T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇİFT DİZİLERİN RIESZ ORTALAMASI VE ÇİFT SERİ UZAYLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FERİDE ÇALIŞIR

DENİZLİ, TEMMUZ - 2021

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇİFT DİZİLERİN RIESZ ORTALAMASI VE ÇİFT SERİ UZAYLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FERİDE ÇALIŞIR

DENİZLİ, TEMMUZ - 2021

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

FERİDE ÇALIŞIR

ÖZET

ÇİFT DİZİLERİN RIESZ ORTALAMASI VE ÇİFT SERİ UZAYLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
FERİDE ÇALIŞIR
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. G. CANAN HAZAR GÜLEÇ)

DENİZLİ, TEMMUZ - 2021

Bu tez dört ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, çift diziler ve serilerle ilgili literatürde yer alan bazı çalışmalardan bahsedildi. İkinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanımlar ve teoremler verildi. Üçüncü bölümde, çift indisli Riesz ortalaması ve mutlak toplanabilme metodu yardımıyla tanımlanan (Sarıgöl, 2021) $\left|\overline{N}_{p,q}\right|_k (1 \leq k < \infty)$ mutlak Riesz çift seri uzayının bir Banach uzayı olduğu ve $\mathcal{L}_k$ uzayına norm izomorfik olduğu gösterildi. Son bölüm olan dördüncü bölümde ise, $\left|\overline{N}_{p,q}\right|_k$uzayının $\alpha-,\ \beta(bp)-$ ve $\gamma-$dualleri belirlendi.

ANAHTAR KELİMELER: Çift Diziler, Çift Seriler, Dört Boyutlu Matrislerin Etki Alanı, Riesz Ortalaması, Mutlak Toplanabilme Metodu.

ABSTRACT

RIESZ MEAN OF DOUBLE SEQUENCES AND DOUBLE SERIES SPACES
MSC THESIS
FERİDE ÇALIŞIR
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATİCS
(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. G. CANAN HAZAR GÜLEÇ)

DENİZLİ, JULY 2021

This thesis consists of four main chapters. In the first chapter, some studies related to double sequences and series in the literature are mentioned. In the second chapter, some basic definitions and theorems that will be used in other chapters are given. In the third chapter, it is shown that absolutely Riesz double series space $\left|\bar{N}_{p,q}\right|_k$ $(1 \leq k < \infty)$, which is defined by combining double Riesz means with the concept of absolute summability method (Sarıgöl, 2021), is a Banach space and is norm isomorphic to the space $\mathcal{L}_k$. In the fourth chapter, which is the last chapter, $\alpha-,\ \beta(bp)-$ ve $\gamma-$ duals of the space $\left|\bar{N}_{p,q}\right|_k$ are determined.

KEYWORDS: Double Sequences, Double Series, Matrix Domain of Four-Dimensional Matrices, Riesz Means, Absolute Summability Method.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Gerçel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif gerçel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
c	Yakınsak dizilerin uzayı
c_0	Sıfıra yakınsak dizilerin uzayı
ℓ_k	Mutlak k - yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
$\mathbf{\Omega}$	$\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı tüm çift dizilerin uzayı
$\mathcal{M}_u$	Sınırlı çift dizilerin uzayı
$\mathcal{C}_p$	Pringsheim manada yakınsak çift dizilerin uzayı
$\mathcal{C}_r$	Regüler manada yakınsak çift dizilerin uzayı
$\mathcal{C}_{bp}$	Sınırlı ve Pringsheim manada yakınsak çift dizilerin uzayı
$\mathcal{C}_{p0}$	Pringsheim manada sıfıra yakınsak çift dizilerin uzayı
$\mathcal{C}_{bp0}$	Sınırlı ve Pringsheim manada sıfıra yakınsak çift dizilerin uzayı
$\boldsymbol{\mathcal{L}}_u$	Mutlak yakınsak seri oluşturan çift dizilerin uzayı
$\boldsymbol{\mathcal{L}}_k$	Mutlak $k-$toplanabilir çift dizilerin uzayı $(0 < k < \infty)$
BS	Kısmi toplamları sınırlı olan çift serilerin uzayı
$\mathcal{CS}_p$	Kısmi toplamları Pringsheim manada yakınsak olan çift serilerin uzayı

$\vartheta - \lim$	Çift dizinin $\vartheta-$yakınsaklığa göre limiti
ϑ $-$yakınsak	ϑ manada yakınsaklık
λ^{α}	λ çift dizi uzayının $\alpha-$duali
$\lambda^{\beta(\vartheta)}$	λ çift dizi uzayının $\beta(\vartheta)-$duali
λ^{γ}	λ çift dizi uzayının $\gamma-$duali
$(\lambda : \mu)$	λ uzayından μ uzayına tüm matrislerin sınıfı

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın yürütülmesi sırasında her türlü yol gösterici olan, olumlu tavrıyla, sabrıyla beni cesaretlendiren ve desteğini esirgemeyen değerli danışman hocam Doç. Dr. G. Canan HAZAR GÜLEÇ'e ve bölümdeki hocalarıma sonsuz teşekkür ederim.

Ayrıca maddi ve manevi destekleriyle yanımda olan kıymetli aileme ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

Dizilerin yakınsaklığının incelenmesi matematik analizde önemli bir yer tutmaktadır. Toplanabilme teorisi genellikle alışılmış seriler ve diziler için çalışılmıştır ve bunlar için birçok yakınsaklık metotları tanımlanmıştır. Bunlardan en ilgi çekici olanları matris toplanabilme ve özellikle de en bilinen metotlardan biri olan Riesz toplanabilme metodudur. Son zamanlarda ise çift dizilerin yakınsaklığı üzerine çalışmalara ilgi arttı. Çift dizi ve seri teorisi tek indisli dizi ve serilerin bir genellemesi olarak ortaya çıkmıştır. Tek dizilerin aksine çift dizilerde birçok yakınsaklık kavramı bulunur. Çift dizilerde ilk olarak Pringsheim manada yakınsaklık kavramı Pringsheim (1900) tarafından verildi. Pringsheim manada yakınsak tüm çift dizilerin uzayı $\mathcal{C}_p$ ile gösterilir. Yine, tek dizilerde bilinenin aksine çift dizilerde Pringsheim manada yakınsaklık bu dizinin sınırlılığını gerektirmemektedir. Hardy (1916-1919) ise bir çift dizi için Pringsheim manada limitinin mevcut olmasına ek olarak tek taraflı limitleri mevcut olduğu anlamında regüler yakınsaklık tanımını vererek bu boşluğu tamamladı. Pringsheim manada yakınsaklık ve regüler yakınsaklık üzerine çalışmalara Kojima (1922), Robison (1926) ve Hamilton (1936) gibi yazarlar önemli çalışmalarıyla katkıda bulundular.

Ayrıca, Móricz (1991), c ve c_0 tek dizi uzaylarına çift dizilerde karşılık gelen Pringsheim manada yakınsak $\mathcal{C}_p$, Pringsheim manada sıfıra yakınsak $\mathcal{C}_{p0}$ ve regüler manada yakınsak $\mathcal{C}_r$ çift dizi uzaylarının bazı özelliklerini inceledi. Zeltser (2001, 2002) esas olarak doktora tezinde, hem çift dizi uzaylarının topolojik özelliklerini hem de çift dizilerin toplanabilme teorisini inceledi. Móricz ve Rhoades (1988), çift diziler için hemen hemen yakınsaklık kavramının tanımını verdiler ve hemen hemen yakınsak çift dizilerin $\mathcal{C}_f$ uzayını tanımladılar.

Klâsik tek dizi uzaylarının çeşitli üçgen matrisler altındaki etki alanları incelenerek pek çok yeni dizi uzayı literatüre kazandırıldığı görülmektedir. Son zamanlarda ise bu uzaylara karşılık gelen çift dizi ve çift seri uzaylarında benzer çalışmalara ilgi artmıştır. Bu çalışmaların bazılarından bahsedelim.

Gökhan ve Çolak (2004, 2005) çalışmalarında $t = (t_{kl})$ pozitif reel sayıların bir dizisi olmak üzere $\mathcal{M}_u(t), \mathcal{C}_p(t)\ ve\ \mathcal{C}_{bp}(t)$ tam paranormlu çift dizi uzaylarını inşa ettiler ve $\mathcal{M}_u(t)$ ve $\mathcal{C}_{bp}(t)$ uzaylarının $alfa-, beta-$ve $gama-$ duallerini belirlediler.

Başar ve Sever (2009), mutlak $q-t$oplanabilen tek dizilerin iyi bilinen ℓ_q uzayına karşılık gelen $\mathcal{L}_q$ çift dizi uzayını tanımladılar ve bu uzayın bir Banach uzayı olduğunu gösterdiler. Ayrıca bu uzayın bazı özelliklerini vererek $\beta(\vartheta)-$ dual uzayını belirlediler ve $\mathcal{L}_q$ uzayının $alfa-$ ve $gama-$ duallerinin $\beta(\vartheta)-$ duali ile çakıştığını tespit ettiler.

Birinci mertebeden Cesàro ortalaması ve dört boyutlu bir matrisin bir çift dizi uzayındaki etki alanıyla ilgili olan Mursaleen ve Başar'ın (2014) çalışmasının esas sonuçları çift dizi uzayları ile ilgilenen araştırmacılar için oldukça önemlidir. Mursaleen ve Başar (2014), birinci mertebeden Cesàro dönüşümü sırasıyla sınırlı olan $\widetilde{\mathcal{M}}_u$, Pringsheim manada yakınsak olan $\widetilde{\mathcal{C}}_p$, Pringsheim manada sıfıra yakınsak olan $\widetilde{\mathcal{C}}_{0p}$, hem Pringsheim manada yakınsak hem de sınırlı olan $\widetilde{\mathcal{C}}_{bp}$, regüler manada yakınsak olan $\widetilde{\mathcal{C}}_r$ ve mutlak $q-t$oplanabilen $\widetilde{\mathcal{L}}_q$ çift dizi uzaylarını tanımladılar. Ayrıca, bu uzayların bazı topolojik özelliklerini inceleyerek bazı matris sınıflarını karakterize ettiler.

Demiriz ve Duyar (2015), fark dönüşümleri sırasıyla sınırlı olan $\mathcal{M}_u(\Delta)$, Pringsheim manada yakınsak olan $\mathcal{C}_p(\Delta)$, Pringsheim manada sıfıra yakınsak olan $\mathcal{C}_{0p}(\Delta)$, hem Pringsheim manada yakınsak hem de sınırlı olan $\mathcal{C}_{bp}(\Delta)$, regüler manada yakınsak olan $\mathcal{C}_r(\Delta)$, ve mutlak $q-t$oplanabilen $\mathcal{L}_q(\Delta)$ çift dizi uzaylarını tanımladılar. Ayrıca bu uzaylar ile ilgili bazı kapsama bağıntılarını incelediler, $\mathcal{M}_u(\Delta)$ uzayının $alfa-$ dualini, $\mathcal{C}_\eta(\Delta)$ uzayının $\beta(\nu)-$ dualini belirlediler ve bazı matris sınıflarını karakterize ettiler.

Yeşilkayagil ve Başar (2016, 2017, 2018) çalışmalarında Riesz ortalaması sınırlı, Pringsheim manada yakınsak, hem Pringsheim manada yakınsak hem de sınırlı, regüler manada yakınsak ve mutlak $q-$toplanabilir çift dizilerin

$$R^{qt}(\mathcal{M}_u) = \{x = (x_{mn}) \in \Omega :\ R^{qt}x \in \mathcal{M}_u\},$$

$$R^{qt}(\mathcal{C}_p) = \{x = (x_{mn}) \in \Omega : R^{qt}x \in \mathcal{C}_p\},$$

$$R^{qt}(\mathcal{C}_{bp}) = \{x = (x_{mn}) \in \Omega : R^{qt}x \in \mathcal{C}_{bp}\},$$

$$R^{qt}(\mathcal{C}_r) = \{x = (x_{mn}) \in \Omega : R^{qt}x \in \mathcal{C}_r\},$$

$$R^{qt}(\mathcal{L}_q) = \{x = (x_{mn}) \in \Omega : R^{qt}x \in \mathcal{L}_q\}, (0 < q < \infty),$$

uzaylarını tanımlayarak bu uzayların bazı cebirsel ve topolojik özelliklerini incelediler.

Okan Bodur (2021) yüksek lisans tezinde birinci mertebeden Cesàro ortalamasını mutlak toplanabilme kavramıyla birleştirmek suretiyle tanımlanan $|C_{1,1}|_k$ (Sarıgöl, 2021) mutlak çift seri uzayının bir Banach uzayı olduğunu ve $\mathcal{L}_k$ uzayı ile norm izomorfik olduğunu gösterdi.

Bu tez çalışmasında ise çift indisli Riesz ortalaması ve mutlak toplanabilme kavramları yardımıyla tanımlanan (Sarıgöl, 2021) mutlak Riesz toplanabilen $|\bar{N}_{p,q}|_k (1 \leq k < \infty)$ çift seri uzayının bir Banach uzayı olduğu ve $\mathcal{L}_k$ uzayına norm izomorfik olduğu gösterildi. Ayrıca, $|\bar{N}_{p,q}|_k$ uzayının $\alpha-$, $\beta(bp)-$ ve $\gamma-$dualleri belirlendi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde; tez boyunca kullanılacak olan temel tanımlar, kavramlar ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 2.1 X boş olmayan bir küme ve $\mathcal{F}$ reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$$+ : X \times X \longrightarrow X$$
$$(x, y) \longrightarrow x + y$$

$$. : \mathcal{F} \times X \longrightarrow X$$

$$(\alpha, x) \longrightarrow \alpha x$$

ikili işlemleri her $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ ve her $x, y, z \in X$ için aşağıdaki koşulları sağlıyorsa X kümesine $\mathcal{F}$ üzerinde lineer uzay (veya vektör uzayı) denir.

i) $x + y = y + x$,

ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$,

iii) Her $x \in X$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde bir tek $\theta \in X$ vardır,

iv) Her $x \in X$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde bir tek $(-x) \in X$ vardır,

v) $1.x = x$, (Burada 1, $\mathcal{F}$ cisminin birim elemanıdır.)

vi) $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$,

vii) $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$,

viii) $(\alpha\beta).x = \alpha.(\beta.x)$.

Tanım 2.2. X, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir lineer uzay ve U kümesi de X lineer uzayının bir alt kümesi olsun. Her $x, y \in U$ ve $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ için $\alpha x + \beta y \in U$ ise U kümesine X uzayının bir lineer alt uzayı denir (Maddox 1970).

Tanım 2.3. X boş olmayan bir küme olsun.

$$d:\ X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$$

dönüşümü verilsin. Eğer d dönüşümü her $x, y, z \in X$ için,

$i)$ $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

$ii)$ $d(x,y) = d(y,x)$,

$iii)$ $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (Üçgen Eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa d dönüşümüne X üzerinde metrik (uzaklık fonksiyonu) denir ve (X,d) ikilisine bir metrik uzay denir (Maddox 1970).

Örneğin, $\mathbb{R}$ üzerinde d dönüşümü

$$d:\ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$$

$$(x,y) \longrightarrow d(x,y) = |x-y|$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(\mathbb{R},d)$ bir metrik uzaydır. Bu metriğe alışılmış metrik veya mutlak değer metriği denir (Maddox 1970).

