T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI SELF - ADJOİNT STURM - LİOUVİLLE OPERATÖRLER İÇİN TERS PROBLEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FATMA YILMAZ

DENİZLİ, AĞUSTOS-2021

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI SELF - ADJOİNT STURM - LİOUVİLLE OPERATÖRLER İÇİN TERS PROBLEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FATMA YILMAZ

DENİZLİ, AĞUSTOS-2021

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

FATMA YILMAZ

ÖZET

BAZI SELF - ADJOİNT STURM - LİOUVİLLE OPERATÖRLER İÇİN TERS PROBLEMLER
YÜKSEK LİSANS TEZİ
FATMA YILMAZ
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MATEMATİK ANABİLİM DALI
TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. ALP ARSLAN KIRAÇ
DENİZLİ, AĞUSTOS-2021

$L_2[0,1]$ uzayında, Dirichlet sınır koşulu ile $q(x) \in W_1^2[0,1]$, $k = 0,1$ için $q^{(k)}(0) = q^{(k)}(1)$ reel-değerli bir fonksiyon olmak üzere self-adjoint Sturm-Liouville operatörü göz önüne alınmıştır. Dirichlet sınır koşulu ile Sturm-Liouville operatörünün spektrumları incelenmiştir ve Dirichlet spektrumu verildiğinde hemen hemen her yerde $q = 0$ olduğu elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Sturm-Liouville operatör, Dirichlet sınır koşulu, Ters problemler.

ABSTRACT

INVERSE PROBLEMS FOR SOME SELF - ADJOINT STURM - LIOUVILLE OPERATORS
MSC THESIS
FATMA YILMAZ
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: PROF. DR. ALP ARSLAN KIRAÇ)
DENİZLİ, AUGUST-2021

In the space $L_2[0,1]$, we consider the self-adjoint Sturm-Liouville operator with Dirichlet boundary condition such that $q(x) \in W_1^2[0,1]$ is a real-valued function and $q^{(k)}(0) = q^{(k)}(1)$ for $k = 0, 1$. The spectra of the Dirichlet boundary condition with the Sturm-Liouville operator were investigated, and when the Dirichlet spectrum was given , it was obtained that $q = 0$ a. e.

KEYWORDS: Sturm-Liouville operator, Dirichlet boundary condition, Inverse problems.

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

$\boldsymbol{suppu}$	**:**	u nun desteği
$\boldsymbol{L_p}$	**:**	p-inci kuvvetten integrallenebilen fonksiyon uzayı
$\boldsymbol{\lambda}$	**:**	Özdeğer
$\boldsymbol{\Psi}$	**:**	Özfonksiyon
$\boldsymbol{G \subset\subset \Omega}$	**:**	G açık, $\overline{G} \subset \Omega$ ve $\overline{G}$ kompakt
$\boldsymbol{W_p^k(U)}$	**:**	$k \geq 0, \quad 1 \leq p \leq \infty$ için Sobolev uzayı
$\boldsymbol{L_{loc}^1}$	**:**	lokal integrallenebilir fonksiyon uzayı
h. h. y	**:**	hemen hemen her yerde

ÖNSÖZ

Çalışma konumun belirlenmesinden bu yana bilgisini, sabrını, tecrübesini, desteğini esirgemeyen ve zamanını ayırarak sorularıma cevap bulmama yardımcı olan çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Alp Arslan KIRAÇ'a minneti bir borç bilirim.

Her zaman yanımda olan, maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme sonsuz teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

Spektral analizde ters problemler, spektral karakteristiklerden operatörün özelliklerinin elde edilmesi problemidir. Bu tür problemler, mekanik, fizik, elektronik, jeofizik, meteoroloji ve fen bilimlerinin diğer branşlarında karşımıza çıkmaktadır. Günümüzde ters probleme olan ilgi yeni uygulamaların ortaya çıkması ile artmaktadır.

Spektral teoride ve özellikle ters spektral problemlerde, bir boyutlu Schrödinger operatörü olarak da bilinen Sturm-Liouville operatörü için geniş çaplı araştırmalar yapılmıştır.

Ters spektral teorinin tarihi 1929 yılında Ambarzumyan'ın teoremi ile başlar (Ambarzumian 1929). Ambarzumyan, $\{n^2 : n = 0, 1, \ldots\}$, $[0, 1]$ aralığında Sturm-Liouville operatörü ile Neumann sınır koşullarının bir spektrumu ise, bu takdirde hemen hemen her yerde $q = 0$ olduğunu ispatlamıştır.

1946 yılında Borg tarafından yayımlanan makalede, iki spektruma sahip Sturm-Liouville denkleminin var olduğunu varsaymış ve yine aynı çalışmasında genelde bir spektrumun denklemi belirlemediğini göstermiştir. Bu yüzden Ambarzumyan'ın sonucu genel durum için bir istisnadır (Borg 1946).

Pöschel ve Trubowitz'in (1987) çalışmasında Dirichlet problemi için $\sigma = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ spektrumu sıfıra karşılık gelirken sıfıra yakın gelen çok sayıda $\mathbb{L}^2$ potansiyelinin olduğunu göstermişlerdir. Dirichlet problemi için spektrum sıfır olduğunda, potansiyelin sıfır olmadığını yani Ambarzumyan teoreminin geçerli olmadığını göstermişlerdir. Chern ve diğerleri (2001) potansiyel fonksiyon üzerine ek bir koşul koyarak genel ayrılabilir sınır koşullarına Sturm-Liouville denklemi için klasik Ambarzumyan teoremine genişletmişlerdir.

Freiling ve Yurko (2001), tüm özdeğerlerin bilinmesindense sadece ilk özdeğerin bilinmesinin yeterli oluğunu ispatlamışlardır, yani ilk özdeğer potansiyelin ortalama değeridir. Yurko (2013), keyfi self-adjoint sınır koşulları ve self-adjoint operatörlerin geniş sınıfları üzerinde Ambarzumyan teoreminin genelleştirmelerini kanıtlamıştır.

Kıraç (2016a), Sturm-Liouville operatörleri ile quasi-periyodik sınır koşulları için q potansiyeli üzerine herhangi bir şart koymaksızın ve q potansiyelinin tek bir spektrum tarafından belirlenebileceğini ispatlamıştır. Böylece klasik Ambarzumyan teoremini elde etmiştir. Daha sonra Kıraç (2016b), $\{(n\pi)^2 : n$ çift ve $n > n_0\}$ Hill operatörünün periyodik spektrumunun bir alt kümesi ise, potansiyelin hemen hemen her yerde sıfır olduğunu kanıtlamıştır. Benzer şekilde anti-periyodik durum için de geçerli olduğunu elde etmiştir.

Bu tez üç bölümde incelenecektir. Birinci bölümde, ters spektral teorinin ortaya çıkmasında önemli bir adım olan Ambarzumyan teoremi ve diğer matematikçilerin yaptığı araştırmalara yer verilmiştir. Ayrıca tez içerisinde kullanacağımız temel tanımlamalar yapılmıştır.

Bölüm ikide, bölüm üç için gerekli olan Sobolev uzayı ve özellikleri, ayrıca Sobolev uzayı tanımlayabilmek için zayıf türev ve özelliklerine yer verilmiştir. Bölüm üçte ise, Dirichlet sınır değer problemi için ters problem incelenmiştir.

1.1 Temel Tanımlar

1.1.1 Tanım $[0, 1]$ aralığında

$$\ell(y) = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y \tag{1.1}$$

formuna lineer diferansiyel ifade ve $p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x)$ fonksiyonlarına diferansiyel ifadenin katsayıları, n sayısına da diferansiyel ifadenin mertebesi denir.

$U(y)$, $[a, b]$ aralığının a ve b sınır noktalarında $y_a, y'_a, \ldots, y_a^{(n-1)}; y_b, y'_b, \ldots, y_b^{(n-1)}$ değişkenlerinde bir lineer form olsun öyle ki

$$U(y) = \alpha_0 y_a + \alpha_1 y_a' + \ldots + \alpha_{n-1} y_a^{(n-1)} + \beta_0 y_b + \beta_1 y_b' + \ldots + \beta_{n-1} y_b^{(n-1)}.$$

n. mertebenin bir lineer diferansiyel ifadesi verilen $U(y)$ formu lineer bağımsız homojen sınır koşulları

$$U_v(y) = 0, \quad v = 1, 2, \ldots, n \tag{1.2}$$

formudur.

Belirli bir $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ve (1.2) formunun verilen koşulları ile tanımlı $\mathbb{D}$ alt uzayı olsun. Her $y \in \mathbb{D}$ fonksiyonu için $u = \ell(y)$ fonksiyonu karşılık gelsin. Bu bağıntı tanımın tanım kümesi olarak $\mathbb{D}$ ile bir lineer operatördür ve L ile gösterilir. Bu notasyonlar göz önünde bulundurularak

$$u = Ly$$

şeklinde yazılır.

L operatörü (1.2) sınır koşulları ve $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ile üretilen diferansiyel operatör olarak adlandırılır. Başka bir deyişle, $L_2[0,1]$ uzayında L operatörü aşağıdaki form tarafından kısıtlanılan, $\mathbb{D}(L)$ tanım kümesi ve $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ile tanımlanır:

$\mathbb{D}(L) = \{y | y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ vardır, $y^{(n-1)}$, $[0,1]$ aralığında mutlak sürekli, y, $\ell(y) \in L_2[0,1]$, $U_v(y) = 0$, $v = 1, 2, \ldots, n\}$ ve $y \in \mathbb{D}(L)$ için $Ly = \ell(y)$ dir.

1.1.2 Tanım $y \in \mathbb{D}(L)$ fonksiyonunu belirleyen,

$$\ell(y) = 0, \tag{1.3}$$

$$U_v(y) = 0, \quad v = 1, 2, \ldots, n \tag{1.4}$$

koşullarını sağlayan probleme homojen sınır değer problemi denir.

1.1.3 Tanım L operatörünün tanımının tanım kümesinde

$$Ly = \lambda y \tag{1.5}$$

olacak şekilde $y \neq 0$ fonksiyonu vardır öyle ki λ sayısına L operatörünün özdeğeri adı verilir. y fonksiyonu λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon olarak adlandırılır.

L operatörü $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ve (1.2) sınır koşulu ile üretilir.

y özfonksiyonu L operatörünün tanımının tanım kümesine ait olduğundan, y özfonksiyonu (1.2) koşullarını sağlar. Üstelik, $Ly = \ell(y)$ ve (1.5)

$$\ell(y) = \lambda y \tag{1.6}$$

formuna denktir.

1.1.4 Tanım $L_2[0,1]$ uzayında

$$(y,z) = \int_0^1 y(x)\overline{z(x)}dx$$

notasyonu ile tanımlı L^* tanımının tanım kümesinde tüm z ve L'nin tanımının tanım kümesinde tüm y için

$$(Ly,z) = (y, L^*z)$$

denklemi sağlanır ise L^* operatörüne L operatörünün adjoint operatörü adı verilir. Eğer $L = L^*$ ise, bu takdirde L operatörü self-adjointtir.

L operatörü self-adjointtir ancak ve ancak self-adjoint diferansiyel ifade ve self-adjoint sınır koşulları tarafından üretilir (Naimark 1967).

1.1.5 Tanım $L = L(q(x), h, H)$ sınır değer problemi göz önüne alınsın:

$$\ell y := -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < \pi,$$

$$U(y) := y'(0) - hy(0) = 0, \quad V(y) := y'(\pi) + Hy(\pi) = 0.$$

Burada λ spektral parametredir; $q(x)$, h ve H reeldir; $q(x) \in L_2(0,\pi)$. ℓ operatörüne Sturm-Liouville operatörü denir (Freiling ve Yurko 2001).

1.1.1 Lemma (Riemann-Lebesgue lemma) Eğer $f \in L^2_{\mathbb{C}}[0,2\pi]$ ise, bu takdirde $n \to \pm\infty$ için $\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt \to 0$ dır (Conway 1990).

