T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN TAM ÇÖZÜMLERİ İÇİN METOTLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HACER KAYA

DENİZLİ, AĞUSTOS - 2021

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN TAM ÇÖZÜMLERİ İÇİN METOTLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HACER KAYA

DENİZLİ, AĞUSTOS - 2021

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

HACER KAYA

ÖZET

BAZI LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN TAM ÇÖZÜMLERİ İÇİN METOTLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HACER KAYA

PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI:PROF. DR. UĞUR YÜCEL)

DENİZLİ, AĞUSTOS - 2021

Fen ve mühendislik alanlarındaki birçok problem farklı tipte lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem (LOKDD) veya kuple LOKDD sistemlerince yönetilir. Bu tipteki denklemlerin tam çözümlerinin elimizde olması, lineer olmayan fiziksel olayların derinlemesine incelenmesine, sayısal çözücülerin test edilmesine ve aynı zamanda çözümlerin kararlılık analizlerinin yapılmasına olanak sağlar. Bu çalışmada, bir bilgisayar cebiri sistemi olan Maple yardımıyla bazı LOKDD ve kuple LOKDD sistemlerinin tam çözümleri için farklı yaklaşımlar takip edilmektedir. Bunlardan son zamanlarda geliştirilen beş metot, ki bunlar tanh-fonksiyonu metodu, hiperbolik fonksiyon metodu, ilk integral metodu, kosinüs fonksiyonu metodu ve genelleştirilmiş Kudryashov metodu, göz önüne alınmaktadır. Bu metotlar LOKDD ve kuple LOKDD sistemlerinin ilerleyen dalga çözümlerini elde etmemizi mümkün kılmaktadırlar. Bu metotların kullanımı dalga teorisi, lineer olmayan mekanik, hidrodinamik, gaz dinamiği, lineer olmayan akustik, lineer olmayan optik ve kontrol teorisi gibi uygulamalarda karşımıza çıkan çeşitli lineer olamayan evrim denklemlerine uygulanarak açıklanmaktadır. Elde edilen çözümlerden bazılarının grafikleri verilmektedir.

ANAHTAR KELİMELER: tanh-fonksiyonu metodu, hiperbol fonksiyon metodu, ilk integral metodu, kosinüs fonksiyon metodu, genelleştirilmiş Kudryashov metodu

ABSTRACT

METHODS FOR EXACT SOLUTIONS OF SOME NONLINEAR SYSTEMS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS
MSC THESIS
HACER KAYA
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE MATHEMATICS
(SUPERVISOR:PROF. DR. UĞUR YÜCEL)

DENİZLİ, AUGUST 2021

Many problems in science and engineering are governed by different types of nonlinear partial differential equations (NLPDEs) or systems of coupled NLPDEs. Having exact solutions of these types of equations makes it possible to study nonlinear physical phenomena thoroughly and facilitates testing the numerical solvers as well as aiding the stability analysis of solutions. In this work, we follow different approaches for finding exact solutions of some NLPDEs and systems of coupled NLPDEs with the aid of computer algebra system, Maple. We consider recently developed five methods, namely, tanh-function method, hyperbolic function method, first integral method, cosine function method and generalized Kudryashov method. These methods allow us to construct travelling wave solutions of NLPDEs and systems of coupled NLPDEs. The use of these methods is illustrated by applying them to a variety of nonlinear evolution equations arising in various applications, such as wave theory, nonlinear mechanics, hydrodynamics, gas dynamics, nonlinear acoustics, nonlinear optics, and control theory. Graphs are drawn for some of the obtained solutions.

KEYWORDS: tanh-function method, hyperbola function method, first integral method, cosine function method, generalized Kudryashov method

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Sembolik hesaplama paket programlarının (Maple, Mathematica, Matlab, DOE-Macsyma, Pari, Macsyma, Magma, Axiom, vb. gibi) günümüzde yaygın olarak kullanılmaya başlanmasıyla birlikte, lineer olmayan Kısmi Diferansiyel Denklem (KDD) ve/veya KDD sistemlerinin tam (analitik) çözümlerini elde etme daha da çekici hale gelmeye başlamıştır. Bu şekildeki denklem ve/veya denklem sistemlerinin tam çözümlerinin elimizde olması, akışkanlar dinamiği, su dalgası mekaniği, meteoroloji, elektromanyetik teorisi, plazma fiziği ve doğrusal olmayan optik gibi birçok alandaki lineer olmayan fiziksel olayları derinliğine incelememizi ve sayısal (nümerik) çözücüleri test etmemizi mümkün hale getirmektedir. Daha ayrıntılı olarak (Khouzani 2019),

- Lineer olmayan denklemlerin ve/veya denklem sistemlerinin tam çözümleri grafiksel olarak birçok karmaşık lineer olmayan olayın (transfer işleminin uzaysal lokalizasyonu, çeşitli şartlar altında kararlı durumların çok katlılığı veya yokluğu, pik rejiminin varlığı ve daha niceleri) mekanizmasını göstermemize ve çözmemize izin verir.
- Basit çözümler çeşitli dersleri öğretmede matematiksel formülasyonu mümkün olan bir teorinin temel ilkelerini göstermede özel örnekler olarak sıklıkla kullanılırlar.
- Fiziksel manada yeterince anlaşılamayan özel tam çözümler bile çeşitli sayısal (nümerik), asimtotik ve yaklaşık analitik metotların hata tahminlerini ve kararlılığını (tutarlılığını) doğrulamada "test problemler" olarak kullanılabilirler.
- Tam çözümler, diferansiyel denklemleri ve/veya denklem sistemlerini çözmek için geliştirilen bilgisayar cebiri yazılım paketlerinin testinde ve iyileştirmesinde bir dayanak olarak hizmet edebilirler.
- Fiziğin, kimyanın ve biyolojinin birçok denklemi ampirik parametreler veya ampirik fonksiyonlar içermektedir. Tam çözümler, araştırmacılar için uygun doğal koşullar oluşturarak bu parametreleri veya fonksiyonları tanımlamak için dizayn yapmaya ve deneysel çalışmaya olanak sağlarlar.

Bilindiği üzere bazı özel lineer olmayan KDD ve/veya KDD sistemlerinin analitik çözümleri için çeşitli metotlar mevcut olsa da bu denklemlerin genel durumları için bir teori mevcut değildir. Yani, tüm tiplerdeki lineer olmayan KDD ve/veya KDD sistemlerine uygulanabilecek tek bir metot yoktur. Lineer olmama durumu her bir denklemi kendine özgü yapmasına rağmen, en azından lineer olmayan KDD ve/veya KDD sistemlerinin bir sınıfı için yeni metotlar geliştirilmesine ihtiyaç duyulmaktadır.

Özellikle 1970'li yıllardan sonra, lineer olmayan KDD ve/veya KDD sistemlerinin tam çözümleri için birçok değişik yöntem ortaya atılmıştır. Bunlardan bazıları; Bäcklund dönüşümü (Wahlquist 1973), Darboux dönüşümü (Matveev ve Salle 1991), homojen balans metodu (Wang, Zhou ve Li 1996), çeşitli tanh fonksiyonu metotları (Malfliet 1992, Fan 2000, Chen ve Zheng 2003, Soliman 2006, Abdou ve Soliman 2006, Abdou 2007, Shukri ve Al-Khaled 2010), sinüs-kosinüs metodu (Wazwaz 2004[a]), exp-fonksiyonu metodu (Wazwaz 2008, Wazwaz 2010, Hua 2010, Zhang ve Zhang 2011), Weierstrass eliptik fonksiyon metodu (Deng, Cao ve Li 2010), (G′/G)-açılımı metodu (Zayed ve Gepreel 2011, Gepreel 2011), ilk integral metodu (Feng 2002, Lu, Zhang ve Xie 2010) ve Kudryashov metodu (Kudryashov 2012), olarak sıralanabilir.

Bu alanda literatür oldukça geniş olduğundan biz bu çalışmada bu metotlardan sadece beşini ele alacağız. Bunlar sırasıyla

- tanh fonksiyonu (hiperbolik tanjant) metodu,
- hiperbol fonksiyon metodu,
- ilk integral metodu,
- kosinüs fonksiyonu metodu,
- genelleştirilmiş Kudryashov metodu.

şeklindedir. Öncelikle, ele alacağımız bu metotlarla ilgili literatür bilgisini daha kapsamlı olarak aşağıdaki birkaç paragrafta vereceğiz.

Çalışacağımız metotlardan ilki, *tanh fonksiyonu* (veya *hiperbolik tanjant*) *metodu*dur. Malfliet (1992), lineer olmayan dalga denklemlerinin hareketli dalga çözümlerini elde etmek için tanh fonksiyonu metodu olarak adlandırdığı bir metodu kullanmıştır. Bu metodu, çoğu çözümlerin bir hiperbolik tanjantın fonksiyonu olması gerçeğine dayandırmış ve kullanımının basitliğinin yanı sıra çözümlere ulaşmada çok az cebirsel işlem gerekliliğini ön plana çıkarmıştır. Oldukça basit matematik kullanarak, Burgers denklemi, Korteweg-de Vries (KdV) denklemi, modifiye KdV denklemi, Fisher denklemi, Kuple dalga denklemleri (modifiye Volterra denklemleri) ve lineer olmayan reaksiyon-difüzyon denklemi gibi iyi bilinen denklemlerin hareketli dalga çözümlerini elde etmiştir. Parkes ve Duffy (1996) elle uygulaması oldukça zahmetli olan bu metot için bir *Mathematica* paket programı geliştirmişlerdir. Geliştirilen bu paket programı kullanarak bazı lineer olmayan evrim denklemlerinin bilinen açık hareketli soliter dalga çözümlerinin tekrar elde edilmesinin yanı sıra bazı durumlar için daha genel çözüm formları elde etmişlerdir. Fan (2000) bu metodu geliştirerek bir *geliştirilmiş tanh fonksiyonu metodu* öne sürmüş ve bu yeni metotla bazı (1+1)-boyutlu ve (2+1)-boyutlu lineer olmayan KDD leri çözmüştür. Tanh fonksiyonu metodunun tersine bu geliştirilmiş metodun bazı avantajları vardır. Bunlardan ilki lineer olmayan denklemlerin katlı hareketli dalga çözümlerini bileşik olarak inşa etmede kullanılabilir olmasıdır. Bu şekilde tanh fonksiyonu metoduyla elde edilen soliter dalga çözümleri elde edilmekte ve ekstra çaba harcamadan bazı denklemler için yeni ve daha genel tipte çözümler bulunabilmektedir. Diğer bir avantajı ise kolaylıkla bilgisayar ortamına aktarılabilmesi ve karmaşık ve zahmetli cebirsel işlemlerin bu ortamda yapılabilmesine olanak sağlamasıdır. Khater ve diğ. (2002) tanh metodunu kullanarak lineer olmayan reaksiyon-yayılma denklemlerinden tek ve akuple olanının hareketli dalga çözümlerini elde etmişlerdir. Evans ve Raslan (2005) tanh fonksiyonu metoduyla eşit-genişlikli dalga denklemini, değiştirilmiş Korteweg-de Vries (KdV) denklemini, düzenlenmiş uzun-dalga denklemini ve iki boyutlu akuple Burgers denklemini çözmüştür.

Çalışacağımız metotlardan ikincisi, Bai (2001) nin *hiperbol fonksiyon metodu* olarak adlandırdığı bir metottur. Bai (2001) bu metodu kullanarak bazı lineer olmayan KDD (Duffing denklemi, Klein-Gordon denklemi, Landau-Ginzburg-Higgs denklemi ve sine-Gordon denklemini özel haller olarak içerisinde barındıran lineer olmayan evrim denklemi) ve KDD sistemi (varyant Boussinesq denklem sistemi) için yeni tam çözümler elde etti. Benzer şekilde, Inc ve Evans (2004) hiperbol fonksiyon metodunu kullanarak bazı lineer olmayan KDD lerin (Benjamin-Bona-Mahony denklemi, Kuple KdV ve MKdV denklemleri) ilerleyen dalga çözümlerini elde ettiler.

Ele alacağımız metotlardan üçüncüsü *ilk integral metodudur*. Bu metot ilk olarak Feng (2002) tarafından birleşmeli cebir teorisi kullanılarak bileşik Burgers-KdV ve Burgers-KdV denklemlerinin ilerleyen dalga çözümlerini bulmada kullanılmıştır. Daha sonra, Ilie ve diğ. (2018) bu metodu kullanarak kesirli KDD lerin ilerleyen dalga çözümlerini elde etmişlerdir.

Ele alacağımız dördüncü metot ise *kosinüs fonksiyonu metodu*dur. Bu metot Wazwaz (2004[a]) tarafından lineer olmayan dalga denklemlerinin ilerleyen dalga çözümlerini bulmak için ortaya atılan Sinüs-Kosinüs metodundan biri olup daha sonra da yine Wazwaz (2004[b]), Wazwaz ve Helal (2005), Wazwaz (2006[b]) ve Wazwaz (2006[c]) tarafından farklı lineer olmayan KDD denklem ve/veya denklem sistemlerini çözmede kullanılmıştır.

Çalışacağımız son metot ise *genelleştirilmiş Kudryshov metodu*dur. Bu metot integrallenemeyen lineer olmayan KDD lerin tam çözümlerini bulmada kullanılan ilk metotlardan biri olan Bäcklund dönüşümü metodunun modifiye edilmiş halidir (Kudryshov 2012). Daha sonra, Demiray ve diğ. (2014) bu metodu lineer olmayan zaman-kesirli Klein-Gordon denklemine uygulayarak bu denklemin bazı yeni tam çözümlerini elde etmişlerdir. Yine, Baskonus ve Bulut (2015) genelleştirilmiş Kudryshov metodunu kullanarak (1+1)-boyutlu lineer olmayan ayırgan modifiye Benjamin-Bona-Mahony denklemi ve (2+1)-boyutlu kübik Klein-Gordon denkleminin bazı yeni analitik çözümlerini elde etmişlerdir. Khan ve diğ. (2016) ise bu metodu varyant Boussinesq denklemi ve (2+1) boyutlu kırıcı soliton denklemine uygulamışlardır.

Bu tezin organizasyonu şu şekildedir. İkinci bölümünde bazı önemli tanımlar ve temel kavramlar verilecektir. Diğer bölümlerde ise (son bölüm hariç) ele alacağımız metotların temel prensipleri verildikten sonra her bir metot için fen ve mühendislik alanlarında karşımıza çıkan prototip denklemler ve/veya denklem sistemleri uygulama olarak verilecektir. Son bölümde ise yapılan çalışmalar özetlenecek ve bazı önerilerde bulunulacaktır.

2. DALGA YAYILIMI

Lineer ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemleri çalışırken temel yapı taşlarından biri de dalga yayılımıdır. Bir ortamın bir bölümünden diğer bir bölümüne belli bir yayılma hızıyla taşınan belli bir sinyale ***dalga*** denir. Dalga yayılımında temel öneme sahip birkaç alan aşağıdaki gibidir:

- Akışkanlar mekaniği (su dalgaları, aerodinamik)
- Akustik (hava ve sıvılarda ses dalgaları)
- Elastisite (gerilim dalgaları, depremler)
- Elektromanyetik Teori (optik, elektromanyetik dalgalar)
- Biyoloji (epizotik dalgalar)
- Kimya (ateş ve ateşleme dalgaları)

Belirli bir yönde şeklini koruyarak taşınan dalgalara ***ilerleyen dalga***lar denir. Aynı zamanda, ilerleyen bir dalga, yayılma boyunca sabit bir hıza sahiptir. Bu tür dalgalar birçok bilim dalında karşımıza çıkabilir (örneğin, bir kimyasal reaksiyonun sonucu olarak ortaya çıkabilecek yanma gibi) (Volpert 1994). Matematiksel biyolojide sinir liflerinde belirgin olan dürtüler hareket dalgaları olarak temsil edilir (Murray 2013). Ayrıca, akışkanlar dinamiği problemleriyle ilgili koruma yasalarında, şok profilleri ilerleyen dalgalar olarak karakterize edilirler (Smoller 2012).

Matematiksel olarak en basit dalga

$$u(x,t) = f(x - ct) \tag{2.1}$$

formunda bir fonksiyondur. Burada $c > 0$ sabiti dalganın hızını temsil eder. $t = 0$ da, dalga başlangıç profili olan $f(x)$ biçimine sahiptir. $f(x - ct)$ ise herhangi bir t zamanındaki profili temsil eder. Bu da başlangıçtaki dalganın ct uzaysal birim kadar sağa doğru ötelenmiş hali demektir. Dolayısıyla (2.1) denklemi ile verilen ifade c hızıyla sağa doğru hareket eden bir dalgayı temsil eder. Benzer şekilde,

$$u(x,t) = f(x + ct) \tag{2.2}$$

c hızıyla sola doğru hareket eden bir dalgadır. $c = 0$ durumunda ortaya çıkan dalgaya ***duran dalga*** adı verilir ve bu tür dalgalar yayılmaz.

Matematiksel olarak (2.1) formundaki fonksiyonlarla ifade edilen dalgalar haraketli dalgalar olarak adlandırılır. Bir lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin hareketli dalga çözümlerini bulmak için ilk olarak (2.1) formuyla işe başlanır ve ardından diferansiyel denklemin çözümünü verecek f fonksiyonu ve c sabiti belirlenir. Bu f ve c yi belirleme (tanımlama) daha sonra göreceğimiz gibi f ye verilen sınır koşullarına bağlıdır.

Verilen bir kısmi diferansiyel denklemle ilişkili hareketli dalga çözümler ailesini dört basit forma ayırabiliriz. Bunlar:

- ***Soliter Dalga Çözümü***: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$\lim_{n \to \pm\infty} f^{(n)}(\xi) = 0$$

  şeklindeki sınır koşullarını sağladığında, ilerleyen dalga çözümüne verilen addır.

- ***Periyodik Hareketli Dalga Çözümü***: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $\xi \in \mathbb{R}$ için $f^{(n)}(\xi)$ mevcut olacak şekilde periyodu L olan periyodik bir fonksiyon ve $[0, L]$ aralığında

$$f^{(n)}(0) = f^{(n)}(L)$$

  şeklindeki sınır koşullarını sağladığında, ilerleyen dalga çözümüne verilen addır.

- ***Kink Hareketli Dalga Çözümü***: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$u_l = \lim_{\xi \to -\infty} f(\xi), \quad u_r = \lim_{\xi \to +\infty} f(\xi)$$

  şeklindeki sınır koşullarını sağladığında (u_l, u_r : sabit) ve $u_l \neq u_r$ ($\infty > u_l > u_r > -\infty$ veya $u_l < u_r$) olduğunda, ilerleyen dalga çözümüne verilen addır. f fonksiyonu bazen

$$\lim_{\xi \to \pm\infty} f^{(n)}(\xi) = 0$$

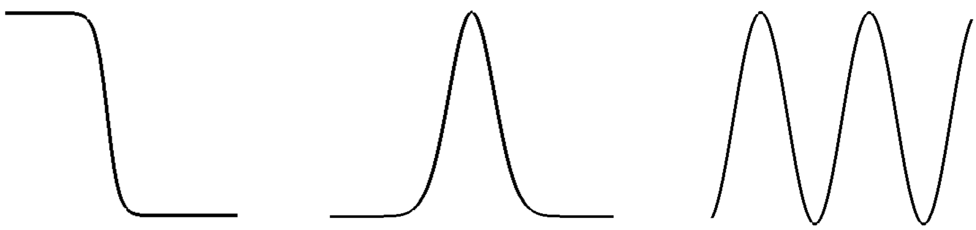
şeklindeki ek asimtotik koşulu da sağlar. Fiziksel çerçeveye bağlı olarak kink ilerleyen dalga çözümü ***dalga cephesi*** olarak ta adlandırılır.

- ***Pals (Sinyal) Dalga Çözümü***: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$u_l = \lim_{\xi \to -\infty} f(\xi), \qquad u_r = \lim_{\xi \to +\infty} f(\xi)$$

şeklindeki sınır koşullarını sağladığında ve $u_l = u_r$ olduğunda, ilerleyen dalga çözümüne verilen addır. Eğer $u_l = u_r = 0$ ise bu çözüm bir soliter dalga çözümü olur.

Şekil 2.1 de bazı hareketli dalga şekilleri gösterilmektedir.



(a) (b) (c)

Şekil 2.1: İlerleyen dalga şekilleri: (a) kink, (b) pals (sinyal), (c) periyodik

Soliter (tekil) ***dalga***, dalganın grup hızıyla (yani dalganın enerjisinin taşındığı hızla) hareket eden referans koordinat sisteminden bakıldığında büyüklüğünde veya şeklinde herhangi bir değişim olmadan yayılan dalgadır. ***Soliton*** ise verilen özelliklere ek olarak diğer solitonlarla etkileşime geçtiğinde değişmeden (patlamadan) kurtulabilen lineer olmayan soliter bir dalgadır. Örneğin,

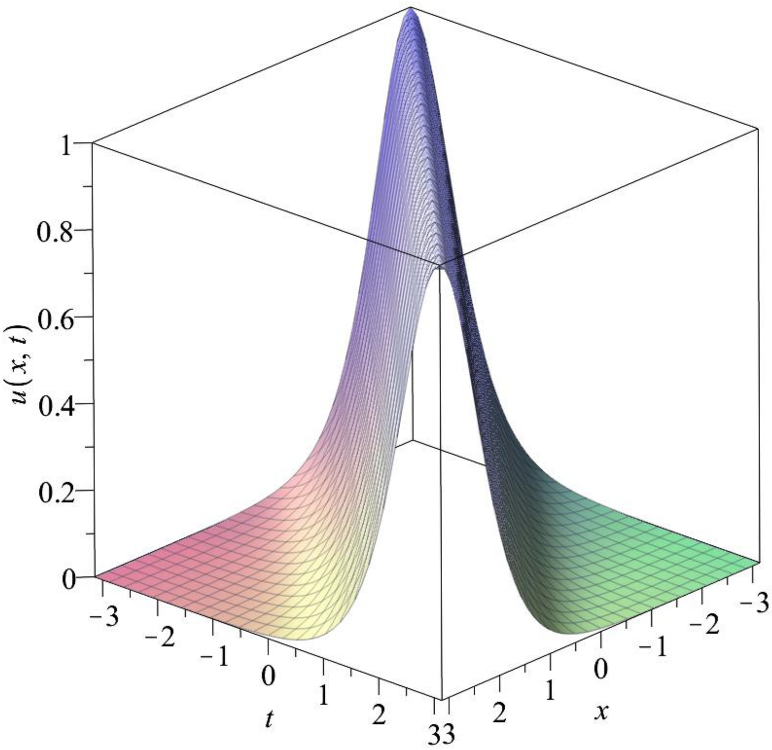
$$u(x,t) = sech^2(x-t), \qquad -\pi \leq x, t \leq \pi$$

çözümü bir solitondur. Bu soliton çözümün grafiği Şekil 2.2 de gösterilmektedir.

Aşağıda hareketli dalga şekilleri için bazı örnekler verilmektedir.