Tanım 2.4 X, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\|.\|:\ X \to \mathbb{R}$$

$$x \to \|x\|$$

fonksiyonu her $x,\ y \in X$ ve her $\alpha \in \mathcal{F}$ için,

$i)$ $\|x\| \geq 0$,

$ii)$ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

$iii)$ $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,

$iv)$ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen Eşitsizliği) özelliklerini sağlıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm denir. Bu durumda $(X, \|.\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı denir (Maddox 1970).

Örneğin, $1 \leq k < \infty$ olmak üzere $x = (x_n) \in \ell_k$ olsun. Eğer

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^k\right)^{1/k}$$

şeklinde tanımlanırsa $(\ell_k, \|.\|)$ ikilisi bir normlu uzay olur (Maddox 1970).

Tanım 2.5. X ve Y aynı $\mathcal{F}$ skaler cismi üzerinde birer vektör uzayı olsun. Eğer

$$T : X \longrightarrow Y$$

operatörü her $x, y \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

şartını sağlıyorsa T operatörüne X uzayından Y uzayına bir lineer operatör denir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.6. $(X, \|.\|_X)$ ve $(Y, \|.\|_Y)$ normlu uzaylar ve $T : X \longrightarrow Y$ bir lineer operatör olsun. Her $x \in X$ için

$$\|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$$

olacak şekilde bir $M > 0$ reel sayısı varsa T operatörüne sınırlı lineer operatör denir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.7. X ve Y normlu uzaylar ve $T : X \longrightarrow Y$ bir lineer operatör olsun. Bu durumda

$$\|T\| = \sup\left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in X, x \neq \theta \right\}$$

$$= \sup\{\|T(x)\| : x \in X, \|x\| \leq 1\}$$

olacak şekilde $\|T\|$ değerine T operatörünün normu denir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.8. X ve Y normlu uzaylar ve $T : X \longrightarrow Y$ bir lineer operatör olsun. Normu koruyan yani, her $x \in X$ için

$$\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$$

olan bire-bir ve örten T lineer operatörüne X normlu uzayından Y normlu uzayına lineer bir izometrik izomorfizm denir. Bu durumda X ve Y uzaylarına lineer izomorfiktirler denir ve $X \cong Y$ ile gösterilir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.9 (X, d) bir metrik uzay olmak üzere X uzayında bir (x_n) dizisi verilsin ve $x \in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisi x noktasına yakınsaktır denir. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ veya } x_n \to x$$

ile gösterilir (Maddox 1970).

Tanım 2.10 (X, d) bir metrik uzay olmak üzere X uzayında bir (x_n) dizisi verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $n, m > n_0$ olduğunda

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir (Maddox 1970).

Tanım 2.11 Bir (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite sahipse X metrik uzayına tam metrik uzayı denir.

Örneğin, $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x - y|$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(\mathbb{R}, d)$ bir tam metrik uzaydır (Maddox 1970).

Tanım 2.12 Bir $(X, \|.\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir noktaya yakınsıyorsa, bu durumda $(X, \|.\|)$ normlu uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı adı verilir (Maddox 1970).

Örneğin, ℓ_∞, c ve c_0 uzayları

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

normuna göre, $1 \leq k < \infty$ için ℓ_k uzayı

$$\|x\|_k = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^k\right)^{1/k}$$

normuna göre birer Banach uzaylarıdır (Maddox 1970).

Tanım 2.13 $\mathcal{F} = \mathbb{R}$ veya $\mathcal{F} = \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\omega = \{x = (x_n) : x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{F}, n \longrightarrow x(n) = x_n\}$$

kümesine reel veya kompleks terimli tüm dizilerin kümesi denir. ω kümesi

$$\big((x_k), (y_k)\big) \longrightarrow (x_k + y_k) \text{ ve } \big(\lambda, (x_k)\big) \longrightarrow (\lambda x_k)$$

ikili işlemleri ile $\mathcal{F}$ üzerinde bir vektör uzayıdır. ω nın herhangi bir alt vektör uzayına bir dizi uzayı denir (Boos and Cass 2000).

Örneğin,

$$\varphi = \{x = (x_n) \in \omega : \exists N \in \mathbb{N} ; \forall n \geq N \text{ için } x_n = 0 \},$$

$$\ell_\infty = \left\{x = (x_n) \in \omega : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\right\},$$

$$c = \left\{x = (x_n) \in \omega : \lim_{n\to\infty} x_n = m, \exists m \in \mathbb{R}\right\},$$

$$c_0 = \left\{x = (x_n) \in \omega : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\right\},$$

$$\ell_k = \left\{x = (x_n) \in \omega : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^k < \infty, \qquad (1 \leq k < \infty)\right\},$$

$$bs = \left\{x = (x_k) \in \omega : \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \in \ell_\infty\right\},$$

$$cs = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right) \in c \right\}$$

kümelerinin her biri birer dizi uzayıdır.

Tanım 2.14 $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi ve X boş olmayan herhangi küme olmak üzere

$$f : \quad \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow X$$

$$(m,n) \longrightarrow f(m,n) = x_{mn}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna $X -$ değerli bir çift dizi denir (Burkill ve Burkill 1980).

Herhangi bir $x = (x_{mn})$ çift dizisinin x_{mn} elemanlarını

$$\begin{bmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} & \cdots & x_{0n} & \cdots \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & \cdots \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ x_{m0} & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}$$

şeklinde bir tablo olarak gösterebiliriz.

Ω ile kompleks veya reel terimli bütün çift dizilerin kümesi gösterilir. Bu durumda,

$$\Omega = \{x = (x_{mn}) : \forall m,n \in \mathbb{N} \text{ için } x_{mn} \in \mathbb{C}\}$$

şeklinde ifade edilir. Ω kümesi, her $\alpha \in \mathbb{C}$ ve her $x = (x_{mn}), y = (y_{mn}) \in \Omega$ için

$$x + y = (x_{mn} + y_{mn}),$$

$$\alpha x = (\alpha x_{mn})$$

çift dizilerin koordinatsal toplama ve skalar ile çarpma işlemleri altında bir lineer uzaydır. Ω uzayının herhangi bir lineer alt uzayı ise çift dizi uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 2.15 $x = (x_{mn})$ kompleks terimli bir çift dizi olmak üzere

$$\sup_{m,n\in\mathbb{N}} |x_{mn}| < \infty$$

ise, $x = (x_{mn})$ çift dizisine sınırlıdır denir (Móricz ve Rhoades 1988).

Bütün sınırlı çift dizilerin kümesi $\mathcal{M}_u$ ile gösterilir. Buna göre,

$$\mathcal{M}_u := \left\{ x = (x_{mn}) \in \Omega : \|x\|_\infty = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} |x_{mn}| < \infty \right\}$$

ile ifade edilir. $\mathcal{M}_u$ uzayı $\|\cdot\|_\infty$ normu ile bir Banach uzayıdır (Móricz 1991).

Tanım 2.16 $x = (x_{mn})$ reel ya da kompleks terimli bir çift dizi olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda

$$|x_{mn} - l| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ doğal sayısı mevcut ise, bu durumda $x = (x_{mn})$ çift dizisine $l \in \mathbb{C}$ sayısına Pringsheim manada yakınsak ve l değerine de $x = (x_{mn})$ dizisinin Pringsheim limiti denir. Pringsheim manada yakınsak bir $x = (x_{mn})$ dizisine kısaca p -*yakınsak* dizi denir ve limiti

$$p - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = l$$

ile gösterilir (Pringsheim 1900).

Pringsheim manada tüm yakınsak çift dizilerin uzayı $\mathcal{C}_p$ ile gösterilir. Buna göre,

$$\mathcal{C}_p := \{x = (x_{mn}) \in \Omega : \exists l \in \mathbb{C}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0 \ni |x_{mn} - l| < \varepsilon\}$$

ile ifade edilir.

Tanımdan anlaşıldığı üzere Pringsheim manada yakınsak bir çift dizi, sınırlı olmayabilir.

Örneğin, Boos (2000)' den reel terimli $x = (x_{mn})$ çift dizisi

$$x_{mn} := \begin{cases} m, & n = 1 \\ -n, & m = 1, n \geq 2 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa, bu durumda $p - \lim x_{mn} = 0$ fakat $\sup_{m,n} x_{mn} = +\infty$ ve $\inf_{m,n} x_{mn} = -\infty$ olduğundan $x = (x_{mn})$ dizisi Pringsheim manada yakınsaktır fakat sınırlı değildir, yani $x \in \mathcal{C}_p - \mathcal{M}_u$ dir.

O halde, $\mathcal{C}_p \cap \mathcal{M}_u$ kümesi Pringsheim manada yakınsak ve sınırlı tüm çift dizilerin uzayıdır ve uzay $\mathcal{C}_{bp}$ ile gösterilir, yani

$$\mathcal{C}_{bp} := \left\{ x = (x_{mn}) \in \mathcal{C}_p : \|x\|_\infty = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} |x_{mn}| < \infty \right\} = \mathcal{C}_p \cap \mathcal{M}_u$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.17 $x = (x_{mn}) \in \mathcal{C}_p$ ve $p - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = l$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = \lim_{m\to\infty} x_{mn}$ ve her $m \in \mathbb{N}$ için $x_m = \lim_{n\to\infty} x_{mn}$ limitleri mevcut olan $x = (x_{mn})$ dizisine l noktasına regüler yakınsaktır denir ve regüler yakınsak bir $x = (x_{mn})$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} x_{mn}$ ve $\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} x_{mn}$ limitleri mevcut ve Pringsheim limitine eşittir. Regüler yakınsak çift dizilerin kümesi $\mathcal{C}_r$ gösterilir, yani

$$\mathcal{C}_r := \{x = (x_{mn}) \in \mathcal{C}_p : \ \forall m,n \in \mathbb{N} \text{ için } (x_{mn})_m, (x_{mn})_n \in c\}$$

şeklinde ifade edilir. Burada c yakınsak tek dizi uzayını ve $(x_{mn})_n \in c$ ise m indisine göre yakınsaklığı gösterir.

Tanım 2.18 $x = (x_{mn})$ çift dizisini göz önüne alalım ve bu $x = (x_{mn})$ dizisi aracılığıyla $s = (s_{mn})$ dizisini $\forall m,n \in \mathbb{N}$ için

$$s_{mn} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_{ij}$$

olacak şekilde tanımlayalım. Bu durumda (x,s) ikilisine bir çift seri denir. x_{mn} terimine serinin genel terimi, (s_{mn}) dizisine de serinin kısmi toplamlar dizisi denir.

Eğer (s_{mn}) kısmi toplamlar dizisi bir l sayısına $\vartheta - yakınsak$, yani

$$\vartheta - \lim_{m,n\to\infty} s_{mn} = \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_{ij} = l$$

ise, bu durumda (x, s) serisi $\vartheta - yakınsaktır$ denir ve $\vartheta -$ toplamı l sayısıdır. Yakınsak olmayan seriye ıraksak seri denir.

Genel terimi x_{ij} olan yakınsak serinin toplamı a ise bu durumda,

$$\sum_i \sum_j x_{ij} = a$$

şeklinde yazılır. Kısalık için tez boyunca $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty}$ toplamını $\sum_{i,j}$ ile göstereceğiz.

Başar ve Sever (2009), tek indisli dizilerde mutlak $q -$ toplanabilen dizilerin ℓ_q uzayına karşılık gelen $\mathcal{L}_q$ çift dizi uzayını

$$\mathcal{L}_q \ := \left\{ x = (x_{ij}) \ \in \ \Omega : \ \sum_{i,j} \left| x_{ij} \right|^q < \ \infty \right\}, (1 \leq q < \infty)$$

ile tanımladı ve $\mathcal{L}_q$uzayının

$$\|x\|_q = \left(\sum_{i,j} \left| x_{ij} \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

normu ile bir Banach uzayı olduğunu gösterdi.

Mutlak yakınsak seri oluşturan çift dizilerin uzayı ise

$$\mathcal{L}_u = \left\{ x = (x_{ij}) \ \in \ \Omega : \ \|x\|_1 = \sum_{i,j} \left| x_{ij} \right| < \ \infty \right\}$$

ile gösterilir.

Tez boyunca λ ve μ uzayları sırasıyla

$$\vartheta_1 - \lim : \lambda \to \mathbb{R} \ \text{ve} \ \vartheta_2 - \lim : \mu \to \mathbb{R}$$

lineer yakınsama kurallarına göre yakınsayan iki çift dizi uzayı olsun. $A = (a_{mnkl})$ reel veya kompleks terimli dört boyutlu sonsuz matris olsun.

Bir λ çift dizi uzayının $alfa-$ duali λ^{α} , $\vartheta-$ yakınsaklığa bağlı olan $beta-$ duali $\lambda^{\beta(\vartheta)}$ ve $gama-$ duali λ^{γ} sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.19 Bir λ çift dizi uzayının $\alpha-$ duali λ^{α},

$$\lambda^{\alpha} := \left\{(a_{ij}) \in \Omega : \text{her } (x_{ij}) \in \lambda \text{ için} \sum_{i,j} |a_{ij}\, x_{ij}| < \infty\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.20 $\vartheta-$ yakınsama kuralına göre λ çift dizi uzayının $\beta(\vartheta)-$ duali $\lambda^{\beta(\vartheta)}$,

$$\lambda^{\beta(\vartheta)} := \left\{(a_{ij}) \in \Omega : \text{ her } (x_{ij}) \in \lambda \text{ için } \vartheta - \sum_{i,j} a_{ij}\, x_{ij} \text{ mevcut}\right\}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.21 Bir λ çift dizi uzayının $\gamma-$ duali λ^{γ},

$$\lambda^{\gamma} := \left\{(a_{ij}) \in \Omega : \text{her } (x_{ij}) \in \lambda \text{ için } \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{i,j=0}^{m,n} a_{ij}\, x_{ij}\right| < \infty\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.22 Bir dört boyutlu sonsuz $A = (a_{mnkl})$ matrisinin herhangi bir λ çift dizi uzayında ϑ yakınsaklık türüne göre matris etki alanı $\lambda_A^{(\vartheta)}$,

$$\lambda_A^{(\vartheta)} = \left\{x = (x_{kl}) \in \Omega : Ax = \left(\vartheta - \sum_{k,l} a_{mnkl}\, x_{kl}\right)_{m,n\in\mathbb{N}} \text{ mevcut ve } Ax \in \lambda\right\}$$

ile tanımlanır.

Yukarıdaki notasyon yardımı ile söyleyebiliriz ki A matrisinin λ uzayından μ uzayı içine bir matris dönüşümü tanımlaması için gerek ve yeter şart her $x \in \lambda$ için Ax

mevcut ve $Ax \in \mu$ olmasıdır. λ uzayından μ uzayı içine tüm dört boyutlu matris dönüşümlerinin kümesini $(\lambda:\mu)$ ile göstereceğiz.

Ayrıca $(\lambda:\mu;p)$ ifadesi ile $\forall\, x \in \lambda$ için

$$\vartheta_2 - \lim Ax = \vartheta_1 - lim\, x$$

koşulunu sağlayan $(\lambda:\mu)$ sınıfına ait tüm dört boyutlu (a_{mnkl}) matrislerinin sınıfı gösterilir.