1.1.6 Tanım f ve g aynı küme üzerinde iki fonksiyon olmak üzere,

$$\mu\{x : f(x) \neq g(x)\} = 0$$

ise μ ölçüsüne göre denktir denir.

Bu özellik sıfır ölçülü bir küme üzerinde tüm noktalar dışında sağlanıyor ise bu özelliğe hemen hemen her yerde denir (Kolmogorov ve Fomin 1975).

Bundan sonraki kısımlarda hemen hemen her yerde ifadesini kısaca h.h.y olarak göstereceğiz.

1.1.7 Tanım $1 < p < \infty$ ile $p \in \mathbb{R}$ olsun.

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \quad \text{ölçülebilirdir ve} \quad |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

kümesine p-inci kuvvetten integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı denir.

$$\| f \|_{L^p} = \| f \|_p = \left[\int_\Omega |f(x)|^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}}$$

normu ile tanımlanır (Brezis 2011).

1.1.8 Tanım $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ açık ve $1 \leqslant p \leqslant \infty$ olsun. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonu Ω'da her kompakt K kümesini içerir ise $L^p_{loc}(\Omega)$'ya aittir.

$f \in L^p_{loc}(\Omega)$ ise, bu takdirde $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ dır (Brezis 2011).

1.1.9 Tanım $\forall\varepsilon > 0$ verilsin. $\delta > 0$ vardır öyle ki

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$$

toplam uzunluğunun $(a_k, b_k) \subset [a,b] \quad (k = 1,2,\ldots,n)$ ikişerli ayrık alt aralıklarının her sonlu sistemi için

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

ise f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında mutlak süreklidir denir (Kolmogorov ve Fomin 1975).

1.1.10 Tanım $L_2[0, 1]$ Hilbert uzayında $\{e^{2k\pi ix}\}$ ortonormal dizisi tam olduğundan herhangi $c(x) \in L_2[0, 1]$ için Fourier serisi gösterimi

$$c(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2k\pi x}$$

olmak üzere

$$\| c(x) \|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

eşitliğine Parseval formülü adı verilir, burada $\| \, . \, \|$, $L_2[0, 1]$ uzayındaki normdur.

1.1.2 Lemma $q \in L^1[0, 1]$ ise, bu takdirde $\int_0^x q(t)e^{i2m\pi t}dt \to 0 \quad |m| \to \infty$ iken x'de düzgündür. Bunu kullanarak,

$$\rho(m) =: \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} \left| \int_0^x q(t)e^{\mp i2(2m+2)\pi t}dt \right|$$

tanımlanır ve sonra $m \to \infty$ iken $\rho(m) \to 0$ elde edilir (Kıraç 2015).

2. SOBOLEV UZAYI

Bu bölümde tez için kullanacağımız Sobolev uzayının tanımı ve özellikleri hakkında bilgi verilecektir. Sobolev uzayını tanımlayabilmek için zayıf türev tanımına ihtiyaç duyulacaktır ve zayıf türev ve özelliklerine yer verilecektir.

2.1 Zayıf Türev ve Özellikleri

Bu kısımda zayıf türev tanımı ve özellikleri dikkate alınmıştır.

Ω, $\mathbb{R}^n$'de bir tanım kümesi olsun. $C_0^\infty(\Omega)$ uzayına ait olan fonksiyonların dizisi aşağıdaki koşulları sağlayan $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyonuna $\mathbb{D}(\Omega)$ uzayında yakınsaktır:

(i) $K \subset\subset \Omega$ vardır öyle ki $\forall n$ için $supp(\phi_n - \phi)$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} D^\alpha \phi_n(x) = D^\alpha \phi(x)$, $\forall \alpha$-katlı indeksi için K üzerinde düzgündür (Adams 1975).

2.1.1 Tanım $G \subset \mathbb{R}^n$ ise $\mathbb{R}^n$ uzayında G'nin kapanışı $\overline{G}$ ile gösterilir. $\overline{G} \subset \Omega$ ve $\overline{G}$, $\mathbb{R}^n$'nin kompakt (kapalı ve sınırlı) alt kümesi sağlandığında $G \subset\subset \Omega$ yazılabilir. Eğer u, G kümesinde tanımlı bir fonksiyon ise, u nun desteği

$$suppu = \overline{\{x \in G : u(x) \neq 0\}}$$

olarak tanımlanır (Adams 1975).

$C_c^\infty(U)$, U'da kompakt destek ile $\phi : U \to \mathbb{R}$ sonsuz diferansiyellenebilir fonksiyonların uzayını göstersin.

$u \in C^1(U)$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\phi \in C_c^\infty(U)$ ise,

$$\int_U u\phi_{x_i}\,dx = -\int_U u_{x_i}\phi\,dx \qquad i = 1, 2, \ldots n \tag{2.1}$$

olduğu kısmi integrasyon yardımıyla kolayca görülebilir. Sınır terimleri yoktur, çünkü ϕ, U'da kompakt desteğe sahiptir. Şimdi daha genel olarak, eğer k pozitif bir tamsayı,

$u \in C^k(U)$ ve $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = k$ mertebesinin bir katlı indeksi ise, bu takdirde

$$\int_U u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U D^\alpha u \phi \, dx. \tag{2.2}$$

Bu eşitlikte

$$D^\alpha \phi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \phi$$

olduğundan ve $|\alpha|$ kez (2.1) formu uygulanabilir (Evans 1998).

2.1.2 Tanım $u, v \in L^1_{loc}(U)$ ve α katlı indeks olsun. v'ye u'nun α-ıncı zayıf kısmi türevi adı verilir,

$$D^\alpha u = v$$

formunda yazılır. Her $\phi \in C_c^\infty(U)$ test fonksiyonları için

$$\int_U u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \phi \, dx \tag{2.3}$$

sağlanır. $v = D^\alpha u$ ile gösterilir (Evans 1998).

2.2.1 Lemma (Zayıf türevin tekliği) u'nun α-ıncı zayıf kısmi türevi, u varsa, sıfır ölçüsünün bir kümesinde tektir (Evans 1998).

2.2 Sobolev Uzayı ve Özellikleri

Bu kısımda Sobolev uzayının tanımı, teoremleri ve özelliklerine yer vereceğiz.

2.2.1 Tanım $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ve k negatif olmayan bir tamsayı olsun.

$$W^{k,p}(U) = \{u : U \to \mathbb{R} : u \in L_1^{loc}, \quad \text{her} \quad |\alpha| \leqslant k \quad \text{için} \quad D^\alpha u \in L^p(U)\}$$

ile tanımlanan bu küme $L^p(U)$ uzayına ait bir altuzaydır. Bu uzaya $W^{k,p}(U)$ Sobolev uzayı adı verilir (Evans 1998).

Ayrıca $W^{k,p}(U)$ Sobolev uzayının bir diğer notasyonu da $W_p^k(U)$ şeklinde gösterilir.

2.2.2 Tanım $u \in W_p^k(U)$ olmak üzere

$$\| u \|_{W_p^k(U)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_U |D^\alpha u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} & , \quad 1 \leq p < \infty, \\ \displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k} ess \sup_U |D^\alpha u| & , \quad p = \infty \end{cases}$$

olarak normu tanımlanır (Evans 1998).

2.2.3 Tanım

(i) $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi, $u \in W_p^k(U)$ olsun. u_m fonksiyonunun u'ya $W_p^k(U)$ uzayında yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\lim_{m\to\infty} \| u_m - u \|_{W_p^k(U)} = 0$ dır.

(ii) $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi u fonksiyonunun $W_{p,loc}^k(U)$ uzayında yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $V \subset\subset U$ için $\lim_{m\to\infty} \| u_m - u \|_{W_p^k(V)} = 0$ dır.

NOT $p = 2$ olduğu durumda, $H^k(U) = W_2^k(U) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$ yazılabilir. Burada $H^k(U)$, Hilbert uzaydır. Dikkat edilirse $H^0(U) = L^2(U)$ dır.

2.2.1 Teorem $u, v \in W_p^k(U), |\alpha| \leqslant k$ olsun.

(i) Her α, β katlı indeksleri ile $|\alpha| + |\beta| \leqslant k$ için $D^\alpha u \in W_p^{k-|\alpha|}(U)$ ve $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta} u$ dır.

(ii) $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$ için $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(U)$ ve $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$, $|\alpha| \leqslant k$.

(iii) V, U nun açık bir alt kümesi ise, bu takdirde $u \in W_p^k(V)$ dir.

(iv) $\xi \in C_c^\infty(U)$ ise, bu takdirde $\xi u \in W_p^k(U)$ ve

$$D^\alpha(\xi u) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \xi D^{\alpha-\beta} u \qquad \text{(Leibniz' formülü)},$$

burada $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$ (Evans 1998).

2.2.2 Teorem $\forall k = 1, \ldots$ ve $1 \leqslant p \leqslant \infty$ için, $W_p^k(U)$ Sobolev uzayı bir Banach uzayıdır (Evans 1998).

3. DIRICHLET SINIR DEĞER PROBLEMİ İÇİN TERS PROBLEM

Bu bölümde, $L_2(0,1)$ uzayında

$$-y'' + q(x)y \tag{3.1}$$

ifadesi ve

$$y(1) = y(0) = 0 \tag{3.2}$$

sınır koşulları tarafından üretilen $L(q)$ operatörünü göz önüne alacağız. Burada $q(x) \in W_1^2[0,1]$ reel-değerli bir fonksiyondur ve $q^{(k)}(0) = q^{(k)}(1)$, $k = 0, 1$.

Yılmaz ve Veliev (2005)'in makalesindeki Teorem 1'i dikkate alarak reel-değerli self-adjoint diferansiyel operatörler için asimptotik formül elde edilecektir. Sturm-Liouville operatörünün özdeğerleri $m \geqq N$ için genelliği bozmadan $c_0 = 0$ varsayımı ve $c_m = \int_0^1 q(x) \cos m\pi x \, dx$ olmak üzere

$$\lambda_m = (m\pi)^2 + c_0 - c_{2m} + O\left(\frac{ln|m|}{m}\right) \tag{3.3}$$

formülünü göz önüne alarak

$$\lambda_m = (m\pi)^2 + o(1) \tag{3.4}$$

sağlayan $\{\lambda_m\}$ özdeğerleri için asimptotik formül bulunur. Burada N büyük bir pozitif tamsayıyı gösterir. Şimdi

$$c_{2m} = \int_0^1 q(x) \cos 2m\pi x \, dx$$

olacağından $m \to \infty$ için Riemann-Lebesgue lemma (bkz. Lemma 1.1.1) kullanılarak $c_{2m} = o(1)$ olduğu görülür. Bu ifadeyi (3.3) formülünde yerine yazarak (3.4) elde edilir. (3.4)'ü kullanarak $\forall k \neq m$, $k = 0, 1, \ldots$ için aşağıdaki eşitsizlik $m \geqq N$ için sağlanır:

$$|\lambda_m - (\pi k)^2| = |(m\pi)^2 + o(1) - (\pi k)^2|$$

$$> |(m-k)\pi||(m+k)\pi| - c_1 m^{\frac{1}{2}}$$

$$> c_2 m. \tag{3.5}$$

Burada c_n, $n = 1, 2, \ldots$ ile kesin değeri önemsenmeyen pozitif sabitleri gösterir.

