandaki kütlesiz uyarımlar için alanlar arasındaki özel etkileşmeleri hesaplar. Bu uyarımları tarif etmek için graviton ve ayar bozonlarından başka bir anti-simetrik tensör alanı (aksiyon) ile dilaton skaları da düşünülmelidir [4],[5],[6]. Ayrıca iç boyutların indirgenim topolojisine bağlı olarak iyi tanımlanmış bir etkileşim düzeni daha başka skalar uyarmalar da ortaya çıkaracaktır. Bütün bu etkileşimlerin tamamı dört-boyutta aksi-dilatonik kara deliklerin yeni çeşitlerini keşif etmek için kullanılabilecek "dualite" simetrilerinin yeni türlerini vermektedir [7].

Bu tez çalışmasının 2. bölümünde Riemann-sal olmayan uzay-zaman geometrileri tanımlanmaktadır. Temel diferansiyel geometrik kavramlar gerektikçe tanımlanmıştır. 3. bölümde varyasyon ilkesini belirlemek amacıyla Riemann-sal uzay-zamanlarda Einstein eylemi ile R^2-eyleminden gravitasyon alan denklemleri türetilmektedir. Kısıtlanmış ve kısıtlanmamış varyasyon ilkeleri örnekler üzerinde karşılaştırılmıştır. 4. bölümde dört boyutlu uzay-zamanlarda aksiyon-dilaton-gravitasyon eyleminin Riemann-sal olmayan bir geometrik yorumu verilmektedir. Bu yorum kapsamında R^2-eylemi indirgenmiş ve yeni tür aksiyon-dilaton-gravitasyon etkileşmeleri belirlenmiştir.

BÖLÜM 2

BURULMANIN VE METRİK GRADYANTININ SIFIRDAN FARKLI OLDUĞU RIEMANN-SAL OLAMAYAN UZAY-ZAMAN GEOMETRİLERİ

Bu çalışmada uzay-zaman (M,g,∇) ile gösterilecektir [8]. M 4-boyutlu bir diferansiyellenebilir manifold, g bunun üzerinde verilmiş (0,2)-tipi (kovaryant) simetrik, dejenere olmayan Lorentz izli metrik tensörü ve ∇ vektörlerin paralel ötelenmesini tanımlayan bir bağlantıdır. Hesaplarda kullanılan notasyonun kurulması için aşağıda bazı temel tanımlar kısaca hatırlatılacaktır. Uzay-zamanın bir noktasında kurulan koordinat sistemini $\{x^\mu\}$,$\mu = 0, 1, 2, 3$, koordinat fonksiyonlarıyla verelim. Bu koordinat sistemi, $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$ şeklinde bir doğal referans vektörleri kümesi oluşturur. Bu referans çerçevesi teğet uzayı T(M) için bir baz vektör kümesidir. Benzer biçimde, $\{x^\mu\}$ koordinat fonksiyonlarının diferansiyelleri, $\{dx^\mu\}$ şeklinde $T^*(M)$ koteğet uzayında bir doğal referans koçerçevesi oluşturur. Teğet uzayının baz vektörleri ile koteğet uzayının baz kovektörlerinin "iç çarpımı" Kroenecker sembolü ile belirlenir:

$$dx^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) \equiv i_{\frac{\partial}{\partial x^\nu}} dx^\mu = \delta^\mu{}_\nu \tag{2.1}$$

Genelde T(M) teğet uzayında herhangi bir lineer bağımsız ortonormal vektörler kümesi baz vektörleri olarak alınabilir. Böyle bir kümeyi $\{X_a\}$,$a = 0, 1, 2, 3$, ile gösterelim ve "ortonormal referans çerçevesi" olarak adlandıralım. Bu durumda M üzerinde verilen metrik $g(X_a, X_b) = \eta_{ab}$ bağıntısını sağlar ki burada η_{ab} Minkowski metriği olarak bilinir ve köşegen elemanları -1,1,1,1 ve diğer terimleri sıfır olan 4x4 bir matristir. Ortonormal referans çerçevesinin dualinin oluşturduğu bazı (ki buna kontravaryant baz da denir) $\{e^a\}$ a=0,1,2,3 ile gösterelim. $\{X_a\}$ ile bunun dual çerçevesi $\{e^a\}$

$$e^a(X_b) \equiv i_{X_b}(e^a) = \delta^a{}_b \tag{2.2}$$

eşitliğini sağlar ki bu da (2.1) eşitliğinin bir diğer gösterimidir.

Bu çalışmadaki hesaplarda dış cebir(exterior algebra) kulanılmıştır [9]. Bu cebire göre $T^*(M)$ koteğet vektör demetinin bazları birer 1-form olarak adlandırılırlar. $\underbrace{T^*M \times ... \times T^*M}$ vektör çarpım uzayı üzerine tümüyle anti-simetrik tensör çarpımı koyarsak, elde edilen çarpım uzayına p-fomları uzayı denir ve $\Lambda^p(M)$ ile gösterilir. Yine bu cebirde baz 1-formlarının dış çarpımı $dx^\nu \wedge dx^\mu \in \Lambda^2(M)$ ile gösterilir ve $dx^\nu \wedge dx^\mu = -dx^\mu \wedge dx^\nu$ anti-simetri özelliğine sahiptir. Herhangi bir $\omega \in \Lambda^p(M)$ p-formu doğal koordinat bazında

$$\omega = \frac{1}{p!}\omega_{\mu_1...\mu_p} dx^{\mu_1} \times ... \times dx^{\mu_p}$$

şeklinde yazılabilir. Eğer tüm p-formlarını birlikte düşünürsek,

$$\bigoplus_{p=0}^{4} \Lambda^p(M)$$

toplam uzayına *dış cebir uzayı* denir. Bu uzay dış çarpım altında kapalıdır; yani $\omega \in \Lambda^p(M)$ ile $\omega' \in \Lambda^q(M)$ dış çarpımı $\omega \wedge \omega' \in \Lambda^{p+q}(M)$ olacaktır. Genelde, $\omega' \wedge \omega = (-1)^{p.q}\omega \wedge \omega'$ eşitliği sağlanır. Dış cebir üzerinde bir türev işlemi, "dış türev" operatörü

$$d : \Lambda^p(M) \to \Lambda^{p+1}(M)$$

şeklinde aşağıdaki bağıntıdan tanımlanır:

Eğer $\omega \in \Lambda^p(M)$ verilmişse, dış türev

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{1}{p!}\frac{\partial \omega_{\mu_1 \ldots \mu_p}}{\partial x^\mu} dx^\mu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_p} \\ &\equiv \frac{1}{(p+1)!}\partial_{[\mu_1}\omega_{\mu_2 \ldots \mu_{p+1}]} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_{p+1}} \end{aligned}$$

$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ olacak şekilde ifadesiyle verilir.

d bir anti-türev işlemcisidir. Yani:

1) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$ (toplama üzerine dağılım kuralı)

1) $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{p_1}\omega_1 \wedge d\omega_2$ (Leibniz kuralı)

2) $d^2 = 0$

eşitliklerini sağlar.

M manifoldu üzerinde her gözlemci kendi referans çerçevesine göre gözlem yapar. Bu durumda, bir $x \in M$ noktasında O gözlemcisi $\{X_b\}$ referans çerçevesini ve O' gözlemcisi de yine aynı noktada $\{X'_a\}$ referans çerçevesini kurmuş olsunlar. $A^{-1b}{}_a(x)$ bir yerel Lorentz dönüşüm matrisi olmak üzere, bu iki gözlemcinin ortonormal referans vektörleri

$$X'_a(x) = A^{-1b}{}_a(x) X_b(x) \tag{2.3}$$

şeklinde birbirlerine dönüştürülebilir. Şimdi kısaca de^a nın de'^a ya nasıl dönüştüğünü araştıralım. (2.3) eşitliği vasıtasıyla, ortonormal kontravaryant bazların dönüşümü için

$$e'^a = A^a{}_b e^b \tag{2.4}$$

eşitliği yazılabilir. (2.4) eşitliği d operatörü (dış cebirdeki türev operatörü) altında aşağıdaki sonucu verir.

$$\begin{aligned} de'^a &= d(A^a{}_b e^b) \\ &= A^a{}_b(de^b) + (dA^a{}_b)e^b \end{aligned} \tag{2.5}$$

(2.5) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terim, Lorentz dönüşümünü bozmaktadır. Bu terimden kurtulmak için $\{\Lambda^a{}_b\}$ bağlantı formları tanımlayalım [Daha geniş bilgi ileride verilecektir] ve yerel Lorentz dönüşümleri altında bağlantının dönüşümünü

$$\Lambda'^a{}_b = A^a{}_c \Lambda^c{}_f A^{-1f}{}_b + A^a{}_c dA^{-1c}{}_b \tag{2.6}$$

ifadesi ile verelim. (2.6) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terim $\Lambda^a{}_b$ bağlantı 1-formlarının tensör nicelikler olmadığına işaret etmektedir. Bağlantı 1-formları cinsinden bir "dış kovaryant türev" operatörünü aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$De^a \equiv de^a + \Lambda^a{}_b \wedge e^b \tag{2.7}$$

Daha önce $de'^a \neq A^a{}_b(de^b)$ olduğu (2.5) ile gösterilmişti. Fakat şimdi kontravaryant baz e^a nın dış kovaryant türevi

$$(De^a)' = A^a{}_b(De^b) \tag{2.8}$$

olarak dönüşmektedir. Ara işlemler aşağıdadır.

$$\begin{aligned} (De^a)' &= de'^a + \Lambda'^a{}_b \wedge e'^b \\ &= d(A^a{}_b e^b) + (A^a{}_c \Lambda^c{}_f A^{-1f}{}_b + A^a{}_c dA^{-1c}{}_b) \wedge A^b{}_g e^g \end{aligned}$$

Burada parantezler açılır ve $A^{-1f}{}_b A^b{}_g = \delta^f{}_g$ özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} (De^a)' &= A^a{}_b(de^b) + (dA^a{}_b)de^b \\ &\quad + A^a{}_c \Lambda^c{}_f \delta^f{}_g e^g + A^a{}_c(dA^{-1c}{}_b)A^b{}_g e^g \end{aligned}$$

elde edilir. Burada tekrar

$$d(A^{-1c}{}_b A^b{}_g) = d\delta^c{}_g = 0$$

$$\Rightarrow (dA^{-1c}{}_b)A^b{}_g = -A^{-1c}_b(dA^b{}_g)$$

eşitliği yerine konursa

$$\begin{aligned}(De^a)' &= A^a{}_b(de^b) + A^a{}_b\Lambda^b{}_c \wedge e^c \\ &= A^a{}_b(de^b + \Lambda^b{}_c \wedge e^c)\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu (2.7) denklemine göre

$$(De^a)' = A^a{}_b De^b$$

olur ki istenen (2.8) sonucudur.