Tanım 2.23 $x = (x_i) \in \ell_p$ ve $y = (y_i) \in \ell_p$ olsun. $1 \leq p < \infty$ için

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliğine Minkowski eşitsizliği denir (Maddox 1970).

Tez boyunca $\forall\, m,n,k,l \in \mathbb{N}$ için notasyonda kısalık olması için aşağıdakileri kullanacağız.

$$\Delta_{10}x_{mn} = x_{mn} - x_{m+1,n}\,,$$

$$\Delta_{01}x_{mn} = x_{mn} - x_{m,n+1}\,,$$

$$\Delta_{11}x_{mn} = \Delta_{01}(\Delta_{10}x_{mn}) = \Delta_{10}(\Delta_{01}x_{mn}),$$

$$\Delta_{10}^{kl}a_{mnkl} = a_{mnkl} - a_{mn,k+1,l}\,,$$

$$\Delta_{01}^{kl}a_{mnkl} = a_{mnkl} - a_{mnk,l+1}\,,$$

$$\Delta_{11}^{kl}a_{mnkl} = \Delta_{01}^{kl}\left(\Delta_{10}^{kl}a_{mnkl}\right) = \Delta_{10}^{kl}\left(\Delta_{01}^{kl}a_{mnkl}\right).$$

Ayrıca, bu tez çalışması boyunca, k^* ile k sayısının eşleniğini göstereceğiz, yani, $1 < k < \infty$ olduğunda $k^* = \frac{k}{k-1}$, $k = 1$ olduğunda $k^* = \infty$ ve $k = \infty$ olduğunda $k^* = 1$ olur.

3. MUTLAK ÇİFT RIESZ TOPLANABİLEN SERİ UZAYI $\left|\bar{N}_{p,q}\right|_k$

Bu bölümde, çift indisli Riesz ortalaması yardımıyla tanımlanan (Sarıgöl, 2021) mutlak Riesz toplanabilen $\left|\bar{N}_{p,q}\right|_k$ çift seri uzayının bir Banach uzayı olduğu ve $\mathcal{L}_k$ uzayına norm izomorfik olduğu gösterildi.

Öncelikle tek indisli diziler için Cesàro ve Riesz toplanabilme metotlarını ve sonrasında ise çift indisli Cesàro ve Riesz ortalamaları ile mutlak toplanabilen çift seri uzaylarını hatırlayalım.

Bu çalışma boyunca $\sum x_v$, kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan kompleks terimli sonsuz bir seri olsun.

$\alpha > -1$ ve $n \geq 1$ için

$$A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}{n!} \text{ ve } A_0^\alpha = 1$$

olsun. (s_n) dizisinin α. mertebeden ve n. (C,α) Cesàro ortalamasını σ_n^α ile gösterelim, yani

$$\sigma_n^\alpha = \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{v=0}^{n} A_{n-v}^{\alpha-1} s_v$$

olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^\alpha = s$$

ise $\sum x_v$ serisi s değerine (C,α) toplanabilirdir denir (Hardy 1949). Burada α. mertebeden (C,α) Cesàro matrisi

$$a_{nv} = \begin{cases} \dfrac{A_{n-v}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha}, & 0 \leq v \leq n \\ 0, & v > n \end{cases}$$

ile tanımlıdır.

Özel olarak $\alpha = 1$ için $(C, 1)$ Cesàro ortalaması

$$\sigma_n^1 = \sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{v=0}^{n} s_v$$

ile ifade edilir.

$k \geq 1$ için mutlak Cesàro toplanabilme metodu $|C, \alpha|_k$ ise Flett (1957) tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Eğer $1 \leq k < \infty$ ve $\alpha > -1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1}|\sigma_n^\alpha - \sigma_{n-1}^\alpha|^k < \infty$$

sağlanıyorsa, $\sum x_\nu$ serisine $|C, \alpha|_k$ toplanabilirdir denir (Flett 1957). Bu metot özel olarak $\alpha = 1$ için $|C, 1|_k$ toplanabilme metoduna indirgenir.

Bor (1985, 1987, 2016), çalışmalarında $|C, 1|_k$ toplanabilme metodunu $|\bar{N}, p_n|_k$ mutlak ağırlıklı ortalama toplanabilme metoduna genişletti.

$|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilme metodundan bahsedebilmek için önce Riesz ortalamasını hatırlayalım. Bunun için (p_n) pozitif sayıların bir dizisi olsun öyle ki

$$n \to \infty \text{ için } P_n = p_0 + p_1 + \cdots + p_n \to \infty, \ (P_{-1} = p_{-1} = 0)$$

sağlansın ve $\sum x_v$ kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan kompleks terimli sonsuz bir seri olsun. (s_n) dizisinin Riesz dönüşüm dizisinin veya kısaca $(\bar{N}, p_n)$ dönüşüm dizisinin n −ci terimini

$$T_n = \frac{1}{P_n}\sum_{j=0}^{n} P_j s_j = \frac{1}{P_n}\sum_{j=0}^{n}\left(P_n - P_{j-1}\right) x_j \tag{3.1}$$

ile gösterelim (Hardy 1949). (3.1) eşitliği ile tanımlı (T_n) dizisine (s_n) dizisinin Riesz ortalaması veya $(\bar{N}, p_n)$ ağırlıklı ortalaması denir. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} T_n = s$$

ise $\sum x_v$ serisi s değerine $(\bar{N}, p_n)$ toplanabilirdir denir (Hardy 1949).

$(\bar{N}, p_n)$ dönüşümüne karşılık gelen $R = (r_{nj})$ matrisi

$$r_{nj} = \begin{cases} \dfrac{p_j}{P_n}, & 0 \le j \le n \\ 0, & j > n \end{cases}$$

ile tanımlanır.

Bu durumda, eğer $k \ge 1$ için (Bor 1985)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1} |\Delta T_{n-1}|^k < \infty$$

sağlanıyorsa, $\sum x_v$ serisine $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilirdir denir. Burada

$$n \ge 1 \text{ için } \Delta T_{n-1} = T_{n-1} - T_n \text{ ve } \Delta T_{-1} = T_0$$

ile tanımlıdır. Ayrıca,

$$\Delta T_0 = -x_0 \text{ ve } n \ge 1 \text{ için } \Delta T_{n-1} = -\frac{p_n}{P_{n-1}P_n}\sum_{v=1}^{n} P_{v-1}x_v \tag{3.2}$$

olduğu görülür.

(3.2) eşitliğinde her n için $p_n = 1$ alırsak $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilme metodu $|C, 1|_k$ mutlak Cesàro toplanabilme metoduna indirgenir.

Son zamanlarda Sarıgöl (2011, 2016) $|C, \alpha|_k$ ve $|\bar{N}, p_n, \theta_n|_k$ toplanabilme metotlarını kullanarak $|C_\alpha|_k$ ve $\left|\bar{N}_p^\theta\right|_k$ seri uzaylarını tanımladı. Ayrıca bu uzayların bazı topolojik ve cebirsel özelliklerini inceleyerek bu uzaylar üzerindeki bazı matris sınıflarını karakterize etti.

Çift indisli diziler için Cesàro ortalaması ise aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$s = (s_{mn})$ çift dizisi $\sum\sum x_{ij}$ çift serisinin kısmi toplamlar dizisi olsun. Bu durumda çift indisli $s = (s_{mn})$ dizisinin (u_{mn}) birinci mertebeden Cesàro ortalaması (aritmetik ortalaması)

$$u_{mn} = \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} s_{ij}\,, (m, n \in \mathbb{N})$$

ile yazılır.

Eğer

$$p - \lim_{m,n\to\infty} u_{mn} = l$$

yani,

$$p - \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} s_{ij} = l$$

ise, $s = (s_{ij})$ dizisine l sayısına $(C, 1,1)$ Cesàro toplanabilirdir denir (Limaye ve Zeltser 2009). Burada birinci mertebeden $(C, 1,1)$ Cesàro $C = (c_{mnij})$ matrisi $\forall\, m, n, i, j \in \mathbb{N}$ için

$$c_{mnij} = \begin{cases} \dfrac{1}{mn}, & 1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n, \\ 0\,, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Benzer şekilde bir $\sum\sum x_{ij}$ çift serisinin Riesz toplanabilirliği de Alotaibi ve Çakan (2012) tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$q_0, t_0 > 0$ olmak üzere $q = (q_k)$ ve $t = (t_l)$ negatif olmayan reel sayıların iki dizisi olsun. Buna göre

$$Q_m = \sum_{k=0}^{m} q_k \quad ve \quad T_n = \sum_{l=0}^{m} t_l$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca $s = (s_{kl})$ çift dizisi $\sum\sum x_{ij}$ çift serisinin kısmi toplamlar dizisi olsun. Bu durumda her $m, n \geq 0$ için $s = (s_{kl})$ çift dizisinin R^{qt} Riesz dönüşümü

$$(R^{qt}s)_{mn} = \frac{1}{Q_m T_n} \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} q_k t_l s_{kl}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer

$$p - \lim_{m,n\to\infty} (R^{qt}s)_{mn} = L, \qquad L \in \mathbb{C}$$

yani,

$$p - \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{Q_m T_n} \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} q_k t_l s_{kl} = L$$

ise, bu durumda $s = (s_{kl})$ dizisine $L \in \mathbb{C}$ sayısına Riesz toplanabilirdir denir (Alotaibi ve Çakan 2012).

Bu durumda $q = (q_k)$ ve $t = (t_l)$ dizilerine bağlı olarak Riesz $R^{qt} = \left(r_{mnkl}^{qt}\right)$ matrisi her $m, n, k, l \in \mathbb{N}$ için

$$r_{mnkl}^{qt} = \begin{cases} \dfrac{q_k t_l}{Q_m T_n}, & 0 \leq k \leq m, \qquad 0 \leq l \leq n \\ 0, & \text{diğer durumlar için} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Dikkat edelim ki her $k, l \in \mathbb{N}$ için $q_k = 1$ ve $t_l = 1$ durumunda R^{qt} Riesz ortalaması birinci dereceden Cesàro ortalamasına indirgenir ve $R^{qt} = \left(r_{mnkl}^{qt}\right)$ Riesz matrisi de dört boyutlu birinci mertebeden $C = (c_{mnkl})$ Cesàro matrisine, yani $\forall\, m, n, k, l \in \mathbb{N}$ için

$$c_{mnkl} = \begin{cases} \dfrac{1}{mn}, & 1 \leq k \leq m, \qquad 1 \leq l \leq n \\ 0\,, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

matrisine indirgenir.

$x = (x_{mn})$ bir çift indisli dizi olsun. Yeşilkayagil ve Başar (2017, 2018) Riesz ortalaması sınırlı, Pringsheim manada yakınsak, hem Pringsheim manada yakınsak hem de sınırlı, regüler manada yakınsak ve mutlak $q-$toplanabilir $x = (x_{mn})$ çift dizilerin

$$R^{qt}(\mathcal{M}_u) = \{x = (x_{mn}) \in \Omega : R^{qt}x \in \mathcal{M}_u\},$$

$$R^{qt}(\mathcal{C}_p) = \{x = (x_{mn}) \in \Omega : R^{qt}x \in \mathcal{C}_p\},$$

$$R^{qt}(\mathcal{C}_{bp}) = \{x = (x_{mn}) \in \Omega : R^{qt}x \in \mathcal{C}_{bp}\},$$

$$R^{qt}(\mathcal{C}_r) = \{x = (x_{mn}) \in \Omega : R^{qt}x \in \mathcal{C}_r\},$$

$$R^{qt}(\mathcal{L}_q) = \{x = (x_{mn}) \in \Omega : R^{qt}x \in \mathcal{L}_q\}, (0 < q < \infty),$$

uzaylarını tanımlayarak bu uzayların cebirsel ve topolojik özelliklerini incelediler.

Riesz ortalamasını kullanarak dört boyutlu bir matrisin bir çift dizi uzayındaki etki alanını inceleyen Yeşilkayagil ve Başar'ın (2016, 2017, 2018) bu çalışmaları çift dizi uzayları ile ilgilenen araştırmacılar için önemli çalışmalardır.

Çift seriler için Riesz toplanabilirliği kullanılarak yapılan diğer önemli bir çalışma ise Sarıgöl'ün (2021) mutlak toplanabilme metodu üzerine yaptığı çalışmadır. Sarıgöl (2021), çift serilerin Riesz ortalamasını kullanarak $|\bar{N}, p_m, q_n|_k$ mutlak toplanabilme metodunu tanımlamıştır. Bu çalışmada bazı kapsama bağıntıları elde ederek tek indisli diziler ve seriler için tanımlanan ve bilinen sonuçları çift indisli dizilere ve serilere genişletmiştir.

Şimdi, çift serilerin Riesz ortalaması kullanılarak tanımlanan $|\bar{N}, p_m, q_n|_k$ mutlak toplanabilme metodunu hatırlayalım.

Bunun için $p = (p_i)$ ve $q = (q_j)$ pozitif reel sayıların iki dizisi olsun öyle ki

$$m \to \infty \text{ için } P_m = p_0 + p_1 + \cdots + p_m \to \infty,\ \ (P_{-1} = p_{-1} = 0)$$

ve

$$n \to \infty \text{ için } Q_n = q_0 + q_1 + \cdots + q_n \to \infty,\ \ (Q_{-1} = q_{-1} = 0)$$

sağlansın. Ayrıca $\sum\sum x_{ij}$ kısmi toplamlar dizisi (s_{mn}) olan sonsuz bir çift seri olsun. (s_{mn}) çift dizisinin çift Riesz dönüşüm dizisini veya kısaca $(\bar{N}, p_m, q_n)$ ağırlıklı dönüşüm dizisini (T_{mn}) ile tanımlayalım, yani $\forall m, n \geq 0$ için

$$T_{mn} = \frac{1}{P_m Q_n} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} p_i q_j s_{ij} \tag{3.3}$$

olsun. (3.3) eşitliğinde $T_{-1,0} = T_{0,-1} = T_{-1,-1} = 0$ ile tanımlıdır.

Eğer $k \geq 1$ için

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{P_m Q_n}{p_m q_n}\right)^{k-1} \left|\Delta_{11} T_{m-1,n-1}\right|^k < \infty \tag{3.4}$$

sağlanıyorsa, bu durumda $\sum\sum x_{ij}$ serisine $|\bar{N}, p_m, q_n|_k$ toplanabilirdir denir (Sarıgöl 2021). Burada ileri fark tanımından (3.4) ifadesinde yer alan $\Delta_{11}(T_{m-1,n-1})$ ifadesini hesaplayalım.

Bu durumda her $m, n \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
\Delta_{11}(T_{m-1,n-1}) &= \Delta_{01}(\Delta_{10} T_{m-1,n-1}) = \Delta_{01}(T_{m-1,n-1} - T_{m,n-1}) \\
&= (T_{m-1,n-1} - T_{m,n-1}) - (T_{m-1,n} - T_{m,n}) \\
&= T_{m-1,n-1} - T_{m,n-1} - T_{m-1,n} + T_{m,n}
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca $n = 0$ için

$$\Delta_{11}(T_{m-1,n-1}) = \Delta_{11}(T_{m-1,-1}) = \Delta_{10}(\Delta_{01}T_{m-1,-1}) = \Delta_{10}(T_{m-1,-1} - T_{m-1,0})$$
$$= \Delta_{10}(-T_{m-1,0}) = -T_{m-1,0} + T_{m,0} = T_{m,0} - T_{m-1,0}$$

ve $m = 0$ için

$$\Delta_{11}(T_{m-1,n-1}) = \Delta_{11}(T_{-1,n-1}) = \Delta_{01}(\Delta_{10}T_{-1,n-1}) = \Delta_{01}(T_{-1,n-1} - T_{0,n-1})$$
$$= \Delta_{01}(-T_{0,n-1}) = -T_{0,n-1} + T_{0,n} = T_{0,n} - T_{0,n-1}$$

olacak şekilde yazılabilir.