$L_2(0,1)$ uzayında $-y'' + q(x)y = \lambda y$ denklemini dikkate alarak, eşitliğin her iki tarafını $\sin m\pi x$ ile iç çarpımı alınırsa;

$$(-y'' + q(x)y, \sin m\pi x) = (\lambda y, \sin m\pi x)$$

olur. Burada $(.,.)$, $L_2(0,1)$ uzayında iç çarpımı gösterir. Yani

$$\int_0^1 -y'' \sin m\pi x \, dx + (q(x)y, \sin m\pi x) = (\lambda y, \sin m\pi x). \tag{3.6}$$

(3.6) eşitliğinin sol tarafında bulunan integralde kısmi integrasyon alınırsa;

$$\int_0^1 -y'' \sin m\pi x \, dx = -y' \sin m\pi x \Big|_0^1 + m\pi \int_0^1 y' \cos m\pi x \, dx$$

elde edilir. Bu eşitlikte sağ taraftaki ilk terim 0'dır. İkinci terim için tekrar kısmi integrasyon alınırsa;

$$\int_0^1 -y'' \sin m\pi x \, dx = m\pi y \cos m\pi x \Big|_0^1 + (m\pi)^2 \int_0^1 y \sin m\pi x \, dx$$

elde edilir. Bu eşitliğin de sağ tarafındaki ilk terim 0, ikinci terim (3.6) denkleminde yerleştirilirse,

$$(q(x)y, \sin m\pi x) = (\lambda - (m\pi)^2)(y, \sin m\pi x)$$

bulunur. Bu eşitlikte λ ve y yerine sırasıyla λ_N ve $\Psi_N(x)$ alınırsa;

$$(\lambda_N - (m\pi)^2)(\Psi_N(x), \sin m\pi x) = (q(x)\Psi_N(x), \sin m\pi x) \tag{3.7}$$

olur. $L(q)$'nun $\Psi_m(x)$ normalleştirilmiş özfonksiyonlarına karşılık gelen λ_m özdeğerleri için asimptotik formülü elde etmek için (3.5) ve (3.7) kullanılır. $m \to \infty$ iken $(q(x)\Psi_N(x), \sin m\pi x)$ sıfıra yaklaştığı için A_N sabiti ve m_0 tamsayısı vardır öyle ki

$$\max_m |(q(x)\Psi_N(x), \sin m\pi x)| = |(q(x)\Psi_N(x), \sin m_0\pi x)| = A_N. \tag{3.8}$$

(3.5)'ten $|m_1| > 2(|N|+|m|) = n$ için

$$|\lambda_N - (\pi(m+m_1))^2| > \frac{1}{2}|(N-m-m_1)\pi||(N+m+m_1)\pi|$$
$$> c_3|m_1|^2 \tag{3.9}$$

olduğu görülür. Bu eşitsizlik (3.7) ve (3.8) ile $|m_1| > n$ için

$$\begin{aligned}|(\Psi_N(x), \sin(m+m_1)\pi x)| &= \frac{|(q(x)\Psi_N(x), \sin(m+m_1)\pi x)|}{|\lambda_N - ((m+m_1)\pi)^2|} \\ &\leqslant \frac{A_N}{|\lambda_N - ((m+m_1)\pi)^2|} \\ &< \frac{A_N}{c_3|m_1|^2}\end{aligned}$$

olduğu yazılabilir. Dolayısıyla $\{\sqrt{2}\sin(m+m_1)\pi x : m_1 > -m\}$ ortonormal bazı ile $\Psi_N(x)$'in

$$\Psi_N(x) = \sum_{m_1>-m}^{\infty} 2(\Psi_N(x), \sin(m+m_1)\pi x)\sin(m+m_1)\pi x \tag{3.10}$$

yazımı

$$\Psi_N(x) = \sum_{m_1>-m}^{n} 2(\Psi_N(x), \sin(m+m_1)\pi x)\sin(m+m_1)\pi x + g(x)$$

formu şeklinde yazılabilir, burada $\sup_{x\in[0,1]}|g(x)| < \frac{c_4}{n}$'dir. Bu formül $(q(x)\Psi_N(x), \sin m\pi x)$ ifadesinde yerleştirilir ve $n \to \infty$ iken

$$\begin{aligned}&(q(x)\Psi_N(x), \sin m\pi x) \\ &= \left(q(x)\sum_{m_1>-m}^{\infty} 2(\Psi_N(x), \sin(m+m_1)\pi x)\sin(m+m_1)\pi x, \sin m\pi x\right) \\ &= \sum_{m_1>-m}^{\infty} 2(q(x)(\Psi_N(x), \sin(m+m_1)\pi x)\sin(m+m_1)\pi x, \sin m\pi x) \\ &= \sum_{m_1>-m}^{\infty} 2(q(x), (\sin(m+m_1)\pi x)\sin m\pi x)(\Psi_N(x), \sin(m+m_1)\pi x) \qquad (3.11)\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $\forall m, \forall N \gg 1$ için

$$|(q(x)\Psi_N(x), \sin m\pi x)| < 4M \tag{3.12}$$

olduğunu kanıtlayalım, burada $M = \int_0^1 |q(x)|\,dx$ dir. (3.8)'den

$$\max_m |(q(x)\Psi_N(x), \sin m\pi x)| \leqslant A_N = |(q(x)\Psi_N(x), \sin m_0\pi x)|$$

eşitsizliği yazılabilir. (3.11) eşitliğinde m yerine m_0 yazarak

$$|(q(x)\Psi_N(x), \sin m_0\pi x)|$$

$$\leqslant \sum_{m_1>-m_0}^{\infty} 2(q(x), (\sin(m_0+m_1)\pi x)(\sin m_0\pi x))(\Psi_N(x), \sin(m_0+m_1)\pi x)$$

$$\leqslant 2M \sum_{m_1>-m_0}^{\infty} (\Psi_N(x), \sin(m_0+m_1)\pi x)$$

formu elde edilir. Şimdi bu eşitsizlikte $m_0 + m_1 = N$ için terim izole edilir ve (3.7) eşitliği kullanılırsa

$$\leqslant 2M(\Psi_N(x), \sin N\pi x) + 2M \sum_{\substack{m_1>-m_0,\\ m_0+m_1\neq N}}^{\infty} \frac{|(q(x)\Psi_N(x), \sin(m_0+m_1)\pi x)|}{|\lambda_N - (\pi(m_0+m_1))^2|}$$

ve (3.5)'i kullanarak

$$\leqslant 2M + 2M \sum_{\substack{m_1>-m_0,\\ m_0+m_1\neq N}}^{\infty} \frac{A_N}{|\lambda_N - (\pi(m_0+m_1))^2|} \leqslant 2M + \frac{A_N}{2}$$

bulunur. Burada $A_N \leqslant 4M$ alındığında (3.12) kanıtlanır.

(3.11)'de

$$\sin(m+m_1)\pi x\ \sin m\pi x = \frac{1}{2}\cos m_1\pi x - \frac{1}{2}\cos(2m+m_1)\pi x$$

çarpımını yerine yazarak

$$(q(x)\Psi_N(x), \sin m\pi x)$$

$$= \sum_{m_1>-m}^{\infty} 2(q(x), (\frac{1}{2}\cos m_1\pi x - \frac{1}{2}\cos(2m+m_1)\pi x))(\Psi_N(x), \sin(m+m_1)\pi x)$$

$$= \sum_{m_1>-m}^{\infty} (q(x), \cos m_1\pi x - \cos(2m+m_1)\pi x)(\Psi_N(x), \sin(m+m_1)\pi x)$$

$$= \sum_{m_1>-m}^{\infty} \left[(q(x), \cos m_1\pi x) - (q(x), \cos(2m+m_1)\pi x)\right](\Psi_N(x), \sin(m+m_1)\pi x)$$

$$= \sum_{m_1 > -m}^{\infty} (q(x), \cos m_1 \pi x)(\Psi_N(x), \sin(m + m_1)\pi x)$$
$$- \sum_{m_1 > -m}^{\infty} (q(x), \cos(2m + m_1)\pi x)(\Psi_N(x), \sin(m + m_1)\pi x)$$

elde edilir. Bu son eşitlikteki ikinci seride k ile $2m + m_1$ yer değiştirilerek

$$\sum_{m_1 > -m}^{\infty} (q(x), \cos k\pi x)(\Psi_N(x), \sin(m - k)\pi x)$$

bulunur ve son olarak k yerine m_1 yazarak

$$\sum_{m_1 > -m}^{\infty} (q(x), \cos m_1 \pi x)(\Psi_N(x), \sin(m - m_1)\pi x)$$

serisi elde edilir. Dolayısıyla bu eşitliği aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$(q(x)\Psi_N(x), \sin m\pi x) = \sum_{m_1=1}^{\infty} c_{m_1}(\Psi_N(x), \sin(m + m_1)\pi x)$$
$$+ \sum_{m_1=1}^{\infty} c_{m_1}(\Psi_N(x), \sin(m - m_1)\pi x).$$

Bu eşitliği (3.7) içine yerleştirerek,

$$c_m = \int_0^1 q(x)\ \cos m\pi x\, dx \tag{3.13}$$

olmak üzere

$$(\lambda_N - (\pi m)^2)(\Psi_N(x), \sin m\pi x) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} c_{m_1}(\Psi_N(x), \sin(m + m_1)\pi x) \tag{3.14}$$

bulunur ve genelliği bozmadan $c_0 = 0$ olduğunu varsayalım, $c_m = c_{-m}$ ve $|m| \to \infty$ iken $c_m \to 0$ olduğuna dikkat edelim.

Şimdi (3.14) eşitliğinin sağındaki $(\Psi_N(x), \sin(m + m_1)\pi x)$ ifadesini içeren terimleri izole edelim. İlk olarak $m_1 = -2m$ durumundaki terimleri ayıralım. (3.14) eşitliğinde N ve m yerine sırasıyla m ve $m + m_1$ yazarak;

$$(\Psi_m(x), \sin(m + m_1)\pi x) = \sum_{\substack{m_2=-\infty \\ m_1 \neq -2m}}^{\infty} \frac{c_{m_2}(\Psi_m(x), \sin(m + m_1 + m_2)\pi x)}{\lambda_m - (\pi(m + m_1))^2}$$

bulunur, bu eşitliği (3.14)'te yerine yerleştirerek ve sonra $c_{-2m} = c_{2m}$ eşitliğini kullanarak,

$$(\lambda_m - (\pi m)^2)(\Psi_m(x), \sin m\pi x) = c_{-2m}(\Psi_m(x), \sin(m-2m)\pi x)$$
$$+ \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} c_{m_1} \sum_{\substack{m_2=-\infty \\ m_1 \neq -2m}}^{\infty} \frac{c_{m_2}(\Psi_m(x), \sin(m+m_1+m_2)\pi x)}{\lambda_m - (\pi(m+m_1))^2}$$

$$(\lambda_m - (\pi m)^2)(\Psi_m(x), \sin m\pi x) = -c_{2m}(\Psi_m(x), \sin m\pi x)$$
$$+ \sum_{\substack{m_1, m_2=-\infty \\ m_1 \neq -2m}}^{\infty} \frac{c_{m_1} c_{m_2}(\Psi_m(x), \sin(m+m_1+m_2)\pi x)}{\lambda_m - (\pi(m+m_1))^2} \tag{3.15}$$

elde edilir. Şimdi (3.15) eşitliğinin sağ tarafındaki toplamdan $m_1 + m_2 = 0, -2m$ olan terimleri izole edelim. İlk olarak (3.15) eşitliğinin sağında bulunan toplamda $m_1 + m_2 = 0$ için m_2 yerine $-m_1$ yazılarak ve $c_{-m_1} = c_{m_1}$ eşitliği kullanılırsa ve yine aynı toplamda $m_1 + m_2 = -2m$ için m_2 yerine $-m_1 - 2m$ yazılarak ve $c_{-m_1-2m} = c_{m_1+2m}$ eşitliği kullanılırsa

$$\sum_{\substack{m_1=-\infty \\ m_1 \neq 0, -2m}}^{\infty} \frac{c_{m_1}(c_{m_1} - c_{m_1+2m})(\Psi_m(x), \sin m\pi x)}{\lambda_m - (\pi(m+m_1))^2}$$

elde edilir. (3.14) eşitliğinde N ve m yerine sırasıyla m ve $m + m_1 + m_2$ koyulursa,

$$(\Psi_m(x), \sin(m+m_1+m_2)\pi x)$$
$$= \sum_{\substack{m_2=-\infty \\ m_1, m_1+m_2 \neq 0, -2m}}^{\infty} \frac{c_{m_3}(\Psi_m(x), \sin(m+m_1+m_2+m_3)\pi x)}{\lambda_m - (\pi(m+m_1+m_2+m_3))^2}$$

