T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATIK ANABILIM DALI

SOFT MODÜLLER VE BAZI ÖZEL TIPTEKI SOFT ALT MODÜLLER

YÜKSEK LISANS TEZI

EMIN EMRE KÖMÜRCÜLER

DENİZLİ, AĞUSTOS - 2021

T.C.
PAMUKKALE ÜNIVERSITESI
FEN BILIMLERI ENSTITÜSÜ
MATEMATIK ANABILIM DALI

SOFT MODÜLLER VE BAZI ÖZEL TIPTEKI SOFT ALT MODÜLLER

YÜKSEK LISANS TEZI

EMIN EMRE KÖMÜRCÜLER

DENİZLİ, AĞUSTOS - 2021

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

EMİN EMRE KÖMÜRCÜLER

ÖZET

SOFT MODÜLLER VE BAZI ÖZEL TİPTEKİ SOFT ALT MODÜLLER
YÜKSEK LISANS TEZI
EMİN EMRE KÖMÜRCÜLER
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATIK ANABILIM DALI

(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. CANAN CELEP YÜCEL)

DENİZLİ, AĞUSTOS - 2021

Klasik mantığın, ekonomi, mühendislik, çevre ve tıp gibi birçok alanında çözümleyemediği belirsizlikleri ortadan kaldırmada soft küme teorisi çok önemli rol oynamaktadır. Bu teorinin matematikteki cebirsel yapılara uygulanabilmesi nedeniyle bu alanda birçok çalışma yapılmaktadır. Bu çalışmada, soft kümeler üzerinde tanımlanan soft modüller ve özellikleri detaylı olarak incelenmektedir. Soft alt modüllerin direkt toplamı ve direkt toplananı, küçük soft alt modüller ve bir soft modülün sokul'u (socle) ile ilgili literatürde mevcut sonuçlar verilmektedir. Ek olarak özel tipteki büyük (essential) ve komplement soft alt modüller için bulunan tüm özellikler üzerinde durulmaktadır. Tanım ve sonuçlar örneklerle desteklenmektedir.

ANAHTAR KELİMELER: Soft Küme, Soft Modül, Büyük (Essential) Soft Alt Modül, Komplement Soft Alt Modül.

ABSTRACT

SOFT MODULE AND SOME SPECIAL TYPES OF SOFT SUBMODULES
MSC THESIS
EMIN EMRE KÖMÜRCÜLER
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS

(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. CANAN CELEP YÜCEL)

DENİZLİ, AUGUST 2021

The theory of soft sets plays an important role to eliminate uncertainties, arising in many areas such as economy, engineering, environments and medical, that can't be analyzed by using classical logic. A lot of work is being done in this area because of the applicability of the theory to the algebraic structures in mathematics. In this work, soft modules defined on soft sets and their properties are examined in detail. Results available in the literature are given for direct sum and direct summand of soft submodules, small soft submodules and the socle of a soft module. In addition, obtained properties for special type of essential and complement soft submodules are emphasized. Definition and results are supported with examples.

KEYWORDS: Soft Set, Soft Module, Essential Soft Submodule, Complement Soft Submodule

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

P(U)	:	Kuvvet Kümesi
(F,A)	:	Soft Küme
$\tilde{\cup}$	:	Soft kümelerin birleşimi
$\tilde{\cap}$	:	Soft kümelerin arakesiti
$\Cap$	:	Kısıtlanmış kesişimleri
$\tilde{\leq}$	:	Soft alt grup
$\sum_{i\in I} N_i$	:	Alt modül ailesinin toplamı
$\oplus$	:	Alt modüllerin direkt toplamı
$\tilde{\leq}_e$	:	Büyük (essential) soft alt modül
$\tilde{\leq}_c$	:	Komplement soft alt modül

ÖNSÖZ

Bu çalışmada bana her zaman destek olan, değerli bilgilerini ve tecrübesini hiçbir zaman esirgemeyen her konuda yol gösterip tüm sabrıyla yardımcı olan değerli sayın hocam Doç. Dr. Canan CELEP YÜCEL'e, ayrıca maddi manevi benden desteklerini esirgemeyen aileme sonsuz teşekkür ediyorum.