(2.7) ile sadece (0,1)-tipi bir tensörün dış kovaryant türevi tanımlanmıştır. Genel bir (p,q)-tipi tensörün dış kovaryant türevi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned}DR_{a_1\ldots a_p}{}^{b_1\ldots b_q} &= dR_{a_1\ldots a_p}{}^{b_1\ldots b_q} \\ &\quad -\Lambda^{c_1}{}_{a_1}R_{c_1a_2\ldots a_p}{}^{b_1\ldots b_q} - \ldots \\ &\quad -\Lambda^{c_p}{}_{a_p}R_{a_1\ldots c_p}{}^{b_1\ldots b_q} \\ &\quad +\Lambda^{b_1}{}_{c_1}R_{a_1\ldots a_p}{}^{c_1b_2\ldots b_q} + \ldots \\ &\quad +\Lambda^{b_q}{}_{c_q}R_{a_1\ldots a_p}{}^{b_1\ldots c_q}\end{aligned} \tag{2.9}$$

Bu genel tanımdan sonra, artık dış kovaryant türevin g metriğine, e^a ortonormal bazı 1-formlarına ve $\Lambda^a{}_b$ bağlantı 1-formlarına etkisi incelenebilir.

1-) Manifold üzerindeki çerçeve ortonormal seçilmişti. Yani $g(X_a, X_b) = \eta_{ab}$ alınmıştı. Dolayısıyla ilk olarak $D\eta_{ab}$ niceliğini ele alalım. Genel olarak

$$D\eta_{ab} = -2Q_{ab} \tag{2.10}$$

bulunur ki burada simetrik $Q_{ba} = Q_{ab}$ 1-formları, (1,2)-tipi tensör tanımlar; η_{ab} metriğinin $\Lambda^a{}_b$ bağlantısına göre gradyantını gösterir ve **metrik gradyant tensörü**(non-metricity) olarak adlandırılır. Özdeş olarak $Q_{ab} = 0$ seçildiğinde $\Lambda^a{}_b$ bağlantısına metrik uyumludur denir. $\Omega^a{}_b$ ile gösterilen bu bağlantı antisimetriktir. Bunu görmek için (2.10) ile verilen metrik gradyantı tensörü açık olarak yazılırsa

$$d\eta_{ab} - \Omega^c{}_a \eta_{cb} - \Omega^c{}_b \eta_{ac} = -2Q_{ab} \equiv 0$$

olur. Burada η_{ab} reel bir sabit olduğu için $d\eta_{ab} = 0$. Buna göre

$$\Omega_{ba} + \Omega_{ab} = 0$$

$$\Omega_{ab} = -\Omega_{ba}$$

olarak metrikle uyumlu bir bağlantının anti-simetrik olduğu gösterilmiş olur.

2-) İkinci olarak dış kovaryant türevin e^a ortonormal 1-formları üzerine etkisine bakalım. Genelde

$$De^a \equiv de^a + \Lambda^a{}_b \wedge e^b = T^a \tag{2.11}$$

bulunur ki burada T^a 2-formları (1,2)-tipi **burulma tensörü** nü tanımlar.

Metrikle uyumlu bir bağlantı alalım. Eğer özdeş olarak $T^a = 0$ seçersek; bu durumda Cartan yapı denklemleri,

$$de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b = 0$$

haline iner ki bu dış diferansiyel denklemler bağlantı 1-formları için tam olarak çözülebilirler. Böylece belirlenen tek bir bağlantı vardır. Buna Levi-Civita bağlantısı adı verilir. Levi-Civita bağlantısı sadece metrik tensörü, dolayısıyla ortonormal baz 1-formları tarafından belirlenmektedir.

Eğer ne metrik gradyantı ne de burulma tensörü sıfır değilse tam bağlantı aşağıdaki gibi bileşenlerine ayrılır:

$$\Lambda^a{}_b = \omega^a{}_b + K^a{}_b + q^a{}_b + Q^a{}_b \tag{2.12}$$

Burada $\omega^a{}_b$ Levi-Civita bağlantısı, $K^a{}_b$ ko-burulma tensörü, $q^a{}_b$ anti-simetrik bağlantı ve $Q^a{}_b$ metrik gradyantı tensörüdür. Levi-Civita bağlantısının anti-simetrik olduğu yukarıda gösterilmişti. Yine metrik gradyantı tensörü (2.10) ile tanımlanmıştır. Ko-burulma ve anti-simetrik bağlantı ise sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanırlar:

$$\begin{aligned} K^a{}_b \wedge e^b &= T^a \\ q_{ab} &= -(i_a Q_{bc}) \wedge e^c + (i_b Q_{ac}) \wedge e^c \end{aligned} \tag{2.13}$$

$Q^a{}_b$ tam bağlantının simetrik kısmını; kalan $\omega^a{}_b + K^a{}_b + q^a{}_b$ ise anti-simetrik kısmını oluştururlar. Tam bağlantının (2.12) ile bileşenlerine ayrılması kendi içinde tutarlıdır. Şu ifadeyi alalım:

$$\Lambda^a{}_b \wedge e^b = \omega^a{}_b \wedge e^b + K^a{}_b \wedge e^b + q^a{}_b \wedge e^b + Q^a{}_b \wedge e^b$$

Burada ko-burulmanın (2.13) tanımı ve $T^a = 0$ için Levi-Civita bağlantısının $\omega^a{}_b \wedge e^b = -de^a$ sonuçları yerlerine konursa

$$\Lambda^a{}_b \wedge e^b = -de^a + T^a + q^a{}_b \wedge e^b + Q^a{}_b \wedge e^b$$

olur. Burada anti-simetrik bağlantının (2.13) tanımına göre

$$\begin{aligned} q^a{}_b \wedge e^b &= \eta^{af} q_{fb} \wedge e^b \\ &= \eta^{af}[-(i_f Q_{bc}) \wedge e^c \wedge e^b - e^b(i_b Q_{fc}) \wedge e^c] \end{aligned}$$

birinci terimde b,c indislerinin simetrik ve anti-simetrik olduğu iki tensör çarpımı vardır ve sonuç sıfır çıkar. İkinci terimde $\alpha \in \Lambda^p(M)$ olmak üzere $e^b \wedge i_b\alpha = p\alpha$ özdeşliği kullanılırsa

$$q^a{}_b \wedge e^b = -\eta^{af} Q_{fc} \wedge e^c = -Q^a{}_b \wedge e^b$$

sonucu çıkar ve yukarıda yerine konursa

$$T^a = de^a + \Lambda^a{}_b \wedge e^b$$

olarak burulma elde edilir.

3-) Son olarak dış kovaryant türevin bağlantı üzerine etkisini ele alalım.

$$\mathbf{R^a{}_b = D\Lambda^a{}_b \equiv d\Lambda^a{}_b + \Lambda^a{}_c \wedge \Lambda^c{}_b} \qquad (2.14)$$

Burada tanımlanan $R^a{}_b$ eğrilik 2-formları (1,3)-tipi **Riemann eğrilik tensörü** nü tanımlar. $R^a{}_b$ nin bir tensör olduğu, yani;

$$(R^a{}_b)' = A^a{}_c R^c{}_d A^{-1d}{}_b \qquad (2.15)$$

biçiminde dönüştüğü aşağıda gösterilmiştir:

$$R'^a{}_b = d\Lambda'^a{}_b + \Lambda'^a{}_c \wedge \Lambda'^c{}_b$$

ifadesinde (2.6) eşitliği üç defa yerine konursa

$$\begin{aligned} R'^a{}_b &= d(A^a{}_c \Lambda^c{}_f A^{-1f}{}_b + A^a{}_c dA^{-1c}{}_b) \\ &\quad + (A^a{}_e \Lambda^e{}_f A^{-1f}{}_c + A^a{}_e dA^{-1e}{}_c) \wedge (A^c{}_g \Lambda^g{}_h A^{-1h}{}_b + A^c{}_g dA^{-1g}{}_b) \end{aligned}$$

olarak açık hale gelir. Burada parantezler açılır ve $(dA^{-1c}{}_b)A^b{}_g = -A^{-1c}{}_b(dA^b{}_g)$ özelliği kullanılırsa

$$R'^a{}_b = A^a{}_c(d\Lambda^c{}_d + \Lambda^c{}_e \wedge \Lambda^e{}_d)A^{-1d}{}_b$$

sonucu bulunur. Bu ifade (2.14) e göre

$$R'^{a}{}_{b} = A^{a}{}_{c} R^{c}{}_{d} A^{-1d}{}_{b}$$

olarak yazılabilir. Çıkan sonuç (2.15) ile aynıdır.