elde edilir. Bu eşitliği (3.15)'de yerine koyarak ve $m_1 + m_2 = 0, -2m$ olan terimleri izole ederek,

$$(\lambda_m - (\pi m)^2)(\Psi_m(x), \sin m\pi x)$$
$$= (\Psi_m(x), \sin m\pi x) \left\{ -c_{2m} + \sum_{\substack{m_1=-\infty \\ m_1 \neq 0, -2m}}^{\infty} \frac{c_{m_1}(c_{m_1} - c_{m_1+2m})}{\lambda_m - (\pi(m+m_1))^2} \right\}$$
$$+ \sum_{\substack{m_1, m_2, m_3=-\infty \\ m_1, m_1+m_2 \neq 0, -2m}}^{\infty} \frac{c_{m_1} c_{m_2} c_{m_3}(\Psi_m(x), \sin(m+m_1+m_2+m_3)\pi x)}{[\lambda_m - (\pi(m+m_1))^2][\lambda_m - (\pi(m+m_1+m_2))^2]} \tag{3.16}$$

elde edilir. Bu eşitlikte sağ taraftaki son toplamdan $m_1 + m_2 + m_3 = 0, -2m$ olan terimleri izole edelim. İlk önce (3.16) eşitliğinin sağında bulunan son toplamda $m_1 + m_2 + m_3 = 0$ için m_3 yerine $-m_1 - m_2$ yazılarak ve $c_{-m_1-m_2} = c_{m_1+m_2}$ eşitliğini kullanarak ve yine aynı toplamda $m_1+m_2+m_3 = -2m$ için m_3 yerine $-m_1-m_2-2m$ yazılarak ve $c_{-m_1-m_2-2m} = c_{m_1+m_2+2m}$ eşitliğini kullanarak

$$\sum_{\substack{m_1,m_2=-\infty \\ m_1,m_1+m_2\neq 0,-2m}}^{\infty} \frac{c_{m_1}c_{m_2}(c_{m_1+m_2} - c_{m_1+m_2+2m})(\Psi_m(x), \sin m\pi x)}{[\lambda_m - (\pi(m+m_1))^2][\lambda_m - (\pi(m+m_1+m_2))^2]}$$

bulunur. (3.16) eşitliğinde $m_1+m_2+m_3 = 0, -2m$ terimleri izole edilir ve bu eşitlikte yukarıdaki toplamda yerine yerleştirilirse,

$$(\lambda_m - (\pi m)^2)(\Psi_m(x), \sin m\pi x)$$

$$= (\Psi_m(x), \sin m\pi x)\left\{-c_{2m} + \sum_{\substack{m_1=-\infty \\ m_1\neq 0,-2m}}^{\infty} \frac{c_{m_1}(c_{m_1} - c_{m_1+2m})}{\lambda_m - (\pi(m+m_1))^2}\right\}$$

$$+(\Psi_m(x), \sin m\pi x) \sum_{\substack{m_1,m_2=-\infty \\ m_1,m_1+m_2\neq 0,-2m}}^{\infty} \frac{c_{m_1}c_{m_2}(c_{m_1+m_2} - c_{m_1+m_2+2m})}{[\lambda_m - (\pi(m+m_1))^2][\lambda_m - (\pi(m+m_1+m_2))^2]}$$

$$+ \sum_{\substack{m_1,m_2,m_3=-\infty \\ m_1,m_1+m_2,m_1+m_2+m_3\neq 0,-2m}}^{\infty} \frac{c_{m_1}c_{m_2}c_{m_3}(\Psi_m(x), \sin(m+m_1+m_2+m_3)\pi x)}{\prod_{t=1,2,3}[\lambda_m - (\pi(m+m_t))^2]} \tag{3.17}$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki lemma ispatlanmış olur.

3.1.1 Lemma $L(q)$ operatörünün λ_m özdeğeri

$$\lambda_m = (m\pi)^2 + c_0 - c_{2m} + a_1(\lambda_m) - b_1(\lambda_m) + a_2(\lambda_m) - b_2(\lambda_m) + R_3 \tag{3.18}$$

asimptotik formülünü sağlar, burada $q(x)$ reel-değerli toplanabilir bir fonksiyon ve $c_m = \int_0^1 q(x)\cos m\pi x\, dx$,

$$a_1(\lambda_m) = \sum_{\substack{m_1=-\infty \\ m_1\neq 0,-2m}}^{\infty} \frac{c_{m_1}c_{m_1}}{[\lambda_m - (\pi(m+m_1))^2]} \tag{3.19}$$

$$b_1(\lambda_m) = \sum_{\substack{m_1=-\infty \\ m_1\neq 0,-2m}}^{\infty} \frac{c_{m_1}c_{2m+m_1}}{[\lambda_m - (\pi(m+m_1))^2]} \tag{3.20}$$

$$a_2(\lambda_m) = \sum_{\substack{m_1,m_2=-\infty \\ m_1,m_1+m_2\neq 0,-2m}}^{\infty} \frac{c_{m_1}c_{m_2}c_{m_1+m_2}}{\prod_{t=1,2}[\lambda_m - (\pi(m+m_t))^2]} \tag{3.21}$$

$$b_2(\lambda_m) = \sum_{\substack{m_1,m_2=-\infty \\ m_1,m_1+m_2\neq 0,-2m}}^{\infty} \frac{c_{m_1}c_{m_2}c_{2m+m_1+m_2}}{\prod_{t=1,2}[\lambda_m - (\pi(m+m_t))^2]} \tag{3.22}$$

$$R_3 = \sum_{m_1,m_2,m_3=-\infty}^{\infty} \frac{c_{m_1}c_{m_2}c_{m_3}(q(x)\Psi_m(x), \sin(m+m_1+m_2+m_3)\pi x)}{\prod_{t=1,2,3}[\lambda_m - (\pi(m+m_t))^2]}. \tag{3.23}$$

Şimdi $a_1(\lambda_m)$'i dikkate alarak, $\forall m \in \mathbb{N}$ için $|c_m| \leq M$ eşitsizliğinden

$$|a_1(\lambda_m)| \leq \sum_{\substack{m_1=-\infty \\ m_1\neq 0,-2m}}^{\infty} \left| \frac{c_{m_1}c_{m_1}}{\lambda_m - (\pi(m+m_1))^2} \right|$$

$$a_1(\lambda_m) < \sum_{\substack{m_1=-\infty \\ m_1\neq 0,-2m}}^{\infty} \frac{M^2}{|\lambda_m - (\pi(m+m_1))^2|}$$

(3.5)'i kullanarak

$$< \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0,2m}}^{\infty} \frac{M^2}{|k\pi||(2m-k)\pi|}$$

$$= \frac{M^2}{\pi^2} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0,2m}}^{\infty} \frac{1}{|k||2m-k|}$$

elde edilir. Bu son serinin direkt olarak hesaplanması ile

$$a_1(\lambda_m) = O\left(\frac{ln|m|}{m}\right)$$

olur. Benzer şekilde $b_1(\lambda_m) = O\left(\frac{ln|m|}{m}\right)$ olduğu gösterilebilir. Yukarıdaki eşitliği ve aşağıdaki bağıntıları kullanarak

$$|a_2(\lambda_m)| < \sum_{m_1,m_2} \frac{M^3}{\prod_{t=1,2}[\lambda_m - (\pi(m+m_t))^2]},$$

$$\sup_{m_1} \left\{ \sum_{m_2} \frac{1}{|\lambda_m - (\pi(m+m_1+m_2))^2|} \right\} = O\left(\frac{ln|m|}{m}\right)$$

olduğundan

$$a_2(\lambda_m) = O\left(\left(\frac{ln|m|}{m}\right)^2\right)$$

bulunur. Aynı yolla $b_2(\lambda_m) = O\left(\left(\frac{ln|m|}{m}\right)^2\right)$ olduğu gösterilebilir. Benzer olarak (3.12) eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$R_3 = O\left(\left(\frac{ln|m|}{m}\right)^3\right) \tag{3.24}$$

elde edilir (Veliev ve Duman 2002).

Bundan sonraki teorem ve lemmaların ispatında aşağıdaki bağıntılara ihtiyaç duyacağız. Şimdi sırasıyla q fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında çift ve tek fonksiyonları,

$$\tilde{q}(x) = \frac{q(x) + q(1-x)}{2} \tag{3.25}$$

ve

$$\hat{q}(x) = \frac{q(x) - q(1-x)}{2} \tag{3.26}$$

olmak üzere (3.13)'de kullanılarak,

$$c_{2m_1} = \int_0^1 \tilde{q}(x)\, e^{-i(2m_1)\pi x}\, dx \tag{3.27}$$

ve

$$c_{2m_1+1} = \int_0^1 \hat{q}(x)\, e^{-i(2m_1+1)\pi x}\, dx \tag{3.28}$$

eşitliklerinin sağlandığını görelim. Bunun için ilk önce (3.27)'yi ispatlayalım.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \tilde{q}(x)\, e^{-i(2m_1)\pi x}\, dx = &\int_0^1 \frac{q(x)+q(1-x)}{2}\cos 2m_1\pi x\, dx \\ &- i\int_0^1 \frac{q(x)+q(1-x)}{2}\sin 2m_1\pi x\, dx\end{aligned} \tag{3.29}$$

yazılabilir. (3.29) denkleminin sağ tarafında bulunan birinci integralde $1 - x = u$ değişken değiştirmesi uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{q(x)+q(1-x)}{2}\cos 2m_1\pi x\, dx =&\frac{1}{2}\int_0^1 q(x)\cos 2m_1\pi x\, dx \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^1 q(1-x)\cos 2m_1\pi x\, dx\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\int_0^1 q(x)\cos 2m_1\pi x\, dx + \int_0^1 q(u)\cos 2m_1\pi(1-u)\, du\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\int_0^1 q(x)\cos 2m_1\pi x\,dx + \int_0^1 q(u)\cos 2m_1\pi u\,du\right\}$$

olacağından

$$\int_0^1 \frac{q(x)+q(1-x)}{2}\cos 2m_1\pi x\,dx = \int_0^1 q(x)\cos 2m_1\pi x\,dx$$

elde edilir. Şimdi (3.29) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci integralde $1-x=u$ değişken değiştirmesi uygulanırsa,

$$\begin{aligned} i\int_0^1 \frac{q(x)+q(1-x)}{2}\sin 2m_1\pi x\,dx =& \frac{i}{2}\int_0^1 q(x)\sin 2m_1\pi x\,dx \\ &+ \frac{i}{2}\int_0^1 q(1-x)\sin 2m_1\pi x\,dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{i}{2}\left\{\int_0^1 q(x)\sin 2m_1\pi x\,dx + \int_0^1 q(u)\sin 2m_1\pi(1-u)\,du\right\} \\ &= \frac{i}{2}\left\{\int_0^1 q(x)\sin 2m_1\pi x\,dx - \int_0^1 q(u)\sin 2m_1\pi u\,du\right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla (3.27) ispatlanır. Benzer şekilde (3.26)'yı dikkate alarak (3.28)'i gösterelim. (3.28) eşitliği

$$\int_0^1 \hat{q}(x)e^{-i(2m_1+1)\pi x}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{q(x)-q(1-x)}{2}\cos(2m_1+1)\pi x\,dx - i\int_0^1 \frac{q(x)-q(1-x)}{2}\sin(2m_1+1)\pi x\,dx \tag{3.30}$$

şeklinde yazılabilir. (3.30) denkleminin sağ tarafında bulunan birinci integralde $1-x=u$ değişken değiştirmesi uygulanırsa,

$$\int_0^1 \frac{q(x)-q(1-x)}{2}\cos(2m_1+1)\pi x\,dx$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\left\{\int_0^1 q(x)\cos(2m_1+1)\pi x\,dx - \int_0^1 q(u)\cos(2m_1+1)\pi(1-u)\,du\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\int_0^1 q(x)\cos(2m_1+1)\pi x\,dx + \int_0^1 q(u)\cos(2m_1+1)\pi u\,du\right\} \end{aligned}$$

olacağından

$$\int_0^1 \frac{q(x)-q(1-x)}{2}\cos(2m_1+1)\pi x\,dx = \int_0^1 q(x)\cos(2m_1+1)\pi x\,dx$$

bulunur. Şimdi (3.30) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci integralde $1-x=u$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$i\int_0^1 \frac{q(x)-q(1-x)}{2}\sin(2m_1+1)\pi x\,dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i}{2}\left\{\int_0^1 q(x)\sin(2m_1+1)\pi x\,dx - \int_0^1 q(1-x)\sin(2m_1+1)\pi x\,dx\right\}\\
&= \frac{i}{2}\left\{\int_0^1 q(x)\sin(2m_1+1)\pi x\,dx - \int_0^1 q(u)\sin(2m_1+1)\pi(1-u)\,du\right\}\\
&= \frac{i}{2}\left\{\int_0^1 q(x)\sin(2m_1+1)\pi x\,dx - \int_0^1 q(u)\sin(2m_1+1)\pi u\,du\right\}\\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (3.28)'in ispatı tamamlanır.