$|\bar{N}, p_m, q_n|_k$ toplanabilme metodunda özel olarak her $m, n \geq 0$ için $p_m = q_n = 1$ alınırsa, $|\bar{N}, p_m, q_n|_k$ toplanabilme metodu mutlak çift Cesàro $|C, 1{,}1|_k$ toplanabilme metoduna indirgenir (Rhoades 1998).

Ayrıca $\sum\sum x_{ij}$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (s_{ij}) ve

$$s_{ij} = \sum_{v=0}^{i}\sum_{\mu=0}^{j} x_{v\mu}$$

olduğu göz önüne alınırsa (s_{ij}) dizisinin $(\bar{N}, p_m, q_n)$ dönüşüm dizisi olan (T_{mn}) dizisini

$$T_{mn} = \frac{1}{P_m Q_n}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} p_i q_j s_{ij}$$

$$= \frac{1}{P_m Q_n}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} p_i q_j \sum_{v=0}^{i}\sum_{\mu=0}^{j} x_{v\mu}$$

$$= \frac{1}{P_m Q_n}\sum_{v=0}^{m}\sum_{\mu=0}^{n} x_{v\mu} \sum_{i=v}^{m}\sum_{j=\mu}^{n} p_i q_j$$

$$= \frac{1}{P_m Q_n}\sum_{v=0}^{m}\sum_{\mu=0}^{n} x_{v\mu}(P_m - P_{v-1})(Q_n - Q_{\mu-1})$$

$$= \sum_{v=0}^{m} \sum_{\mu=0}^{n} x_{v\mu} \left(1 - \frac{P_{v-1}}{P_m}\right)\left(1 - \frac{Q_{\mu-1}}{Q_n}\right)$$

olacak şekilde yazabiliriz. Burada dikkat edelim ki

$$\begin{aligned} \Delta_{11} T_{-1,-1} &= \Delta_{01}\left(\Delta_{10} T_{-1,-1}\right) = \Delta_{01}\left(T_{-1,-1} - T_{0,-1}\right) \\ &= \left(T_{-1,-1} - T_{0,-1}\right) - \left(T_{-1,0} - T_{0,0}\right) = T_{00} \end{aligned}$$

ve

$$T_{00} = \sum_{v=0}^{0} \sum_{\mu=0}^{0} x_{00} \left(1 - \frac{P_{v-1}}{P_0}\right)\left(1 - \frac{Q_{\mu-1}}{Q_0}\right) = x_{00}$$

bulunur, yani $\Delta_{11} T_{-1,-1} = T_{00}$ ve $T_{00} = x_{00}$ olur. Ayrıca (T_{mn}) dizisini göz önüne alarak aşağıdaki ifadelerin eşitlerini bulabiliriz.

$n = 0$ ve $m \geq 1$ için,

$$\Delta_{11}\left(T_{m-1,n-1}\right) = \left(T_{m-1,-1} - T_{m-1,0}\right) - \left(T_{m,-1} - T_{m,0}\right) = T_{m,0} - T_{m-1,0}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \Delta_{11}\left(T_{m-1,-1}\right) &= \frac{1}{P_m} \sum_{i=0}^{m} p_i s_{i0} - \frac{1}{P_{m-1}} \sum_{i=0}^{m-1} p_i s_{i0} \\ &= \frac{1}{P_m} \sum_{i=0}^{m} p_i \sum_{v=0}^{i} x_{v0} - \frac{1}{P_{m-1}} \sum_{i=0}^{m-1} p_i \sum_{v=0}^{i} x_{v0} \\ &= \sum_{v=0}^{m} x_{v0} \sum_{i=v}^{m} \frac{p_i}{P_m} - \sum_{v=0}^{m-1} x_{v0} \sum_{i=v}^{m-1} \frac{p_i}{P_{m-1}} \\ &= \sum_{v=0}^{m} x_{v0} \left(\frac{P_m - P_{v-1}}{P_m}\right) - \sum_{v=0}^{m-1} x_{v0} \left(\frac{P_{m-1} - P_{v-1}}{P_{m-1}}\right) \\ &= x_{m0} \left(\frac{P_m - P_{m-1}}{P_m}\right) + \sum_{v=0}^{m-1} x_{v0} \left(\frac{P_m - P_{v-1}}{P_m} - \frac{P_{m-1} - P_{v-1}}{P_{m-1}}\right) \end{aligned}$$

$$= x_0 \frac{p_m}{P_m} + \sum_{v=0}^{m-1} \frac{x_{v0} P_{v-1} p_m}{P_m P_{m-1}}$$

$$= \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \sum_{v=1}^{m} P_{v-1} x_{v0}$$

olarak bulunur, $m = 0$ ve $n \geq 1$ için,

$$\Delta_{11}(T_{m-1,n-1}) = (T_{-1,n-1} - T_{0,n-1}) - (T_{-1,n} - T_{0,n}) = T_{0,n} - T_{0,n-1}$$

olduğundan

$$\Delta_{11}(T_{m-1,n-1}) = \frac{1}{Q_n} \sum_{j=0}^{n} q_j s_{0j} - \frac{1}{Q_{n-1}} \sum_{j=0}^{n-1} q_j s_{0j}$$

$$= \frac{1}{Q_n} \sum_{j=0}^{n} q_j \sum_{\mu=0}^{j} x_{0\mu} - \frac{1}{Q_{n-1}} \sum_{j=0}^{n-1} q_j \sum_{\mu=0}^{j} x_{0\mu}$$

$$= \frac{1}{Q_n} \sum_{\mu=0}^{n} x_{0\mu} \sum_{j=\mu}^{n} q_j - \frac{1}{Q_{n-1}} \sum_{\mu=0}^{n-1} x_{0\mu} \sum_{j=\mu}^{n-1} q_j$$

$$= \sum_{\mu=0}^{n} x_{0\mu} \left(\frac{Q_n - Q_{\mu-1}}{Q_n} \right) - \sum_{\mu=0}^{n-1} x_{0\mu} \left(\frac{Q_{n-1} - Q_{\mu-1}}{Q_{n-1}} \right)$$

$$= x_{0n} \left(\frac{Q_n - Q_{n-1}}{Q_n} \right) + \sum_{\mu=0}^{n-1} x_{0\mu} \left(\frac{Q_{\mu-1}}{Q_{n-1}} - \frac{Q_{\mu-1}}{Q_n} \right)$$

$$= x_{0n} \frac{q_n}{Q_n} + \sum_{\mu=0}^{n-1} x_{0\mu} \frac{Q_{\mu-1} q_n}{Q_n Q_{n-1}}$$

$$= \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{\mu=0}^{n} Q_{\mu-1} x_{0\mu}$$

bulunur. Ayrıca $\forall\, m, n \geq 1$ için

$$T_{mn}=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}x_{ij}\left(1-\frac{P_{i-1}}{P_m}\right)\left(1-\frac{Q_{j-1}}{Q_n}\right) \tag{3.5}$$

yazılabilir. Bu durumda (3.5) ifadesi ve

$$\Delta_{11}(T_{m-1,n-1})=T_{m-1,n-1}-T_{m,n-1}-T_{m-1,n}+T_{m,n}$$

eşitliği göz önüne alınırsa

$$\Delta_{11}(T_{m-1,n-1})=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}x_{ij}\left[\frac{(P_m-P_{i-1})(Q_n-Q_{j-1})}{P_mQ_n}-\frac{(P_{m-1}-P_{i-1})(Q_n-Q_{j-1})}{P_{m-1}Q_n}\right.$$
$$\left.-\frac{(P_m-P_{i-1})(Q_{n-1}-Q_{j-1})}{P_mQ_{n-1}}+\frac{(P_{m-1}-P_{i-1})(Q_{n-1}-Q_{j-1})}{P_{m-1}Q_{n-1}}\right]$$

$$=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}x_{ij}\left[\frac{(Q_n-Q_{j-1})P_{i-1}(P_m-P_{m-1})}{P_mP_{m-1}Q_n}+\frac{(Q_{n-1}-Q_{j-1})P_{i-1}(P_{m-1}-P_m)}{P_mP_{m-1}Q_{n-1}}\right]$$

$$=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}x_{ij}\left[\frac{(Q_n-Q_{j-1})P_{i-1}p_m}{P_mP_{m-1}Q_n}-\frac{(Q_{n-1}-Q_{j-1})P_{i-1}p_m}{P_mP_{m-1}Q_{n-1}}\right]$$

$$=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}x_{ij}\left[\frac{P_{i-1}p_mQ_{j-1}(Q_n-Q_{n-1})}{P_mP_{m-1}Q_nQ_{n-1}}\right]$$

$$=\frac{p_mq_n}{P_mP_{m-1}Q_nQ_{n-1}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\,P_{i-1}Q_{j-1}$$

bulunur.

Böylece $y=(y_{mn})$ dizisini $m,n=0$ için

$$y_{00}=x_{00}, \tag{3.6}$$

$m=0$ ve $n\geq 1$ için

$$y_{0n}=\left(\frac{q_n}{Q_n}\right)^{1/k}\frac{1}{Q_{n-1}}\sum_{j=1}^{n}x_{0j}Q_{j-1}, \tag{3.7}$$

$n=0$ ve $m\geq 1$ için

$$y_{m0} = \left(\frac{p_m}{P_m}\right)^{1/k} \frac{1}{P_{m-1}} \sum_{i=1}^{m} x_{i0} P_{i-1}, \tag{3.8}$$

ve her $m, n \geq 1$ için

$$y_{mn} = \left(\frac{p_m q_n}{P_m Q_n}\right)^{1/k} \frac{1}{P_{m-1} Q_{n-1}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\, P_{i-1} \mathrm{Q}_{\mathrm{j}-1}, \tag{3.9}$$

olacak şekilde tanımlarsak bu durumda her $m, n \geq 0$ için

$$|y_{mn}|^k = \left(\frac{P_m Q_n}{p_m q_n}\right)^{k-1} \left| \frac{p_m q_n}{P_m P_{m-1} Q_n Q_{n-1}} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_{ij}\, P_{i-1} \mathrm{Q}_{\mathrm{j}-1} \right|^k$$

$$= \left(\frac{P_m Q_n}{p_m q_n}\right)^{k-1} \left|\Delta_{11} T_{m-1,n-1}\right|^k$$

olduğu sonucuna ulaşırız.

Bu durumda, $\sum\sum x_{ij}$ serisi $|\bar{N}, p_m, q_n|_k$ toplanabilir olması için gerek ve yeter şart $y = (y_{mn}) \in \mathcal{L}_k$ $(1 \leq k < \infty)$ olmasıdır.

Şimdi $(3.6) - (3.9)$ ile tanımlı $y = \big(y_{mn}(x)\big)$ dönüşüm dizisinin tersini yani her $m, n \geq 0$ için $x = \left(x_{ij}\right)$ dizisini bulmaya çalışalım.

Her $m, n \geq 1$ için (3.9) eşitliğini kullanırsak

$$y_{mn} \left(\frac{P_m Q_n}{p_m q_n}\right)^{1/k} P_{m-1} Q_{n-1} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\, P_{i-1} \mathrm{Q}_{\mathrm{j}-1} \tag{3.10}$$

ve

$$y_{m,n-1} \left(\frac{P_m Q_{n-1}}{p_m q_{n-1}}\right)^{1/k} P_{m-1} Q_{n-2} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n-1} x_{ij}\, P_{i-1} \mathrm{Q}_{\mathrm{j}-1} \tag{3.11}$$

ifadelerini elde ederiz.

Bu durumda (3.10) ve (3.11) ifadelerinden

$$y_{mn}\left(\frac{P_mQ_n}{p_mq_n}\right)^{1/k} P_{m-1}Q_{n-1} - y_{m,n-1}\left(\frac{P_mQ_{n-1}}{p_mq_{n-1}}\right)^{1/k} P_{m-1}Q_{n-2}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_{in}\, P_{i-1}Q_{n-1} \qquad (3.12)$$

eşitliğini elde ederiz. (3.12) ifadesinden ise

$$y_{m-1,n}\left(\frac{P_{m-1}Q_n}{p_{m-1}q_n}\right)^{1/k} P_{m-2}Q_{m-1} - y_{m-1,n-1}\left(\frac{P_{m-1}Q_{n-1}}{p_{m-1}q_{n-1}}\right)^{1/k} P_{m-2}Q_{n-2}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_{in}\, P_{i-1}Q_{n-1} \qquad (3.13)$$

yazılabilir.

Böylece (3.12) ve (3.13) ifadeleri kullanılarak her $m, n \geq 1$ için

$$x_{mn} = \frac{1}{P_{m-1}Q_{n-1}}\Bigg(y_{mn}\left(\frac{P_mQ_n}{p_mq_n}\right)^{1/k} P_{m-1}Q_{n-1} - y_{m,n-1}\left(\frac{P_mQ_{n-1}}{p_mq_{n-1}}\right)^{1/k} P_{m-1}Q_{n-2}$$
$$- y_{m-1,n}\left(\frac{P_{m-1}Q_n}{p_{m-1}q_n}\right)^{1/k} P_{m-2}Q_{n-1}$$
$$+ y_{m-1,n-1}\left(\frac{P_{m-1}Q_{n-1}}{p_{m-1}q_{n-1}}\right)^{1/k} P_{m-2}Q_{n-2}\Bigg)$$

eşitliği bulunur.

Yani, her $m, n \geq 1$ için

$$x_{mn} = \frac{1}{P_{m-1}Q_{n-1}}\Delta_{11}\left(y_{m-1,n-1}\left(\frac{P_{m-1}Q_{n-1}}{p_{m-1}q_{n-1}}\right)^{1/k} P_{m-2}Q_{n-2}\right)$$

bulunur.

Benzer olarak $n = 0$ ve her $m \geq 1$ için

$$y_{m0} = \frac{p_m^{1/k}}{P_m^{1/k} P_{m-1}} \sum_{v=1}^{m} P_{v-1}\, x_{v0} \tag{3.14}$$

olduğundan (3.14) eşitliğinden

$$y_{m0}\ \frac{P_m^{1/k} P_{m-1}}{p_m^{1/k}} = \sum_{v=1}^{m} P_{v-1}\, x_{v0} \tag{3.15}$$

ve

$$y_{m-1,0}\ \frac{P_{m-1}^{1/k} P_{m-2}}{p_{m-1}^{1/k}} = \sum_{v=1}^{m-1} P_{v-1}\, x_{v0} \tag{3.16}$$

eşitlikleri yazılabilir.