2.1 Örnek: Pals veya Soliter Çözüm

İlk olarak, pals (sinyal) dalgası şeklini alan bir çözümü elde etmek için benzer bir yaklaşımı çalışabiliriz. Bunun için Korteweg-de Vries (KdV) denklemi olarak bilinen ve



Şekil 2.2 Soliton çözümü $\boldsymbol{u(x,t) = sech^2(x-t), -\pi \leq x, t \leq \pi}$

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanan lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemi ele alalım. Bu denklem sığ su yüzeylerinde oluşan dalgaları modellemede kullanılan bir denklemdir (Evans 1998).

$$u(x,t) = U(\xi), \qquad \xi = x - ct$$

şeklinde değişken değiştirmesi yaparak işe başlayalım. u nun kısmi türevlerini (2.3) denkleminde yerine yazarsak

$$-cU' + 6UU' + U''' = 0 \tag{2.4}$$

elde ederiz. Bu denklemin ξ ye göre integralini aldığımızda,

$$-cU + 3U^2 + U'' = c_1$$

ifadesini elde ederiz. Bu denklemin her iki yanını U' ile çarparsak aşağıdaki denklemini elde ederiz:

$$-cUU' + 3U^2U' + U''U' = c_1U' \tag{2.5}$$

Bu denklemin ξ ye göre integralini aldığımızda

$$\frac{(U')^2}{2} = \frac{cU^2}{2} - U^3 + c_1U + c_2 \tag{2.6}$$

elde edilir. Biz burada puls (sinyal) dalga çözümü elde etmek istediğimizden dolayı $\xi \to \pm\infty$ iken U, U' ve $U'' \to 0$ olduğunu varsayacağız. Dolayısıyla $c_1 = c_2 = 0$ olmalıdır. Bunu (2.6) denkleminde kullandıktan sonra elde edilen denklem U' göre değişkenlerine ayrılabilir bir adi diferansiyel denklemdir ve aşağıdaki formda yazabilir:

$$U' = \pm U(c - 2U)^{\frac{1}{2}} \tag{2.7}$$

Hesaplamaları basitleştirmek için burada sadece negatif işaretli olanı göz önüne alırsak (2.7) denklemini

$$-\frac{dU}{U(c-2U)^{\frac{1}{2}}} = d\xi \tag{2.8}$$

şeklinde yazabiliriz. Bunun integralini alırsak, c_3 bir integral sabiti olmak üzere,

$$\xi = -\int_{U_0}^{U} \frac{d\omega}{\omega(c-2\omega)} + c_3 \tag{2.9}$$

elde ederiz. Bu eşitliğin sağ tarafındaki integrali almak için

$$\omega = U_0 sech^2\theta \ \left(\frac{d\omega}{d\theta} = -c sech^2\omega tanh\omega\right)$$

değişken değiştirmesi yapılırsa ve $U_0 = {}^{c}/_{2}$ (bir keyfi sabit) olarak seçilirse

$$\xi = \frac{2}{\sqrt{c}}\theta + c_3 \tag{2.10}$$

sonucu elde edilir. Burada θ kapalı fonksiyon olarak

$$\frac{c}{2} sech^2\theta = U(\xi) \tag{2.11}$$

şeklindedir. Denklem (2.10) u θ için çözersek

$$\theta = \frac{\sqrt{c}}{2}(\xi - c_3) \tag{2.12}$$

bulunur. Bunu (2.11) yerine yazarsak,

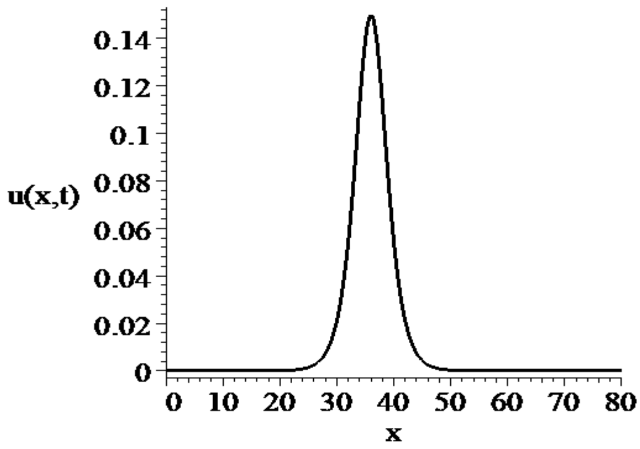
$$U(\xi) = \frac{c}{2} sech^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(\xi - c_3)\right) \tag{2.13}$$

ifadesini elde ederiz. Sonuç olarak ele aldığımız KdV denkleminin hareketli dalga çözümü

$$u(x.t) = \frac{c}{2} sech^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct - c_3)\right), x \in \ , t \geq 0 \tag{2.14}$$

olarak bulunur. Bu sonuçta dalganın genliği ve hızı arasında bir ilişki olduğunu gözlemleyebiliriz.

Şekil 2.3 te $t = 120$ ve $c_3 = 0$ için KdV denkleminin puls (sinyal) dalga çözümü görülmektedir.



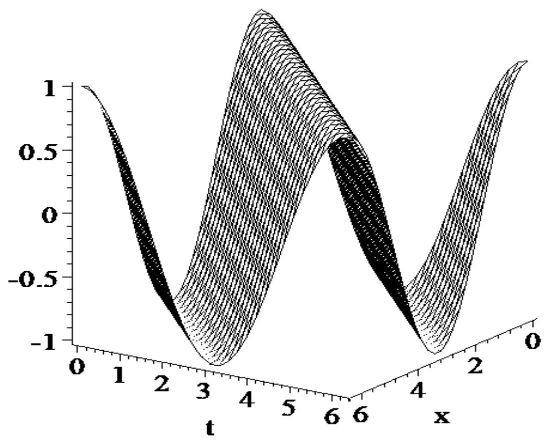
Şekil 2.3: KdV denkleminin $\boldsymbol{u_r = u_l = 0, c = 0.3}$ için pals çözümü

2.2 Örnek: Periyodik Dalga Çözümü

Periyodik hareketli dalga çözümleri $sin(x-t)$, $cos(x-t)$ formunda olan çözümlerdir. Standart dalga denklemi

$$u_{tt} = u_{xx}$$

$cos(x-t)$ gibi periyodik çözüme sahiptir ve bu çözümün grafiği $0 \leq x, t \leq 2\pi$ için Şekil 2.4 de gösterilmektedir (Maghsoudi 2019).



Şekil 2.4: Dalga denkleminin bir periyodik çözümü, $\boldsymbol{u(x,t) = cos(x-t)}$

2.3 Örnek: King veya Dalga Cephesi Çözümü

İlk olarak taşınım ve yayılım ile ilişkili aşağıdaki Burger denklemini ele alalım (Maghsoudi 2019):

$$u_t + uu_x = \alpha u_{xx} \tag{2.15}$$

Yukarıdaki örnekte yaptıklarımıza benzer olarak bu denklem için de

$$u(x,t) = U(\xi), \qquad \xi = x - ct$$

şeklinde tanımlanan hareketli dalga çözümünü bulmaya çalışacağız. Bu durumda sınır koşulları

$$U(-\infty) = u_l, \qquad U(+\infty) = u_r$$

şeklinde olur. u nun kısmi türevlerini (2.15) denkleminde yerine yazarsak

$$-cU' + UU' = \alpha U'' \tag{2.16}$$

elde ederiz. Bu denklemin her iki yanının ξ ye göre integralini aldığımızda, c_1 bir integral sabiti olmak üzere,

$$-cU = \alpha U' - \frac{U^2}{2} + c_1 \tag{2.17}$$

ifadesini elde ederiz. Buradaki integral sabitini sınır koşullarını ($U(\infty) = u_r$, $U'(\infty) = 0$) kullanarak aşağıdaki gibi elde ederiz:

$$c_1 = \frac{u_r^2}{2} - cu_r$$

Bundan sonra (2.17) denkleminde $U(-\infty) = u_l$, $U'(-\infty) = 0$, sınır koşullarını uyguladığımızda

$$-cu_l = -\frac{u_l^2}{2} + \frac{u_r^2}{2} - cu_r$$

elde edilir. Bunu da c dalga hızı için çözdüğümüzde

$$c = \frac{u_r + u_l}{2} \tag{2.18}$$

şeklinde açık bir ifade elde ederiz. Gözlem üzerine, dalga hızının doğrudan uzak alan sınır değerlerine bağlı olduğu açıktır. Denklem (2.17) de bulduğumuz c_1 yerine yazılırsa

$$-cU = \alpha U' - \frac{U^2}{2} + \frac{u_r^2}{2} - cu_r \tag{2.19}$$

elde edilir. Bu denklemi tekrar düzenlediğimizde

$$\alpha U' = \frac{U^2}{2} - cU + \frac{u_r^2}{2} + cu_r$$

olur. Bu denklem değişkenlerine ayrılabilir bir adi diferansiyel denklemdir ve aşağıdaki formda yazılabilir:

$$\frac{2\alpha dU}{U^2 - 2cU - u_r^2 + 2cu_r} = d\xi \tag{2.20}$$

Denklem (2.20) ün integrali alınırsa

$$2\alpha \int_{U_0}^{U} \frac{d\theta}{\theta^2 - 2c\theta - u_r^2 + 2cu_r} = \xi \tag{2.21}$$

olur. Özel olarak $u_l = 1$ ve $u_r = 0$ alınırsa bir özel çözüm elde edilir. Bu durumda (2.18) denkleminden $c = \frac{1}{2}$ olur. Eğer $U_0 = \frac{1}{2}$ olursa (2.21) denklemi

$$2\alpha \int_{\frac{1}{2}}^{U} \frac{d\theta}{\theta^2 - \theta} = \xi \tag{2.22}$$

olur. Bu integrali alıp sonucu U için çözdüğümüzde

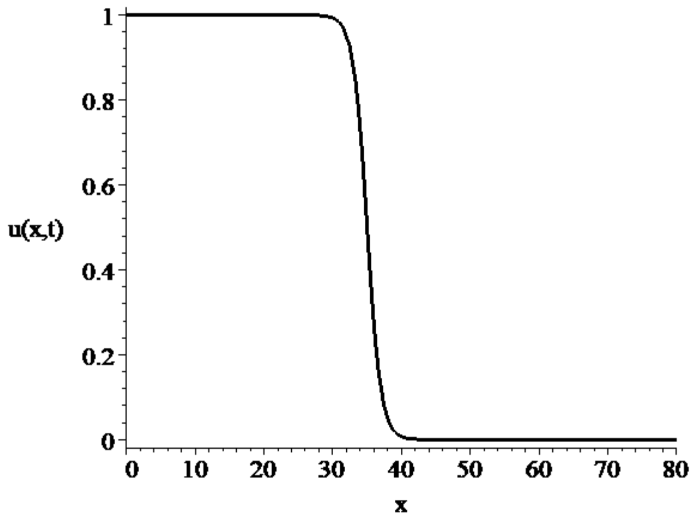
$$U(\xi) = \frac{1}{1 + e^{\frac{\xi}{2\alpha}}} \tag{2.23}$$

Buradan da hareketli dalga çözümü

$$u(x,t) = \frac{1}{1 + e^{\frac{x-ct}{2\alpha}}} \tag{2.24}$$

şeklinde bulunmuş olur.

Şekil 2.5 te $u_l = 1, u_r = 0, c = 0.5$ ve $\alpha = 0.5$ için (2.15) denkleminin $t = 70$ anında sağa doğru yayılan hareketli dalga çözümü görülmektedir. Bu çözüm dalga cephesine karşılık gelen bir çözümdür.



Şekil 2.5: Denklem (2.15) için kink çözümü

3. TANH FONKSİYONU METODU

Kısmi diferansiyel denklemlerin ve/veya KDD denklem sistemlerinin kesin çözümlerini elde etmenin etkili yollarından birinin *tanh fonksiyonu* metodu olduğu söylenebilir. Bu metot çözümlerin sonlu tanjant hiperbolik kuvvet serileri şeklinde yazılabilmesi temeline dayanmakta olup ilk olarak Malfliet (1992) tarafından sunuldu. Sistematik versiyonu ise Malfliet ve Hereman (1996) tarafından özel evrim ve dalga denklemlerini çözmek için kullanıldı. Daha sonra, Fan (2000) bir parametre içeren Riccati denkleminin avantajlarını kullanarak genişletilmiş tanh-fonksiyonu metodunu önerdi. İlerleyen yıllarda birçok araştırmacı bu alanda birçok araştırma yaptı. Wazwaz (2006[a]), tanh ve genişletilmiş tanh yöntemini kullanarak Kuramoto-Sivashinsky ve Kawahara denklemlerinin yeni soliter dalga çözümlerini elde etti. Şimdi bu metodu detaylı olarak inceleyelim.

Lineer olmayan iki bağımsız değişkenli bir kısmi diferansiyel denklem genellikle

$$F(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = 0 \tag{3.1}$$

şeklinde gösterilir. Burada, $u(x,t)$ bilinmeyen bir fonksiyon, F de u ve bunun kısmi türevlerini içeren bir fonksiyondur.

1. Adım: Denklem (3.1) in hareketli dalga çözümlerini bulmak için öncelikle x ve t bağımsız değişkenleri tek bir

$$\xi = k(x - ct)$$

değişkeni altında birleştirilir. Bu değişken dönüşümü yapıldığında $u(x,t)$ fonksiyonu

$$u(x,t) = U(\xi), \quad \xi = k(x - ct) \tag{3.2}$$

ifadesine dönüşür. Burada $k > 0$ dalga sayısını ve $c > 0$ da daha önce belirtildiği gibi dalga hızını temsil etmektedir.

2. Adım: Denklem (3.1) de $u(x,t)$ bağımlı değişkeni ve bunun türevleri yerine ilişkili $U(\xi)$ ve türevleri kullanıldığında

$$F\left(U, k\frac{dU}{d\xi}, -kc\frac{dU}{d\xi}, k^2\frac{d^2U}{d\xi^2}, -k^2c\frac{d^2U}{d\xi^2}, k^2c^2\frac{d^2U}{d\xi^2}, \dots\right) = 0 \quad (3.3)$$

şeklinde bir adi diferansiyel denklem elde edilir.

3. Adım: Yukarıda elde edilen adi diferansiyel denklem bütün terimleri türevsiz olana kadar integrallenir. Terimlerden biri türev içermediğinde prosedür tamamlanır. Yerel çözümler araştırdığımızı göz önüne alarak denklemde gözükecek integral sabitini/sabitlerini sıfır olarak alırız.

4. Adım: Burada can alıcı basamak yeni bağımsız değişken olarak

$$Y = \tanh(\xi) \quad (3.4)$$

şeklindeki tanımlamadır. Bu durumda Denklem (3.3) teki türevler aşağıdaki şekle dönüşür:

$$\frac{d}{d\xi} \to (1 - Y^2)\frac{d}{dY} \quad (3.5)$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \to (1 - Y^2)\left(-2Y\frac{d}{dY} + (1 - Y^2)\frac{d^2}{dY^2}\right) \quad (3.6)$$

$$\frac{d^3}{d\xi^3} \to (1 - Y^2)\left[(6Y^2 - 2)\frac{d}{dY} - 6Y(1 - Y^2)\frac{d^2}{dY^2} + (1 - Y^2)^2\frac{d^3}{dY^3}\right] \quad (3.7)$$

Daha yüksek mertebeden türevler de benzer şekilde bulunabilir.

5. Adım: Aradığımız çözümü Y cinsinden ifade etmemiz gerekmektedir. Bu son aşamada genel bir prosedür mevcut değildir. Çoğunlukla

$$u(x,t) = U(\xi) = S(Y) = \sum_{n=0}^{N} a_n Y^n$$
$$Y = tanh(\xi) = tanh[k(x - ct)] \quad (3.8)$$

şeklinde bir seri açılımı kullanmak yeterlidir. Buradaki N parametresi, Denklem (3.8) ile verilen seri açılımını Denklem (3.3) te kullanarak Y deki en yüksek dereceden terimlerin dengelenmesiyle tanımlanır. Bulunan N değeri Denklem (3.8) deki seri açılımında kullanılır. Bu seri açılımı da dördüncü adımda elde edilen denklemde yerine konulup Y li terimlerin katsayıları sıfıra eşitlenerek bilinmeyen a_n katsayılarını tanımlamak için lineer olmayan cebirsel denklem sistemi elde edilir. Son olarak bu cebirsel denklem sistemi çözülerek a_n ler tanımlanır ve verilen KDD nin çözümüne ulaşılır.

Şimdi de yukarıda çözüm adımları verilen tanh fonksiyonu yönteminin çok iyi bilinen lineer olmayan KDD ve/veya KDD sistemlerine uygulamalarını gösterelim.

3.1 Burgers Denklemi

İlk olarak Burgers (1948) tarafından bir boyutlu türbülansı tanımlamak için kullanılmış olup

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad \alpha\text{: sabit} \tag{3.9}$$

şeklinde lineer olmayan bir KDD dir. Akışkanlar dinamiğindeki yayılan dalgalar için en basit matematiksel modeldir. Aynı zamanda gaz dinamiği, hidrodinamik ve akustikte dalga süreçlerini tanımlamak için kullanılmaktadır (Polyanin ve Zaitsev 2012). Bu denklemi hiperbolik tanjant metoduyla çözmek için öncelikle

$$u(x,t) = U(\xi) = U[k(x - ct)]$$

değişken değiştirmesi yaparak ele aldığımız Burgers denklemini

$$-c\frac{dU(\xi)}{d\xi} + U(\xi)\frac{dU(\xi)}{d\xi} - \alpha k\frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2} = 0 \tag{3.10}$$

şeklinde, denklemin her iki yanını k sabitine böldükten sonra, bir adi diferansiyel denkleme indirgeyelim. Bu denklemin her iki yanının ξ ye göre bir kez integrali alınırsa

$$-cU(\xi) + \frac{1}{2}U(\xi)^2 - \alpha k\frac{dU(\xi)}{d\xi} = C_1 \tag{3.11}$$

elde edilir. Bu denklemde yukarıda belirttiğimiz sebepden dolayı integral sabiti $C_1 = 0$ alınır. Çözüm aşamalarındaki dördüncü ve beşinci adımlar uygulanırsa,

$$Y = tanh(\xi) = tanh[k(x - ct)]$$

olmak üzere

$$U(\xi) = S(Y) = \sum_{n=0}^{N} a_n Y^n$$

ifadesi Denklem (3.11) de kullanıldığında

$$-cS(Y) + \frac{1}{2}S(Y)^2 - \alpha k(1 - Y^2)\frac{dS(Y)}{dY} = 0 \qquad (3.12)$$

elde edilir. Bu denklemde de Denklem (3.8) ile verilen seri açılımı kullanıldığında

$$-c\sum_{n=0}^{N} a_n Y^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N} a_n^2 Y^{2n} - \alpha k \sum_{n=0}^{N} n a_n Y^{n-1} + \alpha k \sum_{n=0}^{N} n a_n Y^{n+1} = 0 \qquad (3.13)$$

ifadesine ulaşılır. Bu son ifadeden N nin alabileceği en büyük değeri Y nin en yüksek derecedeki terimlerini dengeleyerek elde edeceğiz. Bunun için Denklem (3.13) ün ikinci teriminde Y^{2N} ve son teriminde de Y^{N+1} dengelendiğinde $2N = N + 1$ eşitliğinden $N = 1$ bulunur. Bu durumda çözüm

$$S(Y) = \sum_{n=0}^{1} a_n Y^n = a_0 + a_1 Y$$

formunda elde edilir. Bu çözüm formunu da Denklem (3.12) de kullandığımızda

$$-c(a_0 + a_1 Y) + \frac{1}{2}(a_0 + a_1 Y)^2 - \alpha k(1 - Y^2)a_1 = 0 \qquad (3.14)$$

şeklinde Y de bir polinom denklemine ulaşırız. Bu denklemi Y nin kuvvetlerine göre düzenlediğimizde

$$\left(\frac{1}{2}a_1^2 + \alpha k a_1\right)Y^2 + (-ca_1 + a_0 a_1)Y + \left(-ca_0 + \frac{1}{2}a_0^2 - \alpha k a_1\right) = 0 \qquad (3.15)$$

elde ederiz. Şimdi de polinomların eşitliğini kullandığımızda

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}a_1^2 + \alpha k a_1 = 0 & \Rightarrow \quad a_1 = -2\alpha k \\ -ca_1 + a_0 a_1 = 0 & \Rightarrow \quad a_0 = c \\ -ca_0 + \dfrac{1}{2}a_0^2 - \alpha k a_1 = 0 & \Rightarrow \quad c^2 = 4\alpha^2 k^2 \end{cases}$$

sonucuna ulaşırız. Burada, a_0, a_1, k ve c gibi dört bilinmeyen fakat üç denklem olduğu göz önüne alınarak c yi serbest parametre olarak seçtiğimizde

$$a_0 = c, \quad a_1 = \mp c, \quad k = \pm\frac{c}{2\alpha}$$

buluruz. Sonuç olarak çözümü

$$u(x,t) = c\left\{1 \mp tanh\left[\pm\frac{c}{2\alpha}(x - ct)\right]\right\} \tag{3.16}$$

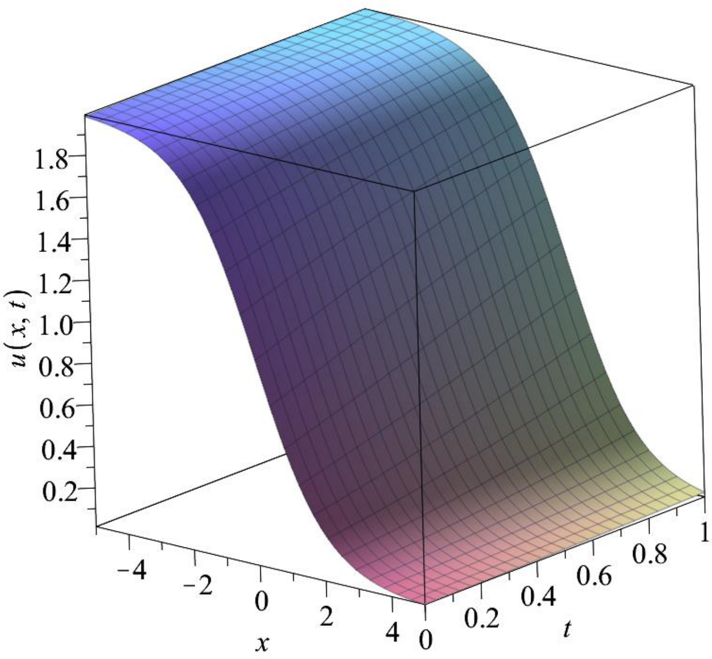
şeklinde iyi bilinen şok-dalga yapısında elde ederiz. Şekil 3.1 de $x = [-5,5]$, $t = [0,1]$ ve $c = \alpha = 1$ için

$$u(x,t) = \left\{1 + tanh\left[-\frac{1}{2}(x - ct)\right]\right\} \tag{3.16a}$$

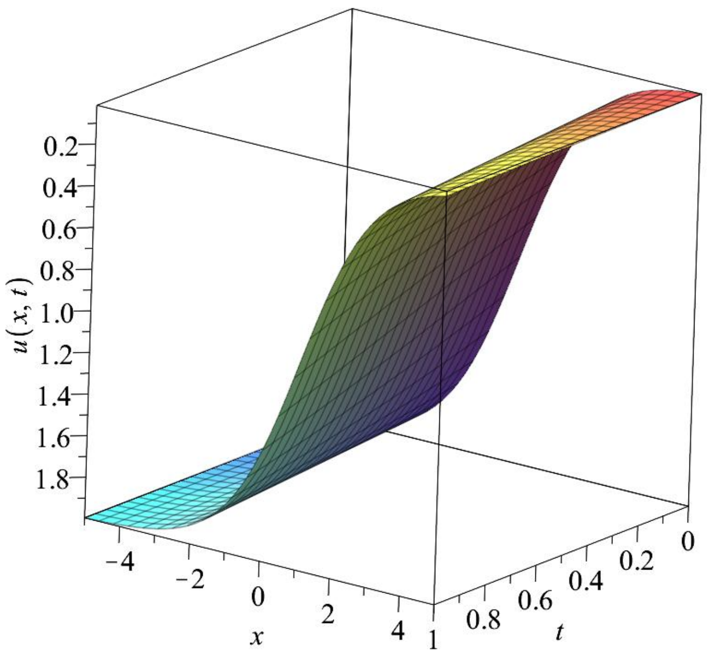
fonksiyonunun grafiği görülmektedir. Şekil 3.2 de de $x = [-5,5]$, $t = [0,1]$ ve $c = \alpha = 1$ için

$$u(x,t) = \left\{1 - tanh\left[\frac{1}{2}(x - ct)\right]\right\} \tag{3.16b}$$

fonksiyonun grafiği görülmektedir.