3.1.2 Lemma $q(x)\in W_1^1[0,1]$, $q(0)=q(1)$ ve $c_0=0$ olsun.

(3.20) ve (3.22)'deki bağıntılar için aşağıdaki asimptotik yaklaşımlar geçerlidir:

$$b_1(\lambda_m)=o(m^{-2}), \tag{3.31}$$

$$b_2(\lambda_m)=o(m^{-2}). \tag{3.32}$$

İspat

$$\frac{1}{-m_1(2m+m_1)} = \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{2m+m_1}-\frac{1}{m_1}\right)$$

eşitliğini kullanarak

$$\sum_{m_1\neq 0,-2m}\frac{1}{|-m_1(2m+m_1)|} = O\left(\frac{ln|m|}{m}\right)$$

bağıntısı elde edilir.

Şimdi lemmanın ispatı için (3.7), (3.12) ve (3.5)'i kullanarak

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}|(\psi_m(x),\sin m\pi x)|^2 = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\left|\frac{(q(x)\psi_m(x),\sin m\pi x)}{\lambda_m-(m+m_1)^2\pi^2}\right|^2$$

$$< \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{(4M)^2}{|-m_1(2m+m_1)\pi^2|^2}$$
$$= O\left(\frac{1}{m^2}\right) \tag{3.33}$$

asimptotik yaklaşımı elde edilir (Veliev ve Duman 2002).

$$\sum_{m_1\neq 0,-2m} \left| \frac{1}{\lambda_m - (m+m_1)^2\pi^2} - \frac{1}{m^2\pi^2 - (m+m_1)^2\pi^2} \right|$$

toplamını göz önüne alalım. Herhangi bir C sabiti ile (3.4), (3.5) ve (3.33) eşitliklerini kullanarak

$$\leq \sum_{m_1\neq 0,-2m} \left| \frac{o(1)}{|(m\pi)^2 + o(1) - (m+m_1)^2\pi^2||(m\pi)^2 - (m+m_1)^2\pi^2|} \right|$$
$$\leq C\, o(1) \sum_{m_1\neq 0,-2m} |m_1|^{-2}|2m+m_1|^{-2}$$
$$= o(1)O\left(\frac{1}{m^2}\right) = o(m^{-2}) \tag{3.34}$$

bulunur (Kıraç 2016b).

İlk olarak (3.31) yaklaşımını ispatlayalım. Bunun için önce (3.34)'ü dikkate alarak ve (3.20) eşitliğinin sağ tarafındaki toplamda (3.27) ve (3.28) eşitliklerini kullanarak $b_1(\lambda_m)$ toplamını aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$b_1(\lambda_m) = \sum_{\substack{m_1=-\infty \\ m_1\neq 0,-2m}}^{\infty} \frac{c_{m_1}c_{2m+m_1}}{[\lambda_m - (\pi(m+m_1))^2]}$$

olduğundan (3.4)'ü kullanarak

$$\lambda_m - (\pi(m+m_1))^2 = -m_1(2m+m_1)\pi^2 + o(1) \tag{3.35}$$

eşitliği ile birlikte

$$b_1(\lambda_m) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{\substack{m_1=-\infty \\ m_1\neq 0,-2m}}^{\infty} \frac{c_{m_1}c_{2m+m_1}}{-m_1(2m+m_1)} + o(m^{-2})$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \sum_{2m_1\neq 0,-2m} \frac{c_{2m_1}c_{2m+2m_1}}{-2m_1(2m+2m_1)} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{2m_1+1\neq -2m} \frac{c_{2m_1+1}c_{2m+(2m_1+1)}}{-(2m_1+1)(2m+2m_1+1)}$$

$$+o(m^{-2}). \tag{3.36}$$

(3.36) denkleminde Parseval eşitliği ve $c_{2m+2m_1} = c_{-(2m+2m_1)}$, $c_{2m+(2m_1+1)} = c_{-(2m+(2m_1+1))}$ olduğu kullanılırsa;

$$b_1(\lambda_m) = -\int_0^1 (\tilde{Q}(x)-\tilde{Q}_0)^2\, e^{i2m\pi x}\, dx - \int_0^1 (\hat{Q}(x)-\hat{Q}_0)^2\, e^{i2m\pi x}\, dx + o(m^{-2}) \tag{3.37}$$

elde edilir. Burada

$$\tilde{Q}(x) - \tilde{Q}_0 = \sum_{2m_1 \neq 0} \tilde{Q}_{m_1}\, e^{i(2m_1)\pi x}, \qquad \hat{Q}(x) - \hat{Q}_0 = \sum \hat{Q}_{m_1}\, e^{i(2m_1+1)\pi x}$$

olmak üzere

$$\left.\begin{aligned} \tilde{Q}_{m_1} &=: (\tilde{Q}(x), e^{i(2m_1)\pi x}) = \tfrac{c_{2m_1}}{i\pi(2m_1)}, \qquad 2m_1 \neq 0, \\ \hat{Q}_{m_1} &=: (\hat{Q}(x), e^{i(2m_1+1)\pi x}) = \frac{c_{2m_1+1}}{i\pi(2m_1+1)}, \end{aligned}\right\} \tag{3.38}$$

$\tilde{Q}(x) = \int_0^x \tilde{q}(t)\, dt$ ve $\hat{Q}(x) = \int_0^x \hat{q}(t)\, dt$ fonksiyonlarının sırasıyla $\{e^{i(2m_1)\pi x} : m_1 \in \mathbb{Z}\}$ ve $\{e^{i(2m_1+1)\pi x} : m_1 \in \mathbb{Z}\}$ bazlarına göre Fourier katsayılarını gösterir. Şimdi (3.38) tanımındaki ilk ifadeyi ispatlayalım. İspat için öncelikle gerekli olan $\tilde{Q}(1) = c_0$ olduğunu gösterelim. Bunun için $\tilde{Q}(1) = \int_0^1 \tilde{q}(t)\, dt$ eşitliğini göz önüne alalım. Bu eşitlikte (3.25) kullanılırsa,

$$\tilde{Q}(1) = \int_0^1 \frac{q(t) + q(1-t)}{2}\, dt$$

olur, bu eşitlikte $1 - t = u$ değişken değiştirmesi uygulandığında

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(1) &= \frac{1}{2}\left\{\int_0^1 q(t)\, dt - \int_1^0 q(u)\, du\right\} \\ &= \int_0^1 q(t)\, dt = c_0 \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde $\hat{Q}(1) = 0$ olduğunu da gösterelim. $\hat{Q}(1) = \int_0^1 \hat{q}(t)\, dt$ eşitliğinde (3.26) kullanılırsa,

$$\hat{Q}(1) = \int_0^1 \frac{q(t) - q(1-t)}{2}\, dt$$

olacağından, bu eşitlikte $1 - t = u$ değişken değiştirmesi uygulandığında

$$\begin{aligned}\hat{Q}(1) &= \frac{1}{2}\left\{\int_0^1 q(t)\,dt + \int_1^0 q(u)\,du\right\}\\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. $\tilde{Q}_{m_1} =: (\tilde{Q}(x), e^{i(2m_1)\pi x})$ ifadesinde $L_2(0,1)$'deki iç çarpım kullanılarak, yani

$$\tilde{Q}_{m_1} = \int_0^1 \tilde{Q}(x)e^{-i(2m_1)\pi x}\,dx$$

yazılabilir. Burada eşitliğin sağ tarafında kısmi integrasyon alınırsa;

$$\tilde{Q}_{m_1} = -\tilde{Q}(x)\frac{e^{-i(2m_1)\pi x}}{i\pi(2m_1)}\Big|_0^1 + \frac{1}{i\pi(2m_1)}\int_0^1 \tilde{q}(x)e^{-i(2m_1)\pi x}\,dx$$

olur. Bu eşitlikte lemmanın kabulünden $c_0 = 0$ olduğundan birinci terim 0 ve ikinci terimdeki integral (3.27)'ye eşittir. Dolayısıyla

$$\int_0^1 \tilde{Q}(x)e^{-i(2m_1)\pi x}\,dx = \frac{c_{2m_1}}{i\pi(2m_1)}$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.38) tanımının ikinci ifadesi için (3.26) ve $\hat{Q}(1) = 0$ eşitlikleri dikkate alınarak, $L_2(0,1)$'deki iç çarpım kullanılarak,

$$\hat{Q}_{m_1} = \int_0^1 \hat{Q}(x)e^{-i(2m_1+1)\pi x}\,dx$$

yazılabileceğinden, bu eşitliğin sağ tarafında kısmi integrasyon alınır ve

$$\hat{Q}_{m_1} = -\hat{Q}(x)\frac{e^{-i(2m_1+1)\pi x}}{i(2m_1+1)\pi}\Big|_0^1 + \frac{1}{i\pi(2m_1+1)}\int_0^1 \hat{q}(x)e^{-i(2m_1+1)\pi x}\,dx$$

olur. Burada $\hat{Q}(1) = \hat{Q}(0) = 0$ olduğundan birinci terim 0 ve ikinci terim (3.28)'e eşit olacağından

$$\int_0^1 \hat{Q}(x)e^{-i(2m_1+1)\pi x}\,dx = \frac{c_{2m_1+1}}{i\pi(2m_1+1)}$$

bulunur. Böylece (3.38) ispatlanır.

Şimdi (3.37) denkleminde $\tilde{Q}(1) = 0$ ve $\hat{Q}(1) = 0$ eşitlikleri ile beraber kısmi integrasyon alınırsa;

$$b_1(\lambda_m) = -\left\{(\tilde{Q}(x) - \tilde{Q}_0)^2\frac{e^{i2m\pi x}}{i2m\pi}\Big|_0^1 - \frac{2}{i2m\pi}\int_0^1 (\tilde{Q}(x) - \tilde{Q}_0)\tilde{q}(x)e^{i2m\pi x}\,dx\right\}$$

$$-\left\{(\hat{Q}(x)-\hat{Q}_0)^2\frac{e^{i2m\pi x}}{i2m\pi}\Big|_0^1-\frac{2}{i2m\pi}\int_0^1(\hat{Q}(x)-\hat{Q}_0)\hat{q}(x)e^{i2m\pi x}\,dx\right\}+o(m^{-2})$$

olur. Burada ilk parantezdeki birinci terim ile ikinci parantezdeki birinci terim 0 ve her bir parantezdeki ikinci terim için tekrar kısmi integrasyon alınırsa;

$$\begin{aligned}
b_1(\lambda_m)=&\frac{-1}{2m^2\pi^2}(\tilde{Q}(x)-\tilde{Q}_0)\tilde{q}(x)e^{i2m\pi x}\Big|_0^1\\
&+\frac{1}{2m^2\pi^2}\int_0^1\left[\tilde{q}^2(x)+(\tilde{Q}(x)-\tilde{Q}_0)\tilde{q}'(x)\right]e^{i2m\pi x}\,dx\\
&-\frac{1}{2m^2\pi^2}(\hat{Q}(x)-\hat{Q}_0)\hat{q}(x)e^{i2m\pi x}\Big|_0^1\\
&+\frac{1}{2m^2\pi^2}\int_0^1\left[\hat{q}^2(x)+(\hat{Q}(x)-\hat{Q}_0)\hat{q}'(x)\right]e^{i2m\pi x}\,dx+o(m^{-2}),
\end{aligned}$$

$\tilde{Q}(1)=\hat{Q}(1)=0$ ve $q(0)=q(1)$ olduğu dikkate alınarak birinci ve üçüncü terim 0 ve

$$\begin{aligned}
b_1(\lambda_m)=&\frac{1}{2m^2\pi^2}\int_0^1(\tilde{q}^2(x)+(\tilde{Q}(x)-\tilde{Q}_0)\tilde{q}'(x))e^{i2m\pi x}\,dx\\
&+\frac{1}{2m^2\pi^2}\int_0^1(\hat{q}^2(x)+(\hat{Q}(x)-\hat{Q}_0)\hat{q}'(x))e^{i2m\pi x}\,dx+o(m^{-2})
\end{aligned}\tag{3.39}$$

elde edilir.