Buradan (3.15) ve (3.16) eşitlikleri kullanılarak $n = 0$ ve her $m \geq 1$ için,

$$x_{m0} = \frac{1}{P_{m-1}} \left(y_{m0}\ \frac{P_m^{1/k} P_{m-1}}{p_m^{1/k}} - y_{m-1,0}\ \frac{P_{m-1}^{1/k} P_{m-2}}{p_{m-1}^{1/k}} \right)$$

bulunur.

Böylece, $\bar{\Delta}$ geri fark olarak tanımlanırsa, yani

$$\bar{\Delta}_{10} \left(\frac{y_{m0} P_m^{1/k} P_{m-1}}{p_m^{1/k}} \right) = y_{m0}\ \frac{P_m^{1/k} P_{m-1}}{p_m^{1/k}} - y_{m-1,0}\ \frac{P_{m-1}^{1/k} P_{m-2}}{p_{m-1}^{1/k}}$$

yazılırsa, bu durumda

$$x_{m0} = \frac{1}{P_{m-1}} \bar{\Delta}_{10} \left(\frac{y_{m0} P_m^{1/k} P_{m-1}}{p_m^{1/k}} \right)$$

elde edilir.

Ayrıca, benzer işlemler tekrar yapılarak $m = 0$, $\forall\, n \geq 1$ için

$$x_{0n} = \frac{1}{Q_{n-1}}\left(y_{0n}\frac{Q_n^{1/k}Q_{n-1}}{q_n^{1/k}} - y_{0,n-1}\frac{Q_{n-1}^{1/k}Q_{n-2}}{q_{n-1}^{1/k}}\right)$$

buluruz.

Bu durumda $\bar{\Delta}$ geri fark yardımıyla

$$x_{0n} = \frac{1}{Q_{n-1}}\bar{\Delta}_{01}\left(\frac{y_{0n}Q_n^{1/k}Q_{n-1}}{q_n^{1/k}}\right)$$

bulunur.

Ayrıca, $m = 0$ ve $n = 0$ için

$$x_{00} = y_{00}$$

olduğu açıktır.

Şimdi, $|\bar{N}, p_m, q_n|_k$ toplanabilen çift serilerin kümesi $\left|\bar{N}_{p,q}\right|_k$ ile tanımlanır (Sarıgöl, 2021). Bu durumda, $\left|\bar{N}_{p,q}\right|_k$çift seri uzayını

$$\left|\bar{N}_{p,q}\right|_k = \left\{x = (x_{ij})\ :\ \sum\sum x_{ij}\ \text{serisi}\ |\bar{N}, p_m, q_n|_k\ \text{toplanabilirdir}\right\}$$

ile gösterebiliriz.

İlk olarak, $\left|\bar{N}_{p,q}\right|_k$uzayının topolojik ve cebirsel özelliklerini inceleyelim. Yani, aşağıdaki teoremleri ifade ve ispat edelim.

Teorem 3.1 $1 \le k < \infty$ olsun. Bu durumda $\left|\bar{N}_{p,q}\right|_k$ uzayı çift dizilerin koordinatsal toplama ve skalarla çarpma işlemleri altında bir lineer uzay teşkil eder.

İspat. $x, z \in \left|\bar{N}_{p,q}\right|_k$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ alalım. Bu durumda $\alpha x + \beta z \in \left|\bar{N}_{p,q}\right|_k$ olduğunu gösterelim.

$$U(x) = \left(U_{mn}(x)\right) = y(x)$$

dönüşüm dizisini

$$U_{mn}(x) = \left(\frac{P_m Q_n}{p_m q_n}\right)^{1-1/k} \Delta_{11} T_{m-1,n-1} \tag{3.17}$$

ile tanımlayalım.

Bu durumda (3.17) ifadesinden, $m, n = 0$ için

$$U_{00}(x) = y_{00}(x) = x_{00}, \tag{3.18}$$

$m = 0$ ve $n \geq 1$ için

$$U_{0n}(x) = y_{0n}(x) = \left(\frac{q_n}{Q_n}\right)^{1/k} \frac{1}{Q_{n-1}} \sum_{j=1}^{n} x_{0j} Q_{j-1}, \tag{3.19}$$

$n = 0$ ve $m \geq 1$ için

$$U_{m0}(x) = y_{m0}(x) = \left(\frac{p_m}{P_m}\right)^{1/k} \frac{1}{P_{m-1}} \sum_{i=1}^{m} x_{i0} P_{i-1}, \tag{3.20}$$

ve her $m, n \geq 1$ için

$$U_{mn}(x) = y_{mn}(x) = \left(\frac{p_m q_n}{P_m Q_n}\right)^{1/k} \frac{1}{P_{m-1} Q_{n-1}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \, P_{i-1} \mathrm{Q}_{\mathrm{j}-1} \tag{3.21}$$

olarak bulunur.

Böylece, $U(x) = \big(U_{mn}(x)\big)$ dönüşüm dizisini her $m, n \geq 0$ için $U_{mn}(x) = y_{mn}(x)$ olacak şekilde $U(x) = y(x)$ ile tanımlarsak

$$|y_{mn}(x)|^k = \left(\frac{P_m Q_n}{p_m q_n}\right)^{k-1} \left|\Delta_{11} T_{m-1,n-1}\right|^k$$

elde edilir. Böylece, her $x \in \left|\bar{N}_{p,q}\right|_k$ için $y(x) = \big(y_{mn}(x)\big) \in \mathcal{L}_k$ $(1 \leq k < \infty)$ olur.

Bu durumda her $x, z \in \left|\bar{N}_{p,q}\right|_k$, her $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ve $m, n \geq 0$ için

$$U(\alpha x + \beta z) = \big(U_{mn}(\alpha x + \beta z)\big) = \big(\alpha U_{mn}(x) + \beta U_{mn}(z)\big) = \alpha U(x) + \beta U(z)$$

olduğu göz önüne alınıp üçgen ve Minkowski eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\left(\sum_{i,j} \left|U_{ij}(\alpha x+\beta z)\right|^k\right)^{\frac{1}{k}} = \left(\sum_{i,j} \left|\alpha U_{ij}(x)+\beta U_{ij}(z)\right|^k\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$\leq |\alpha|\left(\sum_{i,j} \left|U_{ij}(x)\right|^k\right)^{\frac{1}{k}} + |\beta|\left(\sum_{i,j} \left|U_{ij}(z)\right|^k\right)^{\frac{1}{k}} < \infty$$

bulunur. Bu ise $\alpha x+\beta z \in \left|\bar{N}_{p,q}\right|_k$ olduğunu gösterir. Bu durumda $\left|\bar{N}_{p,q}\right|_k$ uzayı dizilerin koordinatsal toplama ve skalarla çarpma işlemleriyle bir lineer uzay teşkil eder.

Teorem 3.2 $1 \leq k < \infty$ olsun. Bu durumda $\left|\bar{N}_{p,q}\right|_k$ uzayı

$$\|x\|_{\left|\bar{N}_{p,q}\right|_k} = \left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{P_mQ_n}{p_mq_n}\right)^{k-1} \left|\Delta_{11}T_{m-1,n-1}\right|^k\right)^{1/k} \tag{3.22}$$

normu ile bir Banach uzayıdır ve $\mathcal{L}_k$uzayına norm izomorfiktir**,** yani $\left|\bar{N}_{p,q}\right|_k \cong \mathcal{L}_k$ dır.

İspat : Sarıgöl (2021) mutlak çift ağırlıklı ortalama metotlarının denkliği üzerine yaptığı çalışmada $\left|\bar{N}_{p,q}\right|_k$ uzayının (3.22) normu ile bir Banach uzayı olduğunu söylemiştir. Burada, bu çalışmadan faydalanarak ispatın detaylarını verelim. Bunun için, ilk olarak $\left|\bar{N}_{p,q}\right|_k$ uzayının (3.22) bağıntısında verilen $\|.\|_{\left|\bar{N}_{p,q}\right|_k}$fonksiyonu ile normlu uzay olduğunu gösterelim.

$i)$ Mutlak değer özelliğinden dolayı ve $\forall m,n \geq 0$ için (p_m), (q_n), (P_m) ve (Q_n) dizileri pozitif olduklarından

$$\|x\|_{\left|\bar{N}_{p,q}\right|_k} = \left(\sum_{i,j} \left|U_{ij}(x)\right|^k\right)^{\frac{1}{k}} > 0$$

sağlanır.

$ii)\ \|x\|_{|\bar{N}_{p,q}|_k} = 0,$ yani

$$\|x\|_{|\bar{N}_{p,q}|_k} = \left(\sum_{i,j} \left|U_{ij}(x)\right|^k\right)^{\frac{1}{k}} = 0$$

olsun. Bu durumda $\forall\ i,j \geq 0$ için

$$U_{ij}(x) = 0$$

olur, yani

$$\|x\|_{|\bar{N}_{p,q}|_k} = 0 \Rightarrow \left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{P_m Q_n}{p_m q_n}\right)^{k-1} \left|\Delta_{11}T_{m-1,n-1}\right|^k\right)^{\frac{1}{k}} = 0$$

sağlanır. Böylece

$$\forall m,n \geq 0 \text{ için } \Delta_{11}T_{m-1,n-1} = 0$$

bulunur. Bu durumda $m,n = 0$ için

$$T_{00} = x_{00} = 0,$$

bulunur, $m \geq 1, n = 0$ için

$$\Delta_{11}T_{m-1,n-1} = T_{m,0} - T_{m-1,0} = \frac{p_m}{P_m P_{m-1}}\sum_{i=1}^{m} P_{i-1}x_{i0} = 0$$

sağlanır, yani $\forall i \geq 1$ için $x_{i0} = 0$ bulunur ve $m = 0, n \geq 1$ için

$$\Delta_{11}T_{m-1,n-1} = T_{0,n} - T_{0,n-1} = \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}}\sum_{j=1}^{n} Q_{j-1}x_{0j} = 0$$

sağlanır, dolayısıyla $\forall j \geq 1$ için $x_{0j} = 0$ olur.

Ayrıca, $\forall m,n \geq 1$ için

$$\Delta_{11}T_{m-1,n-1}=\frac{p_m q_n}{P_m P_{m-1} Q_n Q_{n-1}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}P_{i-1}Q_{j-1}=0$$

olduğundan $\forall i,j\geq 1$ için $x_{ij}=0$ bulunur. Bu durumda $\forall i,j\geq 0$ için $x_{ij}=0$ bulunur. Bu ise, $x=\theta$ olduğunu gösterir, burada θ sıfır vektörüdür.

Tersine $x=\theta$ ise, $\forall\, m,n\geq 0$ için $\Delta_{11}T_{m-1,n-1}=0$ ve dolayısıyla

$$\|x\|_{|\bar{N}_{p,q}|_k}=0$$

olduğu açıktır.

iii) Herhangi bir $x\in\left|\bar{N}_{p,q}\right|_k$ ve $\lambda\in\mathbb{C}$ için,

$$\|\lambda x\|_{|\bar{N}_{p,q}|_k}=\left(\sum_{i,j}\left|U_{ij}(\lambda x)\right|^k\right)^{\frac{1}{k}}=|\lambda|\left(\sum_{i,j}\left|U_{ij}(x)\right|^k\right)^{\frac{1}{k}}=|\lambda|\|x\|_{|\bar{N}_{p,q}|_k}$$

olur.

iv) Herhangi $x,z\in\left|\bar{N}_{p,q}\right|_k$ için üçgen ve Minkowski eşitsizliklerinden,

$$\|x+z\|_{|\bar{N}_{p,q}|_k}=\left(\sum_{i,j}\left|U_{ij}(x+z)\right|^k\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$=\left(\sum_{i,j}\left|U_{ij}(x)+U_{ij}(z)\right|^k\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$\leq\left(\sum_{i,j}\left|U_{ij}(x)\right|^k\right)^{\frac{1}{k}}+\left(\sum_{i,j}\left|U_{ij}(z)\right|^k\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$=\|x\|_{|\bar{N}_{p,q}|_k}+\|z\|_{|\bar{N}_{p,q}|_k}$$

bulunur.

Böylece, $\left|\overline{N}_{p,q}\right|_k$ uzayı üzerinde tanımlı $\|.\|_{\left|\overline{N}_{p,q}\right|_k}$ fonksiyonu bir norm olup, $\left(\left|\overline{N}_{p,q}\right|_k, \|.\|_{\left|\overline{N}_{p,q}\right|_k}\right)$ ikilisi bir normlu uzaydır.

Şimdi, $1 \leq k < \infty$ için $\left|\overline{N}_{p,q}\right|_k$ uzayının $\mathcal{L}_k$ uzayına norm izomorfik olduğunu gösterelim. Bunun için $\left|\overline{N}_{p,q}\right|_k$ ve $\mathcal{L}_k$ uzayları arasında lineer, birebir ve örten bir U dönüşümü olduğunu gösterelim. Böylece U dönüşümünü

$$U \ : \ \left|\overline{N}_{p,q}\right|_k \to \mathcal{L}_k$$

$$x \to U(x) \tag{3.23}$$

ile tanımlayalım. Burada

$$U(x) = y(x) = \left(U_{mn}(x)\right)$$

dönüşüm dizisi $(3.17) - (3.21)$ ile tanımlıdır.

Her $x, z \ \in \left|\overline{N}_{p,q}\right|_k$ vektörü ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ skalarları için

$$U(\alpha x + \beta z) = \alpha U(x) + \beta U(z)$$

sağlandığından U dönüşümü lineerdir.

Şimdi, $x \in \left|\overline{N}_{p,q}\right|_k$ için $U(x) = \theta$ olsun. Bu durumda her $m, n \ \geq 0$ için

$$U_{mn}(x) = \left(\frac{p_m q_n}{P_m Q_n}\right)^{1/k} \frac{1}{P_{m-1} Q_{n-1}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \, P_{i-1} \mathrm{Q}_{\mathrm{j}-1} = 0$$

sağlanır. Bu ise her $i, j \ \geq 0$ için $x_{ij} = 0$ olduğunu gösterir. Böylece $x = \theta$ dır. Bu durumda U dönüşümü birebirdir.

Örtenliği göstermek için $1 \leq k < \infty$ için $y \in \mathcal{L}_k$ alalım. $x = (x_{mn})$ dizisini ise

$\forall m, n \geq 1$ için

$$x_{mn} = \frac{1}{P_{m-1}Q_{n-1}} \Delta_{11} \left(y_{m-1,n-1} \left(\frac{P_{m-1}Q_{n-1}}{p_{m-1}q_{n-1}} \right)^{1/k} P_{m-2}Q_{n-2} \right), \tag{3.24}$$

$n = 0$ ve $m \geq 1$ için

$$x_{m0} = \frac{1}{P_{m-1}} \bar{\Delta}_{10} \left(\frac{y_{m0} P_m^{1/k} P_{m-1}}{p_m^{1/k}} \right), \tag{3.25}$$

$m = 0$ ve $n \geq 1$ için

$$x_{0n} = \frac{1}{Q_{n-1}} \bar{\Delta}_{01} \left(\frac{y_{0n} Q_n^{1/k} Q_{n-1}}{q_n^{1/k}} \right), \tag{3.26}$$

ve $m, n = 0$ için

$$x_{00} = y_{00} \tag{3.27}$$

ile tanımlayalım.