Şekil 3.1 : Denklem (3.16a) için ilerleyen dalga (kink) çözümü.



Şekil 3.2: Denklem (3.16b) için ilerleyen dalga (kink) çözümü.

3.2 Korteweg-de Vries (KdV) Denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \qquad \alpha, \beta : sabit \tag{3.17}$$

şeklinde bir boyutlu lineer olmayan bir KDD olup modern lineer olmayan dalga teorisinin prototipi olarak bilinmektedir. İlk olarak iki Hollandalı bilim adamı Korteweg ve de Vries (1895) tarafından birleşik yönlü sığ su dalgalarının yayılımını göstermek için kullanılmıştır.

Bu denklemi hiperbolik tanjant metoduyla çözmek için öncelikle, bir önceki örneğe benzer şekilde,

$$u(x,t) = U(\xi) = U[k(x - ct)]$$

şeklindeki değişken değiştirmesini yapalım. Bu durumda Denklem (3.17) yi

$$-c\frac{dU(\xi)}{d\xi} + \alpha U(\xi)\frac{dU(\xi)}{d\xi} + \beta k^2 \frac{d^3U(\xi)}{d\xi^3} = 0 \tag{3.18}$$

şeklinde, denklemin her iki yanını k sabitine böldükten sonra, bir adi diferansiyel denklem olarak yazabiliriz. Şimdi de bu denkleminin her iki yanının ξ ye göre bir kez integrali alınırsa

$$-cU(\xi) + \frac{\alpha}{2}U(\xi)^2 + \beta k^2 \frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2} = C_2 \tag{3.19}$$

elde edilir. Bu son denklemde integral sabiti $C_2 = 0$ alınıp yukarıda verdiğimiz dördüncü ve beşinci adımlar uygulanırsa

$$-cS(Y) + \frac{\alpha}{2}S(Y)^2 + \beta k^2(1 - Y^2)\frac{d}{dY}\left[(1 - Y^2)\frac{dS(Y)}{dY}\right] = 0 \tag{3.20}$$

denklemi elde edilir. Daha sonra bu denklem tanh fonksiyonuna bağlı kuvvet serileri şeklinde yazıldığında $2N = N + 2$ eşitliğinden $N = 2$ bulunur. Bu durumda çözüm

$$S(Y) = \sum_{n=0}^{2} a_n Y^n = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2$$

formunda elde edilir. Bu çözüm formunu da Denklem (3.20) de kullanıp Y nin kuvvetlerine göre düzenlediğimizde

$$\begin{gathered}\left(\frac{1}{2}\alpha a_2^2+6\beta k^2 a_2\right)Y^4+(\alpha a_1 a_2+2\beta k^2 a_1)Y^3\\ +\left(-ca_2+\alpha a_0 a_2+\frac{\alpha a_1^2}{2}-8\beta k^2 a_2\right)Y^2+(-ca_1-2\beta k^2 a_1+\alpha a_0 a_1)Y\\ -ca_0+\frac{\alpha a_0^2}{2}+2\beta k^2 a_2=0\end{gathered} \tag{3.21}$$

elde ederiz. Şimdi de polinomların eşitliğini kullandığımızda

$$\left\{\begin{aligned}\frac{1}{2}\alpha a_2^2+6\beta k^2 a_2&=0\\ \alpha a_1 a_2+2\beta k^2 a_1&=0\\ -ca_2+\alpha a_0 a_2+\frac{\alpha a_1^2}{2}-8\beta k^2 a_2&=0\\ -ca_1-2\beta k^2 a_1+\alpha a_0 a_1&=0\\ -ca_0+\frac{\alpha a_0^2}{2}+2\beta k^2 a_2&=0\end{aligned}\right.$$

şeklinde a_0, a_1, a_2, k ve c bilinmeyenleri için bir lineer olmayan cebirsel denklem sistemi elde ederiz. Bu sistemi Maple paket programı yardımıyla çözdüğümüzde k yı serbest parametre olarak seçersek

$$a_0=\frac{4k^2\beta}{\alpha},\quad a_1=0,\quad a_2=-\frac{12k^2\beta}{\alpha},\quad c=-4\beta k^2,\quad k=k$$

$$a_0=\frac{12k^2\beta}{\alpha},\quad a_1=0,\quad a_2=-\frac{12k^2\beta}{\alpha},\quad c=4\beta k^2,\quad k=k$$

biçiminde iki çözüm seti elde ederiz. Sonuç olarak aşağıdaki şekildeki çözümleri elde ederiz:

$$u(x,t)=\frac{4k^2\beta}{\alpha}\{1-3tanh^2[k(x+4\beta k^2 t)]\} \tag{3.22}$$

$$u(x,t)=\frac{12k^2\beta}{\alpha}\{1-tanh^2[k(x-4\beta k^2 t)]\} \tag{3.23}$$

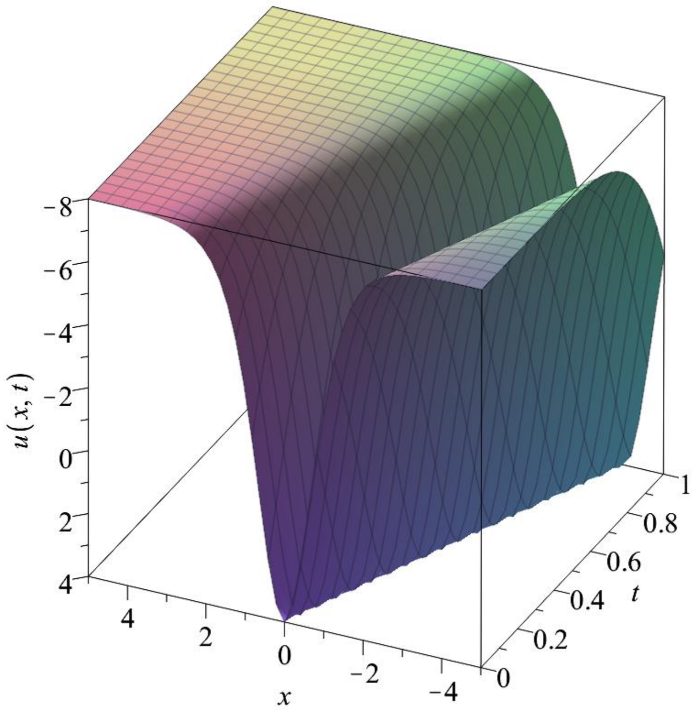
Şekil 3.3 de $x=[-5,5]$, $t=[0,1]$ ve $k=1, \alpha=1\ ve\ \beta=1$ için

$$u(x,t) = 4[1 - 3tanh^2(x + 4t)] \qquad (3.22a)$$

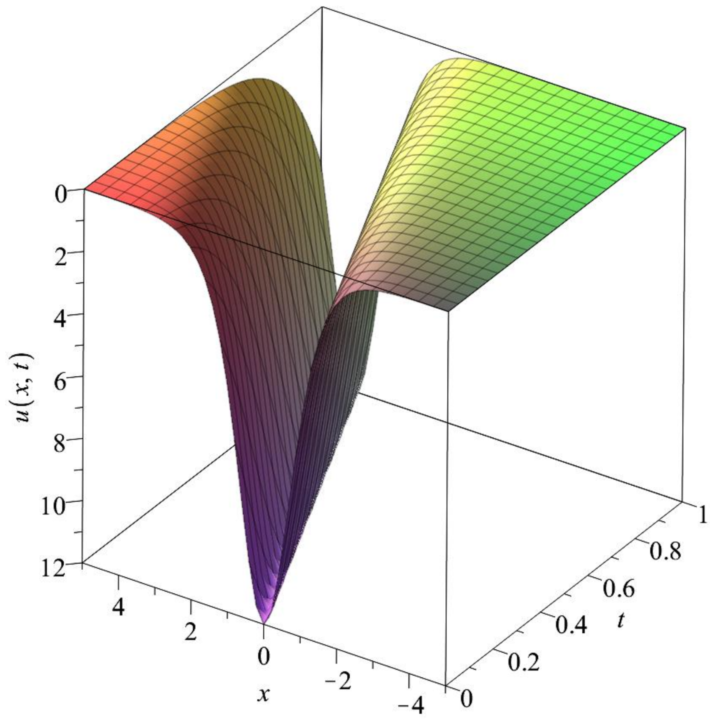
fonksiyonunun grafiği görülmektedir. Şekil 3.4 de $x = [-5,5]$, $t = [0,1]$, $k = 1$, $\alpha = 1$ ve $\beta = 1$ için

$$u(x,t) = 12[1 - tanh^2(x + 4t)] \qquad (3.23a)$$

fonksiyonun grafiği görülmektedir.



Şekil 3.3: Denklem (3.22a) ile verilen fonksiyonun grafiği.



Şekil 3.4: Denklem (3.23a) ile verilen fonksiyonun grafiği.

3.3 Kuple Dalga Denklemleri (Modifiye Volterra Denklemleri)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\frac{\partial u}{\partial x}=u-uw, \qquad \alpha: sabit \\ &\frac{\partial w}{\partial t}+\beta\frac{\partial u}{\partial x}=-w+uw, \qquad \beta: sabit \end{aligned} \tag{3.24}$$

şeklindeki kısmi diferansiyel denklem sistemi $(u \geq 0, w \geq 0)$ popülasyon dinamiğinde karşılaşılan bir matematiksel model olup (Dold ve Eckmann 1974) aynı zamanda bir avcı-av modelinin Lotka-Volterra sisteminin bir genişlemesidir (Murray 1989). Bu sistemi de herhangi bir zorlukla karşılaşmadan tanh metoduyla çözebiliriz. Bunun için öncelikle, yukarıdaki örneklere benzer şekilde,

$$\begin{aligned} u(x,t)&=U(\xi)=U[k(x-ct)] \\ w(x,t)&=W(\xi)=W[k(x-ct)] \end{aligned}$$

değişken değiştirmelerini yapalım. Bu durumda Denklem (3.24) ile verilen kısmi diferansiyel denklem sistemimiz

$$
\begin{aligned}
-ck\frac{dU(\xi)}{d\xi}+\alpha k\frac{dU(\xi)}{d\xi}&=U(\xi)-U(\xi)W(\xi)\\
-ck\frac{dW(\xi)}{d\xi}+\beta k\frac{dW(\xi)}{d\xi}&=-W(\xi)+U(\xi)W(\xi)
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

şeklinde bir adi diferansiyel denklem sistemine indirgenmiş olur. Şimdi de daha önce verdiğimiz dördüncü ve beşinci adımlar uygulanırsa:

$$Y=tanh(\xi)=tanh[k(x-ct)]$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
U(\xi)=S_1(Y)&=\sum_{n=0}^{N}a_nY^n\\
W(\xi)=S_2(Y)&=\sum_{m=0}^{M}b_mY^m
\end{aligned}
$$

ifadeleri Denklem (3.25) de kullanıldığında

$$
\begin{aligned}
-ck(1-Y^2)\frac{dS_1(Y)}{dY}+\alpha k(1-Y^2)\frac{dS_1(Y)}{dY}-S_1(Y)+S_1(Y)S_2(Y)=0\\
-ck(1-Y^2)\frac{dS_2(Y)}{dY}+\alpha k(1-Y^2)\frac{dS_2(Y)}{dY}+S_2(Y)-S_1(Y)S_2(Y)=0
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

elde edilir. Bu denklemlerde yukarıda verilen seri açılımları kullanıldığında

$$
\begin{aligned}
(1-Y^2)k(-c+\alpha)\sum_{n=0}^{N}na_nY^{n-1}-\sum_{n=0}^{N}a_nY^n+\sum_{n=0}^{N}a_nY^n\sum_{m=0}^{M}b_mY^m=0\\
(1-Y^2)k(-c+\beta)\sum_{m=0}^{M}mb_mY^{m-1}+\sum_{m=0}^{M}b_mY^m-\sum_{n=0}^{N}a_nY^n\sum_{m=0}^{M}b_mY^m=0
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

ifadelerine ulaşılır. Bunlardan da N ve M nin alabilecekleri en büyük değerleri Y nin en yüksek derecedeki terimlerini dengeleyerek $N=1$ ve $M=1$bulunur. Bu durumda çözümler

$$S_1(Y)=\sum_{n=0}^{1} a_n Y^n \ = a_0 + a_1 Y$$
$$S_2(Y)=\sum_{m=0}^{1} b_m Y^m \ = b_0 + b_1 Y$$

formunda elde edilir. Bu çözüm formlarını da Denklem (3.26) da kullandığımızda

$$\begin{aligned} (1-Y^2)k(-c+\alpha)a_1 - a_0 - a_1Y + (a_0+a_1Y)(b_0+b_1Y) = 0 \\ (1-Y^2)k(-c+\beta)b_1 + b_0 + b_1Y - (a_0+a_1Y)(b_0+b_1Y) = 0 \end{aligned} \tag{3.28}$$

şeklinde Y de polinom denklemlerine ulaşırız. Bu denklemleri Y nin kuvvetlerine göre düzenlediğimizde

$$\left\{ \begin{aligned} [-k(-c+\alpha)a_1 + a_1b_1]Y^2 + (a_0b_1 + a_1b_0 - a_1)Y \\ +k(-c+\alpha)a_1 - a_0 + a_0b_0 = 0 \\ [-k(-c+\beta)b_1 - a_1b_1]Y^2 \ + (-a_0b_1 - a_1b_0 + b_1)Y \\ +k(-c+\beta)b_1 + b_0 - a_0b_0 = 0 \end{aligned} \right. \tag{3.29}$$

elde ederiz. Şimdi de polinomların eşitliğini kullandığımızda

$$\left\{ \begin{aligned} -k(-c+\alpha)a_1 + a_1b_1 = 0 \\ a_0b_1 + a_1b_0 - a_1 = 0 \\ k(-c+\alpha)a_1 - a_0 + a_0b_0 = 0 \\ -k(-c+\beta)b_1 - a_1b_1 = 0 \\ -a_0b_1 - a_1b_0 + b_1 = 0 \\ k(-c+\beta)b_1 + b_0 - a_0b_0 = 0 \end{aligned} \right.$$

şeklinde a_0, a_1, b_0, b_1, ve c bilinmeyenleri için bir lineer olmayan cebirsel denklem sistemi elde ederiz. Bu sistemi Maple paket programı yardımıyla çözdürdüğümüzde $u \geq 0$ ve $w \geq 0$ olduklarını da göz önüne alarak

$$a_0=\frac{1}{2},\ a_1=\pm\frac{1}{2},\ b_0=\frac{1}{2},\ b_1=\pm\frac{1}{2},\ c=\frac{\alpha+\beta}{2},\ k=\pm\frac{1}{\alpha-\beta} \tag{3.30}$$

buluruz. Sonuç olarak çözümü

$$u(x,t)=w(x,t)=\frac{1}{2}\left\{1 \pm tanh\left[\pm\frac{1}{\alpha-\beta}\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}t\right)\right]\right\} \tag{3.31}$$

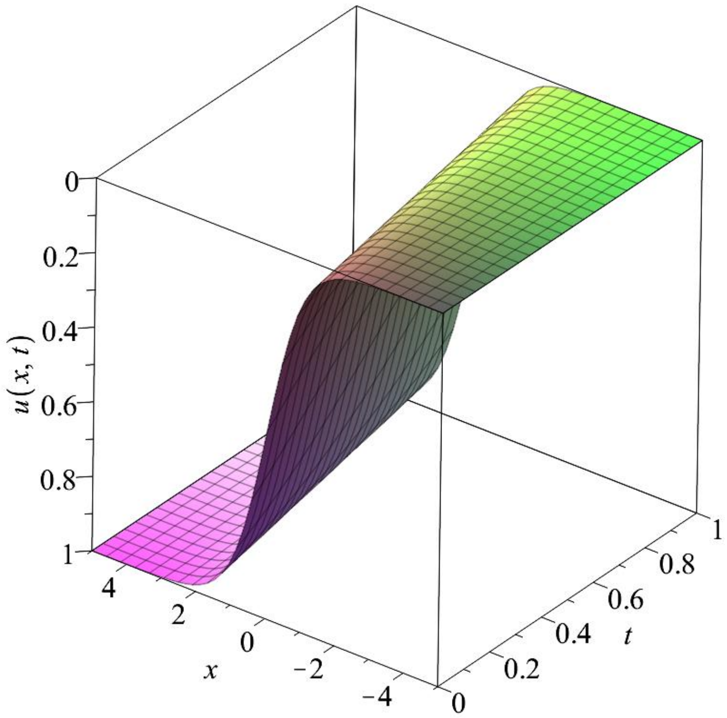
şeklinde elde ederiz. Şekil 3.5 de $x=[-5,5], t=[0,1]$ ve $k=1$ $\alpha=2$ ve $\beta=1$

$$u(x,t) = w(x,t) = \frac{1}{2}\left[1 + tanh\left(-x + \frac{3}{2}t\right)\right] \qquad (3.31a)$$

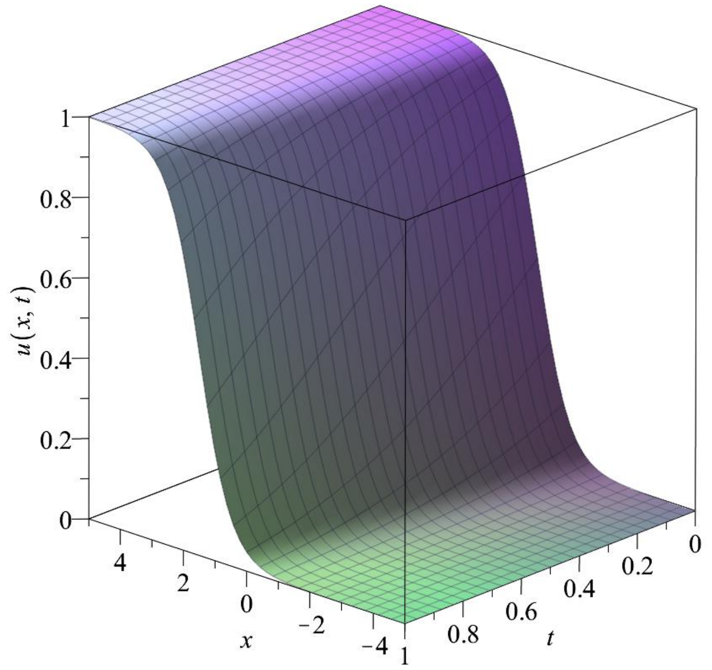
fonksiyonunun grafiği görülmektedir. Şekil 3.6 da da $x = [-5,5], t = [0,1]$, $k = 1$ $\alpha = 2$ ve $\beta = 1$ için

$$u(x,t) = w(x,t) = \frac{1}{2}\left[1 + tanh\left(x - \frac{3}{2}t\right)\right] \qquad (3.31b)$$

fonksiyonun grafiği görülmektedir.



Şekil 3.5: Denklem (3.31a) ile verilen fonksiyonun grafiği.



Şekil 3.6: Denklem (3.31b) ile verilen fonksiyonun grafiği.

4. HİPERBOL FONKSİYON METODU

Bai (2001) hiperbol fonksiyon metodu olarak adlandırdığı metodu kullanarak bazı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem ve/veya denklem sistemleri için yeni analitik çözümler elde etmiştir. Şimdi de bu metodu burada ana hatlarıyla vereceğiz.

İki bağımsız değişkende

$$P(u, u_x, u_t, u_{xx}, \dots) = 0 \tag{4.1}$$

şeklindeki lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklemi ele alalım. İlk olarak bu denklemin

$$u(x,t) = u(\xi)\,, \qquad \xi = k(x - \lambda t + c_0)$$

formunda ilerleyen dalga çözümlerini göz önüne alalım. Bu durumda Denklem (4.1) bir adi diferansiyel denkleme indirgenir ve bu denklem de tüm terimleri türevli olana dek integrallenir. İntegralleme neticesinde karşımıza çıkan integral sabitleri sıfır olarak alınabilir. Bundan sonraki can alıcı adım ise aradığımız çözümün

$$u(\xi) = \sum_{i=1}^{N} sinh^{i-1}\omega(B_i sinh\omega + A_i cosh\omega) + A_0 \tag{4.2}$$

ve

$$\frac{\partial\omega}{\partial\xi} = sinh\omega \tag{4.3}$$

formunda ifade edilmesidir. Burada N parametresi elde edilen adi diferansiyel denklemdeki en yüksek mertebeden türevli terim ile en yüksek mertebeden lineer olmayan terimin dengelenmesiyle elde edilir ve Denklem (4.2) te kullanılarak çözüm formuna ulaşılır. Elde edilen bu çözüm formunu ve Denklem (4.3) ü eldeki adi diferansiyel denklemde yerine yazarak hiperbolik polinom özdeşliği elde edilir. Buradan da aynı üslü olan $sinh^k\omega cosh^l\omega$ şeklindeki tüm terimleri birleştirip katsayılarını sıfıra eşitleyerek $k, \lambda, A_0, A_1, \dots, A_N; B_1, \dots, B_N$ bilinmeyenleri için cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistem Maple yardımıyla çözülerek verilen lineer olmayan KDD ve/veya KDD sistemini ilerleyen dalga çözümüne ulaşılır.

4.1 Evolüsyon Denklemi

$$u_{tt} + au_{xx} + bu + du^3 = 0 \tag{4.4}$$

şeklindeki lineer olmayan evolüsyon denklemini ele alalım. Bu denklem bazı önemli denklemleri içerisinde barındıran bir denklemdir. Örneğin, denklemin t den bağımsız olması durumunda Duffing denklemini (Duffing 1918), $d = 0$ olması durumunda lineer Klein-Gordon denklemini (Polyanin 2002) ve $a = -1,\ b = -1$ olması durumunda da Landau-Ginzburg-Higgs denklemini (Hu ve diğ. 2009) gösterdiğini söyleyebiliriz.