(2.10), (2.11) ve (2.14) denklemlerine **Cartan yapı denklemleri** denir. Bu Cartan yapı denklemlerinin dış türevlerini incelemek bazı temel özdeşlikler ortaya çıkaracaktır.

Burulmanın dış türevi,

$$DT^{a} = R^{a}{}_{b} \wedge e^{b} \qquad \textit{Birinci Bianchi Özdeşliği}$$

sonucunu verir. Ara işlemler aşağıdadır. Burulma (2.11) ile verilmişti. Bunun dış türevi

$$\begin{aligned} dT^{a} &= d(de^{a}) + d(\Lambda^{a}{}_{b} \wedge e^{b}) \\ &= 0 + (d\Lambda^{a}{}_{b}) \wedge e^{b} - \Lambda^{a}{}_{b}) \wedge de^{b} \end{aligned}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} d\Lambda^{a}{}_{b} &= R^{a}{}_{b} - \Lambda^{a}{}_{c} \wedge \Lambda^{c}{}_{b} \\ de^{b} &= T^{b} - \Lambda^{b}{}_{c} \wedge e^{c} \end{aligned}$$

sonuçları yerine konursa

$$dT^{a} + \Lambda^{a}{}_{b} \wedge T^{b} = R^{a}{}_{b} \wedge e^{b}$$

sonucu elde edilir ki bu *Birinci Bianchi Özdeşliği*dir.

Eğriliğin dış türevi,

$$dR^a{}_b = R^a{}_c \wedge \Lambda^c{}_b - \Lambda^a{}_c \wedge R^c{}_b \qquad \textit{İkinci Bianchi Özdeşliği}$$

sonucunu verir. Ara işlemler aşağıda sunulmuştur. Eğrilik (2.14) ile verilmişti. Bunun dış türevi aşağıdaki gibi olur.

$$dR^a{}_b = (d\Lambda^a{}_c) \wedge \Lambda^c{}_b - \Lambda^a{}_c \wedge (d\Lambda^c{}_b)$$

Burada $d\Lambda = R - \Lambda \wedge \Lambda$ sonucu iki defa yerine konursa

$$dR^a{}_b = R^a{}_c \wedge \Lambda^c{}_b - \Lambda^a{}_c \wedge R^c{}_b$$

İkinci Bianchi Özdeşliği elde edilir.

Son olarak metrik gradyantının dış türevi,

$$R_{ab} + R_{ba} = 2DQ_{ab} \qquad \textit{Üçüncü Bianchi Özdeşliği}$$

sonucunu verir. Ara işlemler aşağıda yapılmıştır. Metrik gradyantı (2.10) ile verilmişti. Bunun açık şekli

$$2Q_{ab} = \Lambda^c{}_a \eta_{cb} + \Lambda^c{}_b \eta_{ac}$$

olur. Dış türevini alırsak

$$2dQ_{ab} = (d\Lambda^c{}_a)\eta_{cb} - 0 + (\Lambda^c{}_b)\eta_{ac} - 0$$

bulunur. Burada $d\Lambda = R - \Lambda \wedge \Lambda$ yerine konursa *Üçüncü Bianchi Özdeşliği* elde edilir.

Şu ana kadar tanıtılan metrik gradyantı, burulma ve eğrilik tensörlerinin sıfır veya sıfırdan farklı olmaları uzay-zaman geometrisinin özel isimler almasına neden olur.

(i)Pseudo(yarı)-Riemann-sal Uzay-Zaman Geometrileri: Metrik gradyantı ve burulma tensörlerinin sıfıra eşit olduğu, fakat eğrilik tensörünün sıfırdan farklı olduğu uzay-zaman geometrisidir ($R \neq 0$, $T = 0$, $Q = 0$). Eğer eğrilik tensörü de sıfır olursa ($R = 0$, $T = 0$, $Q = 0$), bu geometri *Minkowski veya düz uzay-zaman geometrisi* olarak bilinir.

(ii)Riemann-sal Olmayan Uzay-Zaman Geometrileri: Diğer kombinezonların hepsi bu geometride yer alır. Özel olarak metrik gradyantının ve eğriliğin sıfırdan farklı, burulmanın sıfır olduğu geometriler ($R \neq 0$, $T = 0$, $Q \neq 0$) Einstein-Weyl geometrileri adını alırlar. Burulma ve eğriliğin sıfırdan farklı, metrik gradyantının sıfır olduğu geometrilere ise ($R \neq 0$, $T \neq 0$, $Q = 0$) Einstein-Cartan geometrileri adı verilir. Bu çalışmada hesaplar her üç tensörün de sıfırdan farklı olduğu geometriler ($R \neq 0$, $T \neq 0$, $Q \neq 0$) için yapılmıştır.

BÖLÜM 3

GRAVİTASYON ALAN DENKLEMLERİNİN VARYASYONU

Gravitasyon alan denklemlerinin bir eylemden varyasyon ilkesiyle türetilmesi için önce aşağıdaki gibi bir eylemin yazılması gerekmektedir:

$$I[e, \Lambda] = \int_M L \tag{3.1}$$

Burada $\{e^a\}$ ve $\{\Lambda^a{}_b\}$ temel kütleçekim alan değişkenleri olarak alınmıştır. L Lagrange yoğunluğu 4-formlardır. $L = \mathcal{L}{}^*1$ olarak yazılarak $\mathcal{L}$ Lagrange fonksiyonu tanımlanabilir. Hodge dualite operatörü

$$* : \Lambda^p(M) \to \Lambda^{4-p}(M)$$

bir p-formu (4-p)-forma gönderen lineer bir gönderimdir. Yönlendirilmiş hacim 4-formu

$$e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 = \frac{1}{4!}\epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d$$

yardımıyla tanımlanır. Burada ϵ_{abcd} tam anti-simetrik Levi-Civita tensörüdür. Taban formlarının Hodge gönderimini vermek, genelde Hodge dualite operatörünün bir p-formu üzerine etkisini tanımlamak için yeterli olacaktır. Tanım gereği

$$\begin{aligned} {}^*e^0 &= -e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \\ {}^*e^1 &= -e^0 \wedge e^2 \wedge e^3 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
{}^*e^2 &= e^0 \wedge e^1 \wedge e^3 \\
{}^*e^3 &= -e^0 \wedge e^1 \wedge e^2
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
{}^*(e^0 \wedge e^1) &= -e^2 \wedge e^3 \\
{}^*(e^0 \wedge e^2) &= e^1 \wedge e^3 \\
{}^*(e^0 \wedge e^3) &= -e^1 \wedge e^2 \\
{}^*(e^1 \wedge e^2) &= e^0 \wedge e^3 \\
{}^*(e^1 \wedge e^3) &= -e^0 \wedge e^2 \\
{}^*(e^2 \wedge e^3) &= e^0 \wedge e^1
\end{aligned}
$$

alınacaktır. Bu çalışmada

$$
L = \frac{1}{2} R^a{}_b(\Lambda) \wedge {}^*(e_a \wedge e^b) + \frac{\kappa}{2} R^a{}_b(\Lambda) \wedge {}^*R^b{}_a(\Lambda) + \lambda {}^*1 \tag{3.2}
$$

ile verilen eylem yoğunluğu 4-formu ele alınmaktadır. Burada κ evrensel gravitasyon etkileşmesi sabitini, λ kozmolojik sabiti ve ${}^*1 = e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3$ yönlendirilmiş hacim 4-formunu göstermektedir.

Yukarıdaki eylem yoğunluğunun 1.teriminin ürettiği eylem

$$
I_0[e, \Omega] = \int_M \frac{1}{2} R^a{}_b(\Omega) \wedge {}^*(e_a \wedge e^b) \tag{3.3}
$$

Einstein-Hilbert eylemi, ve ikinci terimin ürettiği eylem

$$
I_1[e, \Omega] = \int_M \frac{\kappa}{2} R^a{}_b(\Omega) \wedge {}^*R^b{}_a(\Omega) \tag{3.4}
$$

Stephenson-Kilmister-Yang eylemi olarak bilinirler [10],[11],[12],[13]. Aşağıda bu eylemlerin önce kısıtlanmamış ve daha sonra Levi-Civita bağlantısına kısıtlanmış varyasyonlarının çıkardığı alan denklemleri elde edilecektir. Bu bölümde aksi belirtilmedikçe varyasyon problemlerinde metrik gradyantı sıfır alınmaktadır.