Böylece $1 \leq k < \infty$ ve $\forall m, n \; \geq 0$ için

$$\|x\|_{\left|\bar{N}_{p,q}\right|_k} = \|U(x)\|_{\mathcal{L}_k} = \left(\sum_{m,n} |y_{mn}(x)|^k \right)^{1/k} = \|y(x)\|_{\mathcal{L}_k} < \infty$$

elde edilir. Bu durumda $x \in \left|\bar{N}_{p,q}\right|_k$ elde ederiz ve böylece U dönüşümü örten ve norm koruyandır.

Sonuç olarak, U dönüşümü lineer, birebir, örten ve norm koruyandır. Bu ise $\left|\bar{N}_{p,q}\right|_k$ ve $\mathcal{L}_k$ uzaylarının norm izomorfik olduğu anlamına gelir.

Son olarak, $\left|\bar{N}_{p,q}\right|_k$ uzayının (3.22) ile tanımlanan $\|.\|_{\left|\bar{N}_{p,q}\right|_k}$ normuna göre bir Banach uzayı olduğunu gösterelim. Bunun için, Boos (2000) de yer alan Sonuç 6.3.41 in (b) kısmını göz önüne alalım: “(ψ, F_1) ve $(\wedge, F_2)$ yarınormlu uzaylar ve

$$U : (\psi, F_1) \to (\wedge, F_2)$$

dönüşümü de bir izometrik izomorfizm olsun. Bu durumda (ψ, F_1) uzayının tam olması için gerek ve yeter şart $(\wedge, F_2)$ uzayının tam olmasıdır. Özel olarak, (ψ, F_1) uzayının bir Banach uzayı olması için gerek ve yeter şart $(\wedge, F_2)$ uzayının Banach uzayı olmasıdır."

Bu teoremin ispatında (3.23) ile tanımlanan U dönüşümü $\left|\overline{N}_{p,q}\right|_k$ uzayından $\mathcal{L}_k$ uzayına bir izometrik izomorfizm ve Başar ve Sever (2009) Teorem 2.1'den $\mathcal{L}_k$ uzayı bir Banach uzayı olduğundan $\left|\overline{N}_{p,q}\right|_k$ uzayı da bir Banach uzayıdır. Bu ise ispatı tamamlar.

4. $\left|\bar{N}_{p,q}\right|_k$ ÇİFT SERİ UZAYININ $\alpha-$, $\beta(bp)$ ve $\gamma-$ DUALLERİ

Bu bölümde çift serilerin Riesz ortalaması yardımıyla tanımlanan $\left|\bar{N}_{p,q}\right|_k$ mutlak çift seri uzayının $\alpha-$, $\beta(bp)-$ ve $\gamma-$duallerini belirleyeceğiz. Bunun için aşağıdaki lemmaya gereksinim duyarız.

Lemma 4.1 (Yeşilkayagil ve Başar 2017) $A = (a_{rstu})$ dört boyutlu bir sonsuz matris olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

$i)$ $0 < k \leq 1$ olsun. Bu durumda $A \in (\mathcal{L}_k : \mathcal{M}_u)$ için gerek ve yeter şart

$$\Lambda_1 = \sup_{r,s,t,u\in\mathbb{N}} |a_{rstu}| < \infty \tag{4.1}$$

olmasıdır.

$ii)$ $1 < k < \infty$ olsun. Bu durumda $A \in (\mathcal{L}_k : \mathcal{M}_u)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\Lambda_2 = \sup_{r,s\in\mathbb{N}} \sum_{t,u} |a_{rstu}|^{k^*} < \infty \tag{4.2}$$

olmasıdır. Burada k^*, k nın eşleniğidir. Yani $\frac{1}{k} + \frac{1}{k^*} = 1$ dir.

$iii)$ $0 < k \leq 1$ ve $1 \leq k_1 < \infty$ olsun. Bu durumda $A \in \left(\mathcal{L}_k : \mathcal{L}_{k_1}\right)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{t,u\in\mathbb{N}} \sum_{r,s} |a_{rstu}|^{k_1} < \infty$$

olmasıdır.

$iv)$ $0 < k \leq 1$ olsun. Bu durumda $A \in \left(\mathcal{L}_k : \mathcal{C}_{bp}\right)$ olması için gerek ve yeter şart (4.1) koşulunun sağlanması ve öyle bir $(\alpha_{tu}) \in \Omega$ vardır öyle ki

$$bp - \lim_{r,s\to\infty} a_{rstu} = \alpha_{tu} \tag{4.3}$$

koşulunun sağlanmasıdır.

$v)\ 1 < k < \infty$ olsun. Bu durumda $A \in (\mathcal{L}_k : \mathcal{C}_{bp})$ olması için gerek ve yeter şart (4.2) ve (4.3) koşullarının sağlanmasıdır.

Teorem 4.2 $D = (d_{mnij})$ matrisini

$$d_{mnij} = \begin{cases} a_{00}, & m = n = 0, \\ \dfrac{a_{m0}P_m^{1/k}}{p_m^{1/k}}, & n = 0 \text{ ve } i = m, \\ \dfrac{P_i^{1/k}P_{i-1}}{p_i^{1/k}}\Delta_{10}\left(\dfrac{a_{i0}}{P_{i-1}}\right), & n = 0 \text{ ve } 1 \le i \le m-1, \\ \dfrac{a_{0n}Q_n^{1/k}}{q_n^{1/k}}, & m = 0 \text{ ve } j = n, \\ \dfrac{Q_j^{1/k}Q_{j-1}}{q_j^{1/k}}\Delta_{01}\left(\dfrac{a_{0j}}{Q_{j-1}}\right), & m = 0 \text{ ve } 1 \le j \le n-1, \\ \Delta_{11}\left(\dfrac{a_{ij}}{P_{i-1}Q_{j-1}}\right)\left(\dfrac{P_iQ_j}{p_iq_j}\right)^{1/k} P_{i-1}Q_{j-1}, & 1 \le i \le m-1 \text{ ve } 1 \le j \le n-1, \\ \Delta_{10}\left(\dfrac{a_{in}}{P_{i-1}Q_{n-1}}\right)\left(\dfrac{P_iQ_n}{p_iq_n}\right)^{1/k} P_{i-1}Q_{n-1}, & 1 \le i \le m-1 \text{ ve } j = n, \\ \Delta_{01}\left(\dfrac{a_{mj}}{P_{m-1}Q_{j-1}}\right)\left(\dfrac{P_mQ_j}{p_mq_j}\right)^{1/k} P_{m-1}Q_{j-1}, & i = m \text{ ve } 1 \le j \le n-1, \\ \dfrac{a_{mn}}{P_{m-1}Q_{n-1}}\left(\dfrac{P_mQ_n}{p_mq_n}\right)^{1/k} P_{m-1}Q_{n-1}, & i = m \text{ ve } j = n \end{cases} \tag{4.4}$$

olacak şekilde ve w_1, w_2, w_3 kümelerini

$$w_1 = \left\{a = (a_{mn}) \in \Omega : \ bp - \lim_{m,n\to\infty} d_{mnij} \ \text{ mevcut}\right\},$$

$$w_2 = \left\{a = (a_{mn}) \in \Omega : \sup_{m,n,i,j\in\mathbb{N}} |d_{mnij}| < \infty\right\}, \tag{4.5}$$

$$w_3 = \left\{a = (a_{mn}) \in \Omega : \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \sum_{i,j} |d_{mnij}|^{k^*} < \infty\right\} \tag{4.6}$$

ile tanımlayalım. Bu durumda

$i)\ \ k=1$ için, $\left(\left|\bar{N}_{p,q}\right|_1\right)^{\beta(bp)} = w_1 \cap w_2$ dir.

$ii)\ \ 1<k<\infty$ için, $\left(\left|\bar{N}_{p,q}\right|_k\right)^{\beta(bp)} = w_1 \cap w_3$ tür.

İspat. $a=(a_{mn}) \in \Omega$ ve $x=(x_{mn}) \in \left|\bar{N}_{p,q}\right|_k$ olsun. Bu durumda Teorem 3.2 den öyle bir $y=(y_{mn}) \in \mathcal{L}_k\ (1 \le k < \infty\ )$ çift dizisi vardır.

Çift indisli diziler için Abel dönüşümünü hatırlayalım:

$$s_{mn} = \sum_{k,l=0}^{m,n} x_{mn}$$

olmak üzere her $m,n \ge 0$ için

$$z_{mn} = \sum_{k,l=0}^{m,n} a_{kl}x_{kl}$$

$$= \sum_{k,l=0}^{m-1,n-1} s_{kl}\Delta_{11}a_{kl} + \sum_{k=0}^{m-1} s_{kn}\Delta_{10}a_{kn} + \sum_{l=0}^{n-1} s_{ml}\Delta_{01}a_{ml} + s_{mn}a_{mn} \qquad (4.7)$$

sağlanır.

Bu durumda (4.7) eşitliğinden

$$z_{mn} = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{ij}x_{ij}$$

$$= \sum_{i=0}^{m}\left(a_{i0}x_{i0} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij}\right) = \sum_{i=0}^{m} a_{i0}x_{i0} + \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij}$$

$$= a_{00}x_{00} + \sum_{i=1}^{m} a_{i0}x_{i0} + \sum_{j=1}^{n} a_{0j}x_{0j} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij}$$

$$= a_{00}y_{00} + \sum_{i=1}^{m} a_{i0}\left(\frac{1}{P_{i-1}}\left(\frac{y_{i0}P_i^{1/k}P_{i-1}}{p_i^{1/k}} - \frac{y_{i-1,0}P_{i-1}^{1/k}P_{i-2}}{p_{i-1}^{1/k}}\right)\right)$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} a_{0j}\left(\frac{1}{Q_{j-1}}\left(\frac{y_{0j}Q_j^{1/k}Q_{j-1}}{q_j^{1/k}} - \frac{y_{0,j-1}Q_{j-1}^{1/k}Q_{j-2}}{q_{j-1}^{1/k}}\right)\right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{1}{P_{i-1}Q_{j-1}}\left(y_{ij}\left(\frac{P_iQ_j}{p_iq_j}\right)^{1/k} P_{i-1}Q_{j-1}\right.$$

$$- y_{i,j-1}\left(\frac{P_iQ_{j-1}}{p_iq_{j-1}}\right)^{\frac{1}{k}} P_{i-1}Q_{j-2} - y_{i-1,j}\left(\frac{P_{i-1}Q_j}{p_{i-1}q_j}\right)^{1/k} P_{i-2}Q_{j-1}$$

$$\left. + y_{i-1,j-1}\left(\frac{P_{i-1}Q_{j-1}}{p_{i-1}q_{j-1}}\right)^{1/k} P_{i-2}Q_{j-2}\right)$$

$$= a_{00}y_{00} + \sum_{i=1}^{m}\frac{a_{i0}y_{i0}P_i^{1/k}}{p_i^{1/k}} - \sum_{i=2}^{m}\frac{a_{i0}y_{i-1,0}P_{i-1}^{1/k}P_{i-2}}{P_{i-1}p_{i-1}^{1/k}} + \sum_{j=1}^{n}\frac{a_{0j}y_{0j}Q_j^{1/k}}{q_j^{1/k}}$$

$$- \sum_{j=2}^{n}\frac{a_{0j}y_{0,j-1}Q_{j-1}^{1/k}Q_{j-2}}{Q_{j-1}q_{j-1}^{1/k}} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{ij}}{P_{i-1}Q_{j-1}}r_{ij}$$

burada

$$r_{ij} = y_{ij}\left(\frac{P_iQ_j}{p_iq_j}\right)^{1/k} P_{i-1}Q_{j-1} - y_{i,j-1}\left(\frac{P_iQ_{j-1}}{p_iq_{j-1}}\right)^{\frac{1}{k}} P_{i-1}Q_{j-2}$$

$$- y_{i-1,j}\left(\frac{P_{i-1}Q_j}{p_{i-1}q_j}\right)^{\frac{1}{k}} P_{i-2}Q_{j-1} + y_{i-1,j-1}\left(\frac{P_{i-1}Q_{j-1}}{p_{i-1}q_{j-1}}\right)^{\frac{1}{k}} P_{i-2}Q_{j-1}$$

dir.

Bu durumda Abel dönüşümünü uygularsak

$$z_{mn} = a_{00}y_{00} + \sum_{i=1}^{m}\frac{a_{i0}y_{i0}P_i^{1/k}}{p_i^{1/k}} - \sum_{i=1}^{m-1}\frac{a_{i+1,0}y_{i0}P_i^{1/k}P_{i-1}}{P_ip_i^{1/k}} + \sum_{j=1}^{n}\frac{a_{0j}y_{0j}Q_j^{1/k}}{q_j^{1/k}}$$

$$-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{a_{0,j+1}y_{0j}Q_j^{1/k}Q_{j-1}}{Q_j q_j^{1/k}}+\sum_{i,j=1}^{m-1,n-1}\Delta_{11}\left(\frac{a_{ij}}{P_{i-1}Q_{j-1}}\right)h_{ij}$$

$$+\sum_{i=1}^{m-1}\Delta_{10}\left(\frac{a_{in}}{P_{i-1}Q_{n-1}}\right)h_{in}+\sum_{j=1}^{n-1}\Delta_{01}\left(\frac{a_{mj}}{P_{m-1}Q_{j-1}}\right)h_{mj}+h_{mn}\frac{a_{mn}}{P_{m-1}Q_{n-1}}$$

bulunur, burada

$$h_{mn}=\sum_{i,j=1}^{m,n}r_{ij}$$

olur.