Denklem (4.4) ün yeni ilerleyen dalga çözümlerini elde etmek için öncelikle, k ve λ tanımlanacak sabitler ve c_0 de keyfi bir sabit olmak üzere,

$$u(x,t) = \varphi(\xi), \qquad \xi = \lambda(x - kt + c_0) \tag{4.5}$$

şeklindeki değişken değiştirmesini yapalım. Bu durumda Denklem (4.4)

$$\lambda^2(k^2 + a)\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + b\varphi + d\varphi^3 = 0 \tag{4.6}$$

şeklinde bir adi diferansiyel denkleme indirgenmiş olur. Hiperbol fonksiyon metoduna göre bu denklemin, $A_0, A_1, \dots, A_N; B_1, \dots, B_N$ daha sonra tanımlanacak sabitler olmak üzere,

$$\varphi(\xi) = \sum_{i=1}^{N} sinh^{i-1}\omega(B_i sinh\omega + A_i cosh\omega) + A_0 \tag{4.7}$$

formunda ilerleyen dalga çözümleri olduğunu kabul edeceğiz. Denklem (4.6) daki en yüksek mertebeden türev olan φ'' ve en yüksek mertebeden lineer olmayan terim olan φ^3 nün dengelenmesiyle $N = 1$ bulunur. Dolayısıyla

$$\varphi(\xi) = B_1 sinh\omega + A_1 cosh\omega + A_0 \tag{4.8a}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial\xi} = sinh\omega \tag{4.8b}$$

aldığımızda

$$\varphi'' = 2B_1 sinh^3\omega + 2A_1 sinh^2\omega cosh\omega + B_1 sinh\omega \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}\varphi^3 = {} & (B_1^3 + 3B_1A_1^2)sinh^3\omega + (A_1^3 + 3A_1B_1^2)sinh^2\omega cosh\omega \\ & +(3A_0B_1^2 + 3A_0A_1^2)sinh^2\omega + 6A_0B_1A_1 sinh\omega cosh\omega \\ & +3(A_0^2B_1 + 3B_1A_1^2)sinh\omega + (3A_0^2A_1 + A_1^3)cosh\omega \\ & +A_0^3 + 3A_0A_1^2\end{aligned} \tag{4.10}$$

elde ederiz. Buradan da Denklem (4.9)-(4.10) u Denklem (4.6) da yerine yazıp aynı üslü olan $sinh^k\omega cosh^l\omega$ şeklindeki tüm terimleri birleştirip katsayılarını sıfıra eşitlersek:

$$\begin{aligned} 2B_1\lambda^2(k^2 + a) + dB_1^3 + 3dB_1A_1^2 &= 0 \\ 2A_1\lambda^2(k^2 + a) + dA_1^3 + 3dA_1B_1^2 &= 0 \\ 3dA_0B_1^2 + 3dA_0A_1^2 &= 0 \\ 6dA_0B_1A_1 &= 0 \\ B_1\lambda^2(k^2 + a) + bB_1 + 3dA_0^2B_1 + 3dB_1A_1^2 &= 0 \\ bA_1 + 3dA_0^2A_1 + dA_1^3 &= 0 \\ bA_0 + A_0^3d + 3dA_0A_1^2 &= 0 \end{aligned} \tag{4.11}$$

$k, \lambda, A_0, A_1, B_1$ bilinmeyenleri için lineer olmayan cebirsel denklem sistemini elde ederiz. Bu sistemi Maple yardımıyla çözdüğümüzde k yı serbest parametre olarak seçersek aşağıdaki gibi üç farklı çözüm seti elde ederiz:

$$A_0 = B_1 = 0,\ \ A_1 = \pm\sqrt{\frac{-b}{d}}\ ,\ \ \lambda = \pm\sqrt{\frac{b}{2(k^2 + a)}},\ \ b(k^2 + a) > 0,\ \ bd < 0 \tag{4.12}$$

$$A_0 = A_1 = 0,\ \ B_1 = \pm\sqrt{\frac{2b}{d}}\ ,\ \ \lambda = \pm\sqrt{\frac{-b}{k^2 + a}},\ \ b(k^2 + a) < 0,\ \ bd > 0 \tag{4.13}$$

$$A_0 = 0,\ A_1^2 - B_1^2 = 0,\ A_1 = \pm\sqrt{\frac{-b}{d}}$$
$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{2b}{k^2 + a}},\ b(k^2 + a) > 0,\ bd < 0 \tag{4.14}$$

Şimdi de Denklem (4.8b) yi göz önüne alalım. Bu değişkenlerine ayrılabilir birinci mertebeden adi diferansiyel denklemi çözersek (integral sabiti sıfır olarak alındığında)

$$e^{\omega} = tanh\left(-\frac{\xi}{2}\right)$$

buluruz. Burada

$$e^{-\omega} = coth\left(-\frac{\xi}{2}\right)$$

olduğunu göz önüne alarak

$$sinh\omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{2} = \frac{1}{2}\left[coth\left(-\frac{\xi}{2}\right) - tanh\left(-\frac{\xi}{2}\right)\right]$$

yazabiliriz. Şimdi de

$$coth(x) = \frac{cosh(x)}{sinh(x)},\quad tanh(x) = \frac{sinh(x)}{cosh(x)}$$
$$cosh(-x) = cosh(x),\quad sinh(-x) = -\,sinh(x)$$
$$sinh(2x) = 2\,sinh(x)\,cosh(x)$$

özdeşliklerinden faydalanırsak Denklem (4.8b) nin

$$sinh\omega = -csch\xi \tag{4.15}$$

formundaki çözümüne ulaşırız. Benzer şekilde

$$cosh\omega = coth\xi \tag{4.16}$$

formundaki çözümü de kolayca elde edilebilir.

Son olarak, Denklem (4.5), (4.8a), (4.8b), (4.15) ve (4.16) ile birlikte cebirsel denklem sistemimizin üç çözüm setini (Denklem (4.12), (4.13) ve (4.14)) göz önüne alırsak, Denklem (4.1) için aşağıdaki üç tip ilerleyen dalga çözümlerini elde ederiz.

Tip 1:

$$u(x,t) = \pm\sqrt{\frac{-b}{d}}\, coth\xi$$
$$\xi = \pm\sqrt{\frac{b}{2(k^2+a)}}(x - kt + c_0) \tag{4.17}$$

Tip 2:

$$u(x,t) = \mp\sqrt{\frac{2b}{d}}\, csch\xi$$
$$\xi == \pm\sqrt{\frac{-b}{k^2+a}}(x - kt + c_0) \tag{4.18}$$

Tip 3:

$$u(x,t) = \mp\sqrt{\frac{-b}{c}}\, csch\xi \mp \sqrt{\frac{-b}{d}}\, coth\xi$$
$$\xi = \pm\sqrt{\frac{2b}{k^2+a}}(x - kt + c_0) \tag{4.19}$$

4.2 Varyant Boussinesq Denklem Sistemi

Su dalgaları için bir model olup, $u(x,t)$ hızı ve $H(x,t)$ toplam derinliği göstermek kaydıyla (Wang ve diğ. 2008)

$$\begin{gathered} H_t + (Hu)_x + u_{xxx} = 0 \\ u_t + H_x + uu_x = 0 \end{gathered} \tag{4.20}$$

şeklinde bir kısmi diferansiyel denklem sistemidir. Bu sistemin ilerleyen dalga çözümlerini elde etmek için, öncelikle k ve λ tanımlanacak sabitler ve c_0 da keyfi bir sabit olmak üzere,

$$H(x,t) = \phi(\xi),\ \ u(x,t) = \theta(\xi),\ \ \xi = k(x - \lambda t + c_0) \tag{4.21}$$

şeklindeki değişken değiştirmesini yapalım. Bu durumda bir kısmi diferansiyel denklem sistemi olan Denklem (4.20)

$$\begin{gathered} -\lambda\phi' + (\phi\theta)' + k^2\theta''' = 0 \\ -\lambda\phi' + \phi' + \theta\theta''' = 0 \end{gathered} \tag{4.22}$$

şeklinde bir adi diferansiyel denklem sistemine indirgenmiş olur. Hiperbol fonksiyon metoduna göre bu adi diferansiyel denklem sisteminin, $a_0, a_1, \dots, a_N; b_1, \dots, b_N$ ve $A_0, A_1, \dots, A_N; B_1, \dots, B_N$ daha sonra tanımlanacak sabitler olmak üzere,

$$\begin{aligned} \theta(\xi) &= \sum_{i=1}^{N} sinh^{i-1}\omega(b_i sinh\omega + a_i cosh\omega) + a_0 \\ \phi(\xi) &= \sum_{i=1}^{M} sinh^{i-1}\omega(B_i sinh\omega + A_i cosh\omega) + A_0 \end{aligned} \tag{4.23}$$

formunda ilerleyen dalga çözümleri olduğunu kabul edeceğiz. Denklem (4.22) deki en yüksek mertebeden türev ve en yüksek mertebeden lineer olmayan terimlerin eşitlenmesiyle $N = 1$ ve $M = 2$ olarak bulunur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \theta(\xi) &= b_1 sinh\omega + a_1 cosh\omega + a_0 \\ \phi(\xi) &= B_2 sinh^2\omega + A_2 sinh\omega cosh\omega + B_1 sinh\omega + A_1 cosh\omega + A_0 \end{aligned} \tag{4.24a}$$

ve

$$\frac{\partial\omega}{\partial\xi} = sinh\omega \tag{4.24b}$$

olur. Sistem (4.22) de gözüken türevler hesaplandığında

$$\theta' = b_1 sinh\omega cosh\omega + a_1 sinh^2\omega \tag{4.25}$$

$$\theta'' = b_1 sinh\omega + 2B_1 sinh^2\omega + 2A_1 sinh^2\omega cosh\omega \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}\theta''' = b_1 sinh\omega cosh\omega + 4B_1 sinh^2\omega cosh\omega \\ +4A_1 sinh^2\omega cosh^2\omega + 2A_1 sinh^4\omega\end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}\phi' = 2B_1 sinh^2\omega cosh\omega + A_2 sinh\omega cosh^2\omega + A_2 sinh^3\omega \\ +B_1 sinh\omega cosh\omega + A_1 sinh^2\omega + A_0\end{aligned} \tag{4.28}$$

elde edilir. Buradan da Denklem (4.24)-(4.28) i adi diferansiyel denklem sistemi (4.22) de yerine yazdığımızda sırasıyla

$$\begin{aligned}-\lambda\phi' + (\phi\theta)' + k^2\theta''' = {} & (6k^2 a_1 + 3b_1 A_2 + 3a_1 B_2) sinh^4\omega \\ & +(3b_1 B_1 + 3a_1 A_2 + 6k^2 b_1) sinh^3\omega cosh\omega \\ & +(2b_1 A_1 + 2a_1 B_1 + 2a_0 A_2 - 2\lambda A_2) sinh^3\omega \\ & +(2b_1 B_1 + 2a_0 B_2 + 2a_1 A_1 - 2\lambda B_2) sinh^2\omega cosh\omega \\ & +(a_1 A_0 + a_0 A_1 - \lambda A_1 + 2b_1 A_2 + 2a_1 B_2 + 4k^2 a_1) sinh^2\omega \\ & +(a_0 B_1 - \lambda B_1 + a_1 A_2 + k^2 b_1) sinh\omega cosh\omega \\ & +(b_1 A_1 + a_1 B_1 + a_0 A_2 - \lambda A_2) sinh\omega\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}-\lambda\phi' + \phi' + \theta\theta''' = {} & (2A_2 + 2a_1 b_1) sinh^3\omega \\ & +(2B_2 + a_1^2 + b_1^2) sinh^2\omega cosh\omega + (a_0 a_1 + A_1 - \lambda a_1) sinh^2\omega \\ & +(a_0 b_1 + B_1 - \lambda b_1) sinh\omega cosh\omega + (A_2 + a_1 b_1) sinh\omega\end{aligned} \tag{4.30}$$

bulunur. Şimdi de aynı üslü olan $sinh^k\omega cosh^l\omega$ şeklindeki tüm terimleri birleştirip katsayılarını sıfıra eşitlersek:

$$\begin{aligned}6k^2 a_1 + 3b_1 A_2 + 3a_1 B_2 &= 0 \\ 3b_1 B_1 + 3a_1 A_2 + 6k^2 b_1 &= 0 \\ 2b_1 A_1 + 2a_1 B_1 + 2a_0 A_2 - 2\lambda A_2 &= 0 \\ 2b_1 B_1 + 2a_0 B_2 + 2a_1 A_1 - 2\lambda B_2 &= 0 \\ a_1 A_0 + a_0 A_1 - \lambda A_1 + 2b_1 A_2 + 2a_1 B_2 + 4k^2 a_1 &= 0 \\ a_0 B_1 - \lambda B_1 + a_1 A_2 + k^2 b_1 &= 0 \\ b_1 A_1 + a_1 B_1 + a_0 A_2 - \lambda A_2 &= 0 \\ 2A_2 + 2a_1 b_1 &= 0 \\ 2B_2 + a_1^2 + b_1^2 &= 0 \\ a_0 a_1 + A_1 - \lambda a_1 &= 0 \\ a_0 a_1 + A_1 - \lambda a_1 &= 0 \\ A_2 + a_1 b_1 &= 0\end{aligned} \tag{4.31}$$

şeklinde $k, \lambda, a_0, a_1, b_1$ve A_0, A_1, A_2, B_1, B_2bilinmeyenleri için lineer olmayan cebirsel denklem sistemini elde ederiz. Bu sistemi Maple yardımıyla çözdüğümüzde λ yı serbest parametre olarak seçersek aşağıdaki çözüm setlerini elde ederiz:

$$A_0 = A_1 = A_2 = b_1 = B_1 = 0 \\ B_2 = -2k^2,\ a_1 = \pm 2k,\ a_0 = \lambda \tag{4.32}$$

$$A_0 = A_1 = B_1 = 0 \\ a_0 = \lambda,\ \ a_1 = k,\ \ b_1 = \mp k,\ \ A_2 = \pm k^2\ ,\ \ B_2 = -k^2 \tag{4.33}$$

$$A_0 = A_1 = B_1 = 0 \\ a_0 = \lambda,\ \ a_1 = -k,\ \ b_1 = \mp k,\ \ A_2 = \mp k^2,\ \ B_2 = -k^2 \tag{4.34}$$

Şimdi de Denklem (4.24b) yi göz önüne alalım. Bu değişkenlerine ayrılabilir birinci mertebeden adi diferansiyel denklemi çözersek (integral sabiti sıfır olarak alındığında) evolüsyon denklemininde verilen ifade benzer şekilde

$$sinh\omega = -csc\xi,\ \ cosh\omega = -coth\xi \tag{4.35}$$

elde ederiz.

Son olarak, Denklem (4.21), (4.24a), (4.24b) ve (4.35) ile birlikte cebirsel denklem sistemimizin çözüm setlerini (Denklem (4.32)-(4.34)) göz önüne alırsak, Denklem (4.20) ile verilen KDD sistemi için aşağıdaki ilerleyen dalga çözümlerini elde ederiz.

Tip 1:

$$H(x,t) = B_2 sinh^2\omega = -2k^2 csch^2[k(x-\lambda t+c_0)] \\ u(x,t) = a_1 cosh\omega + a_0 = \mp 2k coth[k(x-\lambda t+c_0)] \tag{4.36}$$

Tip 2:

$$H(x,t) = B_2 sinh^2\omega + A_2 sinh\omega cosh\omega = -k^2 csch^2[k(x-\lambda t+c_0)] \\ \pm k^2 csch[k(x-\lambda t+c_0)]coth[k(x-\lambda t+c_0)] \\ u(x,t) = b_1 sinh\omega + a_1 cosh\omega + a_0 = \pm k csch[k(x-\lambda t+c_0)] \\ -k coth[k(x-\lambda t+c_0)] + \lambda \tag{4.37}$$

Tip 3:

$$H(x,t) = B_2 sinh^2\omega + A_2 sinh\omega cosh\omega = -k^2 csch^2[k(x-\lambda t+c_0)] \\ \mp k^2 csch[k(x-\lambda t+c_0)]coth[k(x-\lambda t+c_0)] \\ u(x,t) = b_1 sinh\omega + a_1 cosh\omega + a_0 = \pm k csch[k(x-\lambda t+c_0)] \\ +k coth[k(x-\lambda t+c_0)] + \lambda \tag{4.38}$$

5. İLK İNTEGRAL METODU

Değişmeli cebir teorisine dayanan ilk integral metodu ilk olarak Feng (2002) tarafından birleşik Burgers-KdV ve Burgers-KdV denklemlerinin açık analitik çözümlerini elde etmede kullanılmıştır. Şimdi bu metodu doğrudan bir KDD sistemi için detaylı olarak inceleyelim (Hosseini ve Diğ. 2012).

1.Adım: u ve v, x ve t bağımsız değişkenlerine bağlı fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{aligned} F_1(u, v, u_t, v_t, u_x, v_x, u_{tt}, v_{tt}, u_{xx}, v_{xx}, \dots) = 0 \\ F_2(u, v, u_t, v_t, u_x, v_x, u_{tt}, v_{tt}, u_{xx}, v_{xx}, \dots) = 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

şeklindeki lineer olmayan KDD sistemini ele alalım. Bu sisteme

$$u(x,t) = f(\varepsilon) \text{ ve } v(x,t) = g(\varepsilon); \ \varepsilon = x - ct$$

dönüşümlerini uygularsak Denklem (5.1) ile verilen KDD sistemimiz

$$\begin{aligned} G_1(f, g, f', g', \dots) = 0 \\ G_2(f, g, f', g', \dots) = 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

şeklinde bir adi diferansiyel denklem sistemine indirgenir.

2. Adım: Bazı matematiksel operasyonlar kullanılarak Denklem (5.2) ile verilen adi diferansiyel denklem sistemi aşağıdaki gibi ikinci mertebeden tek bir adi diferansiyel denkleme indirgenir.

$$D(f, f', f'') = 0 \tag{5.3}$$

3. Adım: $X = f(\varepsilon)$ ve $Y = f'(\varepsilon)$ gibi yeni değişkenler kullanmak suretiyle Denklem (5.3) aşağıdaki formda birinci mertebeden bir adi diferansiyel denklem sistemine indirgenir.

$$\begin{cases} X' = Y \\ Y' = H(X, Y) \end{cases} \tag{5.4}$$

4. Adım: Eğer aynı koşullar altında Denklem (5.4) ün integralleri bulunabilirse doğrudan genel çözüme ulaşılabilir. Ancak genelde tek bir ilk integral için bile bunu gerçekleştirmek oldukça zordur. Bu nedenle bu adımda Denklem (5.4) ün ilk integrallerini bulmak için bölme teoremi uygulanır (bkz. Hosseini ve diğ. 2012).

5.1 KdV Sistemi

$$\begin{gathered} u_t - u_{xxx} - 2vu_x - uv_x = 0 \\ v_t - uu_x = 0 \end{gathered} \tag{5.5}$$

şeklindeki homojen KdV sistemini ele alalım (Shukri ve Al-Khaled 2010). Şimdi bu sistemi biraz önce adımlarını verdiğimiz ilk integral metodunu kullanarak çözelim.

Öncelikle, $u(x,t) = f(\varepsilon)$ ve $v(x,t) = g(\varepsilon)$ dönüşümleri ve dalga değişkeni $\varepsilon = x - ct$ olduğu göz önünde bulundurulduğunda Denklem (5.5) ile verilen sistem aşağıdaki gibi bir adi diferansiyel denklem sistemine indirgenir.

$$\begin{gathered} -cf' - f''' - 2gf' - fg' = 0 \\ -cg' - ff' = 0 \end{gathered} \tag{5.6}$$

Bu son denklemin ikincisini tekrar

$$g' + \frac{1}{c}ff' = 0 \tag{5.7}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu denklemin integrali alınırsa, α bir integral sabiti olmak üzere,

$$g = \alpha - \frac{1}{2c}f^2 \tag{5.8}$$

elde edilir. Şimdi Denklem (5.8) i Denklem (5.6) nın birincisinde yerine koyarsak

$$-(2\alpha + c)f' + \frac{2}{c}f^2f' - f''' = 0$$

bulunur. Bu denklemi düzenlersek

$$(2\alpha + c)f' - \frac{2}{c}f^2f' + f''' = 0 \tag{5.9}$$

elde edilir. Denklem (5.9) un integralini alarak, β bir integral sabiti olmak üzere,

$$f'' = \beta - (2\alpha + c)f + \frac{2}{3c}f^3 \tag{5.10}$$

elde edilir. Burada $X = f(\varepsilon)$ ve $Y = f'(\varepsilon)$ değişkenlerini kullanırsak

$$\begin{cases} X' = Y \\ Y' = \beta - (2\alpha + c)X + \dfrac{2}{3c}X^3 \end{cases} \tag{5.11}$$

şeklinde birinci mertebeden adi diferansiyel denklem sistemine ulaşmış oluruz. Şimdi de bu sistemin ilk integrallerini elde etmek için bölme teoremini çalıştıracağız (bkz. Hosseini ve diğ. 2012).

$X = X(\varepsilon)$ ve $Y = Y(\varepsilon)$ nun Denklem (5.11) ile verilen adi diferansiyel denklem sisteminin aşikar olmayan çözümleri olduğunu ve $P(X,Y) = \sum_{i=0}^{m} a_i(X)Y^i$ nin $\mathbb{C}[X,Y]$ de indirgenemez polinom olduğunu, yani $a_i(X)$, $i = 0,1,2,\dots,m$, X in polinomları ve $a_m(X) \neq 0$ olmak üzere

$$P\big(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)\big) = \sum_{i=0}^{m} a_i(X)Y^i = 0 \tag{5.12}$$

olduğunu, varsayalım. Denklem (5.12) aynı zamanda Denklem (5.11) in birinci integrali olarak da adlandırılır. Bölme teoremine göre (bkz. Hosseini ve diğ. 2012),

$$\frac{dP}{d\varepsilon} = \frac{\partial P}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial P}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} = (g(X) + h(X)Y)\left(\sum_{i=0}^{m} a_i(X)Y^i\right) \tag{5.13}$$

olmak üzere $\mathbb{C}[X,Y]$ de $T(X,Y) = g(X) + h(X)Y$ olacak şekilde bir polinom vardır. Bu aşamada m nin alabileceği değerler için aşağıdaki durumlar söz konusudur.