3.1 Einstein-Hilbert Eyleminin Kısıtlanmamış Varyasyonu

(3.3) ile yukarıda verilen Einstein-Hilbert eyleminin sonsuz küçük varyasyonu,

$$\delta L = \frac{1}{2}[\delta R^a{}_b \wedge {}^*(e_a \wedge e^b) + R^a{}_b \wedge \delta^*(e_a \wedge e^b)]$$

ifadesinden bulunur. Burada bağlantı metrikle uyumlu olduğu için indisler türev altında bile serbestçe aşağı-yukarı kaldırılıp indirilebilir. (2.13) ile tanımlanan eğrilik $\Lambda \to \Omega$ ataması ile açık olarak yazıldığında

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[\delta(d\Omega^{ab}) + \delta\Omega^a{}_c \wedge \Omega^{cb} + \Omega^a{}_c \wedge \delta\Omega^{cb}] \wedge {}^*(e_a \wedge e_b) & \\ + \frac{1}{2}\delta e^a \wedge R^{bc} \wedge {}^*(e_a \wedge e_b \wedge e_c) &= 0 \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Köşeli parantez açılır, indisler düzenlenir, kısmi türev alındıktan sonra tam türevli terimler ihmal edilir ve kalan terimler Ω^{ab} ortak parantezine alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\delta\Omega^{ab} \wedge [d^*(e_a \wedge e_b) - \Omega^c{}_b \wedge {}^*(e_a \wedge e_c) - \Omega^c{}_a \wedge {}^*(e_c \wedge e_b)] & \\ + \frac{1}{2}\delta e^a \wedge R^{bc} \wedge {}^*(e_a \wedge e_b \wedge e_c) &= 0 \end{aligned}$$

sonucu çıkar. Bu ifade de köşeli parantez, (2.9) genel dış kovaryant türev tanımına uygun olarak kısalır. Denklemin son hali

$$\frac{1}{2}\delta\Omega^{ab} \wedge D^*(e_a \wedge e_b) + \frac{1}{2}\delta e^a \wedge R^{bc} \wedge {}^*(e_a \wedge e_b \wedge e_c) = 0$$

olur. Eğer

$$-\frac{1}{2}R^{bc} \wedge {}^*(e_a \wedge e_b \wedge e_c) \equiv G_a$$

3-formlarını tanımlarsak bunlar cinsinden Einstein tensörü $G_a = G^*_{ab}e^b$ şeklinde tanımlanır. Varyasyon denkleminde

$$D^*(e_a \wedge e_b) = {}^*(e_a \wedge e_b \wedge e_c) \wedge T^c$$

özdeşliği kullanıldığında,

$$\frac{1}{2}\delta\Omega^{ab} \wedge T^c \wedge {}^*(e_a \wedge e_b \wedge e_c) - \delta e^a \wedge G_a = 0 \tag{3.5}$$

haline ulaşılır ki buradan varyasyonel alan denklemleri

$$\frac{1}{2}T^c \wedge {}^*(e_a \wedge e_b \wedge e_c) = 0$$

ve

$$G_a = 0$$

şeklinde çıkar. Birinci denklem takımı Einstein-Hilbert eyleminin ekstremum değeri alabilmesi için bağlantının Levi-Civita olmasını gerektirir. İkinci denklem takımı ise boşlukta kaynaksız Einstein alan denklemleridir.

3.2 Einstein-Hilbert Eyleminin Sıfır-Burulma Kısıtlamalı Varyasyonu

Kısıtlamalı varyasyon için (3.3) ile verilen Einstein-Hilbert eylemine bir terim ilave edilir:

$$I_0[e, \Omega, \lambda] = \int_M \frac{1}{2}R^a{}_b(\Omega) \wedge {}^*(e_a \wedge e^b) + (de^a + \Omega^a{}_b \wedge e^b) \wedge \lambda_a$$

Burada λ_a 2-formları Lagrange çarpanlarıdır ve temel değişkenler gibi işlem görürler. Birinci terimin bağlantı ve metrik varyasyonu önceki kısımda yapılmıştı. Aşağıda sadece ikinci terimin varyasyonunu yapmak yetecektir.

$$\delta(de^a + \Omega^a{}_b \wedge e^b) \wedge \lambda_a + (de^a + \Omega^a{}_b \wedge e^b) \wedge \delta\lambda_a$$

Burada birinci parantez açılırsa

$$
\begin{aligned}
\delta(de^a)\wedge\lambda_a &+ \delta\Omega^a{}_b\wedge e^b\wedge\lambda_a+\Omega^a{}_b\wedge\delta e^b\wedge\lambda_a \\
&+ (de^a+\Omega^a_b\wedge e^b)\wedge\delta\lambda_a
\end{aligned}
$$

olur. Metrik gradyantı sıfır alındığı için indisler serbestçe aşağı-yukarı indirilip-kaldırılabilirler. Burada 2.terimde bağlantı 1-formları a,b indislerinde anti-simetrik olduğu için bu terimin çarpanı $\frac{1}{2}(e_b\wedge\lambda_a-e_a\wedge\lambda_b)$ şeklinde anti-simetrik yapılıp, indisler düzenlenip, tam türev ihmal edilirse varyasyondan

$$
\begin{aligned}
\delta e^a\wedge d\lambda_a &- \delta e^a\wedge\Omega^b{}_a\wedge\lambda_b+\frac{1}{2}\delta\Omega^{ab}\wedge(e_b\wedge\lambda_a-e_a\wedge\lambda_b) \\
&+ (de^a+\Omega^a{}_b\wedge e^b)\wedge\delta\lambda_a
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

denklemi elde edilir. Bu sonuç ile önceki kısımda bulunan (3.5) sonucu birleştirilirse

$$
\begin{aligned}
&\delta\Omega^{ab}\wedge[\frac{1}{2}T^c\wedge{}^*(e_a\wedge e_b\wedge e_c)+\frac{1}{2}(e_b\wedge\lambda_a-e_a\wedge\lambda_b)+ \\
&\delta e^a\wedge[-G_a+(d\lambda_a-\Omega^b{}_a\wedge\lambda_b)]+\delta\lambda_a\wedge(de^a+\Omega^a{}_b\wedge e^b)=0
\end{aligned}
$$

denklemine ulaşılır. Buradan çıkan üç varyasyonel alan denklemi aşağıdadır:

$$
\begin{aligned}
de^a+\Omega^a{}_b\wedge e^b\equiv T^a &= 0 \\
\frac{1}{2}T^c\wedge{}^*(e_a\wedge e_b\wedge e_c)+\frac{1}{2}(e_b\wedge\lambda_a-e_a\wedge\lambda_b) &= 0 \\
-G_a+D\lambda_a &= 0
\end{aligned}
$$

Burada Lagrange çarpanının varyasyonu birinci denklemle burulma 2-formunu sıfır yapar. Yani bağlantı Levi-Civita bağlantısı alınacaktır. Bu sonuç ikinci denklemde kullanılırsa Lagrange çarpanı sıfır çıkar. Bu sonuçlar birlikte üçüncü denklemde kullanılırsa boşlukta kaynaksız Einstein denklemi aynen bir önceki kesimdeki gibi elde edilmiş olur.

3.3 R^2 Eyleminin Kısıtlanmamış Varyasyonu

Yukarıda (3.4) ile verilen R^2 eyleminin kısıtlanmamış sonsuz küçük varyasyonu

$$\delta L = \frac{\kappa}{2}\delta R^a{}_b \wedge {}^*R^b{}_a + \frac{\kappa}{2}R^a{}_b \wedge \delta^* R^b{}_a$$

bağıntısını verir. 2-formlardan oluşan $R^a{}_b$ ve ${}^*R^b{}_a$ nın metrik ve bağlantı varyasyonu yapıldığında

$$\delta\Omega^a{}_b \wedge \kappa D^* R^b{}_a + \delta e^a \wedge \frac{\kappa}{2}(i_a R^b{}_c \wedge {}^*R^c{}_b - R^b{}_c \wedge i_a{}^* R^c{}_b) \tag{3.7}$$

sonucu çıkar. Buradan bulunan alan denklemleri

$$\begin{aligned} D^* R^b{}_a &= 0 \\ i_a R^b{}_c \wedge {}^*R^c{}_b - R^b{}_c \wedge i_a{}^* R^c{}_b &= 0 \end{aligned}$$

şeklindedir. Euler-Lagrange denklemlerinde genelde torsiyonun sıfır olmadığına dikkat çekilmelidir.

3.4 R^2 Eyleminin Sıfır-Burulma Kısıtlamalı Varyasyonu

Kısıtlamalı varyasyon için (3.4) eylemine Lagrange çarpanlı bir terim daha ilave edilir:

$$I_1[e,\Omega,\lambda] = \int_M (\frac{\kappa}{2}R^a{}_b(\Omega) \wedge {}^*R^b{}_a(\Omega) + (de^a + \Omega^a{}_b \wedge e^b) \wedge \lambda_a)$$

Bu eylemin birinci teriminin varyasyonu bir önceki kısımda yapılmıştı. İkinci teriminin varyasyonu ise yine (3.6) denklemiyle yapılmıştı. Bu sonuçlar aynen burada kullanılırsa eylem yoğunluğunun sonsuz küçük varyasyonundan

$$\delta L = \delta\Omega^{ab} \wedge [\kappa D^* R_{ba} + \frac{1}{2}(e_b \wedge \lambda_a - e_a \wedge \lambda_b)]$$

$$+\delta e^a \wedge [\frac{\kappa}{2}(i_a R^b{}_c \wedge {}^*R^c{}_b - R^b{}_c \wedge i_a{}^*R^c{}_b) + D\lambda_a]$$

$$+\delta\lambda_a \wedge (de^a + \Omega^a{}_b \wedge e^b)$$

bağıntısına ulaşılır. Buradan çıkan Euler-Lagrange alan denklemleri aşağıdadır:

$$\begin{aligned}
de^a + \Omega^a{}_b \wedge e^b &= 0 \\
\kappa D^* R_{ba} + \frac{1}{2}(e_b \wedge \lambda_a - e_a \wedge \lambda_b) &= 0 \\
\frac{\kappa}{2}(i_a R^b{}_c \wedge {}^*R^c{}_b - R^b{}_c \wedge i_a{}^*R^c{}_b) + D\lambda_a &= 0
\end{aligned}$$

Bu üç alan denklemi üç bilinmeyen (Ω, R, λ) içermektedir. Birinci denklem bağlantının Levi-Civita bağlantısı olmasını gerektirir. Bu nedenle ikinci ve üçüncü denklemlerde eğrilik iki formları sadece Levi-Civita bağlantısının fonksiyonudurlar.