Bu durumda

$$z_{mn}=a_{00}y_{00}+\frac{a_{m0}y_{m0}P_m^{1/k}}{p_m^{1/k}}+\sum_{i=1}^{m-1}\frac{y_{i0}P_i^{1/k}P_{i-1}}{p_i^{1/k}}\Delta_{10}\left(\frac{a_{i0}}{P_{i-1}}\right)+\frac{a_{0n}y_{0n}Q_n^{1/k}}{q_n^{1/k}}$$
$$+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{y_{0j}Q_j^{1/k}Q_{j-1}}{q_j^{1/k}}\Delta_{01}\left(\frac{a_{0j}}{Q_{j-1}}\right)$$

$$+\sum_{i,j=1}^{m-1,n-1}\Delta_{11}\left(\frac{a_{ij}}{P_{i-1}Q_{j-1}}\right)\sum_{t,s=1}^{i,j}\left(y_{ts}\left(\frac{P_tQ_s}{p_tq_s}\right)^{1/k}P_{t-1}Q_{s-1}\right.$$
$$-y_{t,s-1}\left(\frac{P_tQ_{s-1}}{p_tq_{s-1}}\right)^{1/k}P_{t-1}Q_{s-2}-y_{t-1,s}\left(\frac{P_{t-1}Q_s}{p_{t-1}q_s}\right)^{1/k}P_{t-2}Q_{s-1}$$
$$\left.+y_{t-1,s-1}\left(\frac{P_{t-1}Q_{s-1}}{p_{t-1}q_{s-1}}\right)^{1/k}P_{t-2}Q_{s-2}\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{m-1}\Delta_{10}\left(\frac{a_{in}}{P_{i-1}Q_{n-1}}\right)\sum_{t,s=1}^{i,n}\left(y_{ts}\left(\frac{P_tQ_s}{p_tq_s}\right)^{1/k}P_{t-1}Q_{s-1}-y_{t,s-1}\left(\frac{P_tQ_{s-1}}{p_tq_{s-1}}\right)^{1/k}P_{t-1}Q_{s-2}\right.$$
$$\left.-y_{t-1,s}\left(\frac{P_{t-1}Q_s}{p_{t-1}q_s}\right)^{1/k}P_{t-2}Q_{s-1}+y_{t-1,s-1}\left(\frac{P_{t-1}Q_{s-1}}{p_{t-1}q_{s-1}}\right)^{1/k}P_{t-2}Q_{s-2}\right)$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}\Delta_{01}\left(\frac{a_{mj}}{P_{m-1}Q_{j-1}}\right)\sum_{t,s=1}^{m,j}\left(y_{ts}\left(\frac{P_tQ_s}{p_tq_s}\right)^{1/k}P_{t-1}Q_{s-1}-y_{t,s-1}\left(\frac{P_tQ_{s-1}}{p_tq_{s-1}}\right)^{1/k}P_{t-1}Q_{s-2}\right.$$
$$\left.-y_{t-1,s}\left(\frac{P_{t-1}Q_s}{p_{t-1}q_s}\right)^{1/k}P_{t-2}Q_{s-1}+y_{t-1,s-1}\left(\frac{P_{t-1}Q_{s-1}}{p_{t-1}q_{s-1}}\right)^{1/k}P_{t-2}Q_{s-2}\right)$$

$$+\frac{a_{mn}}{P_{m-1}Q_{n-1}}\sum_{t,s=1}^{m,n}\left(y_{ts}\left(\frac{P_tQ_s}{p_tq_s}\right)^{1/k}P_{t-1}Q_{s-1}-y_{t,s-1}\left(\frac{P_tQ_{s-1}}{p_tq_{s-1}}\right)^{1/k}P_{t-1}Q_{s-2}\right.$$
$$\left.-y_{t-1,s}\left(\frac{P_{t-1}Q_s}{p_{t-1}q_s}\right)^{1/k}P_{t-2}Q_{s-1}+y_{t-1,s-1}\left(\frac{P_{t-1}Q_{s-1}}{p_{t-1}q_{s-1}}\right)^{1/k}P_{t-2}Q_{s-2}\right)$$

bulunur.

Böylece küçük bir hesaplama ve indis değişimi yardımıyla

$$z_{mn}=a_{00}y_{00}+\frac{a_{m0}y_{m0}P_m^{1/k}}{p_m^{1/k}}+\sum_{i=1}^{m-1}\frac{y_{i0}P_i^{1/k}P_{i-1}}{p_i^{1/k}}\Delta_{10}\left(\frac{a_{i0}}{P_{i-1}}\right)+\frac{a_{0n}y_{0n}Q_n^{1/k}}{q_n^{1/k}}$$
$$+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{y_{0j}Q_j^{1/k}Q_{j-1}}{q_j^{1/k}}\Delta_{01}\left(\frac{a_{0j}}{Q_{j-1}}\right)$$

$$+\sum_{i,j=1}^{m-1,n-1}\Delta_{11}\left(\frac{a_{ij}}{P_{i-1}Q_{j-1}}\right)\left\{\sum_{t,s=1}^{i-1,j-1}y_{ts}\left(\frac{P_tQ_s}{p_tq_s}\right)^{1/k}P_{t-1}Q_{s-1}\right.$$
$$+\sum_{t=1}^{i-1}y_{tj}\left(\frac{P_tQ_j}{p_tq_j}\right)^{1/k}P_{t-1}Q_{j-1}+\sum_{s=1}^{j-1}y_{is}\left(\frac{P_iQ_s}{p_iq_s}\right)^{1/k}P_{i-1}Q_{s-1}$$
$$+y_{ij}\left(\frac{P_iQ_j}{p_iq_j}\right)^{1/k}P_{i-1}Q_{j-1}$$
$$-\left(\sum_{t=1}^{i-1}\sum_{s=1}^{j-1}y_{ts}\left(\frac{P_tQ_s}{p_tq_s}\right)^{1/k}P_{t-1}Q_{s-1}+\sum_{s=1}^{j-1}y_{is}\left(\frac{P_iQ_s}{p_iq_s}\right)^{1/k}P_{i-1}Q_{s-1}\right)$$
$$-\left(\sum_{t=1}^{i-1}\left(\sum_{s=1}^{j-1}y_{ts}\left(\frac{P_tQ_s}{p_tq_s}\right)^{1/k}P_{t-1}Q_{s-1}\right)+y_{tj}\left(\frac{P_tQ_j}{p_tq_j}\right)^{1/k}P_{t-1}Q_{j-1}\right)$$
$$\left.+\sum_{t=1,s=1}^{i-1,j-1}y_{ts}\left(\frac{P_tQ_s}{p_tq_s}\right)^{1/k}P_{t-1}Q_{s-1}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{i=1}^{m-1} \Delta_{10}\left(\frac{a_{in}}{P_{i-1}Q_{n-1}}\right)\left\{\sum_{t=1}^{i-1}\sum_{s=1}^{n-1} y_{ts}\left(\frac{P_tQ_s}{p_tq_s}\right)^{1/k} P_{t-1}Q_{s-1}\right.\\
&\qquad + \sum_{t=1}^{i-1} y_{tn}\left(\frac{P_tQ_n}{p_tq_n}\right)^{1/k} P_{t-1}Q_{n-1} + \sum_{s=1}^{n-1} y_{is}\left(\frac{P_iQ_s}{p_iq_s}\right)^{1/k} P_{i-1}Q_{s-1}\\
&\qquad + y_{in}\left(\frac{P_iQ_n}{p_iq_n}\right)^{1/k} P_{i-1}Q_{n-1}\\
&\qquad - \left(\sum_{t=1}^{i-1}\sum_{s=1}^{n-1} y_{ts}\left(\frac{P_tQ_s}{p_tq_s}\right)^{1/k} P_{t-1}Q_{s-1} + \sum_{s=1}^{n-1} y_{is}\left(\frac{P_iQ_s}{p_iq_s}\right)^{1/k} P_{i-1}Q_{s-1}\right)\\
&\qquad - \left(\sum_{t=1}^{i-1}\left(\sum_{s=1}^{n-1} y_{ts}\left(\frac{P_tQ_s}{p_tq_s}\right)^{1/k} P_{t-1}Q_{s-1}\right) + y_{tn}\left(\frac{P_tQ_n}{p_tq_n}\right)^{1/k} P_{t-1}Q_{n-1}\right)\\
&\qquad \left. + \sum_{t=1,s=1}^{i-1,n-1} y_{ts}\left(\frac{P_tQ_s}{p_tq_s}\right)^{1/k} P_{t-1}Q_{s-1}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{j=1}^{n-1} \Delta_{01}\left(\frac{a_{mj}}{P_{m-1}Q_{j-1}}\right)\left\{\sum_{t=1}^{m-1}\sum_{s=1}^{j-1} y_{ts}\left(\frac{P_tQ_s}{p_tq_s}\right)^{1/k} P_{t-1}Q_{s-1}\right.\\
&\qquad + \sum_{t=1}^{m-1} y_{tj}\left(\frac{P_tQ_j}{p_tq_j}\right)^{1/k} P_{t-1}Q_{j-1} + \sum_{s=1}^{j-1} y_{ms}\left(\frac{P_mQ_s}{p_mq_s}\right)^{1/k} P_{m-1}Q_{s-1}\\
&\qquad + y_{mj}\left(\frac{P_mQ_j}{p_mq_j}\right)^{1/k} P_{m-1}Q_{j-1}\\
&\qquad - \left(\sum_{t=1}^{m-1}\sum_{s=1}^{j-1} y_{ts}\left(\frac{P_tQ_s}{p_tq_s}\right)^{1/k} P_{t-1}Q_{s-1} + \sum_{s=1}^{j-1} y_{ms}\left(\frac{P_mQ_s}{p_mq_s}\right)^{1/k} P_{m-1}Q_{s-1}\right)\\
&\qquad - \left(\sum_{t=1}^{m-1}\left(\sum_{s=1}^{j-1} y_{ts}\left(\frac{P_tQ_s}{p_tq_s}\right)^{1/k} P_{t-1}Q_{s-1} + y_{tj}\left(\frac{P_tQ_j}{p_tq_j}\right)^{1/k} P_{t-1}Q_{j-1}\right)\right)\\
&\qquad \left. + \sum_{t=1}^{m-1}\sum_{s=1}^{j-1} y_{ts}\left(\frac{P_tQ_s}{p_tq_s}\right)^{1/k} P_{t-1}Q_{s-1}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{a_{mn}}{P_{m-1}Q_{n-1}}\left\{\sum_{t=1}^{m-1}\sum_{s=1}^{n-1} y_{ts}\left(\frac{P_tQ_s}{p_tq_s}\right)^{1/k} P_{t-1}Q_{s-1}\right.\\
&\qquad+\sum_{t=1}^{m-1} y_{tn}\left(\frac{P_tQ_n}{p_tq_n}\right)^{1/k} P_{t-1}Q_{n-1}+\sum_{s=1}^{n-1} y_{ms}\left(\frac{P_mQ_s}{p_mq_s}\right)^{1/k} P_{m-1}Q_{s-1}\\
&\qquad+y_{mn}\left(\frac{P_mQ_n}{p_mq_n}\right)^{1/k} P_{m-1}Q_{n-1}\\
&\qquad-\left(\sum_{t=1}^{m-1}\sum_{s=1}^{n-1} y_{ts}\left(\frac{P_tQ_s}{p_tq_s}\right)^{1/k} P_{t-1}Q_{s-1}+\sum_{s=1}^{n-1} y_{ms}\left(\frac{P_mQ_s}{p_mq_s}\right)^{1/k} P_{m-1}Q_{s-1}\right)\\
&\qquad-\left(\sum_{t=1}^{m-1}\left(\sum_{s=1}^{n-1} y_{ts}\left(\frac{P_tQ_s}{p_tq_s}\right)^{1/k} P_{t-1}Q_{s-1}+y_{tn}\left(\frac{P_tQ_n}{p_tq_n}\right)^{1/k} P_{t-1}Q_{n-1}\right)\right)\\
&\qquad\left.+\sum_{t=1,s=1}^{m-1,n-1} y_{ts}\left(\frac{P_tQ_s}{p_tq_s}\right)^{1/k} P_{t-1}Q_{s-1}\right\}
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece gerekli sadeleştirmeler yapılarak her $m,n\geq 0$ için

$$
\begin{aligned}
z_{mn}=a_{00}y_{00}&+\frac{a_{m0}y_{m0}P_m^{1/k}}{p_m^{1/k}}+\sum_{i=1}^{m-1}\frac{y_{i0}P_i^{1/k}P_{i-1}}{p_i^{1/k}}\Delta_{10}\left(\frac{a_{i0}}{P_{i-1}}\right)+\frac{a_{0n}y_{0n}Q_n^{1/k}}{q_n^{1/k}}\\
&+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{y_{0j}Q_j^{1/k}Q_{j-1}}{q_j^{1/k}}\Delta_{01}\left(\frac{a_{0j}}{Q_{j-1}}\right)\\
&+\sum_{i,j=1}^{m-1,n-1}\Delta_{11}\left(\frac{a_{ij}}{P_{i-1}Q_{j-1}}\right)y_{ij}\left(\frac{P_iQ_j}{p_iq_j}\right)^{1/k} P_{i-1}Q_{j-1}\\
&+\sum_{i=1}^{m-1}\Delta_{10}\left(\frac{a_{in}}{P_{i-1}Q_{n-1}}\right)y_{in}\left(\frac{P_iQ_n}{p_iq_n}\right)^{1/k} P_{i-1}Q_{n-1}\\
&+\sum_{j=1}^{n-1}\Delta_{01}\left(\frac{a_{mj}}{P_{m-1}Q_{j-1}}\right)y_{mj}\left(\frac{P_mQ_j}{p_mq_j}\right)^{1/k} P_{m-1}Q_{j-1}
\end{aligned}
$$

$$+\frac{a_{mn}}{P_{m-1}Q_{n-1}}y_{mn}\left(\frac{P_mQ_n}{p_mq_n}\right)^{1/k}P_{m-1}Q_{n-1}$$

$$=\big(D(y)\big)_{mn}$$

eşitliği bulunur. Burada $D=\left(d_{mnij}\right)$ matrisi (4.4) ile tanımlıdır.

Bu durumda $x=(x_{mn})\in\left|\overline{N}_{p,q}\right|_k$ olduğunda $ax=(a_{mn}x_{mn})\in\mathcal{CS}_{bp}$ olması için gerek ve yeter şart $y=(y_{mn})\in\mathcal{L}_k$ olduğunda $z=(z_{mn})\in\mathcal{C}_{bp}$ olmasıdır. Bu durumda $a=(a_{mn})\in\left(\left|\overline{N}_{p,q}\right|_k\right)^{\beta(bp)}$ olması için gerek ve yeter şart $D\in\left(\mathcal{L}_k:\mathcal{C}_{bp}\right)$ olmasıdır.

Lemma 4.1 iv) den $k=1$ için

$$\sup_{m,n,i,j\in\mathbb{N}}\left|d_{mnij}\right|<\infty$$

ve öyle bir $\left(u_{ij}\right)\in\Omega$ vardır öyle ki

$$bp-\lim_{m,n\to\infty}d_{mnij}=u_{ij}\tag{4.8}$$

koşulları sağlanır.

Lemma 4.1 v) den $1<k<\infty$ için

$$\sup_{m,n\in\mathbb{N}}\sum_{i,j}\left|d_{mnij}\right|^{k^*}<\infty$$

ve (4.8) koşulları sağlanır.

Bu ise $k=1$ için

$$\left(\left|\overline{N}_{p,q}\right|_1\right)^{\beta(bp)}=w_1\cap w_2$$

ve $1<k<\infty$ için

$$\left(\left|\overline{N}_{p,q}\right|_k\right)^{\beta(bp)} = w_1 \cap w_3$$

olduğu anlamına gelir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4.3 $D = (d_{mnij})$ matrisini (4.4) ve w_2, w_3 kümelerini ise sırasıyla $(4.5), (4.6)$ ile tanımlayalım. Bu durumda

$i)$ $k = 1$ için, $\left(\left|\overline{N}_{p,q}\right|_1\right)^{\gamma} = w_2$ dir.

$ii)$ $1 < k < \infty$ için, $\left(\left|\overline{N}_{p,q}\right|_k\right)^{\gamma} = w_3$ tür.