Durum 1: Şimdi Denklem (5.12) de $m = 1$ olduğunu varsayalım. Denklem (5.13) ün her iki tarafındaki $i = 0,1$ olacak şekilde Y^i katsayılarını eşitlemek suretiyle aşağıdakiler elde edilir.

$$
\begin{aligned}
&a_1'(X) = h(X)a_1(X)\\
&a_0'(X) = g(X)a_1(X) + h(X)a_0(X)\\
&a_1(X)\left(\beta - (2\alpha + c)X + \frac{2}{3c}X^3\right) = g(X)a_0(X)
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

$a_i(X), i = 0,1$, polinomlar olduğundan, Denklem (5.14) den $a_1(X)$ in sabit ve $h(X) = 0$ olduğu anlaşılır. Kolaylık için $a_1(X) = 1$ olarak alalım. Bu durumda $g(X)$ ve $a_0(X)$ derecelerini dengeleyerek $der[g(X)] = 1$ olduğunu söylenebilir. Dolayısıyla $A_1 \neq 0$ olacak şekilde $g(X) = A_1X + B_0$ olduğunu varsayarsak, Denklem (5.14) ün ikincisinden, A_0 bir integral sabiti olmak üzere,

$$
a_0(X) = \frac{1}{2}A_1X^2 + B_0X + A_0
$$

elde edilir. Denklem (5.14) ün üçüncüsünde $a_0(X)$, $a_1(X)$ ve $g(X)$ i yerine koyar ve X in her kuvvetinin katsayısını sıfıra eşitlersek, çözüm olarak aşağıda yer alan cebirsel denklem sistemini elde ederiz.

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{3c} - \frac{A_1^2}{2} &= 0\\
-\frac{3A_1B_0}{2} &= 0\\
-(2\alpha + c) - A_1A_0 - B_0^2 &= 0\\
\beta - B_0A_0 &= 0
\end{aligned}
$$

Bu sistemi Maple yardımıyla çözdüğümüzde

$$
A_0 = \frac{-2\alpha}{A_1} - \frac{-4}{3A_1^3}\ , \quad B_0 = 0\,, \quad \beta = 0\,, \quad c = \frac{4}{3A_1^2}
\tag{5.15}
$$

buluruz. Bu çözümü Denklem (5.12) de kullanırsak

$$
Y + \left(\frac{1}{2}A_1X^2 - \frac{3A_1^2 + 8\alpha}{4A_1}\right) = 0
\tag{5.16}
$$

elde ederiz. Bunu Denklem (5.11) in birincisinde kullanırsak

$$
X' = \left(\frac{2\alpha}{A_1} + \frac{4}{3A_1^3}\right) - \frac{1}{2}A_1X^2
$$

şeklinde birinci mertebeden değişkenlerine ayrılabilir formda bir adi diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklemi çözerek ve $X = f(\varepsilon), u(x,t) = f(\varepsilon)$ oldukları da göz önüne alınarak, ε_0 keyfi bir sabit olmak üzere,

$$u(x,t) = \frac{2\sqrt{9\alpha A_1^2 + 6}}{3A_1^2} tanh\left[\frac{\sqrt{9\alpha A_1^2 + 6}}{3A_1}\left(x - \frac{4}{3A_1^2}t + \varepsilon_0\right)\right]$$

çözümüne ulaşılır. Ayrıca, Denklem (5.8) de $v(x,t) = g(\varepsilon)$ ve $u(x,t) = f(\varepsilon)$ ilişkinlerini göz önünde bulundurarak

$$v(x,t) = \alpha - \frac{3}{8}A_1^2\left\{\frac{2\sqrt{9\alpha A_1^2 + 6}}{3A_1^2} tanh\left[\frac{\sqrt{9\alpha A_1^2 + 6}}{3A_1}\left(x - \frac{4}{3A_1^2}t + \varepsilon_0\right)\right]\right\}^2$$

çözümüne ulaşılır. Sonuçta bu durum için Denklem (5.5) ile verilen KDD sisteminin çözümü, ε_0 bir keyfi sabit olmak üzere,

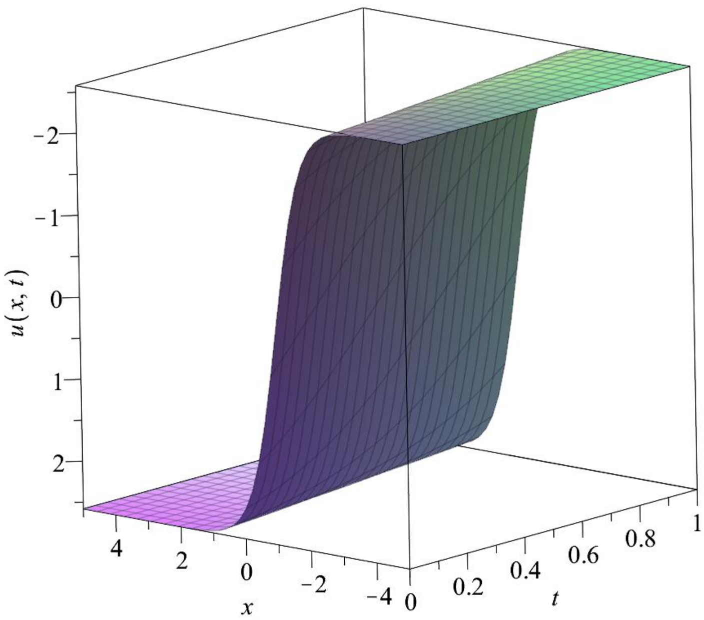
$$u(x,t) = \frac{2\sqrt{9\alpha A_1^2 + 6}}{3A_1^2} tanh\left[\frac{\sqrt{9\alpha A_1^2 + 6}}{3A_1}\left(x - \frac{4}{3A_1^2}t + \varepsilon_0\right)\right]$$
$$v(x,t) = \alpha - \frac{3}{8}A_1^2\left\{\frac{2\sqrt{9\alpha A_1^2 + 6}}{3A_1^2} tanh\left[\frac{\sqrt{9\alpha A_1^2 + 6}}{3A_1}\left(x - \frac{4}{3A_1^2}t + \varepsilon_0\right)\right]\right\}^2$$

şeklinde elde ederiz. Şekil 5.1 ve Şekil 5.2 de $x = [-5,5], t = [0,1]$, $\alpha = 1$, $A_1 = 1$ ve $\varepsilon_0 = 1$ için

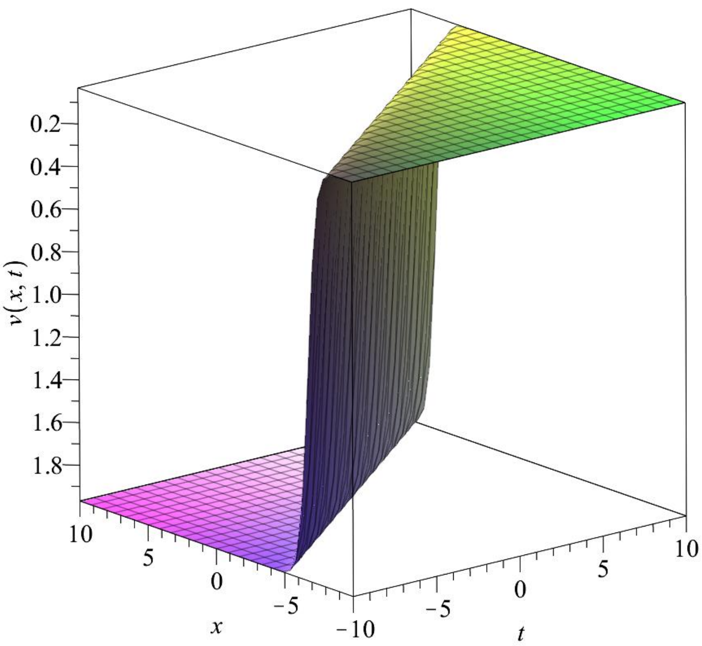
$$u(x,t) = \frac{2\sqrt{15}}{3} tanh\left[\frac{\sqrt{15}}{3}\left(x - \frac{4}{3}t + 1\right)\right] \tag{5.17a}$$

$$v(x,t) = 1 - \frac{3}{8}\left\{\frac{2\sqrt{15}}{3} tanh\left[\frac{\sqrt{15}}{3}\left(x - \frac{4}{3}t + 1\right)\right]\right\}^2 \tag{5.17b}$$

fonksiyonlarının grafikleri sırasıyla görülmektedir.



Şekil 5.1: Denklem (5.17a) ile verilen fonksiyonun grafiği.



Şekil 5.2: Denklem (5.17b) ile verilen fonksiyonun grafiği.

Durum 2: $m = 2$ ve $g(x)$ in derecesi 1 olduğunda, ε_0 bir keyfi sabit olmak üzere,

$$u_1(x,t) = \frac{4\sqrt{9\alpha A_1^2 + 24}}{3A_1^2} tanh\left(\frac{\sqrt{9\alpha A_1^2 + 24}}{3A_1^2}\left(x - \frac{16}{3A_1^2}t + \varepsilon_0\right)\right)$$

$$v_1(x,t) = \alpha - \frac{3}{32}A_1^2\left[\frac{4\sqrt{9\alpha A_1^2 + 24}}{3A_1^2} tanh\left(\frac{\sqrt{9\alpha A_1^2 + 24}}{3A_1^2}\left(x - \frac{16}{3A_1^2}t + \varepsilon_0\right)\right)\right]^2$$

ve

$$u_2(x,t) = \frac{4}{A_1\left(x - \frac{16}{3A_1^2}t\right) + \varepsilon_0}$$

$$v_2(x,t) = -\frac{8}{3A_1^2} - \frac{3}{2}A_1^2\left[\frac{1}{A_1\left(x - \frac{16}{3A_1^2}t\right) + \varepsilon_0}\right]^2$$

çözümleri elde edilir.

5.2 Kaup-Boussinesq Sistemi

$$\begin{aligned} u_t - v_{xxx} - 2vu_x - 2uv_x = 0 \\ v_t - u_x - 2vv_x = 0 \end{aligned} \tag{5.18}$$

şeklinde bir KDD sistemi olup ideal bir akışkanın yüzeyinde ilerleyen uzun dalgalar için matematiksel bir modeldir. Aynı zamanda su dalgaları teorisinde hidrodinamik modellerden biri olarak da karşımıza çıkar. Şimdi bu sistemin ilk integral metodunu kullanarak çözme problemini ele alalım (Zhou ve diğ. 2010).

$u(x,t) = f(\varepsilon)$ ve $v(x,t) = g(\varepsilon)$ dönüşümleri ve dalga değişkeni $\varepsilon = x - ct$ olduğu göz önünde bulundurulduğunda Denklem (5.18) ile verilen sistem aşağıdaki gibi bir adi diferansiyel denklem sistemine indirgenir.

$$\begin{aligned} -cf' - g''' - 2gf' - 2fg' = 0 \\ -cg' - f' - 2gg' = 0 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Bu son denklemin ikincisini tekrar

$$f' + cg' + 2gg' = 0 \tag{5.20}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu denklemin integrali alınırsa, α bir integral sabiti olmak üzere,

$$f = \alpha - cg - g^2 \tag{5.21}$$

elde edilir. Şimdi, Denklem (5.21) in Denklem (5.19) un birincisinde yerine koyarsak

$$(c^2 - 2\alpha)g' + 6cgg' + gg^2g' - g''' = 0 \tag{5.22}$$

bulunur. Bu denklemi düzenlersek

$$-(c^2 - 2\alpha)g' - 6cgg' - 6g^2g' + g''' = 0 \tag{5.23}$$

elde edilir. Denklem (5.23) ün integralini alarak, β bir integral sabiti olmak üzere,

$$g'' = \beta + (c^2 - 2\alpha)g + 3cg^2 + 2g^3 \tag{5.24}$$

elde edilir. Burada $X = f(\varepsilon)$ ve $Y = f'(\varepsilon)$ değişkenlerini kullanırsak

$$\begin{cases} X' = Y \\ Y' = \beta + (c^2 - 2\alpha)X + 3cX^2 + 2X^3 \end{cases} \tag{5.25}$$

şeklinde birinci mertebeden adi diferansiyel denklem sistemine ulaşmış oluruz. Şimdi de bu sistemin ilk integrallerini elde etmek için bölme teoremini çalıştıracağız (bkz. Hosseini ve diğ. 2012).

$X = X(\varepsilon)$ ve $Y = Y(\varepsilon)$ nun Denklem (5.25) ile verilen adi diferansiyel denklem sisteminin aşikar olmayan çözümleri olduğunu ve $P(X,Y) = \sum_{i=0}^{m} a_i(X)Y^i$ nin $\mathbb{C}[X,Y]$ de indirgenemez polinom olduğunu, yani $a_i(X)$, $i = 0,1,2,\ldots,m$, X in polinomları ve $a_m(X) \neq 0$ olmak üzere

$$P\big(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)\big) = \sum_{i=0}^{m} a_i(X)Y^i = 0 \tag{5.26}$$

olduğunu, varsayalım. Denklem (5.26) aynı zamanda Denklem (5.25) in birinci integrali olarak da adlandırılır. Bölme teoremine göre (bkz. Hosseini ve diğ. 2012),

$$\frac{dP}{d\varepsilon}=\frac{\partial P}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial \varepsilon}+\frac{\partial P}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon}=(g(X)+h(X)Y)\left(\sum_{i=0}^{m}a_i(X)Y^i\right) \tag{5.27}$$

olmak üzere $\mathbb{C}[X,Y]$ de $T(X,Y)=g(X)+h(X)Y$ olacak şekilde bir polinom vardır.

Şimdi, Denklem (5.26) de $m=1$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $i=0,1$ olmak üzere Denklem (5.27) nin her iki tarafındaki terimlerde Y^i lerin katsayılarını eşitlemek suretiyle aşağıdakiler elde edilir.

$$\begin{gathered}a_1'(X)=h(X)a_1(X)\\ a_0'(X)=g(X)a_1(X)+h(X)a_0(X)\\ a_1(X)(\beta+(c^2-2\alpha)X+3cX^2+2X^3)=g(X)a_0(X)\end{gathered} \tag{5.28}$$

Burada $a_i(X), i=0,1,$ polinomlar olduğundan, Denklem (5.28) den $a_1(X)$ in sabit ve $h(X)=0$ olduğu anlaşılır. Kolaylık için $a_1(X)=1$ olarak alalım. Bu durumda $g(X)$ ve $a_0(X)$ polinomlarının derecelerini dengeleyerek $der[g(X)]=1$ olduğu söylenebilir. Dolayısıyla $A_1\neq 0$ olacak şekilde $g(X)=A_1X+B_0$ olduğunu varsayarsak, Denklem (5.28) in ikincisinden, A_0 bir integral sabiti olmak üzere,

$$a_0(X)=\frac{1}{2}A_1X^2+B_0X+A_0$$

elde edilir. Denklem (5.28) in üçüncüsünde $a_0(X)$, $a_1(X)$ ve $g(X)$ i yerine koyar ve X in kuvvetinin katsayılarını sıfıra eşitlersek aşağıdaki lineer olmayan cebirsel denklem sistemini elde ederiz.

$$\begin{aligned}2-\frac{A_1^2}{2}&=0\\ 3c-A_1B_0-\frac{B_0A_1}{2}&=0\\ c^2-2\alpha-A_1A_0-B_0^2&=0\\ \beta-B_0A_0&=0\end{aligned}$$

Bu sistemi Maple yardımıyla çözdüğümüzde

$$\begin{gathered}A_1=2,\ \ c=\frac{-\beta}{\alpha},\ \ A_0=-\alpha,\ \ B_0=\frac{-\beta}{\alpha}\\ A_1=-2,\ \ c=\frac{-\beta}{\alpha},\ \ A_0=\alpha,\ \ B_0=\frac{\beta}{\alpha}\end{gathered} \tag{5.29}$$

şeklinde iki çözüm seti elde ederiz. Bu çözüm setlerini sırasıyla Denklem (5.26) da kullanırsak

$$\begin{aligned} Y + \left(X^2 - \frac{\beta}{\alpha}X - \alpha\right) = 0 \\ Y + \left(-X^2 + \frac{\beta}{\alpha}X + \alpha\right) = 0 \end{aligned} \qquad (5.30)$$

elde ederiz. Bunları Denklem (5.25) in birincisinde kullanırsak sırasıyla

$$\begin{aligned} X' = -X^2 + \frac{\beta}{\alpha}X + \alpha \\ X' = X^2 - \frac{\beta}{\alpha}X - \alpha \end{aligned}$$

şeklinde birinci mertebeden değişkenlerine ayrılabilir formda adi diferansiyel denklemler elde edilir. Bu denklemleri çözerek ve $Y = f'(\varepsilon)$, $v(x,t) = g(\varepsilon)$ oldukları da göz önüne alınarak, ε_0 keyfi bir sabit olmak üzere,

$$\begin{aligned} v_1(x,t) = \frac{1}{2\alpha}\left[\beta + \sqrt{4\alpha^3 + \beta^2}tanh\left(\frac{\sqrt{4\alpha^3 + \beta^2}}{2\alpha}\left(x + \frac{\beta}{\alpha}t + \varepsilon_0\right)\right)\right] \\ v_2(x,t) = \frac{1}{2\alpha}\left[\beta - \sqrt{4\alpha^3 + \beta^2}tanh\left(\frac{\sqrt{4\alpha^3 + \beta^2}}{2\alpha}\left(x + \frac{\beta}{\alpha}t + \varepsilon_0\right)\right)\right] \end{aligned}$$

çözümlerine ulaşılır. Ayrıca, Denklem (5.21) de $v(x,t) = g(\varepsilon)$ ve $u(x,t) = f(\varepsilon)$ ilişkinlerini göz önünde bulundurarak

$$\begin{aligned} u_1(x,t) = \alpha + \frac{\beta}{\alpha}\left[\frac{1}{2\alpha}\left[\beta + \sqrt{4\alpha^3 + \beta^2}tanh\left(\frac{\sqrt{4\alpha^3 + \beta^2}}{2\alpha}\left(x + \frac{\beta}{\alpha}t + \varepsilon_0\right)\right)\right]\right] \\ -\left[\frac{1}{2\alpha}\left[\beta + \sqrt{4\alpha^3 + \beta^2}tanh\left(\frac{\sqrt{4\alpha^3 + \beta^2}}{2\alpha}\left(x + \frac{\beta}{\alpha}t + \varepsilon_0\right)\right)\right]\right]^2 \end{aligned}$$

$$u_2(x,t)=\alpha+\frac{\beta}{\alpha}\left[\frac{1}{2\alpha}\left[\beta+\sqrt{4\alpha^3+\beta^2}tanh\left(\frac{\sqrt{4\alpha^3+\beta^2}}{2\alpha}\left(x+\frac{\beta}{\alpha}t+\varepsilon_0\right)\right)\right]\right]$$
$$-\left[\frac{1}{2\alpha}\left[\beta-\sqrt{4\alpha^3+\beta^2}tanh\left(\frac{\sqrt{4\alpha^3+\beta^2}}{2\alpha}\left(x+\frac{\beta}{\alpha}t+\varepsilon_0\right)\right)\right]\right]^2$$

çözümüne ulaşılır. Sonuçta bu durum için Denklem (5.18) ile verilen KDD sisteminin çözümü, ε_0 bir keyfi sabit olmak üzere,

$$v_1(x,t)=\frac{1}{2\alpha}\left[\beta+\sqrt{4\alpha^3+\beta^2}tanh\left(\frac{\sqrt{4\alpha^3+\beta^2}}{2\alpha}\left(x+\frac{\beta}{\alpha}t+\varepsilon_0\right)\right)\right]$$
$$u_1(x,t)=\alpha+\frac{\beta}{\alpha}\left[\frac{1}{2\alpha}\left[\beta+\sqrt{4\alpha^3+\beta^2}tanh\left(\frac{\sqrt{4\alpha^3+\beta^2}}{2\alpha}\left(x+\frac{\beta}{\alpha}t+\varepsilon_0\right)\right)\right]\right]$$
$$-\left[\frac{1}{2\alpha}\left[\beta+\sqrt{4\alpha^3+\beta^2}tanh\left(\frac{\sqrt{4\alpha^3+\beta^2}}{2\alpha}\left(x+\frac{\beta}{\alpha}t+\varepsilon_0\right)\right)\right]\right]^2$$
$$v_2(x,t)=\frac{1}{2\alpha}\left[\beta-\sqrt{4\alpha^3+\beta^2}tanh\left(\frac{\sqrt{4\alpha^3+\beta^2}}{2\alpha}\left(x+\frac{\beta}{\alpha}t+\varepsilon_0\right)\right)\right]$$
$$u_2(x,t)=\alpha+\frac{\beta}{\alpha}\left[\frac{1}{2\alpha}\left[\beta+\sqrt{4\alpha^3+\beta^2}tanh\left(\frac{\sqrt{4\alpha^3+\beta^2}}{2\alpha}\left(x+\frac{\beta}{\alpha}t+\varepsilon_0\right)\right)\right]\right]$$
$$-\left[\frac{1}{2\alpha}\left[\beta-\sqrt{4\alpha^3+\beta^2}tanh\left(\frac{\sqrt{4\alpha^3+\beta^2}}{2\alpha}\left(x+\frac{\beta}{\alpha}t+\varepsilon_0\right)\right)\right]\right]^2$$

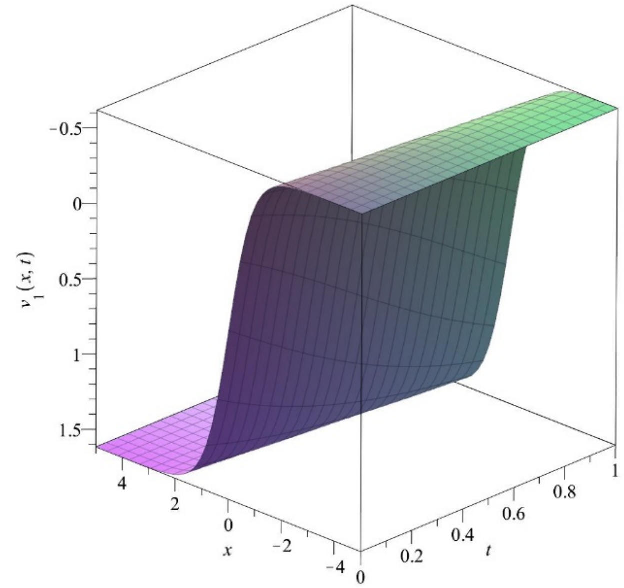
şeklinde elde ederiz.

Şekil 5.3 ve 5.4 de $x=[-5,5], t=[0,1]$, $\alpha=1, \beta=1$ ve $\varepsilon_0=0$ için

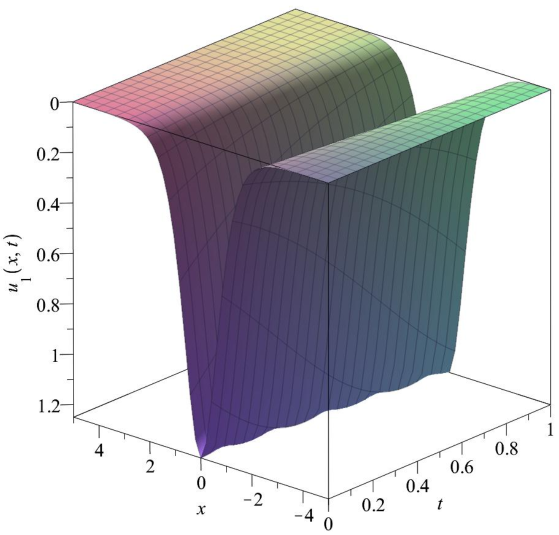
$$v_1(x,t)=\frac{1}{2}\left[1+\sqrt{5}tanh\left(\frac{\sqrt{5}}{2}(x+t)\right)\right]$$

$$u_1(x,t) = 1 + \frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{5}tanh\left(\frac{\sqrt{5}}{2}(x+t)\right)\right] - \left[\frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{5}tanh\left(\frac{\sqrt{5}}{2}(x+t)\right)\right]\right]^2$$

fonksiyonlarının grafikleri görülmektedir.