(3.39) eşitliğinde, $(\tilde{q}^2(x)+(\tilde{Q}(x)-\tilde{Q}_0)\tilde{q}'(x))\in L^1[0,1]$ ve $(\hat{q}^2(x)+(\hat{Q}(x)-\hat{Q}_0)\hat{q}'(x))\in L^1[0,1]$ dir. Riemann-Lebesgue lemma (bkz. Lemma 1.1.1) kullanılarak

$$b_1(\lambda_m)=o(m^{-2})$$

olduğu elde edilir. Böylece (3.31) ispatlandı.

Şimdi (3.32) yaklaşımını ispatlayalım. $c_{m_1}c_{m_2}c_{2m+m_1+m_2}=o(m^{-1})$ yaklaşımı yardımıyla ispat tamamlanacaktır (Shkalikov ve Veliev 2009). Bunun için önce

$$c_{m_1}c_{m_2}c_{2m+m_1+m_2}=o(m^{-1})\tag{3.40}$$

olduğunu gösterelim. $|m|\gg N$ için

$$c_{2m}=\int_0^1 q(x)e^{-i2m\pi x}\,dx$$

eşitliğinde integrale kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$c_{2m} = -q(x)\frac{e^{-i2m\pi x}}{i2m\pi}\Big|_0^1 + \frac{1}{i2m\pi}\int_0^1 q'(x)e^{-i2m\pi x}\,dx$$

olur. Bu denklemde $q(0) = q(1)$ olduğu dikkate alınarak eşitliğin sağ tarafında bulunan birinci terim 0 ve ikinci terimde integralin değeri $o(1)$ olur. Dolayısıyla

$$c_{2m} = o\left(\frac{1}{m}\right)$$

elde edilir. $b_2(\lambda_m)$ yaklaşımının ispatı için (3.34) ile (3.35)'i göz önüne alarak ve (3.22) eşitliğinin sağ tarafındaki toplam

$$b_2(\lambda_m) = \sum_{\substack{m_1,m_2=-\infty \\ m_1,m_1+m_2\neq 0,-2m}}^{\infty} \frac{c_{m_1}c_{m_2}c_{2m+m_1+m_2}}{\prod_{t=1,2}[\lambda_m - (\pi(m+m_t))^2]}$$

$$= \frac{1}{\pi^4}\sum_{\substack{m_1,m_2=-\infty \\ m_1,m_1+m_2\neq 0,-2m}}^{\infty} \frac{c_{m_1}c_{m_2}c_{2m+m_1+m_2}}{-m_1(2m+m_1)(-m_1-m_2)(2m+m_1+m_2)} + o(m^{-2})$$

(3.40) yaklaşımı ile

$$|b_2(\lambda_m)| = o(m^{-1})\sum_{m_1,m_2}\frac{1}{|-m_1(2m+m_1)(-m_1-m_2)(2m+m_1+m_2)|}$$

$$= o(m^{-1})O\left(\left(\frac{ln|m|}{m}\right)^2\right) = o(m^{-2})$$

bulunur. Böylece lemmanın ispatı tamamlanır.

3.1.3 Lemma $q(x) \in W_1^2[0,1]$, $\quad k = 0,1$ için $q^{(k)}(0) = q^{(k)}(1)$ ve $c_0 = 0$ olsun. Tüm yeterince büyük m için aşağıdaki yaklaşımlar elde edilir:

$$a_1(\lambda_m) = \frac{1}{(2m)^2\pi^2}\int_0^1 q^2(x)\,dx + o(m^{-2}), \tag{3.41}$$

$$a_2(\lambda_m) = o(m^{-2}). \tag{3.42}$$

İspat İlk olarak (3.41) bağıntısını ispatlayalım. Bunun için (3.34) ve (3.35)'i dikkate alarak ve (3.19) eşitliğinin sağ tarafındaki toplamda (3.27) ve (3.28) eşitliklerini kullanarak $a_1(\lambda_m)$ toplamını aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$a_1(\lambda_m) = \sum_{\substack{m_1=-\infty \\ m_1\neq 0,-2m}}^{\infty} \frac{c_{m_1}c_{m_1}}{[\lambda_m - (\pi(m+m_1))^2]}$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \sum_{\substack{m_1=-\infty \\ m_1\neq 0,-2m}}^{\infty} \frac{c_{m_1}c_{m_1}}{-m_1(2m+m_1)} + o(m^{-2})$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \sum_{2m_1\neq 0,-2m} \frac{c_{2m_1}c_{2m_1}}{-2m_1(2m+2m_1)}$$

$$+\frac{1}{\pi^2} \sum_{2m_1+1\neq -2m} \frac{c_{2m_1+1}c_{2m_1+1}}{-(2m_1+1)(2m+2m_1+1)} + o(m^{-2})$$

$$= -\frac{1}{\pi^2} \sum_{\substack{2m_1\neq -2m, \\ 2m_1>0}} \left[\frac{c_{2m_1}c_{2m_1}}{2m_1(2m+2m_1)} - \frac{c_{2m_1}c_{2m_1}}{2m_1(2m-2m_1)}\right]$$

$$-\frac{1}{\pi^2} \sum_{2m_1+1>0} \left[\frac{c_{2m_1+1}c_{2m_1+1}}{(2m_1+1)(2m+2m_1+1)} - \frac{c_{2m_1+1}c_{2m_1+1}}{(2m_1+1)(2m-2m_1-1)}\right]$$

$$+o(m^{-2})$$

$$= \frac{2}{\pi^2} \sum_{\substack{2m_1\neq -2m, \\ 2m_1>0}} \frac{c_{2m_1}c_{2m_1}}{(2m+2m_1)(2m-2m_1)}$$

$$+\frac{2}{\pi^2} \sum_{2m_1+1>0} \frac{c_{2m_1+1}c_{2m_1+1}}{(2m+2m_1+1)(2m-2m_1-1)} + o(m^{-2}). \tag{3.43}$$

(3.43) denkleminde Parseval eşitliği ve $c_{2m_1} = c_{-2m_1}$, $c_{2m_1+1} = c_{-(2m_1+1)}$ olduğu kullanılırsa,

$$a_1(\lambda_m) = -\int_0^1 (\tilde{G}^+(x,m) - \tilde{G}_0^+(m))^2\, e^{i(-4m)\pi x}\, dx$$

$$-\int_0^1 (\hat{G}^+(x,m) - \hat{G}_0^+(m) + o(m^{-2}))^2\, e^{i(-4m)\pi x}\, dx + o(m^{-2})$$

$$= -\int_0^1 (\tilde{G}^+(x,m) - \tilde{G}_0^+(m))^2\, e^{i(-4m)\pi x}\, dx$$

$$-\int_0^1 (\hat{G}^+(x,m) - \hat{G}_0^+(m))^2\, e^{i(-4m)\pi x}\, dx + o(m^{-2}) \tag{3.44}$$

elde edilir. Burada $2m_1 \neq 0$ için

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{G}_{m_1}^{\pm}(m) =: (\tilde{G}^{\pm}(x,m), e^{i(2m_1)\pi x}) = \tfrac{c_{2m_1 \pm (-2m)}}{i\pi(2m_1)}, \\ &\hat{G}_{m_1}^{\pm}(m) =: (\hat{G}^{\pm}(x,m), e^{i(2m_1+1)\pi x}) = \tfrac{c_{2m_1+1 \pm (-2m)}}{i\pi(2m_1+1)} + \tfrac{2}{(2m_1+1)^2\pi^2} \textstyle\int_0^1 \hat{q}(t) e^{i2m\pi t}\, dt, \end{aligned}\right\} \tag{3.45}$$

$$\left.\begin{aligned}\tilde{G}^{\pm}(x,m) &= \textstyle\int_0^x \tilde{q}(t)\, e^{\mp i(-2m)\pi t}\, dt - c_{\pm(-2m)}x,\\ \hat{G}^{\pm}(x,m) &= \textstyle\int_0^x \hat{q}(t)\, e^{\mp i(-2m)\pi t}\, dt - x\int_0^1 \hat{q}(t)\, e^{\mp i(-2m)\pi t}\, dt\end{aligned}\right\} \tag{3.46}$$

ve

$$\tilde{G}^{\pm}(x,m) - \tilde{G}_0^{\pm}(m) = \sum_{2m_1 \neq -2m} \frac{c_{2m_1}}{i\pi(2m_1 \mp (-2m))} e^{i(2m_1 \mp (-2m))\pi x},$$

$$\hat{G}^{\pm}(x,m) - \hat{G}_0^{\pm}(m) = \sum \frac{c_{2m_1+1}}{i\pi(2m_1 + 1 \mp (-2m))} e^{i(2m_1+1 \mp (-2m))\pi x} + o(m^{-2})$$

fonksiyonlarının $\{e^{i(2m_1)\pi x} : m_1 \in \mathbb{Z}\}$ ve $\{e^{i(2m_1+1)\pi x} : m_1 \in \mathbb{Z}\}$ bazlarına göre Fourier katsayılarını gösterir. Burada Lemma 1.1.2 ve (3.46) eşitliklerini göz önünde bulundurarak aşağıdaki yaklaşımlar $m \to \infty$ iken

$$\left.\begin{aligned}\tilde{G}^{\pm}(x,m) - \tilde{G}_0^{\pm}(m) &= \tilde{G}^{\pm}(x,m) - \textstyle\int_0^1 \tilde{G}^{\pm}(x,m)\, dx = o(1),\\ \hat{G}^{\pm}(x,m) - \hat{G}_0^{\pm}(m) &= \hat{G}^{\pm}(x,m) - \textstyle\int_0^1 \hat{G}^{\pm}(x,m)\, dx = o(1)\end{aligned}\right\} \tag{3.47}$$

x'de düzgündür.

(3.46)'nın tanımından

$$\tilde{G}^{\pm}(1,m) = \tilde{G}^{\pm}(0,m) = 0, \qquad \hat{G}^{\pm}(1,m) = \hat{G}^{\pm}(0,m) = 0 \tag{3.48}$$

eşitliklerini gösterelim. (3.46)'da $x = 1$ için

$$\tilde{G}^{+}(1,m) = \int_0^1 \tilde{q}(t) e^{-i(-2m)\pi t}\, dt - c_{(-2m)}$$

olduğundan eşitliğin sağ tarafında bulunan integralin değeri $c_{(-2m)}$'e eşittir. Dolayısıyla $\tilde{G}^{+}(1,m) = 0$ elde edilir. $x = 0$ için (3.46)'nın tanımından açıktır. Benzer şekilde $\hat{G}^{+}(1,m) = \hat{G}^{+}(0,m) = 0$ eşitliği elde edilebilir. Ayrıca (3.13) eşitliğini dikkate alarak,

$$c_{2m} = \int_0^1 q(x) \cos 2m\pi x\, dx$$

olduğundan eşitliğin sağ tarafında bulunan integrale kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$c_{2m} = q(x)\, \frac{\sin 2m\pi x}{2m\pi} \Big|_0^1 - \frac{1}{2m\pi} \int_0^1 q'(x) \sin 2m\pi x\, dx$$

bulunur, eşitliğin sağındaki birinci terim 0 ve integrale tekrar kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$c_{2m} = \frac{1}{(2m\pi)^2} q'(x) \cos 2m\pi x \Big|_0^1 - \frac{1}{(2m\pi)^2} \int_0^1 q''(x) \cos 2m\pi x \, dx$$

olur, bu denklemde $q'(0) = q'(1)$ eşitliği kullanılarak birinci terim 0 ve

$$\int_0^1 q''(x) \cos 2m\pi x \, dx = o(1)$$

olduğundan

$$c_{2m} = o(m^{-2}) \tag{3.49}$$

elde edilir.