İkinci denklemde iç çarpım operatörüyle işlem yapalım:

$$i^b(\kappa D^* R_{ba}) + \frac{1}{2}(4\lambda_a - 2\lambda_a - \lambda_a + e_a \wedge i^b\lambda_b) = 0$$

Terimleri toplar ve düzenlersek

$$2\kappa i^b(D^* R_{ba}) + \lambda_a + e_a \wedge (i^b\lambda_b) = 0$$

bulunur ki, bu denklemlere iç çarpım operatörleriyle bir kez daha işlem yaparsak

$$2\kappa i^a i^b(D^* R_{ba}) + i^a\lambda_a + 4i^b\lambda_b - i^b\lambda_b = 0$$

bulunur. Buradan

$$i^b\lambda_b = -\frac{\kappa}{2} i^a i^b(D^* R_{ba})$$

çekilir ve bir yukarıda yerine konursa

$$\lambda_a = -2\kappa i^b(D^* R_{ba}) + \frac{\kappa}{2} e_a i^c i^b(D^* R_{bc})$$

özdeşliğine ulaşılır. Böylece belirlenen Lagrange çarpanı 2-formları artık üçüncü denklemlerde yerine konarak

$$\begin{aligned}\frac{\kappa}{2}(i_a R^b{}_c \wedge {}^*R^c{}_b - R^b{}_c \wedge i_a{}^*R^c{}_b) &= 2\kappa D(i^b(D^*R_{ba})) \\ &+\frac{\kappa}{2}e_a D(i^c i^b(D^*R_{bc}))\end{aligned}$$

alan denklemlerine ulaşılır. Bu alan denklemlerinde bağlantı Levi-Civita bağlantısıdır. Bu nedenle alan denklemleri aslında metrik tensörü bileşenlerinde 4. dereceden kısmi diferansiyel denklemler olmaktadırlar. Yukarıdaki alan denklemleri, bir önceki kısımda kısıtlanmamış varyasyonlardan bulunan alan denklemleriyle karşılaştırıldıklarında onlara eşdeğer olmadıkları hemen görülmektedir.

3.5 R^2, Einstein-Hilbert ve Kozmolojik Sabitli Eylemin Sıfır-Burulma Kısıtlamalı Varyasyonu

Bu problem için eylem yoğunluğu

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2}R^a{}_b(\Omega) \wedge {}^*(e_a \wedge e^b) + \frac{\kappa}{2}R^a{}_b(\Omega) \wedge {}^*R^b{}_a(\Omega) \\ &+\lambda^*1 + (de^a + \Omega^a{}_b \wedge e^b) \wedge \lambda_a\end{aligned}$$

ifadesi ile verilir. Burada birinci, ikinci ve dördüncü terimlerin varyasyonları sırayla (3.5), (3.7) ve (3.6) denklemleriyle verilmişti. Üçüncü terimin varyasyonu

$$\delta(\lambda^*1) = \lambda\delta e^a \wedge {}^*e_a \tag{3.8}$$

olarak hesaplanır. Bulunan bütün sonuçlar yerlerine yerleştirilip üç temel değişkenin varyasyonunun katsayıları ayrı ayrı sıfıra eşitlendiğinde aşağıdaki üç alan denklemi elde edilir.

$$\begin{aligned} de^a + \Omega^a{}_b \wedge e^b &= 0 \\ \frac{1}{2}(e_b \wedge \lambda_a - e_a \wedge \lambda_b) + \kappa D^* R_{ba} + \frac{1}{2} T^c \wedge {}^*(e_a \wedge e_b \wedge e_c) &= 0 \\ -G_a + \frac{\kappa}{2}(i_a R^b{}_c \wedge {}^* R^c{}_b - R^b{}_c \wedge i_a{}^* R^c{}_b) + D\lambda_a + \lambda^* e_a &= 0 \end{aligned}$$

Burada birinci denklem bağlantının Levi-Civita olmasını gerektirir. Bunun sonucu olarak, ikinci denklemdeki son terim sıfırdır. Şimdi, ikinci denklemden λ_a bir önceki bölümdeki gibi çözülerek üçüncü denklemde yerine yerleştirilirse dördüncü mertebeden türevler içeren fiziksel bir denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} &\frac{\kappa}{2}(i_a R_{bc}(\omega) \wedge {}^* R^{cb}(\omega) - R_{bc}(\omega) \wedge i_a{}^* R^{cb}(\omega)) - G_a(\omega) \\ &\qquad -2\kappa D(i_b(D^* R^b{}_a(\omega))) + \lambda^* e_a = 0 \end{aligned}$$

3.6 $Q_{ab} \neq 0$ lı Eylemin Kısıtlanmamış Varyasyonu

Bu kısıma gelinceye kadar metrik gradyantının sıfır olduğu kabulü altında eylemlerin varyasyonu yapıldı. Bu varyasyonların ürettiği alan denklemleri çıkarıldı. $Q_{ab} \neq 0$ olduğu zaman artık indisler türev altında serbest olarak aşağı-yukarı indirilip kaldırılamazlar. İndislerin aşağı-yukarı inip-kalkması için metriğin kullanılması gerekmektedir. Kovaryant türevin önünde bu işlem yapılırsa, (2.10) tanımına göre yeni Q_{ab} terimleri ortaya çıkmaktadır. Bu hatırlatmadan sonra, şimdi

$$I[e,\Lambda] = \int_M (\frac{1}{2} R^a{}_b(\Lambda) \wedge {}^*(e_a \wedge e^b) + \frac{\kappa}{2} R^a{}_b(\Lambda) \wedge {}^* R^b{}_a(\Lambda) + \lambda^* 1) \tag{3.9}$$

eyleminin kısıtlanmamış varyasyonunu göz önüne alalım. Burada ikinci terimin varyasyonu $\omega \rightarrow \Lambda$ ataması ile (3.7) sonucuyla aynı sonucu verir. Üçüncü terimin varyasyonuda (3.8) eşitliği ile verilmişti. Bu sonuçlar burada kullanılabilir.

Dolayısıyla metrik gradyantının sıfır olmaması sadece Einstein-Hilbert eyleminin varyasyonunda ek terimler getirecektir. Aşağıda bu eylemin varyasyonu yapılmıştır.

İlk terimin varyasyonu

$$\delta[\frac{1}{2}R^a{}_b \wedge {}^*(e_a \wedge e^b)] = \frac{1}{2}\delta R^a{}_b \wedge {}^*(e_a \wedge e^b) + \frac{1}{2}R^a{}_b \wedge \delta^*(e_a \wedge e^b)$$

verir. Burada bağlantı varyasyonunu veren terim, (2.14) yardımıyla,

$$\begin{aligned}\delta R^a{}_b \wedge {}^*(e_a \wedge e^b) &= \delta d\Lambda^a{}_b \wedge {}^*(e_a \wedge e^b) + \delta\Lambda^a{}_c \wedge \Lambda^c{}_b \wedge {}^*(e_a \wedge e^b) \\ &\quad -\delta\Lambda^c{}_b \wedge \Lambda^a{}_c \wedge {}^*(e_a \wedge e^b)\end{aligned}$$

şeklinde yazılır; kısmi türev alınırken tam türevli terimler ihmal edildikten sonra indisler düzenlenirse

$$\begin{aligned}\delta R^a{}_b \wedge {}^*(e_a \wedge e^b) &= \delta\Lambda^a{}_b \wedge D^*(e_a \wedge e^b) \\ &= \delta\Lambda^a{}_b \wedge D^*(\eta_{ac}e^c \wedge e^b) \\ &= \delta\Lambda^a{}_b \wedge [D\eta_{ac} \wedge {}^*(e^c \wedge e^b) + \eta_{ac} \wedge D^*(e^c \wedge e^b)] \\ &= \delta\Lambda^a{}_b \wedge [-2Q_{ac} \wedge {}^*(e^c \wedge e^b) + \eta_{ac} \wedge {}^*(e^c \wedge e^b \wedge e_d) \wedge T^d] \\ &= \delta\Lambda^a{}_b \wedge [-2Q_{ac} \wedge {}^*(e^c \wedge e^b) + {}^*(e_a \wedge e^b \wedge e_c) \wedge T^c]\end{aligned}$$

bulunur. Metrik varyasyonu ise

$$\delta^*(e_a \wedge e^b) = \delta e^c \wedge {}^*(e_a \wedge e^b \wedge e_c)$$

olur. Bu iki sonuç yukarıda yerine konursa

$$\begin{aligned}\delta[\frac{1}{2}R^a{}_b \wedge {}^*(e_a \wedge e^b)] &= \delta\Lambda^a{}_b \wedge [-Q_{ac} \wedge {}^*(e^c \wedge e^b) + \frac{1}{2}{}^*(e_a \wedge e^b \wedge e_c) \wedge T^c] \\ &\quad +\delta e^a \wedge \frac{1}{2}R^c{}_b \wedge {}^*(e_c \wedge e^b \wedge e_a)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (3.9) eyleminin varyasyonu tam olarak bulunmuş oldu. Bu varyasyonların hepsi birlikte yazılırsa alan denklemleri

$$\begin{aligned} -G_a + \frac{\kappa}{2}(i_a R^b{}_c \wedge {}^* R^c{}_b - R^b{}_c \wedge i_a {}^* R^c{}_b) + \lambda {}^* e_a &= 0 \\ \kappa D^* R^b{}_a - Q_{ac} \wedge {}^*(e^c \wedge e^b) + \frac{1}{2}{}^*(e_a \wedge e^b \wedge e_c) \wedge T^c &= 0 \end{aligned}$$

olarak çıkar. Bu alan denklemlerinin birincisi Levi-Civita bağlantılı eylemin şartsız varyasyonuyla bulunan alan denklemiyle aynıdır. Fakat ikinci denklemdeki ikinci terim Levi-Civita bağlantılı eylemin şartsız varyasyonunun alan denkleminde gözükmemektedir.