İspat. $a = (a_{mn}) \in \Omega$ ve $x = (x_{mn}) \in \left|\overline{N}_{p,q}\right|_k$ olsun. Bu durumda Teorem 3.2 den öyle bir $y = (y_{mn}) \in \mathcal{L}_k$ $(1 \leq k < \infty)$ çift dizisi vardır. Teorem 4.2 de olduğu gibi çift indisli diziler için Abel dönüşümünü kullanarak her $m, n \geq 0$ için

$$z_{mn} = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{ij}x_{ij} = a_{00}y_{00} + \frac{a_{m0}y_{m0}P_m^{1/k}}{p_m^{1/k}} + \sum_{i=1}^{m-1}\frac{y_{i0}P_i^{1/k}P_{i-1}}{p_i^{1/k}}\Delta_{10}\left(\frac{a_{i0}}{P_{i-1}}\right)$$

$$+\frac{a_{0n}y_{0n}Q_n^{1/k}}{q_n^{1/k}} + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{y_{0j}Q_j^{1/k}Q_{j-1}}{q_j^{1/k}}\Delta_{01}\left(\frac{a_{0j}}{Q_{j-1}}\right)$$

$$+\sum_{i,j=1}^{m-1,n-1}\Delta_{11}\left(\frac{a_{ij}}{P_{i-1}Q_{j-1}}\right)y_{ij}\left(\frac{P_iQ_j}{p_iq_j}\right)^{1/k}P_{i-1}Q_{j-1}$$

$$+\sum_{i=1}^{m-1}\Delta_{10}\left(\frac{a_{in}}{P_{i-1}Q_{n-1}}\right)y_{in}\left(\frac{P_iQ_n}{p_iq_n}\right)^{1/k}P_{i-1}Q_{n-1}$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}\Delta_{01}\left(\frac{a_{mj}}{P_{m-1}Q_{j-1}}\right)y_{mj}\left(\frac{P_mQ_j}{p_mq_j}\right)^{1/k}P_{m-1}Q_{j-1}$$

$$+\frac{a_{mn}}{P_{m-1}Q_{n-1}}y_{mn}\left(\frac{P_mQ_n}{p_mq_n}\right)^{1/k}P_{m-1}Q_{n-1}$$

$$=\big(D(y)\big)_{mn}$$

eşitliğini buluruz, yani,

$$z_{mn}=\sum_{k,l=0}^{m,n}a_{kl}x_{kl}=\big(D(y)\big)_{mn}$$

yazılabilir. Burada $D=\left(d_{mnij}\right)$ matrisi (4.4) ile tanımlıdır.

Bu durumda $x=(x_{mn})\in\ \left|\bar{N}_{p,q}\right|_k$ olduğunda $ax=(a_{mn}x_{mn})\in BS$ olması için gerek ve yeter şart $y=(y_{mn})\in\ \mathcal{L}_k$ olduğunda $z=(z_{mn})\in\mathcal{M}_u$ olmasıdır. Bu durumda $a=(a_{mn})\in\ \left(\left|\bar{N}_{p,q}\right|_k\right)^{\gamma}$ olması için gerek ve yeter şart $D\in(\mathcal{L}_k:\mathcal{M}_u)$ olmasıdır.

Lemma 4.1 i) den $k=1$ için $D\in(\mathcal{L}_1:\mathcal{M}_u)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{m,n,i,j\in\mathbb{N}}\left|d_{mnij}\right|<\infty$$

koşulunun sağlanmasıdır.

Lemma 4.1 ii) den $1<k<\infty$ için $D\in(\mathcal{L}_k:\mathcal{M}_u)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{m,n\in\mathbb{N}}\sum_{i,j}\left|d_{mnij}\right|^{k^*}<\infty$$

koşulunun sağlanmasıdır.

Bu ise $k=1$ için

$$\left(\left|\bar{N}_{p,q}\right|_1\right)^{\gamma}=w_2$$

ve $1 < k < \infty$ için

$$\left(|\bar{N}_{p,q}|_k\right)^{\gamma} = w_3$$

olduğu anlamına gelir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.4 $F = (f_{mnij})$ matrisini

$$f_{mnij} = \begin{cases} a_{00}, & m = n = 0, \\ \dfrac{a_{m0}P_m^{1/k}}{p_m^{1/k}}, & n = 0 \text{ ve } i = m, \\ -\dfrac{a_{m0}P_{m-1}^{1/k}P_{m-2}}{P_{m-1}p_{m-1}^{1/k}}, & n = 0 \text{ ve } i = m-1, \\ \dfrac{a_{0n}Q_n^{1/k}}{q_n^{1/k}}, & m = 0 \text{ ve } j = n, \\ -\dfrac{a_{0n}Q_{n-1}^{1/k}Q_{n-2}}{Q_{n-1}q_{n-1}^{1/k}}, & m = 0 \text{ ve } j = n-1, \\ \dfrac{a_{mn}}{P_{m-1}Q_{n-1}}\left(\dfrac{P_{m-1}Q_{n-1}}{p_{m-1}q_{n-1}}\right)^{1/k} P_{m-2}Q_{n-2}, & i = m-1 \text{ ve } j = n-1, \\ -\dfrac{a_{mn}}{P_{m-1}Q_{n-1}}\left(\dfrac{P_{m-1}Q_n}{p_{m-1}q_n}\right)^{1/k} P_{m-2}Q_{n-1}, & i = m-1 \text{ ve } j = n, \\ -\dfrac{a_{mn}}{P_{m-1}Q_{n-1}}\left(\dfrac{P_mQ_{n-1}}{p_mq_{n-1}}\right)^{1/k} P_{m-1}Q_{n-2}, & i = m \text{ ve } j = n-1, \\ \dfrac{a_{mn}}{P_{m-1}Q_{n-1}}\left(\dfrac{P_mQ_n}{p_mq_n}\right)^{1/k} P_{m-1}Q_{n-1}, & i = m \text{ ve } j = n \end{cases} \tag{4.9}$$

ve w_4 kümesini

$$w_4 = \left\{ a = (a_{mn}) \in \Omega : \sup_{i,j\in\mathbb{N}} \sum_{m,n} |f_{mnij}| < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$\left(|\bar{N}_{p,q}|_1\right)^{\alpha} = w_4$$

bulunur.

İspat. $a=(a_{mn})\in\Omega$ ve $x=(x_{mn})\in\left|\overline{N}_{p,q}\right|_1$ olsun. Bu durumda Teorem 3.2 den öyle bir $y=(y_{mn})\in\mathcal{L}_u$ çift dizisi vardır. $x=(x_{mn})\in\left|\overline{N}_{p,q}\right|_1$ dizisi için $(3.24), (3.25), (3.26)$ ve (3.27) eşitlikleri kullanılarak

$m=n=0$ için,

$$a_{00}x_{00}=a_{00}y_{00}=(Fy)_{00},$$

$m=0, n\geq 1$ için,

$$a_{0n}x_{0n}=a_{0n}\frac{1}{Q_{n-1}}\left(y_{0n}\frac{Q_n^{1/k}Q_{n-1}}{q_n^{1/k}}-y_{0,n-1}\frac{Q_{n-1}^{1/k}Q_{n-2}}{q_{n-1}^{1/k}}\right)=(Fy)_{0n},$$

$n=0, m\geq 1$ için,

$$a_{m0}x_{m0}=a_{m0}\frac{1}{P_{m-1}}\left(y_{m0}\frac{P_m^{1/k}P_{m-1}}{p_m^{1/k}}-y_{m-1,0}\frac{P_{m-1}^{1/k}P_{m-2}}{p_{m-1}^{1/k}}\right)=(Fy)_{m0},$$

ve $n,m\geq 1$ için

$$\begin{aligned}a_{mn}x_{mn}=a_{mn}\frac{1}{P_{m-1}Q_{n-1}}\Bigg(&y_{mn}\left(\frac{P_mQ_n}{p_mq_n}\right)^{1/k}P_{m-1}Q_{n-1}\\&-y_{m,n-1}\left(\frac{P_mQ_{n-1}}{p_mq_{n-1}}\right)^{1/k}P_{m-1}Q_{n-2}-y_{m-1,n}\left(\frac{P_{m-1}Q_n}{p_{m-1}q_n}\right)^{1/k}P_{m-2}Q_{n-1}\\&+y_{m-1,n-1}\left(\frac{P_{m-1}Q_{n-1}}{p_{m-1}q_{n-1}}\right)^{1/k}P_{m-2}Q_{n-2}\Bigg)=(Fy)_{mn}\end{aligned}$$

yazılabilir.

Böylece her $n,m\geq 0$ için,

$$a_{mn}x_{mn}=(Fy)_{mn}$$

bulunur. Burada $F=\left(f_{mnij}\right)$ matrisi (4.9) ile tanımlıdır.

Bu durumda $x=(x_{mn})\in\left|\overline{N}_{p,q}\right|_1$ olduğu zaman $ax=(a_{mn}x_{mn})\in\mathcal{L}_u$ olması için gerek ve yeter şart $y=(y_{mn})\in\mathcal{L}_u$ olduğu zaman $Fy\in\mathcal{L}_u$ olmasıdır. Bu durumda $a=(a_{mn})\in\left(|\overline{N}_{p,q}|_1\right)^{\alpha}$ olması için gerek ve yeter şart $F\in(\mathcal{L}_u\ :\mathcal{L}_u\ )$ olmasıdır.

Lemma 4.1 ii) den $k=k_1=1$ için $F\in(\mathcal{L}_u\ :\mathcal{L}_u\ )$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{i,j\in\mathbb{N}}\sum_{m,n}|f_{mnij}|<\infty$$

koşulunun sağlanmasıdır.

Bu ise

$$\left(|\overline{N}_{p,q}|_1\right)^{\alpha}=w_4$$

olduğu anlamına gelir, bu da ispatı tamamlar.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Çift indisli Riesz ortalaması ve dört boyutlu bir matrisin bir çift dizi uzayındaki etki alanı ile ilgili olarak, Yeşilkayagil ve Başar (2017, 2018) Riesz ortalaması sınırlı, Pringsheim manada yakınsak, hem Pringsheim manada yakınsak hem de sınırlı, regüler manada yakınsak ve mutlak q −toplanabilir çift dizilerin sırasıyla $R^{qt}(\mathcal{M}_u)$, $R^{qt}(\mathcal{C}_p)$, $R^{qt}(\mathcal{C}_{bp})$, $R^{qt}(\mathcal{C}_r)$ ve $R^{qt}(\mathcal{L}_q)$ uzaylarını tanımlayarak bu uzayların cebirsel ve topolojik özelliklerini incelediler. Bu çalışmada ise çift Riesz ortalaması ve Sarıgöl (2010) tarafından tanımlanan mutlak toplanabilme kavramı kullanılarak farklı yapıda inşa edilen (Sarıgöl, 2021) $\left|\overline{N}_{p,q}\right|_k$ mutlak Riesz çift seri uzayının bazı topolojik özellikleri incelenip dual uzayları belirlendi. Bir sonraki çalışmada ise $\left|\overline{N}_{p,q}\right|_k$ çift seri uzayı üzerine bazı matris dönüşümlerinin karakterizasyonu yapılabilir.

6. KAYNAKLAR

Alotaibi, A.M. and Çakan, C., "The Riesz convergence and Riesz core of double sequences", *Journal of İnequalities and Applications* 2012:56, pp:8, (2012).

Başar, F. and Sever, Y., "The space $\mathcal{L}_q$ of double sequences," *Math. J. Okayama Univ.*, 51, 149–157, (2009).

Boos, J. "Classical and Modern Methods in Summability", *Oxford MathematicalMonographs. Oxford Science Publications. Oxford University Press, Oxford*, (2000).

Boos, J. and Cass, F.P., *Classical and Modern Methods in Summability*, Clarendon Press, (2000).

Bor, H., "On $|\bar{N}, p_n|_k$ summability factors of infinite series", *Tamkang J. Math.*, 16, 13-20, (1985)

Bor, H. and Thorpe, B., "On some absolute summability methods", Analysis 7,145–152, (1987).

Bor, H., "Some equivalence theorems on absolute summability methods", *Acta Math. Hungar.* 149(1), 208–214, (2016).

Burkill, J. C. and Burkill, H., *A Second Course in Mathematical Analysis*, Cambridge University Press. London, (1980).

Demiriz, S. and Duyar, O. "Domain of difference matrix of order one in some spaces of double sequences", *Gulf J. Math.*, 3(3), 85–100 (2015).

Flett, T.M., "On an extension of absolute summability and theorems of Littlewood and Paley", *Proc. London Math. Soc.*, 7, 113–141. (1957).

Gökhan, A. and Çolak, R., "The double sequence spaces $c_2^P(p)$ and $c_2^{BP}(p)$", *Appl. Math. Comput.*, 157(2), 109–147, (2004).

Gökhan, A. and Çolak, R., "Double sequence space $\ell_2^\infty(p)$", *ibid.*, 160(1), 147–153, (2005).

Hamilton, H. J., "Transformations of multiple sequences", *Duke Mathematical Journal*, 2(1), 29-60, (1936).

Hardy, G. H., “On the convergence of certain multiple series”, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 19, 86-95, (1916 − 1919).

Hardy, G. H., *Divergent Series,* Oxford University Press, London (1949).

Kojima, T., “On the theory of double sequence”, *Tôhoku Mathematical Journal*, 21, 3-14, (1922).

Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley New York, vol. 1., (1978).

Limaye, B.V. and Zeltser, M. “On the Pringsheim convergence of double series” Proceedings of the Estonian Academy of Sciences, 58(2), 108-121, (2009).

Maddox, I. J., *Elements of Functional Analysis,* Cambridge University Press, Cambridge, (1970).

Móricz, F.,“Extensions of the spaces c and c_0 from single to double sequences”,*Acta Math. Hungar,* 57, 129–136, (1991).

Móricz, F. and Rhoades, B.E., “Almost convergence of double sequences and strong regularity of summability matrices”, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,* 104(2), 283-294, (1988).

Mursaleen, M. and Başar, F., “Domain of Cesàro mean of order one in some spaces of double sequences”, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica,* 51, 335-356, (2014).

Bodur, O., “Çift Seri Uzayları ve Cesàro Ortalaması”, Yüksek Lisans Tezi, Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Denizli, (2021).

Pringsheim, A., “Zur Theorie der zweifach unendlichen Zahlenfolgen”, *Mathematische Annalen*, 53(3), 289-321, (1900).

Rhoades, B. E., “Absolute comparison theorems for double weighted mean and double Cesàro means”, *Math. Slovaca,* 48, 285–301, (1998).

Robison, G. M., “Divergent double sequences and series”,*Transactions of the American Mathematical Society,* 28(1), 50–73, (1926).

Sarıgöl, M. A., “On local properties of factored Fourier series”, *App. Math. Comput.*, 216, 3386-3390, (2010).

Sarıgöl, M. A., “Matrix transformations on fields of absolute weighted mean summability”, Studia Sci. Math. Hungar., 48 (3), 331-341, (2011).

Sarıgöl, M. A., “Spaces of series summable by absolute Cesàro and matrix operators”, *Comm. Math. Appl*., 7(1), 11-22, (2016).

Sarıgöl, M. A., “On equivalence of absolute double weighted mean methods”, *Quaestiones Mathematicae*, 44(6), 755-764, (2021).

Yeşilkayagil, M. and Başar, F., “A note on Riesz summability of double series, *Proc. Natl. Acad. Sci. India A*, 86(3), 333-337, (2016).

Yeşilkayagil, M. and Başar, F., “On the domain of Riesz mean in the space $\mathcal{L}_s^*$” *Filomat*, 31(4), 925-940, (2017).

Yeşilkayagil, M. and Başar, F., “Domain of Riesz mean in some spaces of double sequences” *Indagationes Mathematicae*, 29, 1009-1029, (2018).

Zeltser, M., “Investigation of Double sequence spaces by soft and hard analitical methods”, *Dissertationes Mathematicae Universtaties Tartuensis 25, Tartu University Press, Univ. of Tartu, Faculty of Mathematics and Computer Science,* Tartu, (2001).

Zeltser, M., “On conservative matrix methods for double sequence spaces”, *ActaMath. Hung.*, 95(3), 225–242, (2002).