Şimdi (3.45) tanımında ilk ifadenin ispatını verelim. $(\tilde{G}^+(x,m), e^{i(2m_1)\pi x})$ ifadesinde $L_2(0,1)$'deki iç çarpım kullanılarak, yani

$$(\tilde{G}^+(x,m), e^{i(2m_1)\pi x}) = \int_0^1 \tilde{G}^+(x,m) e^{-i(2m_1)\pi x} \, dx$$

yazılabilir. Bu eşitliğin sağ tarafında kısmi integrasyon alınırsa;

$$-\tilde{G}^+(x,m) \frac{e^{-i(2m_1)\pi x}}{i2m_1\pi} \Big|_0^1 + \frac{1}{i2m_1\pi} \int_0^1 (\tilde{q}(x) e^{-i(-2m)\pi x} - c_{(-2m)}) e^{-i(2m_1)\pi x} \, dx$$

olur. (3.48)'i dikkate alarak eşitliğin sağında bulunan birinci terim 0 ve

$$\begin{aligned}(\tilde{G}^+(x,m), e^{i(2m_1)\pi x}) &= \frac{1}{i2m_1\pi} \int_0^1 \tilde{q}(x) e^{i(2m-2m_1)\pi x} \, dx \\ &= \frac{c_{2m_1+(-2m)}}{i2m_1\pi}\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.45) tanımında ikinci ifade için $L_2(0,1)$'deki iç çarpım kullanılarak, aşağıdaki eşitliğin sağ tarafında kısmi integrasyon alınırsa;

$$\begin{aligned}\hat{G}^+_{m_1}(m) &= \int_0^1 \hat{G}^+(x,m) e^{-i(2m_1+1)\pi x} \, dx \\ &= -\hat{G}^+(x,m) \frac{e^{-i(2m_1+1)\pi x}}{i(2m_1+1)\pi} \Big|_0^1 \\ &+ \frac{1}{i(2m_1+1)\pi} \int_0^1 \left[\hat{q}(x) e^{-i(-2m)\pi x} - \int_0^1 \hat{q}(t) e^{-i(-2m)\pi t} \, dt \right] e^{-i(2m_1+1)\pi x} \, dx\end{aligned}$$

olur. (3.48) göz önünde bulundurularak birinci terim 0 ve

$$\int_0^1 \hat{G}^+(x,m)e^{-i(2m_1+1)\pi x}\,dx = \frac{1}{i(2m_1+1)\pi}\int_0^1 \hat{q}(x)e^{-i(2m_1+1+(-2m))\pi x}\,dx$$

$$-\frac{1}{i(2m_1+1)\pi}\int_0^1 \hat{q}(t)e^{-i(-2m)\pi t}\,dt\int_0^1 e^{-i(2m_1+1)\pi x}\,dx$$

$$= \frac{1}{i(2m_1+1)\pi}\int_0^1 \hat{q}(x)e^{-i(2m_1+1+(-2m))\pi x}\,dx + \frac{2}{(2m_1+1)^2\pi^2}\int_0^1 \hat{q}(t)e^{i2m\pi t}\,dt$$

$$= \frac{c_{2m_1+1+(-2m)}}{i(2m_1+1)\pi} + \frac{2}{(2m_1+1)^2\pi^2}\int_0^1 \hat{q}(t)e^{i2m\pi t}\,dt \tag{3.50}$$

elde edilir. (3.50) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terimi ele alalım. Bunun için (3.26) integralde yerine yazılır ve kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\int_0^1 \hat{q}(t)e^{i2m\pi t}\,dt = \int_0^1 \frac{q(t)-q(1-t)}{2}e^{i2m\pi t}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\int_0^1 q(t)e^{i2m\pi t}\,dt - \int_0^1 q(1-t)e^{i2m\pi t}\,dt\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{q(t)\frac{e^{i2m\pi t}}{i2m\pi}\Big|_0^1 - \frac{1}{i2m\pi}\int_0^1 q'(t)e^{i2m\pi t}\,dt\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{-q(1-t)\frac{e^{i2m\pi t}}{i2m\pi}\Big|_0^1 - \frac{1}{i2m\pi}\int_0^1 q'(1-t)e^{i2m\pi t}\,dt\right\}$$

olur. Burada eşitliğin sağ tarafında bulunan birinci ve ikinci parantezde $q(0) = q(1)$ eşitliğini dikkate alarak her bir parantezdeki birinci terim 0 olacağından ve tekrar her iki integral için kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$= \frac{1}{2}\left\{q'(t)\frac{e^{i2m\pi t}}{(2m\pi)^2}\Big|_0^1 - \frac{1}{(2m\pi)^2}\int_0^1 q''(t)e^{i2m\pi t}\,dt\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{q'(1-t)\frac{e^{i2m\pi t}}{(2m\pi)^2}\Big|_0^1 + \frac{1}{(2m\pi)^2}\int_0^1 q''(1-t)e^{i2m\pi t}\,dt\right\}$$

bulunur. Bu eşitlikte $q'(0) = q'(1)$ eşitliği göz önüne alınarak birinci ve ikinci parantezdeki ilk terimler 0 ve her bir integralin değeri $o(1)$ dir. Dolayısıyla

$$\int_0^1 \hat{q}(t)e^{i2m\pi t}\,dt = o(m^{-2}) \tag{3.51}$$

olur. (3.50) eşitliğinde (3.51) kullanılarak

$$\hat{G}^{+}(x,m)-\hat{G}_{0}^{+}(m)=\sum\frac{c_{2m_1+1}}{i\pi(2m_1+1-(-2m))}e^{i(2m_1+1-(-2m))\pi x}+o(m^{-2})$$

elde edilir ve ikinci terim x'de düzgündür (uniform).

(3.44) eşitliğinin sağ tarafında bulunan her iki integrale kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
a_1(\lambda_m) &= -(\tilde{G}^{+}(x,m)-\tilde{G}_{0}^{+}(m))^2\,\frac{e^{i(-4m)\pi x}}{i(-4m)\pi}\Big|_0^1\\
&+\frac{1}{i(-4m)\pi}\int_0^1 2(\tilde{G}^{+}(x,m)-\tilde{G}_{0}^{+}(m))\,(\tilde{q}(x)\,e^{-i(-2m)\pi x}-c_{(-2m)})\,e^{i(-4m)\pi x}\,dx\\
&-(\hat{G}^{+}(x,m)-\hat{G}_{0}^{+}(m))^2\,\frac{e^{i(-4m)\pi x}}{i(-4m)\pi}\Big|_0^1\\
&+\frac{1}{i(-4m)\pi}\int_0^1 2(\hat{G}^{+}(x,m)-\hat{G}_{0}^{+}(m))\,(\hat{q}(x)\,e^{-i(-2m)\pi x}-\int_0^1\hat{q}(t)\,e^{-i(-2m)\pi t}\,dt)\\
&\times e^{i(-4m)\pi x}\,dx+o(m^{-2})
\end{aligned}$$

bu denklemde (3.48) eşitlikleri kullanılarak, birinci ve üçüncü terim 0 olacağından ve (3.51) yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
&a_1(\lambda_m)\\
&=\frac{1}{i(-4m)\pi}\int_0^1 2(\tilde{G}^{+}(x,m)-\tilde{G}_{0}^{+}(m))\,(\tilde{q}(x)\,e^{-i(-2m)\pi x}-c_{(-2m)})\,e^{i(-4m)\pi x}\,dx\\
&\quad+\frac{1}{i(-4m)\pi}\int_0^1 2(\hat{G}^{+}(x,m)-\hat{G}_{0}^{+}(m))\,\hat{q}(x)\,e^{-i(-2m)\pi x}\,e^{i(-4m)\pi x}\,dx+o(m^{-2})\\
&=\frac{2}{i(-4m)\pi}\left\{\int_0^1(\tilde{G}^{+}(x,m)-\tilde{G}_{0}^{+}(m))\,\tilde{q}(x)\,e^{i(-2m)\pi x}\,dx\right.\\
&\quad\left.-\int_0^1(\tilde{G}^{+}(x,m)-\tilde{G}_{0}^{+}(m))\,c_{(-2m)}\,e^{i(-4m)\pi x}\,dx\right\}\\
&\quad+\frac{2}{i(-4m)\pi}\int_0^1(\hat{G}^{+}(x,m)-\hat{G}_{0}^{+}(m))\,\hat{q}(x)\,e^{i(-2m)\pi x}\,dx+o(m^{-2})
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitliğin sağ tarafında bulunan tüm integrallere kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$a_1(\lambda_m)=\frac{2}{i(-4m)\pi}\left\{-(\tilde{G}^{+}(x,m)-\tilde{G}_{0}^{+}(m))\,\tilde{q}(x)\,\frac{e^{i(-2m)\pi x}}{i2m\pi}\Big|_0^1\right.$$

$$+\frac{1}{i2m\pi}\int_0^1\Big[\tilde{q}^2(x)e^{-i(-2m)\pi x} - c_{(-2m)}\,\tilde{q}(x) + (\tilde{G}^+(x,m)-\tilde{G}_0^+(m))\,\tilde{q}'(x)\Big]$$

$$\times e^{i(-2m)\pi x}\,dx + (\tilde{G}^+(x,m)-\tilde{G}_0^+(m))\,c_{(-2m)}\,\frac{e^{i(-4m)\pi x}}{i4m\pi}\Big|_0^1$$

$$-\frac{1}{i4m\pi}\int_0^1(\tilde{q}(x)\,e^{-i(-2m)\pi x} - c_{(-2m)})c_{(-2m)}e^{i(-4m)\pi x}\,dx\Big\}$$

$$+\frac{2}{i(-4m)\pi}\Big\{-(\hat{G}^+(x,m)-\hat{G}_0^+(m))\,\hat{q}(x)\,\frac{e^{i(-2m)\pi x}}{i2m\pi}\Big|_0^1 + \frac{1}{i2m\pi}\int_0^1\big[\hat{q}^2(x)e^{-i(-2m)\pi x}$$

$$-\hat{q}(x)\int_0^1\hat{q}(t)e^{-i(-2m)\pi t}\,dt + (\hat{G}^+(x,m)-\hat{G}_0^+(m))\,\hat{q}'(x)\big]\,e^{i(-2m)\pi x}\,dx\Big\} + o(m^{-2})$$

olur. Burada (3.48)'deki eşitlikleri ve $q(0) = q(1)$ eşitliğini göz önünde bulundurarak ilk parantezdeki birinci ve üçüncü terim 0, ikinci parantezdeki birinci terim 0 ve bu parantezde (3.51) yerine yazılırsa, yeterince büyük m için,

$$a_1(\lambda_m)$$

$$=\frac{1}{(2m)^2\pi^2}\left[\int_0^1\tilde{q}^2 + \int_0^1(\tilde{G}^+(x,m)-\tilde{G}_0^+(m))\,\tilde{q}'(x)\,e^{i(-2m)\pi x}\,dx\right] - \frac{3|c_{(-2m)}|^2}{2\pi^2(2m)^2}$$

$$+\frac{1}{(2m)^2\pi^2}\left[\int_0^1\hat{q}^2 + \int_0^1(\hat{G}^+(x,m)-\hat{G}_0^+(m))\,\hat{q}'(x)\,e^{i(-2m)\pi x}\,dx\right] + o(m^{-2}) \quad (3.52)$$

değeri elde edilir. Böylece $(\tilde{G}^+(x,m)-\tilde{G}_0^+(m))\,\tilde{q}'(x) \in L^1[0,1]$ ve $(\hat{G}^+(x,m)-\hat{G}_0^+(m))\,\hat{q}'(x) \in L^1[0,1]$ olduğundan Riemann-Lebesgue lemmayı (bkz. Lemma 1.1.1) kullanarak, (3.25) ve (3.26) fonksiyonları dikkate alınarak (3.52) eşitliğinde yerine koyulursa;

$$a_1(\lambda_m) = \frac{1}{(2m)^2\pi^2}\int_0^1\tilde{q}^2(x)\,dx + \frac{1}{(2m)^2\pi^2}\int_0^1\hat{q}^2(x)\,dx + o(m^{-2})$$

$$= \frac{1}{2(2m)^2\pi^2}\int_0^1(q^2(x)+q^2(1-x))\,dx + o(m^{-2}),$$

burada $1-x=u$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$a_1(\lambda_m) = \frac{1}{(2m)^2\pi^2}\int_0^1 q^2(x)\,dx + o(m^{-2})$$

bulunur. Böylece (3.41) eşitliğinin ispatı tamamlanır.