Şekil 5.3: Kaup-Boussinesq sisteminin $\boldsymbol{v_1(x,t)}$ çözümünün grafiği.



Şekil 5.4: Kaup-Boussinesq sisteminin $\boldsymbol{u_1(x,t)}$ çözümünün grafiği.

5.3 Wu-Zhang Sistemi

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + v_x &= 0 \\ v_t + vu_x + uv_x + \frac{1}{3}u_{xxx} &= 0 \end{aligned} \tag{5.31}$$

şeklinde bir KDD sistemi olup sığ sulardaki (1+1)-boyutlu dispersif uzun dalgaları temsilen kullanılır (Zheng ve diğ. 2003).

$u(x,t) = f(\varepsilon)$ ve $v(x,t) = g(\varepsilon)$ dönüşümleri ve dalga değişkeni $\varepsilon = x - ct$ olduğu göz önünde bulundurulduğunda Denklem (5.31) ile verilen sistem aşağıdaki gibi bir adi diferansiyel denklem sistemine indirgenir.

$$\begin{aligned} -cf' + ff' + g' &= 0 \\ -cg' + gf' + fg' + \frac{1}{3}f''' &= 0 \end{aligned} \tag{5.32}$$

Bu son denklemin ikincisini tekrar

$$g' = cf' - ff' \tag{5.33}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu denklemin integrali alınırsa, α bir integral sabiti olmak üzere,

$$g = \alpha + cf - \frac{1}{2}f^2 \tag{5.34}$$

elde edilir. Şimdi Denklem (5.34) ü Denklem (5.32) nin ikincisinde yerine koyarsak

$$(-c^2 + \alpha)f' + 3cff' - \frac{3}{2}f^2f' + \frac{1}{3}f''' = 0 \tag{5.35}$$

bulunur. Bu denklemi düzenlersek

$$(-3c^2 + 3\alpha)f' + 9cff' - \frac{9}{2}f^2f' + f''' = 0 \tag{5.36}$$

elde edilir. Denklem (5.36) nın integralini alarak, β bir integral sabiti olmak üzere,

$$f'' = \beta + (3c^2 - 3\alpha)f - \frac{9}{2}cf^2 + \frac{3}{2}f^3 \tag{5.37}$$

elde edilir. Burada $X = f(\varepsilon)$ ve $Y = f'(\varepsilon)$ değişkenlerini kullanırsak

$$\begin{cases} X' = Y \\ Y' = \beta - (2\alpha + c)X + \dfrac{2}{3c}X^3 \end{cases} \tag{5.38}$$

şeklinde birinci mertebeden adi diferansiyel denklem sistemine ulaşmış oluruz. Şimdi de bu sistemin ilk integrallerini elde etmek için bölme teoremini çalıştıracağız (bkz. Hosseini ve diğ. 2012).

$X = X(\varepsilon)$ ve $Y = Y(\varepsilon)$ nun Denklem (5.38) ile verilen adi diferansiyel denklem sisteminin aşikar olmayan çözümleri olduğunu ve $P(X,Y) = \sum_{i=0}^{m} a_i(X)Y^i$ nin $\mathbb{C}[X,Y]$ de indirgenemez polinom olduğunu, yani $a_i(X)$, $i = 0,1,2,\dots,m$, X in polinomları ve $a_m(X) \neq 0$ olmak üzere

$$P\big(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)\big) = \sum_{i=0}^{m} a_i(X)Y^i = 0 \tag{5.39}$$

olduğunu, varsayalım. Denklem (5.39) aynı zamanda Denklem (5.38) in birinci integrali olarak da adlandırılır. Bölme teoremine göre (bkz. Hosseini ve diğ. 2012),

$$\frac{dP}{d\varepsilon} = \frac{\partial P}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial P}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} = (g(X) + h(X)Y)\left(\sum_{i=0}^{m} a_i(X)Y^i\right) \tag{5.40}$$

olmak üzere $\mathbb{C}[X,Y]$ de $T(X,Y) = g(X) + h(X)Y$ olacak şekilde bir polinom vardır.

Şimdi Denklem (5.39) da $m = 1$ olduğunu varsayalım. Denklem (5.40) ın her iki tarafındaki $i = 0,1$ olacak şekilde Y^i katsayılarını eşitlemek suretiyle aşağıdakiler elde edilir.

$$\begin{aligned} a_1'(X) &= h(X)a_1(X) \\ a_0'(X) &= g(X)a_1(X) + h(X)a_0(X) \\ a_1(X)\left(\beta + (3c^2 - 3\alpha)X - \frac{9}{2}cX^2 + \frac{3}{2}X^3\right) &= g(X)a_0(X) \end{aligned} \tag{5.41}$$

$a_i(X), i = 0,1$, polinomlar olduğundan, Denklem (5.41) den $a_1(X)$ in sabit ve $h(X) = 0$ olduğu anlaşılır. Kolaylık için $a_1(X) = 1$ olarak alalım. Bu durumda $g(X)$ ve $a_0(X)$ derecelerini dengeleyerek $der[g(X)] = 1$ olduğunu söylenebilir.

Dolayısıyla $A_1 \neq 0$ olacak şekilde $g(X) = A_1 X + B_0$ olduğunu varsayarsak, Denklem (5.41) in ikincisinden, A_0 bir integral sabiti olmak üzere,

$$a_0(X) = \frac{1}{2} A_1 X^2 + B_0 X + A_0$$

elde edilir. Denklem (5.41) in üçüncüsünde $a_0(X)$, $a_1(X)$ ve $g(X)$ i yerine koyar ve X in her kuvvetinin katsayısını sıfıra eşitlersek, çözüm olarak aşağıda yer alan cebirsel denklem sistemini elde ederiz.

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} - \frac{A_1^2}{2} &= 0 \\ -\frac{9}{2} c - A_1 B_0 - \frac{B_0 A_1}{2} &= 0 \\ 3c^2 - 3\alpha - A_1 A_0 - B_0^2 &= 0 \\ \beta - B_0 A_0 &= 0 \end{aligned}$$

Bu sistemi Maple yardımıyla çözdüğümüzde

$$\begin{aligned} A_1 = \sqrt{3}, \quad c = \frac{\beta}{3\alpha}, \quad A_0 = -\sqrt{3}\alpha, \quad B_0 = \frac{-\beta}{\sqrt{3}\alpha} \\ A_1 = -\sqrt{3}, \quad c = \frac{\beta}{3\alpha}, \quad A_0 = \sqrt{3}\alpha, \quad B_0 = \frac{\beta}{\sqrt{3}\alpha} \end{aligned} \tag{5.42}$$

şeklinde iki çözüm seti elde ederiz. Bu çözüm setlerini sırasıyla Denklem (3.95) de kullanırsak

$$\begin{aligned} Y + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} X^2 - \frac{\beta}{\sqrt{3}\alpha} X - \sqrt{3}\alpha \right) = 0 \\ Y + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} X^2 + \frac{\beta}{\sqrt{3}\alpha} X + \sqrt{3}\alpha \right) = 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. Bunu Denklem (5.39) un birincisinde kullanırsak

$$\begin{aligned} X' &= -\frac{\sqrt{3}}{2} X^2 + \frac{\beta}{\sqrt{3}\alpha} X + \sqrt{3}\alpha \\ X' &= \frac{\sqrt{3}}{2} X^2 - \frac{\beta}{\sqrt{3}\alpha} X - \sqrt{3}\alpha \end{aligned}$$

şeklinde birinci mertebeden değişkenlerine ayrılabilir formda adi diferansiyel denklemler elde edilir. Bu denklemleri çözerek ve $X = f(\varepsilon)$, $u(x,t) = f(\varepsilon)$ oldukları da göz önüne alınarak, ε_0 keyfi bir sabit olmak üzere,

$$u_1(x,t) = \frac{1}{3\alpha}\left[\beta + \sqrt{18\alpha^3 + \beta^2}\,tanh\left(\frac{\sqrt{54\alpha^3 + 3\beta^2}}{6\alpha}\left(x - \frac{\beta}{3\alpha}t + \varepsilon_0\right)\right)\right]$$

$$u_2(x,t) = \frac{1}{3\alpha}\left[\beta - \sqrt{18\alpha^3 + \beta^2}\,tanh\left(\frac{\sqrt{54\alpha^3 + 3\beta^2}}{6\alpha}\left(x - \frac{\beta}{3\alpha}t + \varepsilon_0\right)\right)\right]$$

çözümlerine ulaşılır. Ayrıca, Denklem (5.34) de $v(x,t) = g(\varepsilon)$ ve $u(x,t) = f(\varepsilon)$ ilişkinlerini göz önünde bulundurarak

$$v_1(x,t) = \alpha + \frac{\beta}{3\alpha}\left[\frac{1}{3\alpha}\left[\beta + \sqrt{18\alpha^3 + \beta^2}\,tanh\left(\frac{\sqrt{54\alpha^3 + 3\beta^2}}{6\alpha}\left(x - \frac{\beta}{3\alpha}t + \varepsilon_0\right)\right)\right]\right]$$
$$- \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3\alpha}\left[\beta + \sqrt{18\alpha^3 + \beta^2}\,tanh\left(\frac{\sqrt{54\alpha^3 + 3\beta^2}}{6\alpha}\left(x - \frac{\beta}{3\alpha}t + \varepsilon_0\right)\right)\right]\right]^2$$

$$v_2(x,t) = \alpha + \frac{\beta}{3\alpha}\left[\frac{1}{3\alpha}\left[\beta - \sqrt{18\alpha^3 + \beta^2}\,tanh\left(\frac{\sqrt{54\alpha^3 + 3\beta^2}}{6\alpha}\left(x - \frac{\beta}{3\alpha}t + \varepsilon_0\right)\right)\right]\right]$$
$$- \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3\alpha}\left[\beta - \sqrt{18\alpha^3 + \beta^2}\,tanh\left(\frac{\sqrt{54\alpha^3 + 3\beta^2}}{6\alpha}\left(x - \frac{\beta}{3\alpha}t + \varepsilon_0\right)\right)\right]\right]^2$$

çözümüne ulaşılır. Sonuçta bu durum için Denklem (5.31) ile verilen KDD sisteminin çözümü, ε_0 bir keyfi sabit olmak üzere,

$$u_1(x,t) = \frac{1}{3\alpha}\left[\beta + \sqrt{18\alpha^3 + \beta^2}\,tanh\left(\frac{\sqrt{54\alpha^3 + 3\beta^2}}{6\alpha}\left(x - \frac{\beta}{3\alpha}t + \varepsilon_0\right)\right)\right]$$

$$v_1(x,t) = \alpha + \frac{\beta}{3\alpha}\left[\frac{1}{3\alpha}\left[\beta + \sqrt{18\alpha^3+\beta^2}tanh\left(\frac{\sqrt{54\alpha^3+3\beta^2}}{6\alpha}\left(x - \frac{\beta}{3\alpha}t + \varepsilon_0\right)\right)\right]\right]$$
$$-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3\alpha}\left[\beta + \sqrt{18\alpha^3+\beta^2}tanh\left(\frac{\sqrt{54\alpha^3+3\beta^2}}{6\alpha}\left(x - \frac{\beta}{3\alpha}t + \varepsilon_0\right)\right)\right]\right]^2$$

$$u_2(x,t) = \frac{1}{3\alpha}\left[\beta - \sqrt{18\alpha^3+\beta^2}tanh\left(\frac{\sqrt{54\alpha^3+3\beta^2}}{6\alpha}\left(x - \frac{\beta}{3\alpha}t + \varepsilon_0\right)\right)\right]$$

$$v_2(x,t) = \alpha + \frac{\beta}{3\alpha}\left[\frac{1}{3\alpha}\left[\beta - \sqrt{18\alpha^3+\beta^2}tanh\left(\frac{\sqrt{54\alpha^3+3\beta^2}}{6\alpha}\left(x - \frac{\beta}{3\alpha}t + \varepsilon_0\right)\right)\right]\right]$$
$$-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3\alpha}\left[\beta - \sqrt{18\alpha^3+\beta^2}tanh\left(\frac{\sqrt{54\alpha^3+3\beta^2}}{6\alpha}\left(x - \frac{\beta}{3\alpha}t + \varepsilon_0\right)\right)\right]\right]^2$$

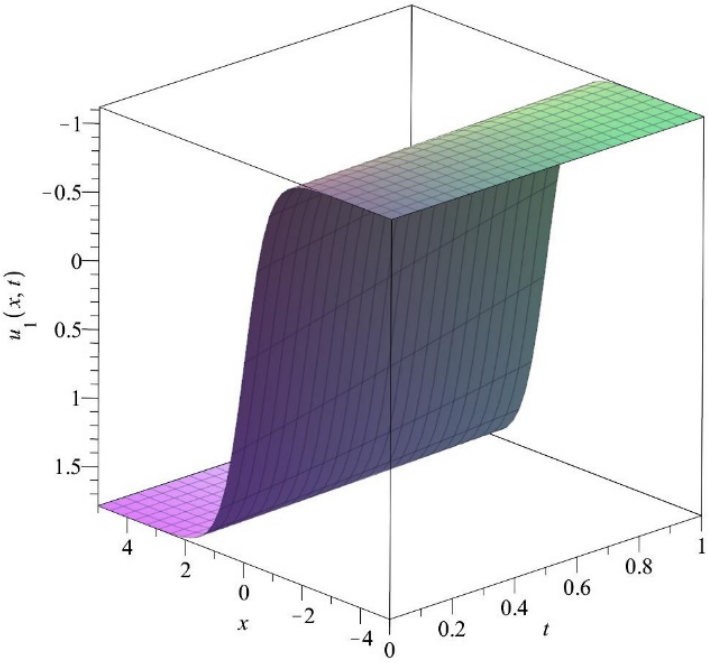
şeklinde elde edilir.

Şekil 5.5 ve Şekil 5.6 da $x = [-5,5], t = [0,1]$, $\alpha = 1, \beta = 1$ ve $\varepsilon_0 = 0$ için

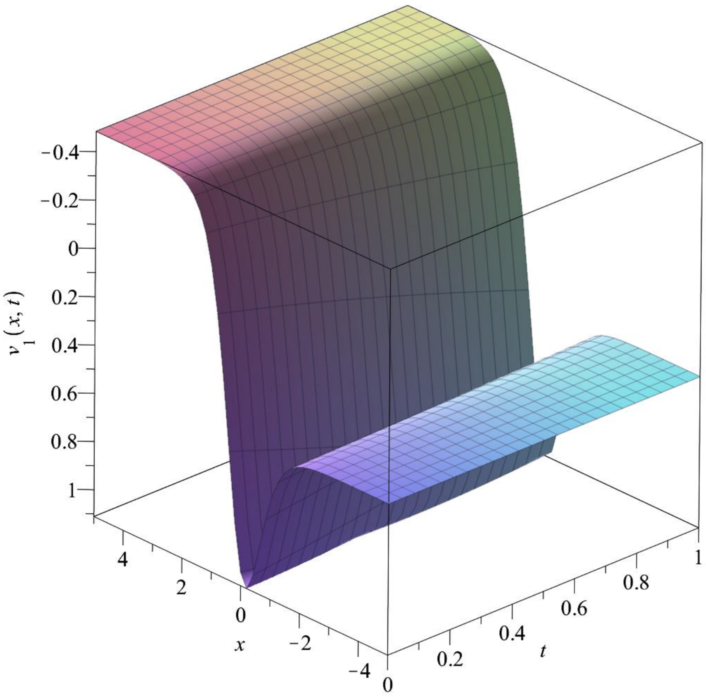
$$u_1(x,t) = \frac{1}{3}\left[1 + \sqrt{19}tanh\left(\frac{\sqrt{57}}{6}\left(x - \frac{t}{3}\right)\right)\right]$$

$$v_1(x,t) = 1 + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left[1 + \sqrt{19}tanh\left(\frac{\sqrt{57}}{6}\left(x - \frac{t}{3}\right)\right)\right]\right]$$
$$-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\left[1 + \sqrt{19}tanh\left(\frac{\sqrt{57}}{6}\left(x - \frac{t}{3}\right)\right)\right]\right]^2$$

fonksiyonlarının grafikleri sırasıyla görülmektedir.



Şekil 5.5: Wu-Zhang sisteminin $\boldsymbol{u_1(x,t)}$ çözümünün grafiği.



Şekil 5.6: Wu-Zhang sisteminin $\boldsymbol{v_1(x,t)}$ çözümünün grafiği.

6. KOSİNÜS FONKSİYONU METODU

Sinüs-Kosinüs metodu Wazwaz (2004[a]) tarafından lineer olmayan dalga denklemlerinin ilerleyen dalga çözümlerini bulmak için ortaya atıldı ve daha sonra da yine Wazwaz (2004[b]), Wazwaz ve Helal (2005), Wazwaz (2006[b]) ve Wazwaz (2006[c]) tarafından farklı lineer olmayan KDD denklem ve/veya denklem sistemlerini çözmede kullanıldı. Biz burada sadece Kosinüs fonksiyonu metodunu ele alacağız. Öncelikle bu metodun üç bağımsız değişkende bir KDD ye nasıl uygulanacağını gösterelim.

Lineer olmayan üç bağımsız değişkenli bir kısmi diferansiyel denklem

$$F\big(u, u_t, u_x, u_y, u_{tt}, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots\big) = 0 \tag{6.1}$$

şeklinde gösterilebilir. Burada, $u(x, y, t)$ bilinmeyen bir fonksiyon, F de u ve bunun kısmi türevlerini içeren bir fonksiyondur.

Adım 1: Denklem (6.1) de $\xi = x + y - ct$ olmak üzere

$$u(x, y, t) = f(\xi) \tag{6.2}$$

dönüşümünü kullanalım.

Adım 2: Dolayısıyla ele aldığımız KDD de gözüken kısmi türevler için

$$\frac{\partial}{\partial t}(.) = -c\frac{d}{d\xi}(.),\ \ \frac{\partial}{\partial x}(.) = \frac{d}{d\xi}(.),\ \ \frac{\partial}{\partial y}(.) = \frac{d}{d\xi}(.), \dots \tag{6.3}$$

şeklindeki değişiklikleri de göz önünde bulundurursak Denklem (6.1)

$$\mathrm{Q}(f, f', f'', f''', \dots) = 0 \tag{6.4}$$

şeklinde bir adi diferansiyel denkleme indirgenmiş olur.

Adım 3: Elde edilen adi diferansiyel denklem de tüm terimler türevli olacak şekilde integrallenir. Bu aşamada integral sabitleri ihmal edilir.

Adım 4: Lineer olmayan birçok denklemin çözümü; λ, μ ve β tanımlanacak parametreler olmak üzere (Parkes ve Duffy 1996)

$$f(\xi) = \begin{cases} \lambda cos^{\beta}(\mu\xi) & |\xi| \leq \dfrac{\pi}{2\mu}, \\ 0 & diğer\ yerlerde \end{cases} \tag{6.5}$$

formunda yazılabilir.

Adım 5: Dolayısıyla Denklem (6.5) in ilk iki türevi

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \lambda cos^{\beta}(\mu\xi) \\ f'(\xi) &= \frac{df(\xi)}{d\xi} = -\lambda\beta\mu cos^{\beta-1}(\mu\xi)sin(\mu\xi) \\ f''(\xi) &= \frac{d^2f(\xi)}{d\xi^2} = -\lambda\beta\mu^2 cos^{\beta}(\mu\xi) + \lambda\mu^2\beta(\beta-1)cos^{\beta-2}(\mu\xi) \\ &\qquad -\lambda\mu^2\beta(\beta-1)cos^{\beta}(\mu\xi) \end{aligned} \tag{6.6}$$

olur. Diğer mertebeden türevleri de benzer şekilde kolayca elde edilir.

Adım 6: Bu türevler Denklem (6.4) ile verilen adi diferansiyel denklemde yerine yazılır, kosinüs fonksiyonlu terimler dengelenir, bu dengeleme sonucunda ortaya çıkan cebirsel denklem sistemi Maple yardımıyla çözülerek λ, μ ve β parametreleri için mümkün olan tüm değerler elde edilir. Bulunan bu değerler de Denklem (6.5) de kullanılarak ve $u(x, y, t) = f(\xi)$ olduğu da göz önüne alınarak ele alınan problemin çözümüne ulaşılır.

6.1 Kadomtsev-Petviashvili Denklemi

Kadomtsev-Petviashvili (KP) denklemi iki boyutlu lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklem olup küçük genlikli uzun dalgaları nitelendirir. Bu KP denklemini iki farklı versiyonu mevcut olup bunlar normalleştirilmiş formda

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + 3\alpha^2 u_{yy} = 0 \tag{6.7}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $u = u(x, y, t)$ skaler bir fonksiyon, x ve y sırasıyla yatay (boylamasına) ve düşey (enlemesine) uzay koordinatlarını göstermekte olup $\alpha^2 = \pm 1$ dir.

$\alpha = -1$ durumu KP-I denklemi olarak bilinmekte olup ince filmlerde yüksek yüzey gerilimine sahip dalgaları modellemede kullanılır. $\alpha = 1$ durumu ise KP-II denklemi olarak bilinmekte olup küçük yüzey gerilimine sahip su dalgalarını modeller (Kadomstev 1970).

Şimdi bu denklemi kosinüs metodunu kullanarak çözelim. Öncelikle $u(x, y, t) = f(\xi)$ dönüşümü ve dalga değişkeni $\xi = x + y - ct$ (Adım 1) olduğu göz önünde bulundurulduğunda Denklem (6.7) aşağıdaki gibi bir adi diferansiyel denkleme indirgenir (Adım 2).

$$(-cf' + 6ff' + f''')_{\xi} + 3\alpha^2 f'' = 0 \tag{6.8}$$

Bu denklemin ξ ye göre iki kez integrali alınırsa, integral sabiti sıfır olmak üzere,

$$-cf + 3f^2 + f'' + 3\alpha^2 f = 0 \tag{6.9}$$

elde edilir (Adım 3). Bu denklemin çözümünün λ, μ ve β tanımlanılacak parametreler olmak üzere

$$f(\xi) = \lambda cos^{\beta}(\mu\xi) \tag{6.10}$$

formunda olduğunu kabul edelim (Adım 4). Adım 5 de Denklem (6.6) ile verilen ilgili türevleri Denklem (6.9) da kullanırsak

$$\begin{gathered} -c\lambda cos^{\beta}(\mu\xi) + 3\lambda^2 cos^{2\beta}(\mu\xi) - \lambda\beta\mu^2 cos^{\beta}(\mu\xi) + \lambda\mu^2\beta(\beta-1)cos^{\beta-2}(\mu\xi) \\ -\lambda\mu^2\beta(\beta-1)\lambda cos^{\beta}(\mu\xi) + 3\lambda\alpha^2 cos^{\beta}(\mu\xi) = 0 \end{gathered} \tag{6.11}$$

elde edilir. Burada, kosinüs fonksiyonlu terimler dengelendiğinde tanımlamamız gereken λ, μ ve β parametreleri için

$$\begin{aligned} 2\beta &= \beta - 2 \\ 3\lambda^2 + \lambda\mu^2\beta(\beta-1) &= 0 \\ -c\lambda - \lambda\beta\mu^2 - \lambda\beta\mu^2(\beta-1) + 3\lambda\alpha^2 &= 0 \end{aligned} \tag{6.12}$$

şeklinde lineer olmayan bir cebirsel denklem sistemi elde ederiz. Bu sistemi Maple yardımıyla çözdüğümüzde

$$\beta = -2, \quad \mu = \pm\frac{\sqrt{3\alpha^2 - c}}{2}, \quad \lambda = -\frac{3\alpha^2 - c}{2}$$

bulunur. Bu değerleri Denklem (6.10) da kullanırsak ve $u(x, y, t) = f(\xi)$ olduğunu da göz önüne alarak ele alınan problemin çözümü

$$u(x, y, t) = -\frac{3\alpha^2 - c}{2} cos^{-2}\left(\pm\frac{\sqrt{3\alpha^2 - c}}{2}(x + y - ct)\right) \tag{6.13}$$

şeklinde elde edilir.