BÖLÜM 4

RIEMANN-SAL OLMAYAN UZAY-ZAMAN GEOMETRİSİNDE EYLEMLER

Geçen bölümde Riemann-sal uzay-zaman geometrilerinde bazı eylemlerin varyasyon ilkesiyle türettikleri alan denklemleri ve çözüm teknikleri üzerinde durulmuştu. Bu bölümdeyse Riemann-sal olmayan uzay-zaman geometrisinde Einstein-Hilbert ve R^2-eylemleri inceleniyor. Ürettikleri alan denklemlerinden ziyade bu eylemlerin terimleri ϕ skalar alanı dilaton ve H 3-form alanı aksiyon cinsinden yazılmış ve bu sonuçlar yorumlanmıştır.

4.1 Dört-Boyutta Aksiyon-Dilaton-Gravitasyon Teorisi İçin Einstein-Hilbert Eylemi

Einstein-Hilbert eyleminin metrik varyasyonunun burulmayı sıfır yaptığı ve bağlantıyı metrik uyumlu yaptığı gösterilmişti. Çalışmanın bu kısmında metrik gradyantı tensörünün dilaton adı verilen bir evrensel ϕ skalar alanıyla temsil edilebileceği ve burulmanın ise aksiyon adı verilen bir H 3-form alanı ile temsil edilebileceği varsayılmıştır. Bu durumda tam bağlantılı Einstein-Hilbert eyleminin eylem yoğunluğunun bu alanlar cinsinden ifadesi çıkartılabilir. Bu amaçla, ilk olarak $R^a{}_b(\Lambda)$ eğrilik 2-formlarını içindeki tam bağlantı 1-formlarını (2.12) e göre parçalayarak (2.14) tanımına göre açık yazalım:

$$
\begin{aligned}
R^a{}_b(\Lambda) &= d(\omega^a{}_b + K^a{}_b + q^a{}_b + Q^a{}_b) \\
&+(\omega^a{}_c + K^a{}_c + q^a{}_c + Q^a{}_c) \wedge (\omega^c{}_b + K^c{}_b + q^c{}_b + Q^c{}_b)
\end{aligned}
$$

olur ve buradan da

$$
\begin{aligned}
R^a{}_b(\Lambda) &= dK^a{}_b + d\omega^a{}_b + (K^a{}_c + \omega^a{}_c) \wedge (K^c{}_b + \omega^c{}_b) \\
&+d(q^a{}_b + Q^a{}_b) + K^a{}_c \wedge (q^c{}_b + Q^c{}_b) + \omega^a{}_c \wedge (q^c{}_b + Q^c{}_b) \\
&-K^c{}_b \wedge (q^a{}_c + Q^a{}_c) - \omega^c{}_b \wedge (q^a{}_c + Q^a{}_c) + q^a{}_c \wedge q^c{}_b \\
&+Q^a{}_c \wedge Q^c{}_b + q^a{}_c \wedge Q^c{}_b + Q^a{}_c \wedge q^c{}_b
\end{aligned}
$$

çıkar. Burada kovaryant türevin (2.9) tanımı kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
R^a{}_b(\Lambda) &= R^a{}_b(\omega) + D(\omega)(K^a{}_b + q^a{}_b + Q^a{}_b) + \\
&(K^a{}_c + q^a{}_c + Q^a{}_c) \wedge (K^c{}_b + q^c{}_b + Q^c{}_b)
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

olarak eğriliğin bağlantı formları cinsinden ifadesi elde edilir.

Şimdi metrik gradyantını

$$Q^a{}_b = \eta^a{}_b d\phi$$

şeklinde ϕ dilaton alanı cinsinden, ve burulma 2-formlarını

$$T_a = i_a H$$

şeklinde H aksiyon 3-formu cinsinden verelim [3]. Bu ifadeler burulma tensörü ve metrik gradyant tensörünün indirgenemez ayrışımları ile tutarlı seçilmişlerdir [14]. Yukarıdaki varsayımlar altında bağlantının anti-simetrik kısmının (2.13) tanımına göre dilaton ve aksiyon cinsinden ifadesi aşağıdaki gibi çıkar:

$$\begin{aligned} q^a{}_b &= (-i_a Q_{bc} + i_b Q^a{}_c) \wedge e^c \\ &= \eta^{ad}(-i_d Q_{bc} + i_b Q_{dc}) \wedge e^c \\ &= \eta^{ad}(-i_d(\eta_{bc} d\phi) + i_b(\eta_{dc} d\phi)) \wedge e^c \\ &= e^a \partial_b \phi - e_b \partial^a \phi \end{aligned}$$

Bu ifadeyi sadeleştirmek için

$$\begin{aligned} i_b d\phi &= i_b e^a \partial_a \phi \\ &= \partial_b \phi \end{aligned}$$

özdeşliği kullanılmıştır.

Ko-burulmanın $T^a = K^a{}_b \wedge e^b$ tanımına göre aksiyon cinsinden ifadesi ise

$$\begin{aligned} K^a{}_b &= \frac{1}{2} i^a i_b H \\ &= \frac{1}{2} i^a i_b (\frac{1}{3!} H_{klm} e^k \wedge e^l \wedge e^m) \\ &= \frac{1}{2} i^a [\frac{1}{6} H_{klm} (i_b e^k \wedge e^l \wedge e^m - e^k \wedge i_b e^l \wedge e^m + e^k \wedge e^l \wedge i_b e^m)] \\ &= \frac{1}{4} i^a H_{blm} e^l \wedge e^m \\ &= -\frac{1}{2} H^a{}_{bc} e^c \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu sonuçlar yerlerine yerleştirilir, kovaryant türevler hesaplanır ve tam formlar ihmal edilirse

$$R^a{}_b(\Lambda) \wedge {}^*(e_a \wedge e^b) = R^a{}_b(\omega) \wedge {}^*(e_a \wedge e^b) - \frac{3}{2} H \wedge {}^*H - 6 d\phi \wedge {}^*d\phi$$

bulunur. Bu ifadenin sağ tarafı sicim parametresinin en düşük mertebesinde verilen etkin sicim alan teorisi eyleminden başka bir şey değildir [4],[5].

4.2 Bağlantı Metrikle Uyumlu Alındığında Dört-Boyutta Aksiyon İçin R^2 Eylemi

Tam bağlantı (2.12) e göre formlarına ayrıldığı zaman, (2.14) ile tanımlanan eğriliğin (4.1) ile verilen biçimde bileşenlerine ayrıldığı gösterilmişti. Burada $Q^a{}_b = 0$ olursa (2.13) tanımına göre $q^a{}_b = 0$ olur. O zaman, "genel bağlantı" olarak adlandırılan Ω: .

$$\Omega^a{}_b = \omega^a{}_b + K^a{}_b$$

olmak üzere,

$$R^a{}_b(\Omega) = R^a{}_b(\omega) + D(\omega)K^a{}_b + K^a{}_c \wedge K^c{}_b$$

haline gelir. Bu durumda R^2 eylem yoğunluğu aşağıdaki gibi ayrışır:

$$\begin{aligned}
R^a{}_b(\Omega) \wedge {}^*R^b{}_a(\Omega) &= R^a{}_b(\omega) \wedge {}^*R^b{}_a(\omega) + R^a{}_b(\omega) \wedge {}^*D(\omega)K^b{}_a \\
&+R^a{}_b(\omega) \wedge {}^*(K^b{}_d \wedge K^d{}_a) + D(\omega)K^a{}_b \wedge {}^*R^b{}_a(\omega) \\
&+D(\omega)K^a{}_b \wedge {}^*D(\omega)K^b{}_a + D(\omega)K^a{}_b \wedge {}^*(K^b{}_d \wedge K^d{}_a) \\
&+(K^a{}_c \wedge K^c{}_b) \wedge {}^*R^b{}_a(\omega) + (K^a{}_c \wedge K^c{}_b) \wedge {}^*D(\omega)K^b{}_a \\
&+(K^a{}_c \wedge K^c{}_b) \wedge {}^*(K^b{}_d \wedge K^d{}_a).
\end{aligned}$$

Burada dış cebrin, $\alpha, \beta \in \Lambda^p(M)$ olmak üzere, $\alpha \wedge {}^*\beta = \beta \wedge {}^*\alpha$ özdeşliği kullanılırsa, bazı terimlerin birbirleriyle aynı olduğu görülür. Çıkan sonuç aşağıdadır:

$$\begin{aligned}
R^a{}_b(\Omega) \wedge {}^*R^b{}_a(\Omega) &= R^a{}_b(\omega) \wedge {}^*R^b{}_a(\omega) + 2R^a{}_b(\omega) \wedge {}^*D(\omega)K^b{}_a \\
&+2R^a{}_b(\omega) \wedge {}^*(K^b{}_d \wedge K^d{}_a) + D(\omega)K^a{}_b \wedge {}^*D(\omega)K^b{}_a \\
&+2K^a{}_c \wedge K^c{}_b \wedge {}^*D(\omega)K^b{}_a \\
&+(K^a{}_c \wedge K^c{}_b) \wedge {}^*(K^b{}_d \wedge K^d{}_a)
\end{aligned}$$

$K^a{}_b = -\frac{1}{2}H^a{}_{bc}e^c$ kullanılır ve tam formlar ihmal edilirse

$$\begin{aligned}
R^a{}_b(\Omega) \wedge {}^*R^b{}_a(\Omega) &= R_{ab}(\omega) \wedge {}^*R^{ba}(\omega) + H_{abc}e^c \wedge D(\omega)^*R^{ab}(\omega) \\
&+\frac{1}{2}R^{ab}(\omega)H_{bdc}H^d{}_{af}{}^*(e^c \wedge e^f) \\
&+\frac{1}{2}H^a{}_{db}e^d \wedge D(\omega)^*[(D(\omega)H^b{}_{ca})e^c] \\
&+\frac{1}{8}H^a{}_{cd}H^c{}_{bf}e^f \wedge e^d \wedge {}^*[(D(\omega)H^b{}_{ak})e^k] \\
&+\frac{1}{16}H^{an}{}_cH^{cm}{}_b(H^b{}_{dm}H^d{}_{an} - H^b{}_{dn}H^d{}_{am})^*1
\end{aligned}$$

olarak $R^2(\Omega)$ nin aksiyon terimleriyle ifadesi elde edilir.