Şimdi $a_2(\lambda_m) = o(m^{-2})$ olduğu ispatlayalım. (3.21), (3.34) ve (3.35) eşitlikleri ile birlikte

$$a_2(\lambda_m) = \sum_{\substack{m_1,m_2=-\infty \\ m_1,m_1+m_2\neq 0,-2m}}^{\infty} \frac{c_{m_1}c_{m_2}c_{m_1+m_2}}{\prod_{t=1,2}[\lambda_m - (\pi(m+m_t))^2]}$$

$$= \sum_{m_1,m_2} \frac{\pi^{-4}c_{m_1}c_{m_2}c_{m_1+m_2}}{-m_1(2m+m_1)(-m_1-m_2)(2m+m_1+m_2)} + o(m^{-2}) \qquad (3.53)$$

elde edilir. (3.53)'de $m_1 + m_2$ toplamını m_2 ile değiştirerek

$$a_2(\lambda_m) = \frac{1}{\pi^4} \sum_{m_1,m_2} \frac{c_{m_1}c_{m_2-m_1}c_{m_2}}{-m_1(2m+m_1)(-m_2)(2m+m_2)} + o(m^{-2})$$

formülünü yazabiliriz.

$$\frac{1}{-k(2m+k)} = \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{2m+k} - \frac{1}{k}\right)$$

eşitliği ile

$$a_2(\lambda_m) = \frac{1}{\pi^4(2m)^2} \sum_{j=1}^{4} S_j \qquad (3.54)$$

alınır, burada

$$S_1 = \sum_{m_1,m_2} \frac{c_{m_1}c_{m_2-m_1}c_{m_2}}{m_1 m_2}, \qquad S_2 = \sum_{m_1,m_2} \frac{c_{m_1}c_{m_2-m_1}c_{m_2}}{-m_2(2m+m_1)}$$

$$S_3 = \sum_{m_1,m_2} \frac{c_{m_1}c_{m_2-m_1}c_{m_2}}{-m_1(2m+m_2)}, \qquad S_4 = \sum_{m_1,m_2} \frac{c_{m_1}c_{m_2-m_1}c_{m_2}}{(2m+m_1)(2m+m_2)}.$$

Şimdi (3.54)'nin sonuçlarını gösterelim. Bunun için önce çift durumu göz önüne alarak S_1'in çift kısmı olan $\tilde{S}_1$'yı ispatlayalım:

Parseval eşitliği ve (3.38)'in ilk eşitliğini kullanarak,

$$\tilde{S}_1 = \pi^2 \int_0^1 (\tilde{Q}(x) - \tilde{Q}_0)^2\, \tilde{q}(x)\, dx$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafında bulunan integralde $\tilde{Q}(x) - \tilde{Q}_0 = u$ değişken değiştirmesi yapılır ve $c_0 = 0$ varsayımı kullanılırsa

$$\tilde{S}_1 = \pi^2 \int_0^1 (\tilde{Q}(x) - \tilde{Q}_0)^2\, \tilde{q}(x)\, dx = 0$$

bulunur.

Benzer şekilde Parseval eşitliği, (3.38)'in ilk eşitliği ve (3.45)-(3.48) dikkate alınarak Riemann-Lebesgue lemma ve (3.47) ile

$$\tilde{S}_2 = -\pi^2 \int_0^1 (\tilde{Q}(x) - \tilde{Q}_0)\,(\tilde{G}^+(x,m) - \tilde{G}_0^+(m))\,\tilde{q}(x)\,e^{i\pi(-2m)x}\,dx = o(1),$$

$$\tilde{S}_3 = -\pi^2 \int_0^1 (\tilde{Q}(x) - \tilde{Q}_0)\,(\tilde{G}^-(x,m) - \tilde{G}_0^-(m))\,\tilde{q}(x)\,e^{i\pi(2m)x}\,dx = o(1),$$

$$\tilde{S}_4 = \pi^2 \int_0^1 (\tilde{G}^-(x,m) - \tilde{G}_0^-(m))\,(\tilde{G}^+(x,m) - \tilde{G}_0^+(m))\,\tilde{q}(x)\,dx = o(1)$$

elde edilir.

Şimdi aynı yolla (3.54) eşitliğinin tek durumunu ispatlayalım. Parseval eşitliği ve (3.38)'in ikinci eşitliğini kullanarak,

$$\hat{S}_1 = \pi^2 \int_0^1 (\hat{Q}(x) - \hat{Q}_0)^2\,\hat{q}(x)\,dx$$

olur. Bu eşitliğin sağ tarafında bulunan integralde $\hat{Q}(x) - \hat{Q}_0 = u$ değişken değiştirmesi yapılır ve $c_0 = 0$ varsayımından

$$\hat{S}_1 = \pi^2 \int_0^1 (\hat{Q}(x) - \hat{Q}_0)^2\,\hat{q}(x)\,dx = 0$$

elde edilir.

Parseval eşitliği, (3.38)'in ikinci eşitliği ve (3.45)-(3.48) göz önüne alınarak Riemann-Lebesgue lemma ve (3.47) ile

$$\hat{S}_2 = -\pi^2 \int_0^1 (\hat{Q}(x) - \hat{Q}_0)\,(\hat{G}^+(x,m) - \hat{G}_0^+(m))\,\hat{q}(x)\,e^{i\pi(-2m)x}\,dx = o(m^{-2}),$$

$$\hat{S}_3 = -\pi^2 \int_0^1 (\hat{Q}(x) - \hat{Q}_0)\,(\hat{G}^-(x,m) - \hat{G}_0^-(m))\,\hat{q}(x)\,e^{i\pi(2m)x}\,dx = o(m^{-2}),$$

$$\hat{S}_4 = \pi^2 \int_0^1 (\hat{G}^-(x,m) - \hat{G}_0^-(m))\,(\hat{G}^+(x,m) - \hat{G}_0^+(m))\,\hat{q}(x)\,dx = o(m^{-2})$$

elde edilir. Böylece (3.42) ispatı tamamlanır.

3.1.1 Teorem $q(x) \in W_1^2[0,1]$ ve $k = 0,1$ için $q^{(k)}(0) = q^{(k)}(1)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki iddia sağlanır:

$\{(m\pi)^2 : m \in \mathbb{N}\}$, (3.1)- (3.2) operatörünün spektrumunun bir alt kümesi ise bu takdirde $(0,1)$ üzerinde h.h.y $q = 0$ dır.

İspat İlk olarak (3.3)'ü dikkate alarak

$$\lambda_m = (m\pi)^2 + c_0 + o(1)$$

olduğundan $c_0 = 0$ bulunur. $c_0 = 0$, (3.49), Lemma 3.1.2 ve Lemma 3.1.3'de elde edilen yaklaşımlar Lemma 3.1.1'de yerine koyulursa

$$\lambda_m = (m\pi)^2 + \frac{1}{(2m)^2\pi^2}\int_0^1 q^2(x)\,dx + o(m^{-2})$$

formu elde edilir. Hipotezden

$$\int_0^1 q^2(x)\,dx = 0$$

olur, yani h.h.y $q = 0$'dır.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Dirichlet sınır koşulu ve self-adjoint Sturm-Liouville operatörü ile birlikte potansiyelin türevlenebilmesi şartı altında potansiyelin hemen hemen her yerde sıfır olduğunu elde ederiz.

Bu çalışmanın sonuçları ile farklı diferansiyel operatörler ve Dirichlet sınır koşulu kullanılarak Ambarzumyan-tipli problemler çalışılabilir.

5. KAYNAKLAR

Adams, R. A., "Sobolev Spaces", *Academic Press* , (1975).

Ambarzumian, V., "Über eine Frage der Eigenwerttheorie", *Zeitschrift für Physik* 53, 690-695, (1929).

Berkman, K. E., "Self Adjoint Diferansiyel Operatörlerin Spektral Analizi", Yüksek Lisans Tezi *Pamukkale Üniversitesi FenBilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Denizli, (2017).

Borg, G., "Eine umkehrung der Sturm-Liouvilleschen eigenwertaufgabe bestimmung der differentialgleichung durch die eigenwerte", *Acta Math.* 78, 1-96, (1946).

Brezis, H., "Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations", *Universitext*, (2011).

Chern, H.H., Law, C. K. ve Wang, H.J., "Extension of Ambarzumyan's theorem to general boundary conditions ", *J. Math. Anal. Appl.* 263, 333-342, (2001).

Conway, J. B., "A Course in Functional Analysis", *Graduate Texts in Mathematics*, (1990).

Evans, L. C., "Partial Differential Equations", *American Mathematical Society*, (1998).

Freiling, G. ve Yurko, V. A., "Inverse Sturm-Liouville Problems and Their Applications", *NOVA Science Publishers*, New York, (2001).

Kıraç, A. A., "On The Spectral Analysis of the Non-Self-Adjoint Differential Operators", Doktora Tezi *Graduate School of Natural and Applied Sciences of Dokuz Eylül University*, İzmir, (2004).

Kıraç, A. A., "On the asymptotic simplicity of periodic eigenvalues and Titchmarsh's formula", *J. Math. Anal. Appl.* 425 (1), 440-450, (2015).

Kıraç, A. A., "Ambarzumyan's theorem for the quasi-periodic boundary conditions", *Anal. Math. Phys.* 6 (3), 297-300, (2016).

Kıraç, A. A., "Inverse problems associated with the Hill operator", *Electron. J. Diff. Equ.* 2016 (41), 1-12, (2016).

Kolmogorov, A. N. ve Fomin, S. V., "Introductary Real Analysis", *Revised English Edition Translatedand Edited by Richard A. Silverman, DOVER PUBLICATIONS, INC.*, New York, (1975).

Levitan, B. M. ve Gasymov, M.G., "Determination of a differential equation by two of its spectra", *Usp. Mat. Nauk* 19, 3–63, (1964).

Naimark, M. A., "Linear Differential Operators", *Vol. I, George G. Harrap and Company, Ltd.* , London, (1967).

Pöschel, J. ve Trubowitz, E., "Inverse Spectral Theory", *Academic Press*, Boston, (1987).

Shkalikov, A. A. ve Veliev, O. A., "On the Riesz basis property of the eigen-and associated functions of periodic and antiperiodic Sturm-Liouville problems", *Mathematical Notes* 85(5-6), 647-660, (2009).

Veliev, O.A. ve Duman, M., "The spectral expansion for a nonself-adjoint Hill operator with a locally integrable potential", *J. Math. Anal. Appl.* 265, 76-90, (2002).

Yurko, V. A., "On Ambarzumyan type-theorems", *Applied Mathematics Letters* 26, 506-509, (2013).

Veliev, O. A., "Asymptotic analysis of non-self-adjoint Hill operators", *Central European Journal of Mathematics* , 11 (12), 2234-2256, (2013).

Yılmaz, B. ve Veliev, O. A., "Asymptotic formulas for dirichlet boundary value problems", *Stud. Scientiarum Math. Hung.*, 42 (2), 153-171, (2005).