6.2 Kuple Hirota-Satsuma KdV Sistemi

$$\begin{gathered} u_t - \alpha u_{xxx} - 3uu_x + 6vv_x = 0 \\ v_t + bv_{xxx} + 3(uv)_x = 0 \end{gathered} \tag{6.14}$$

şeklinde bir KDD sistemi olup farklı dağılma ilişkisine sahip iki uzun dalganın karşılıklı etkileşimini modeller (Hirota ve Satsuma 1981). Eğer bir uzun dalganın diğeri üzerine etkisi olmazsa model klasik KdV denklemi olur (Gardner ve diğ. 1967).

Şimdi bu sistemi kosinüs metodunu kullanarak çözelim. Öncelikle $u(x, t) = f(\xi)$, $g(x, t) = f(\xi)$ dönüşümleri ve dalga değişkeni $\xi = x - ct$ (Adım 1) olduğu göz önünde bulundurulduğunda Denklem (6.14) aşağıdaki gibi bir adi diferansiyel denklem sistemine indirgenir (Adım 2).

$$\begin{aligned} -cf' - \alpha f''' - 3ff' + 6gg' = 0 \\ -cg' + bg''' + 3(fg)' = 0 \end{aligned} \tag{6.15}$$

Bu denklemin ξ ye göre iki kez integrali alınırsa, integral sabiti sıfır olmak üzere,

$$\begin{aligned} -cf - \alpha f'' - \frac{3}{2}f^2 + 3g^2 = 0 \\ -cg + bg'' + 3fg = 0 \end{aligned} \tag{6.16}$$

Bu sistemin çözümünün $\lambda_1, \lambda_2, \beta_1, \beta_2$ ve μ tanımlanılacak parametreler olmak üzere

$$f(\xi) = \lambda_1 cos^{\beta_1}(\mu\xi) \quad g(\xi) = \lambda_2 cos^{\beta_2}(\mu\xi) \tag{6.17}$$

formunda olduğunu kabul edelim (Adım 4). Adım 5 de Denklem (6.6) ile verilen ilgili türevleri Denklem (6.16) da kullanırsak, sırasıyla

$$\begin{gathered}
c\lambda_1 cos^{\beta_1}(\mu\xi) - \alpha\lambda_1\beta_1\mu^2 cos^{\beta_1}(\mu\xi) + \alpha\lambda_1\beta_1(\beta_1 - 1)\mu^2 cos^{\beta_1 - 2}(\mu\xi) \\
-\alpha\lambda_1\beta_1(\beta_1 - 1)\mu^2 cos^{\beta_1}(\mu\xi) + \frac{3}{2}\lambda_1^2 cos^{2\beta_1}(\mu\xi) - 3\lambda_2^2 cos^{2\beta_2}(\mu\xi) = 0 \\
c\lambda_2 cos^{\beta_2}(\mu\xi) + b\lambda_2\beta_2\mu^2 cos^{\beta_2}(\mu\xi) - b\lambda_2\beta_2(\beta_2 - 1)\mu^2 cos^{\beta_2 - 2}(\mu\xi) \\
+b\lambda_2\beta_2(\beta_2 - 1)\mu^2 cos^{\beta_2}(\mu\xi) - 3\lambda_1\lambda_2 cos^{\beta_1}(\mu\xi) cos^{\beta_2}(\mu\xi) = 0
\end{gathered} \tag{6.18}$$

elde edilir. Burada, kosinüs fonksiyonlu terimler dengelendiğinde tanımlamamız gereken $\lambda_1, \lambda_2, \beta_1, \beta_2$ ve μ parametreleri için

$$\begin{aligned}
\beta_2 - 2 = \beta_1 + \beta_2 \\
\beta_1 - 2 = 2\beta_1 = 2\beta_2 \\
c\lambda_1 - \alpha\lambda_1\beta_1\mu^2 - \alpha\lambda_1\beta_1(\beta_1 - 1)\mu^2 = 0 \\
\alpha\lambda_1\beta_1(\beta_1 - 1)\mu^2 + \frac{3}{2}\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2 = 0 \\
c\lambda_2 + b\lambda_2\beta_2\mu^2 + b\lambda_2\beta_2(\beta_2 - 1)\mu^2 = 0 \\
-b\lambda_2\beta_2(\beta_2 - 1)\mu^2 - 3\lambda_1\lambda_2 = 0
\end{aligned} \tag{6.19}$$

şeklinde lineer olmayan bir cebirsel denklem sistemi elde ederiz. Bu sistemi Maple yardımıyla çözdüğümüzde

$$\beta_1 = \beta_2 = -2, \quad b = -\alpha \quad \mu = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{\alpha}}, \quad \lambda_1 = \frac{c}{2} \quad \lambda_2 = \pm\frac{c}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

bulunur. Bu değerleri Denklem (6.18) de kullanırsak ve $u(x,t) = f(\xi)\,, v(x,t) = g(\xi)$ olduğunu da göz önüne alarak ele alınan sistemin çözümü

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{c}{2} cos^{-2}\left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{\alpha}}(x - ct)\right) \\
v(x,t) &= \pm\frac{c}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} cos^{-2}\left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{\alpha}}(x - ct)\right)
\end{aligned} \tag{6.20}$$

şeklinde elde edilir.

6.3 Kuple Drinfeld-Sokolov-Wilson Sistemi

$$\begin{gathered} u_t + bvv_x = 0 \\ v_t + \alpha v_{xxx} + b(uv)_x = 0 \end{gathered} \tag{6.21}$$

şeklindeki KDD sistemi Kuple Drinfeld-Sokolov-Wilson Sistemi olarak bilinmekte olup akışkanlar mekaniği ve dağınımlı su dalgaları modellerinde önemli rol oynar (Matjila ve diğ. 2014). b ve α sıfırdan farklı parametreler ve $u(x,t)$ ve $v(x,t)$ fonksiyonları da dalga boylarının genliklerini göstermektedir.

Şimdi bu sistemi kosinüs metodunu kullanarak çözelim. Öncelikle $u(x,t) = f(\xi)$, $g(x,t) = g(\xi)$ dönüşümleri ve dalga değişkeni $\xi = x - ct$ (Adım 1) olduğu göz önünde bulundurulduğunda Denklem (6.21) aşağıdaki gibi bir adi diferansiyel denklem sistemine indirgenir (Adım 2).

$$\begin{gathered} -cf' + bgg' = 0 \\ -cg' + \alpha g''' + b(fg)' = 0 \end{gathered} \tag{6.22}$$

Bu sistemin ξ ye göre bir kez integrali alınırsa, integral sabiti sıfır olmak üzere,

$$\begin{gathered} f = \frac{b}{2c} g^2 \\ -cg + \alpha g''' + bfg = 0 \end{gathered} \tag{6.23}$$

şeklinde bir adi diferansiyel denklem sistemine indirgenmiş olur. Şimdi, Denklem (6.23) in birincisini Denklem (6.23) in ikincisinde yerine koyarsak

$$-cg + \alpha g'' + \frac{b^2}{2c} g^3 = 0 \tag{6.24}$$

şeklinde sadece bir tane adi diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklemin çözümünün λ, μ ve β tanımlanılacak parametreler olmak üzere

$$g(\xi) = \lambda cos^{\beta}(\mu\xi) \tag{6.25}$$

formunda olduğunu kabul edelim (Adım 4). Adım 5 de Denklem (6.6) ile verilen ilgili türevleri Denklem (6.24) de kullanırsak

$$-c\lambda cos^{\beta}(\mu\xi)+\alpha\lambda\beta(\beta-1)\mu^2 cos^{\beta-2}(\mu\xi)-\alpha\lambda\mu^2\beta(\beta-1)cos^{\beta}(\mu\xi)$$
$$-\alpha\lambda\mu^2\beta cos^{\beta}(\mu\xi)+\frac{b^2}{2c}\lambda^3 cos^{3\beta}(\mu\xi)=0 \tag{6.26}$$

elde edilir. Burada, kosinüs fonksiyonlu terimler dengelendiğinde tanımlamamız gereken λ, μ ve β parametreleri için

$$\begin{aligned} \beta-2&=3\beta \\ -c\lambda-\alpha\lambda\mu^2\beta(\beta-1)-\alpha\lambda\mu^2\beta&=0 \\ \alpha\lambda\beta(\beta-1)\mu^2+\frac{b^2}{2c}\lambda^3&=0 \end{aligned} \tag{6.27}$$

şeklinde lineer olmayan bir cebirsel denklem sistemi elde ederiz. Bu sistemi Maple yardımıyla çözdüğümüzde

$$\beta=-1,\quad \mu=\pm\sqrt{-\frac{c}{\alpha}},\quad \lambda=\frac{2c}{b}$$
$$\beta=-1,\quad \mu=\pm\sqrt{-\frac{c}{\alpha}},\quad \lambda=-\frac{2c}{b}$$

bulunur. Bu değerleri Denklem (6.25) de kullanırsak ve $u(x,t)=f(\xi)$, $v(x,t)=g(\xi)$ olduğunu da göz önüne alarak ele alınan sistemin çözümü

$$\begin{aligned} v(x,t)&=\frac{2c}{b}cos^{-1}\left(\pm\sqrt{-\frac{c}{\alpha}}(x-ct)\right) \\ u(x,t)&=\frac{2c}{b}cos^{-2}\left(\pm\sqrt{-\frac{c}{\alpha}}(x-ct)\right) \end{aligned} \tag{6.28}$$

$$\begin{aligned} v(x,t)&=-\frac{2c}{b}cos^{-1}\left(\pm\sqrt{-\frac{c}{\alpha}}(x-ct)\right) \\ u(x,t)&=\frac{2c}{b}cos^{-2}\left(\pm\sqrt{-\frac{c}{\alpha}}(x-ct)\right) \end{aligned} \tag{6.29}$$

şeklinde bulunur.

7. GENELLEŞTİRİLMİŞ KUDRYASHOV METODU

x ve t bağımsız değişkenler ve $u = u(x,t)$ olmak üzere

$$P(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, \dots) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad t > 0 \tag{7.1}$$

şeklindeki doğrusal olmayan evrim denklemini ele alalım. Burada P yüksek mertebeden türevler ve doğrusal olmayan terimleri içeren u ve u nun çeşitli kısmi türevlerindeki bir polinomdur (Demiray 2014, Baskonus ve Bulut 2015, Khan ve diğ. 2016).

Genelleştirilmiş Kudryashov Metodunun başlıca adımları aşağıda olduğu gibidir:

Adım 1: İlerleyen dalga değişkeni $\xi = x - ct$ Denklem (7.1) de kullanıldığında bu denklem

$$\Psi(u, u', u'', \dots) = 0 \tag{7.2}$$

şeklinde bir adi diferansiyel denkleme indirgenir. Burada üssü ξ ye göre türevi göstermekte olup $c \in \mathbb{R}/\{0\}$ bağıl dalga modunun hızıdır.

Denklem (7.2) nin arka arkaya olabildiğince integrali alınabilir. $\xi \to \pm\infty, \xi = x - \omega t$ için $u(\xi) \to 0$ ve $\frac{d^m u(\xi)}{d\xi^m} \to 0$ $(m = 1,2,3, \dots)$ sınır koşullarına bağlı kalacak şekilde integral sabitleri varsa sıfırlanmalıdır (Malfiet ve Hereman 1996; Wazwaz 2009).

Adım 2: Denklem (7.2) nin

$$u(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^{N} a_i Q^i(\xi)}{\sum_{j=0}^{M} b_j Q^j(\xi)} \tag{7.3}$$

forumunda çözüme sahip olduğunu varsayalım. Burada a_i $(i = 0,1,2, \dots, N)$ ve b_j $(j = 0,1,2, \dots, M)$ daha sonra belirlenecek olan sabitler olup $a_N \neq 0$,$b_M \neq 0$ ve $Q = Q(\xi)$ aşağıdaki adi diferansiyel denklemi sağlar.

$$\frac{dQ(\xi)}{d\xi} = Q^2(\xi) - Q(\xi) \tag{7.4}$$

Denklem (7.4) ün çözümü, A bir integral sabiti olmak üzere,

$$Q(\xi) = \frac{1}{1 + A\,exp(\xi)} \tag{7.5}$$

şeklindedir.

Adım 3: Denklem (7.3) te yer alan pozitif N ve M tamsayıları, Denklem (7.1) veya Denklem (7.2) de ortaya çıkan en yüksek mertebeden türevler ve doğrusal olmayan terimler arasındaki homojen denge dikkate alınarak belirlenebilir. Daha doğrusu $u(\xi)$ nin derecesi aşağıda yer alan diğer ifadelerin derecesini belirtecek şekilde $D\big(u(\xi)\big) = N - M$ olarak tanımlanır.

$$D\left(\frac{d^q u}{d\xi^q}\right) = N - M + q, D\left(u^p\left(\frac{d^q u}{d\xi^q}\right)^s\right) = (N - M)p + s(N - M + q)$$

Burada $p,\ q$ ve s tamsayılardır. Buradan Denklem (7.3) teki N ve M değerlerini bulabiliriz.

Adım 4: Denklem (7.3) ve Denklem (7.4) ü denklem (7.2) de yerine koyarsak, $Q^{i-j}\ (i, j = 0,1,2, \dots)$ de bir polinom elde ederiz. Bu polinomda aynı Q kuvvetlerinin tüm terimlerinin katsayılarını sıfıra eşitleyerek, bilinmeyen parametreler olan $a_i\ (i = 0,1,2, \dots, M)$ ve c yi elde etmek için Maple ile çözülebilecek lineer olmayan cebirsel denklem sistemi elde ederiz. Bu sistemi çözerek bulduğumuz değerleri Denklem (7.3) te kullanarak Denklem (7.1) in çözümüne ulaşmış oluruz.

Bu bölümde Genelleştirilmiş Kudryashov metodunu kullanarak doğrusal olmayan bazı evrim denklem sistemlerinin ilerleyen dalga çözümlerini elde edeceğiz.

7.1 Varyant Boussinesq Denklemi

$$\begin{aligned} u_t + H_x + uu_x &= 0 \\ H_t + (uH)_x + u_{xxx} &= 0 \end{aligned} \tag{7.6}$$

şeklindeki KDD sistemi su dalgaları için bir model olarak kullanılmıştır (Sachs 1998). Burada $u(x, t)$ hızı ve $H(x, t)$ de akışkan için serbest dalga yüzeyinin yüksekliğini göstermektedir. Boussinesq denklemi orta genlikte uzun su dalgalarının bilinen bir modelidir. Bu denklem bir boyutlu ve iki karışmayan sıvı arasındaki sınırda gelişen zayıf doğrusal olmayan iç dalgayı temsil eder. Ayrıca, denklem orta ölçekli ve yarı sıkıştırılamaz sıvı hareketine uygulanabilen atmosferik hareket denkleminin basitleştirilmiş bir modelidir. Bu da hidrodinamikte önemli fiziksel uygulamalar anlamına gelir. Boussinesq denklemleri zengin matematiksel yapıları nedeniyle de önemli matematik ilişkilerine sahiptir (Guo ve diğ. 2015).

Bu sistemi çözmek için öncelikle $\xi = x - ct$ şeklindeki ilerleyen dalga değişkenini Denklem (7.6) da kullanırsak ve

$$u(\xi) = u(x,t) \quad H(\xi) = H(x,t) \tag{7.7}$$

olduklarını da göz önüne alarak

$$\begin{aligned} -cu' + H' + uu' &= 0 \\ -\omega H' + (uH)' + u''' &= 0 \end{aligned} \tag{7.8}$$

şeklinde adi diferansiyel denklem sistemini elde ederiz (Adım 1). Bu sistemdeki her iki denklemin de ξ ye göre integralini alarak, integral sabiti sıfır olmak kaydıyla, Genelleştirilmiş Kurdyashov metodu bölümünde (Adım 1) açıklanan sınır koşulları altında ve $H(\xi)$ için benzer sınır koşullarının kullanılması suretiyle, sırasıyla aşağıda yer alan denklemleri elde ederiz.

$$\begin{aligned} -cu + H + \frac{1}{2}u^2 &= 0 \\ -cH + uH + u'' &= 0 \end{aligned} \tag{7.9}$$

Denklem (7.9) un birincisinden

$$H = cu - \frac{1}{2}u^2 \tag{7.10}$$

elde edilir. Denklem (7.10) u Denklem (7.9) un ikincisinde yerine koyarsak,

$$u'' - c^2u + \frac{3}{2}cu^2 - \frac{1}{2}u^3 = 0 \tag{7.11}$$

bulunur. Şimdi en yüksek mertebeden u'' türevini ve u^3 doğrusal olmayan terimini dengeleyerek, $3N-3M=N-M+2$ veya $N=M+1$ eşitliğini elde ederiz. $M=1$ olarak alırsak $N=2$ sonucunu buluruz. Böylelikle Denklem (7.3), Adım 2,

$$u(\xi)=\frac{a_0+a_1Q+a_2Q^2}{b_0+b_1Q} \tag{7.12}$$

şeklinde olur. Denklem (7.12) yi Denklem (7.4) ile birlikte Denklem (7.11) de yerine koyarsak, $Q^k\ (k=0,1,2,\dots)$ polinomunu elde ederiz. Aynı Q kuvvetlerine ait polinomun katsayılarını sıfıra eşitleyerek c, a_0, a_1, a_2, b_0 ve b_1 parametrelerini tanımlamak için doğrusal olmayan cebirsel denklem sistemini elde ederiz. Bu sistem çok uzun ve karmaşık olduğundan dolayı burada verilmemiştir. Elde ettiğimiz bu sistemi Maple yardımıyla çözdüğümüzde aşağıdaki çözüm setlerini elde ederiz.

Set 1: $c=\pm 2,\ a_0=0,\ a_1=0,\ a_2=\pm 2b_1,\ b_0=-0.50b_1$

Set 2: $c=\pm 1,\ a_0=0,\ a_2=0,\ b_0=-b_1\pm\frac{1}{2}a_1$

Set 3: $c=\pm 1,\ a_0=0,\ a_1=\pm 2b_0,\ a_2=\pm 2b_1$

Set 4: $c=\mp 1,\ a_0=\mp 2b_0,\ a_1=\mp(2b_1-2b_0),\ a_2=\pm 2b_1$

Set 5: $c=\mp 2,\ a_0=\pm 2b_1,\ a_1=\mp 4b_1,\ a_2=\pm b_1,\ b_0=-\frac{1}{2}b_1$

Set 6: $c=\pm I\sqrt{2},\ a_0=\mp\frac{Ib_1}{\sqrt{2}},\ a_1=\mp 2b_1\pm I\sqrt{2}b_1,\ a_2=\pm 2b_1,\ b_0=-\frac{b_1}{2}$

Sonuç olarak ele aldığımız problem için,

Set 1 e karşılık gelen çözümler:

$$\begin{aligned} u(x,t)&=\mp\frac{4}{A^2\,exp(2x\mp 4t)-1}\\ H(x,t)&=-\frac{8A^2\,exp(2x\mp 4t)}{(A^2\,exp(2x\mp 4t)-1)^2}\end{aligned} \tag{7.13}$$

Set 2 ye karşılık gelen çözümler:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \pm \frac{2a_1}{Aa_1\,exp(x \mp t) \mp 2b_1 A\,exp(x \mp t) + a_1} \\
H(x,t) &= \frac{2Aa_1(a_1 \mp 2b_1)\,exp(x \mp t)}{(Aa_1\,exp(x \mp t) \mp 2b_1 A\,exp(x \mp t) + a_1)^2}
\end{aligned} \tag{7.14}
$$

Set 3 e karşılık gelen çözümler:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \pm \frac{2}{1 + A\,exp(x \mp t)} \\
H(x,t) &= \frac{2A\,exp(x \mp t)}{\left(1 + A\,exp(x \mp \mp t)\right)^2}
\end{aligned} \tag{7.15}
$$

Set 4 e karşılık gelen çözümler:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \mp \frac{2A\,exp(x \pm t)}{1 + A\,exp(x \pm t)} \\
H(x,t) &= \frac{2A\,exp(x \pm t)}{\left(1 + A\,exp(x \pm t)\right)^2}
\end{aligned} \tag{7.16}
$$

Set 5 e karşılık gelen çözümler:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \pm \frac{4A^2\,exp(2x \pm 4t)}{1 - A^2\,exp(2x \pm 4t)} \\
H(x,t) &= -\frac{8A^2\,exp(2x \pm 4t)}{(A^2\,exp(2x \pm 4t) - 1)^2}
\end{aligned} \tag{7.17}
$$

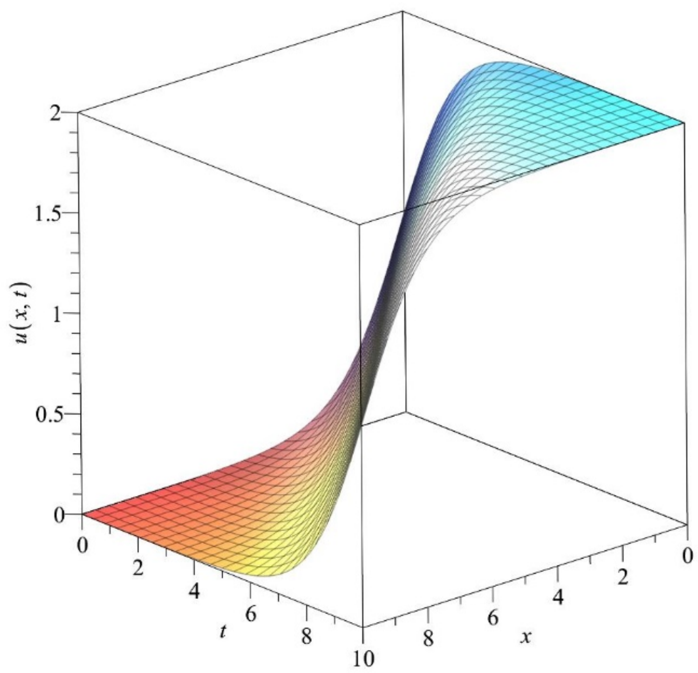
Set 6 ya karşılık gelen çözümler:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \pm \left(I\sqrt{2} \mp \frac{4A\,exp\left(x \mp I\sqrt{2}t\right)}{A^2\,exp\left(2x \mp 2I\sqrt{2}t\right) - 1} \right) \\
H(x,t) &= -\left(1 + \frac{8A^2\,exp\left(2x \mp 2I\sqrt{2}t\right)}{\left(A^2\,exp\left(2x \mp 2I\sqrt{2}t\right) - 1\right)^2} \right)
\end{aligned} \tag{7.18}
$$