4.3 Dört-Boyutta Aksi-Dilaton İçin R^2 Eylemi

Artık önceki kısımdan farklı olarak $Q_{ab} \neq 0$ alınacaktır. Bu durumda $R^a{}_b(\Lambda)$ nin (4.1) formülü aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
R^a{}_b(\Lambda) &= R^a{}_b(\omega) + D(\omega)K^a{}_b + D(\omega)q^a{}_b + D(\omega)Q^a{}_b \\
&+K^a{}_c \wedge K^c{}_b + K^a{}_c \wedge q^c{}_b + K^a{}_c \wedge Q^c{}_b \\
&+q^a{}_c \wedge K^c{}_b + q^a{}_c \wedge q^c{}_b + q^a{}_c \wedge Q^c{}_b \\
&+Q^a{}_c \wedge K^c{}_b + Q^a{}_c \wedge q^c{}_b + Q^a{}_c \wedge Q^c{}_b.
\end{aligned}$$

Daha sonra ${}^*R^b{}_a(\Lambda)$, $R^a{}_b(\Lambda)$ nin yukarıdaki ifadesine benzer olarak açık bir şekilde yazılırsa $R^a{}_b(\Lambda) \wedge {}^*R^b{}_a(\Lambda)$ dış çarpımında 169 adet terim çıkar. Burada $\alpha, \beta \in \Lambda^p(M)$ olmak üzere $\alpha \wedge {}^*\beta = \beta \wedge {}^*\alpha$ özdeşliği kullanılırsa terim sayısı 91 e düşer. Metrik gradyantını dilaton cinsinden

$$Q_{ab} \equiv \eta_{ab}d\phi$$

şeklinde alırsak

$$q_{ab} \equiv (-i_a Q_{bc} + i_b Q_{ac}) \wedge e^c = e_a \partial_b \phi - e_b \partial_a \phi$$

bulunur. Ko-burulma 1-formlarını da aksiyon alanlar cinsinden

$$K_{ab} = -\frac{1}{2} H_{abc} e^c$$

şeklinde alalım. Dolayısıyla bağlantı 1-formları, skalar ϕ dilaton alanı ile H aksiyon 3-form alanı cinsinden yazılabilir. $R^a{}_b(\Lambda) \wedge {}^*R^b{}_a(\Lambda)$ açılımındaki her bir terim ayrı ayrı incelenirse bazı terimlerin sıfır çıktığı görülür. Kalan terimler ise aşağıdadır:

$$\begin{aligned}
R^a{}_b(\Lambda) \wedge {}^*R^b{}_a(\Lambda) \;=\; & R^a{}_b(\omega) \wedge {}^*R^b{}_a(\omega) + 2D(\omega)K^a{}_b \wedge {}^*R^b{}_a(\omega) \\
& +2D(\omega)q^a{}_b \wedge {}^*R^b{}_a(\omega) + 2K^a{}_c \wedge K^c{}_b \wedge {}^*R^b{}_a(\omega) \\
& +2K^a{}_c \wedge q^c{}_b \wedge {}^*R^b{}_a(\omega) + 2q^a{}_c \wedge K^c{}_b \wedge {}^*R^b{}_a(\omega) \\
& +2q^a{}_c \wedge q^c{}_b \wedge {}^*R^b{}_a(\omega) + D(\omega)K^a{}_b \wedge {}^*D(\omega)K^b{}_a \\
& +2D(\omega)q^a{}_b \wedge {}^*D(\omega)K^b{}_a + 2K^a{}_c \wedge K^c{}_b \wedge {}^*D(\omega)K^b{}_a \\
& +2K^a{}_c \wedge q^c{}_b \wedge {}^*D(\omega)K^b{}_a + 2q^a{}_c \wedge K^c{}_b \wedge {}^*D(\omega)K^b{}_a \\
& +2q^a{}_c \wedge q^c{}_b \wedge {}^*D(\omega)K^b{}_a + D(\omega)q^a{}_b \wedge {}^*D(\omega)q^b{}_a \\
& +2K^a{}_c \wedge K^c{}_b \wedge {}^*D(\omega)q^b{}_a + 2K^a{}_c \wedge q^c{}_b \wedge {}^*D(\omega)q^b{}_a \\
& +2q^a{}_c \wedge K^c{}_b \wedge {}^*D(\omega)q^b{}_a + 2q^a{}_c \wedge q^c{}_b \wedge {}^*D(\omega)q^b{}_a \\
& +K^a{}_c \wedge K^c{}_b \wedge {}^*(K^b{}_m \wedge K^m{}_a) + q^a{}_c \wedge q^c{}_b \wedge {}^*(q^b{}_m \wedge q^m{}_a) \\
& -\frac{3}{2} H_{abc} H^{abc} \partial_d \phi \, \partial^d \phi {}^*1 + 3H_{cbd} H^{abd} \partial_a \phi \, \partial^c \phi {}^*1.
\end{aligned}$$

Bu ifadede gözüken bağlantı 1-formları Levi-Civita bağlantısı olduğu için artık indisler serbestçe aşağı-yukarı indirilip-kaldırılabilirler. Bunun getirdiği kolaylık nedeniyle bazı terimler açıkça hesaplanabilmektedir.

Dördüncü terim:

$$
\begin{aligned}
2K^a{}_c \wedge K^c{}_b \wedge {}^*R^b{}_a(\omega) &= 2(-\frac{1}{2}H_{ack}e^k) \wedge (-\frac{1}{2}H^c{}_{bl}e^l) \wedge \frac{1}{2I}R^{ba}{}_{,mn}{}^*(e^m \wedge e^n) \\
&= \frac{1}{4}H_{ack}H^c{}_{bl}R^{ba}{}_{,mn}(-\eta^{lm}\eta^{kn} + \eta^{ln}\eta^{km})^*1 \\
&= \frac{1}{2}H_{ack}H^c{}_{bl}R^{ba,kl*}1.
\end{aligned}
$$

Birinci Bianchi özdeşliği

$$R^{al,bk} + R^{ab,kl} + R^{ak,lb} = 0$$

yeniden düzenlenir ve

$$R^{ba,kl} = R^{al,bk} + R^{ak,lb}$$

şeklinde kullanılırsa, yukarıdaki ifade

$$
\begin{aligned}
2K^a{}_c \wedge K^c{}_b \wedge {}^*R^b{}_a(\omega) &= \frac{1}{2}H_{ack}H^c{}_{bl}R^{al,bk*}1 + \frac{1}{2}H_{ack}H^c{}_{bl}R^{ak,lb*}1 \\
&= H_{cak}H^c{}_{lb}R^{ak,lb*}1
\end{aligned}
$$

olur.

Beşinci terim:

$$
\begin{aligned}
2K_{ac} \wedge q^c{}_b \wedge {}^*R^{ba}(\omega) &= 2(-\frac{1}{2}H_{acd}e^d) \wedge (e^c\partial_b\phi - e_b\partial^c\phi) \\
&\quad \wedge \frac{1}{2}R^{ba}{}_{,kl}{}^*(e^k \wedge e^l) \\
&= -\frac{1}{2}H_{acd}\partial_b\phi R^{ba}{}_{,kl}(-\eta^{ck}\eta^{dl} + \eta^{cl}\eta^{dk}) \\
&\quad + \frac{1}{2}H_{acd}\partial^c\phi R^{ba}{}_{,kl}(-\eta_b{}^k\eta^{dl} + \eta_b{}^l\eta^{dk}) \\
&= H_{acd}\partial^c\phi R^{ba,d}{}_b{}^*1 + H_{acd}\partial_b\phi R^{ba,cd*}1
\end{aligned}
$$

Altıncı terim de aynı sonucu vermektedir.