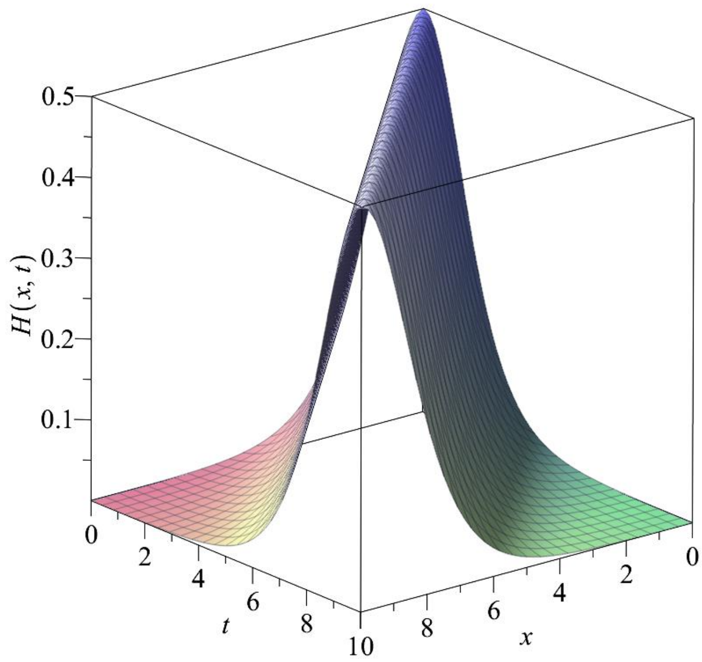
Ele aldığımız problemde $H(x,t)$ yüksekliği (yani uzunluğu) temsil ettiğinden dolayı negatif olmayan ve reel (gerçek) bir sayı olmalıdır. Bu durumda yukarıdaki çözüm setlerinden 2, 3 ve 4 üncü setler $H(x,t)$ nin pozitif olmasından dolayı hem matematiksel hem de fiziksel olarak anlamlıdır. Bu durumda, A nın keyfi bir integral sabiti olduğunu da hatırlayarak, problemin bazı ilerleyen dalga çözümlerini elde edebiliriz. Eğer Set 3 ile verilen Denklem (7.15) de $A = 1$ olarak alırsak, $u(x,t) > 0$ ve ayrıca sağa doğru ilerleyen bir dalga olduğunu düşünürsek (örneğin x-ekseninin pozitif istikametinde) aşağıdaki çözümü elde ederiz.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= 1 - tanh\left(\frac{1}{2}(x-t)\right) \\ H(x,t) &= \frac{1}{2}sech^2\left(\frac{1}{2}(x-t)\right) \end{aligned} \tag{7.19}$$

Şekil 7.1 ve Şekil 7.2 de sırasıyla $u(x,t)$ ve $H(x,t)$ fonksiyonlarının grafikleri görülmektedir.



Şekil 7.1: Denklem (7.19) ile verilen $\boldsymbol{u(x,t)}$ fonksiyonun grafiği.



Şekil 7.2: Denklem (7.19) ile verilen $\boldsymbol{H(x,t)}$ fonksiyonun grafiği.

7.2 (2+1)-Boyutlu Kırıcı Soliton Denklemleri

Şimdi de, α sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere,

$$\begin{gathered} u_t + \alpha u_{xxy} + 4\alpha(uv)_x = 0 \\ u_y = v_x \end{gathered} \tag{7.20}$$

şeklindeki $(2+1)$-boyutlu kırıcı soliton denklemlerinin tam ilerleyen dalga çözümlerini bulma problemini ele alalım (Zayed ve diğ. 2013).

Bu sistemi çözmek için öncelikle $\xi = x + y - ct$ şeklindeki ilerleyen dalga değişkenini Denklem (7.20) de kullanırsak ve

$$u(\xi) = u(x,t), \quad v(\xi) = v(x,t) \tag{7.21}$$

olduklarını da göz önüne alarak

$$\begin{gathered} -cu' + \alpha u''' + 4\alpha(uv)' = 0 \\ u' = v' \end{gathered} \tag{7.22}$$

şeklinde adi diferansiyel denklem sistemini elde ederiz (Adım 1). Bu sistemdeki her iki denklemin de ξ ye göre integralini alarak, integral sabitleri sıfır olmak kaydıyla, genelleştirilmiş Kudryashov metodu bölümünde (Adım 1) açıklanan sınır koşulları altında ve $v(\xi)$ için benzer sınır koşullarının kullanılması suretiyle, sırasıyla aşağıda yer alan denklemleri elde ederiz.

$$\begin{gathered} -cu + \alpha u'' + 4\alpha uv = 0 \\ u = v \end{gathered} \tag{7.22}$$

Denklem (7.22) nin ikincisini birincisinde yerine koyarsak

$$\alpha u'' - cu + 4\alpha u^2 = 0 \tag{7.23}$$

bulunur. Şimdi, en yüksek mertebeden u'' türevini ve u^2 doğrusal olmayan terimini dengeleyerek, $N = M + 2$ eşitliğini elde ederiz. $M = 1$ olarak alırsak $N = 3$ sonucunu buluruz. Böylelikle Denklem (7.3), Adım 2,

$$u(\xi) = \frac{a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2 + a_3 Q^3}{b_0 + b_1 Q} \tag{7.24}$$

şeklinde olur. Denklem (7.24) ü Denklem (7.4) ile birlikte Denklem (7.23) de yerine koyarsak, Q^k $(k = 0,1,2,\ldots)$ polinomunu elde ederiz. Aynı Q kuvvetlerine ait katsayıları sıfıra eşitleyerek $c, a_0, a_1, a_2, a_3, b_0$ ve b_1 parametrelerini tanımlamak için doğrusal olmayan cebirsel denklem sistemini elde ederiz (Not: Bu sistem çok uzun ve karmaşık olduğundan dolayı burada verilmemiştir). Elde ettiğimiz bu sistemi Maple yardımıyla çözdüğümüzde aşağıdaki çözüm setlerini elde ederiz:

Set 1: b_0 ve b_1 serbest değişkenler olmak üzere,

$$\omega = -\alpha,\ \ a_0 = -\frac{1}{4}b_0,\ \ a_1 = \frac{3}{2}b_0 - \frac{1}{4}b_1,\ \ a_2 = \frac{3}{2}(b_1 - b_0),\ \ a_3 = -\frac{3}{2}b_1$$

Set 2: a_1 ve b_1 serbest değişkenler olmak üzere,

$$\omega = \alpha, \qquad a_0 = 0, \qquad a_2 = \frac{3}{2}b_1 - a_1, \qquad a_3 = -\frac{3}{2}b_1, \qquad b_0 = \frac{2}{3}a_1$$

Sonuç olarak ele aldığımız bu problem için, Set 1 e karşılık gelen çözümler:

$$u(x,y,t)=v(x,y,t)=\frac{4A\ e^{x+y+\alpha t}-A^2\ e^{2(x+y+\alpha t)}-1}{4(1+A\ \ e^{x+y+\alpha t})^2} \tag{7.25}$$

Set 2 ye karşılık gelen çözümler:

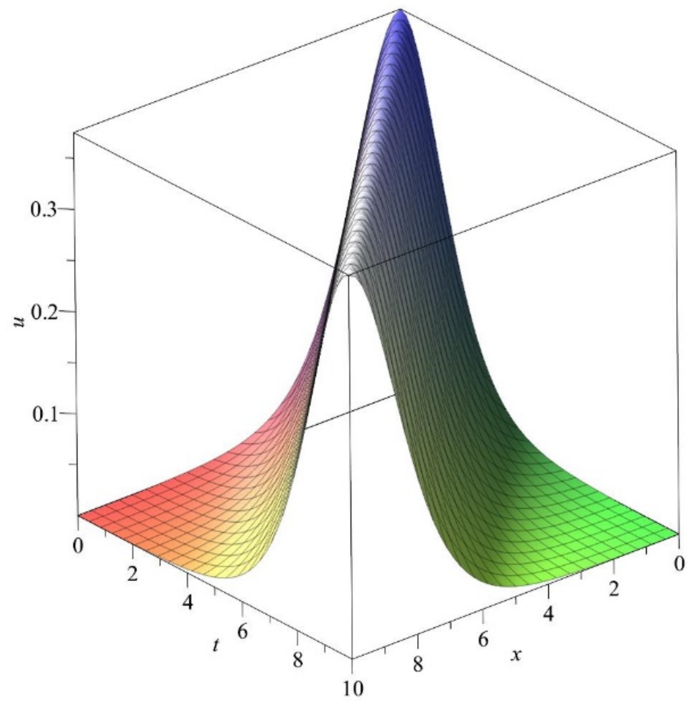
$$u(x,y,t)=v(x,y,t)=\frac{3A\ exp(x+y-\alpha t)}{2\big(1+A\ exp(x+y-\alpha t)\big)^2} \tag{7.26}$$

Özel olarak Denklem (7.26) da $A=1$ olarak alırsak

$$u(x,y,t)=v(x,y,t)=\frac{3}{8}sech^2\left(\frac{1}{2}(x+y-\alpha t)\right) \tag{7.27}$$

elde edilir.

Denklem (7.27) de $\alpha=1, y=0,\ x=[0,10]$ ve $t=[0,10]$ olarak alındığında elde edilen $u(x,y,t)$ ve $v(x,y,t)$ fonksiyonlarının grafiği Şekil 7.3 de görülmektedir.



Şekil 7.3: Denklem (7.27) ile verilen fonksiyonun grafiği.

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Fen ve mühendisliğin çeşitli alanlarında karşımıza çıkan olayların genellikle lineer (doğrusal) olmayan kısmi diferansiyel denklem ve/veya kısmi diferansiyel denklem sistemleri ile modellendiği artık iyi bilinmektedir. Bu denklemlerin ve/veya sistemlerin tam çözümleri onların fiziksel özelliklerini anlamak için oldukça kullanışlı olmaktadırlar. Bu nedenle, bu olayları daha iyi anlamak için denklemlerin ve/veya sistemlerin tam çözümlerini elde etmek günümüzde oldukça fazla önem arz etmektedir.

Bu tezde, bazı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem ve/veya kısmi diferansiyel denklem sistemlerinin tam çözümlerini elde etmek için geliştirilen ve günümüzde de farklı tiplerdeki denklemleri ve/veya sistemleri çözmek için uygulama alanı bulan beş metot detaylı olarak ele alınmıştır. Bu metotlar sırasıyla: tanjant hiperbolik fonksiyonu metodu, hiperbol fonksiyon metodu, ilk integral metodu, kosinüs fonksiyonu metodu ve genelleştirilmiş Kudryashov metodudur. Ele alınan bu metotların temel özellikleri verildikten sonra herbiri için genelde fen ve mühendislik alanlarında karşımıza çıkan bir prototip denklem ve/veya sistem örnek olarak verilmiştir. Ele aldığımız bu metotlar birçok kısmi diferansiyel denklem ve/veya kısmi diferansiyel denklem sistemini, integrallenebilir olsun veya olmasın, çözmek için uygundur. Ayrıca bu metotların uygulamasında lineer olmayan denklemlerin lineerleştirilmesine de gerek duyulmamaktadır.

Burada incelediğimiz beş metot bu alanda akademik çalışmalara katkıda bulunmak isteyen araştırmacılara toplu bir bakış açısı sunmaktadır. Ele alınan tüm metotlardaki çözüm aşamalarının, öncelikle kısmi diferansiyel denklemi ve/veya kısmi diferansiyel denklem sistemini uygun bir dönüşüm yardımıyla bir adi diferansiyel denklem veya adi diferansiyel denklem sistemine indirgeme olduğu, daha sonra bu yeni elde edilen problemin uygun bir çözüm formu yardımıyla (öyle ki bu aşamada metotların faklılığı ortaya çıkmakta!) bir doğrusal olmayan cebirsel denklem sistemini çözme problemine indirgendiği ve en sonunda da bu cebirsel denklem sisteminin çözülerek ele alınan problemin bir tam çözümüne ulaşıldığı, şeklinde olduğu gözlemlenerek bu alanda yeni çözüm metotlarının geliştirilmesine katkıda bulunacağı düşünülmektedir.

9. KAYNAKLAR

Abdou, M. A. and Soliman, A. A., “Modified extended tanh-function method and its application on nonlinear physical equations”, *Phys. Lett. A*, 353, 487-492, (2006).

Abdou, M. A., “The extended tanh method and its applications for solving nonlinear physical models”, *Appl. Math. Comput.*, 190 (1), 988-996, (2007).

Ablowitz, M. J. and Villarroel, J., “On the Kadomtsev Petviashvili Equation and Associated Constraints”, *Stud. Appl. Math.* 85, 195-213, (1991).

Bai, C., “Exact solutions for nonlinear partial differential equation: a new approach”, *Physics Lett. A*, 288, 191-195, (2001).

Baskonus, H. M. and Bulut H., “New hyperbolic function solutions for some nonlinear partial differential equation arising in mathematical physics”, *Entropy,* 17, 4255–4270, (2015).

Burgers, J. M., “A mathematical model illustrating the theory of turbulence”, *Adv. Appl. Mech.*, 1, 171–199, (1948).

Chen, Y. and Zheng, Y., “Generalized extended tanh-function method to construct new explicit solutions for the approximate equation for long water waves”, *Int. J. Mod. Phys. C*, 14 (4), 601-611, (2003).

Deng, X., Cao, J. and Li, X., “Travelling wave solutions for the nonlinear dispersion Drinfel’d–Sokolov (D(m, n)) system”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 15, 281-290, (2010).

Demiray, S. T., Pandir, Y. and Bulut, H., “The investigation of exact solutions of nonlinear time fractional Klein–Gordon equation by using generalized Kudryashov method”, AIP Conf. Proc., 283-289, (2014).

Dold, A. and Eckmann, B., *Bäcklund Transformations*, Lecture Notes in Mathematics, 515, Berlin: Springer-Verlag, 40-68, (1974).

Duffing, G., *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung*, F. Vieweg & Sohn, Braunschweig, (1918).

Evans, D. J. and Raslan, K. R., “The tanh function method for solving some important non-linear partial differential equations”, *Int. J. Comput. Math.*, 82 (7), 897–905, (2005).

Fan, E. G., “Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations”, *Phys. Lett. A*, 277, 212-218, (2000).

Feng, Z., “On explicit exact solutions to the compound Burgers–KdV equation”, *Phys. Lett. A*, 293, 57-66, (2002).

Gardner, C. S., Greene, J. M., Kruskal, M. D., and Miura, R. M., “Method for Solving the Korteweg de Vries Equation”, *Phys. Rev. Lett.*, 19, 1095-1097, (1967).

Gepreel, K. A., “Exact solutions for nonlinear PDEs with the variable coefficients in mathematical physics”, *J. Inform. Comput. Sci.*, 6 (1), 3-14, (2011).

Guo, P., Wu, X. and Wang, L. B., “Multiple soliton solutions for the variant Boussinesq equations”, *Adv. Differ. Equ.*, 2015:37, (2015)

Hosseini, K., Ansari, R. and Gholamin, P., “Exact solutions of some nonlinear systems of partial differential equations by using the first integral method”, *J. Math. Anal. Appl.*, 387, 807-814, (2012).

Hu, W.P., Deng, Z.C., Han, S.M. and Fa, W., “Multi-symplectic Runge-Kutta method for Landau-Ginzburg-Higgs equation”, *Appl. Math. Mech.*, 30 (8), 1027-1034, (2009).

Hua, X., “The exponential function rational expansion method and exact solutions to nonlinear lattice equations system”, *Appl. Math. Comput.*, 217, 1561-1565, (2010).

Ilie, M., Biazar, J. and Ayati, Z., “The first integral method for solving some conformable fractional differential equations”, *Opt. Quant Electron*, 50:55, (2018).

Inc, M. and Evans, D. J. “On travelling wave solutions of some nonlinear evolution equations”, *Int. J. Comput. Math.*, 81 (2), 191-202, (2004).

Kadomtsev, B. B. and Petviashvili, V. I., "On the stability of solitary waves in weakly dispersive media”, *Sov. Phys. Dokl.* 15, 539-541, (1970).

Khan, K. and Akbar, M. A., “Traveling wave solutions of the (2 + 1)-dimensional Zoomeron equation and Burgers equation”, *Ain Shams Engineering Journal,* 5 (1), 247-256, (2014).

Khan, K., Akbar, M. A., and Arnous, A. H., “Exact traveling wave solutions for system of nonlinear evolution equations”, *SpringerPlus*, 5:663, (2016).

Khater, A. H., Malfliet, W., Callebaut, D. K. and Kamel, D. S., “The tanh method, a simple transformation and exact analytical solutions for nonlinear reaction–diffusion equations”, *Chaos Solitons & Fractals*, 14 (3), 513–522, (2002).

Korteweg, D. J. and De Vries, G., “On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves”, *Phil. Mag.*, 39 (5), 422–443, (1895).

Kudryashov, N. A. “On one method for finding exact solutions of nonlinear differential equations”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 17 (6), 2248–2253, (2012).

Lu, B., Zhang, H. Q. and Xie, F. D., “Travelling wave solutions of nonlinear partial equations by using the first integral method”, *Appl. Math. Comput.*, 216, 1329–1336, (2010).

Maghsoudi Khouzani, S. “Bazı Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemlerin Tam Çözümleri için Metotlar”, Yüksek Lisans Tezi, *Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Denizli, (2019).

Malfliet, W., “Solitary wave solutions of nonlinear wave equations”, *Am. J. Phys.*, 60, 650-654, (1992).

Malfliet, W. and Hereman, W., “The Tanh Method: I. Exact Solutions of Nonlinear Evolution and Wave Equations”, *Physica Scripta*, 54, 563–568, (1996).

Matjila, C., Muatjetjeja, B., and Khalique, C., M., “Exact Solutions and Conservation Laws of the Drinfel’d-Sokolov-Wilson System”, *Abstract and Applied Analysis*, 1–6, (2014).

Matveev, V. B. and Salle, M. A., *Darboux Transformations and Solitons*, Springer, (1991).

Murray, J., *Mathematical Biology,* Biomathematics, 19, Berlin: Springer-Verlag, 63-94, (1989).

Parkes, E. J. and Duffy, B. R., “An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to non-linear evolution equations”, *Computer Physics Communications*, 98 (3), 288–300, (1996).

Polyanin, A. D., *Handbook of Linear Partial Differantial Equantions for Engineers and Scientists*, Chapman & Hall / CRC, (2002).

Polyanin, A. D. and Zaitsev, V. F., *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, Boca Raton: CRC Press Taylor & Francis Group, (2012).

Sachs, R. L., "On the integrable variant of the Boussinesq system: Painlevé property, rational solutions, a related many body system, and equivalence with the AKNS hierarchy", *Phys D*, 30, 1–27, (1998).

Shukri, S. and Al-Khaled, K., "The extended tanh method for solving systems of nonlinear wave equations", *Appl. Math. Comput.*, 217 (5), 1997-2006, (2010).

Soliman, A. A., "The modified extended tanh-function method for solving burgers-type equations", *Phys. A*, 361, 394-404, (2006).

Wahlquist, H. D. and Estabrook, F. B., "Bäcklund transformation for solutions of the Korteweg-de Vries equation", *Phys. Rev. Lett.*, 31, 1386-1390, (1973).

Wang, M. L., Zhou, Y. B. and Li, Z. B., "Application of a homogeneous balance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physics", *Phys. Lett. A*, 216, 67-75, (1996).

Wang, M., Li, X. and Zhang, J., "The $(\frac{G'}{G})$-expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics", *Physics Letters A*, 372 (4), 417–423, (2008).

Wazwaz, A. M., "A sine-cosine method for handling nonlinear wave equations", *Math. Comput. Modell.*, 40 (5–6), 499-508, (2004[a]).

Wazwaz, A. M., "New compactons, solitons and periodic solutions for nonlinear variants of the KdV and the KP equations", *Chaos, Solitons & Fractals*, 22 (1), 249-260, (2004[b]).

Wazwaz, A. M. and Helal, M. A., "Nonlinear variants of the BBM equation with compact and noncompact physical structures", *Chaos, Solitons & Fractals*, 26 (3), 767-776, (2005).

Wazwaz, A. M, "New solitary wave solutions to the Kuramoto-Sivashinsky and the Kawahara equations", *Applied Mathematics and Computation*, 182 (2), 1642–1650, (2006[a]).

Wazwaz, A. M., “Two reliable methods for solving variants of the KdV equation with compact and noncompact structures”, *Chaos, Solitons & Fractals*, 28 (2), 454-462, (2006[b]).

Wazwaz, A. M., “Exact and explicit travelling wave solutions for the nonlinear Drinfeld–Sokolov system”, *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul.*, 11, 311-325, (2006[c]).

Wazwaz, A. M., “Single and multiple-soliton and solutions for the (2 + 1)-dimensional KdV equation”, *Appl. Math. Comput.*, 204, 20-26, (2008).

Wazwaz, A. M., “Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory”, Beijing: Higher Education Press and Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, (2009).

Wazwaz, A. M. and Mehanna, M. S., “A variety of exact travelling wave solutions for the (2+1)-dimensional Boiti–Leon–Pempinelli equation”, *Appl. Math. Comput.*, 217 (4), 1484-1490, (2010).

Zayed, E. M. E. and Gepreel, K. A., “The modified (G′/G)-expansion method and its applications to construct exact solutions for nonlinear PDEs”, *WSEAS Trans. Math.*, 10 (8), 270-278, (2011).

Zayed, E. M. E., Ibrahim, S. A. H. and Arnous, A. H., “Applications of the functional variable method for finding the exact solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics”, *AIP Conf. Proc.* 1558:1951, (2013).

Zhang, S. and Zhang, H. Q., “An exp-function method for new N-soliton solutions with arbitrary functions of a (2 + 1)-dimensional vcBK system”, *Comput. Math. Appl.*, 61 (8), 1923-1930, (2011).

Zheng, X., Chen, Y. and Zhang, H., “Generalized extended tanh-function method and its application to (1+1)-dimensional dispersive long wave equation”, *Phys. Lett. A*, 311, 145–157, (2003).

Zhou, J.,Tian, L., and Fan, X., “Solitary-wave solutions to a dual equation of the Kaup–Boussinesq system”, *Nonlinear Anal.*, 11, 3229–3235, (2010).