Yedinci terim:

$$
\begin{aligned}
2q_{ac} \wedge q^{c}{}_{b} \wedge {}^{*}R^{ba}(\omega) &= 2(e_a\partial_c\phi - e_c\partial_a\phi) \wedge (e^c\partial_b\phi - e_b\partial^c\phi) \\
&\quad \wedge \frac{1}{2}R^{ba}{}_{,kl}{}^{*}(e^k \wedge e^l) \\
&= \partial_c\phi\, \partial_b\phi R^{ba}{}_{,kl}(-\eta^{ck}\eta_a{}^{l} + \eta^{cl}\eta_a{}^{k}) \\
&\quad -\partial_c\phi\, \partial^c\phi R^{ba}{}_{,kl}(-\eta_b{}^{k}\eta_a{}^{l} + \eta_b{}^{l}\eta_a{}^{k}) \\
&\quad -\partial_a\phi\, \partial^c\phi R^{ba}{}_{,kl}(-\eta_b{}^{k}\eta_c{}^{l} + \eta_b{}^{l}\eta_c{}^{k}) \\
&= 4\partial^c\phi\, \partial_b\phi R^{ba}{}_{,ac}{}^{*}1 + 2\partial_c\phi\, \partial^c\phi R^{ba}{}_{,ba}{}^{*}1
\end{aligned}
$$

Ondokuzuncu terim:

$$
\begin{aligned}
K^{ac} \wedge K_{cb} \wedge {}^{*}(K^{bm} \wedge K_{ma}) &= \frac{1}{8}H^{ac}{}_{d}H_{cbk}H^{bm}{}_{l}H_{man}e^d \wedge e^k \wedge {}^{*}(e^l \wedge e^n) \\
&= -\frac{1}{8}H^{acd}H_{cbk}H^{bmk}H_{mad}\,{}^{*}1 + \frac{1}{8}H^{ac}{}_{d}H_{cbk}H^{bmd}H_{ma}{}^{k}\,{}^{*}1
\end{aligned}
$$

Yirminci terim:

$$
\begin{aligned}
q^{ac} \wedge q_{cb} \wedge {}^{*}(q^{bm} \wedge q_{ma}) &= (e^a\partial^c\phi - e^c\partial^a\phi) \wedge (e_c\partial_b\phi - e_b\partial_c\phi) \\
&\quad \wedge^{*}[(e^b\partial^m\phi - e^m\partial^b\phi) \wedge (e_m\partial_a\phi - e_a\partial_m\phi)] \\
&= -\partial^c\phi\, \partial_c\phi\, \partial^m\phi\, \partial_a\phi(-\eta_b{}^{b}\eta^{a}{}_{m} + \eta^{ab}\eta_{bm}) \\
&\quad +\partial^c\phi\, \partial_c\phi\, \partial^m\phi\, \partial_m\phi(-\eta_b{}^{b}\eta^{a}{}_{a} + \eta^{ab}\eta_{ba}) \\
&\quad -\partial^c\phi\, \partial_c\phi\, \partial^b\phi\, \partial_m\phi(-\eta_b{}^{m}\eta^{a}{}_{a} + \eta^{am}\eta_{ba}) \\
&= -6\partial^a\phi\, \partial_a\phi\, \partial^b\phi\, \partial_b\phi^{*}1
\end{aligned}
$$

Kalan diğer terimler dış kovaryant türevleri içerdikleri için yukarıda hesaplanan terimler kadar sade hale gelmezler. Bunun için bu terimler olduğu gibi tutulmuştur.

Son ifade aşağıdaki gibidir:

$$
\begin{aligned}
R^a{}_b(\Lambda) \wedge {}^*R^b{}_a(\Lambda) \;=\;& R^a{}_b(\omega) \wedge {}^*R^b{}_a(\omega) + 2D(\omega)K^a{}_b \wedge {}^*R^b{}_a(\omega) \\
&+2D(\omega)q^a{}_b \wedge {}^*R^b{}_a(\omega) + D(\omega)K^a{}_b \wedge {}^*D(\omega)K^b{}_a \\
&+2D(\omega)q^a{}_b \wedge {}^*D(\omega)K^b{}_a + 2K^a{}_c \wedge K^c{}_b \wedge {}^*D(\omega)K^b{}_a \\
&+2K^a{}_c \wedge q^c{}_b \wedge {}^*D(\omega)K^b{}_a + 2q^a{}_c \wedge K^c{}_b \wedge {}^*D(\omega)K^b{}_a \\
&+2q^a{}_c \wedge q^c{}_b \wedge {}^*D(\omega)K^b{}_a + D(\omega)q^a{}_b \wedge {}^*D(\omega)q^b{}_a \\
&+2K^a{}_c \wedge K^c{}_b \wedge {}^*D(\omega)q^b{}_a + 2K^a{}_c \wedge q^c{}_b \wedge {}^*D(\omega)q^b{}_a \\
&+2q^a{}_c \wedge K^c{}_b \wedge {}^*D(\omega)q^b{}_a + 2q^a{}_c \wedge q^c{}_b \wedge {}^*D(\omega)q^b{}_a \\
&+H_{cak}H^c{}_{lb}R^{ak,lb}\,{}^*1 + 2H_{acd}\partial^c\phi R^{ba,d}{}_b{}^*1 \\
&+2H_{acd}\partial_b\phi R^{ba,cd}\,{}^*1 + 4\partial^c\phi\;\partial_b\phi R^{ba}{}_{,ac}{}^*1 \\
&+2\partial_c\phi\;\partial^c\phi R^{ba}{}_{,ba}{}^*1 - \frac{1}{8}H^{acd}H_{cbk}H^{bmk}H_{mad}{}^*1 \\
&+\frac{1}{8}H^{ac}{}_dH_{cbk}H^{bmd}H_{ma}{}^k\,{}^*1 - 6\partial_a\phi\;\partial^a\phi\;\partial_b\phi\;\partial^b\phi\,{}^*1 \\
&-\frac{3}{2}H_{abc}H^{abc}\partial_d\phi\;\partial^d\phi\,{}^*1 + 3H^{abd}H_{cbd}\partial_a\phi\;\partial^c\phi\,{}^*1
\end{aligned}
$$

BÖLÜM 5

SONUÇ

Bu çalışmada amaçlandığı gibi, ilk olarak bazı temel diferansiyel geometrik kavramlar tanıtılmış ve bunlarla dış cebire göre temel bazı işlemler yapılmıştır.

Bunun ardından daha önce çalışılmış ve yayınlanmış değişik sonuçlar 3. bölümde yeniden ele alınmıştır. Bu sonuçların ara işlemleri adım adım yapılmıştır ve temel basamaklar bu çalışmaya aktarılmıştır. Bunların başında Einstein-Hilbert eyleminin kısıtlanmamış varyasyonu yapılmış ve çıkan denklem takımları yazılmıştır. Yine Einstein-Hilbert eyleminin varyasyonu bir kez de burulmayı sıfır yapacak şekilde kısıtlanarak yapılmış ve elde edilen denklem takımlarının bir öncekine eşdeğer olduğu gösterilmiştir. Benzer olarak (3.4) ile tanımlanan R^2-eyleminin kısıtlanmamış ve kısıtlanmış varyasyonları yapılarak, bu kez eşdeğer olmayan denklem takımları elde edilmiştir. Bunun ardından Einstein-Hilbert ve R^2-eylemlerinin birlikte bulunduğu ve ilaveten kozmolojik sabitli bir teriminde bulunduğu eylemin kısıtlanmamış varyasyonu yapılarak denklem takımları çıkarılmıştır. Bu bölümün son kısmındaysa metrikle uyumlu olmayan bağlantı kullanılarak (3.9) eylemi yazılmış ve bunun kısıtlanmamış varyasyonu yapılarak denklemler elde edilmiştir.

4. bölümde Riemann-sal olmayan uzay-zaman geometrisinde hesap yapılmıştır. Burada Einstein-Hilbert eylemi dilaton ϕ skalar alanı ve aksiyon H 3-form alanıterimleriyle yazılmıştır. Ardından R^2-eylemi aksiyon H 3-form alanı terimleriyle yazılmıştır.

Daha sonra, bu çalışmanın da özgün kısmı olan, R^2-eylemi aksiyon-dilaton terimleri cinsinden ayrıştırılarak yeniden yazılmıştır. Çıkan sonuç yeni tür aksiyon-dilaton-gravitasyon etkileşmelerini içermektedir.

KAYNAKLAR

[1] Dereli T., Tucker R.W., Phys.Lett., **110B**(1982)206.

[2] Scherk J., Schwarz J., Phys.Lett. **72B**(1974).

[3] Dereli T., Tucker R.W., Class.Q.Grav. **12**(1995)L31.

[4] Callan C.G., Friedan D., Martinec E.J., Perry M.J., Nucl.Phys. **B263**(1985)593.

[5] Fradkin E.S., Tseytlin A.A., Nucl.Phys. **B261**(1985)1.

[6] Dereli T., Tucker R.W., Class.Q.Grav. **4**(1987)791.

[7] Dereli T., Önder M., Tucker R.W., Class.Q.Grav. **12**(1995)L25.

[8] Thirring W., **A Course in Mathematical Physics**, Vol:1, Springer-Verlag, New York, 1978.

[9] Flanders H., **Differential Forms with Applications to the Physical Sciences**, Bellman R., Academic Press, 1963.

[10] Stephenson G., Nuo.Cim. **9**(1958)263.

[11] Kilmister J.M., Newman E., Proc.Camb.Phil.Soc. **57** (1961)851.

[12] Yang C.N., Phys.Rev.Lett., **33**(1974)445.

[13] Benn I.M., Dereli T., Tucker R.W., Gen.Rel.Grav., **13**(1981)581.

[14] Hehl F.W., McCrea J.D., Mielke E.W., Ne'eman Y., Phys.Rep., **258**(1995)1.

ÖZGEÇMİŞ

12.11.1972 de Çameli'de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Denizli'de tamamladı. Eylül 1990 da İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fizik Mühendisliği Bölümüne kayıt yaptırdı. Temmuz 1994 te fakülte ve bölüm birincisi olarak mezun oldu. Aynı yıl Boğaziçi Üniversitesi Fizik Bölümünde Yüksek Lisans yapmak için bir yıl İngilizce hazırlık okudu. Bir yıl sonunda buradan kaydını sildirerek Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Nisan 1996 da Pamukkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümüne araştırma görevlisi olarak atandı. Halen bu görevini sürdürmektedir.