1. GİRİŞ

Mühendislik, ekonomi, tıp bilimi ve birçok alandaki bilim insanları her gün belirsiz verileri modellemeye çalışmaktadır. Klasik yöntemler her zaman başarılı değildir. Olasılık teorisi, fuzzy kümeler ve diğer matematiksel araçlar, belirsizliği açıklamak için iyi bilinen ve genellikle yararlı yaklaşımlar olsada, Molodtsov'un dediği gibi bu teorilerin her birinin kendi içinde zorlukları vardır. Sonuç olarak Molodtsov (1999) belirsizliği modellemek için "Soft Kümeler Teorisi" olarak adlandırılan yeni bir yaklaşım önermiştir.

Maji ve diğ. (2009) bilgisayar uygulamaları açısından önemli olan ilk uygulamayı vermiştir. Soft kümeler teorisi üzerinde birçok çalışmalar yapılmış ve yapılmaya devam etmektedir. Bu alandaki çalışmalar arasında, Soft küme teorisinin cebirsel yapıları üzerine elde edilen sonuçlar oldukça önemli yer almaktadır. Aktaş ve Çağman (2007) soft grupları tanımlayarak özelliklerini incelemişlerdir. Acar ve diğ. (2010) soft halkalar üzerinde soft idealler ve idealistik soft halkaları tanımlamışlardır. Ayrıca, soft halkalar üzerine detaylı çalışma yapmışlardır. Shah ve Medhit (2014) Soft Noetherian halkalar üzerine araştırmalar yapmışlardır. Soft modüller Sun ve diğ. (2008) tarafından tanımlanmış temel özellikleri incelenmiştir. Türkmen ve Pancar (2013) soft altmodüllerin toplamlarını ve direkt toplamlarını tanımlayıp bu anlamda önemli sonuçlar elde ederek, küçük (small) soft alt modülleri ve soft modülün radikali üzerinde durmuştur. Yücel ve Acar (2017) soft modüller üzerinde özel tipteki soft büyük (essential) alt modülleri ve soft komplement alt modülleri tanımlayıp özelliklerini ayrıntılı olarak incelemişlerdir. Daha sonra Davvaz ve diğ. (2019) soft modüllerin sokul'u (socle) ve radikali üzerine önemli sonuçlar elde etmişlerdir.

Bu çalışmada soft modüller ile özel tipteki soft alt modüller, bir soft modülün sokul'u (socle) detaylı olarak incelenmiş elde edilen tüm sonuçlar üzerinde durulmuş ve örneklerle tanım ve sonuçlar desteklenmiştir.

İkinci bölümde tez boyunca ihtiyaç duyulacak olan temel kavramlar kısaca özetlenerek bunlarla ile ilgili elde edilmiş bazı sonuçları verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise, soft modüller detaylı olarak incelenmiştir. Ayrıca bir modülün sokul'u (socle) ile küçük (small) soft alt modüller, büyük (essential) ve komplement soft alt modüller gibi özel tipteki soft alt modüller tanıtılarak bunlarla ilgili elde edilmiş tüm özellikler araştırılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez boyunca gerekli olan temel tanımlar ve onlarla ilgili elde edilen temel sonuçlar verilecektir.

2.1 Soft Kümeler ve Özellikleri

Burada U evrensel küme, E parametreler kümesi ve $P(U)$, U evrensel kümesinin kuvvet kümesi olarak alınacaktır. Bu kısım Molodtsov (1999) ve Maji ve diğ. (2009) kaynakları kullanılarak oluşturulmuştur.

Tanım 2.1.1: $A \subset E$ ve $F : A \to P(U)$ küme değerli fonksiyon olmak üzere (F, A) ikilisine U kümesi üzerinde bir *soft küme* denir.

Örnek 2.1.2: X bazı evlerin kümesi, E parametreler kümesi olsun. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ ve $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ olmak üzere, (F, E) soft kümesini ele alalım. $F : E \to P(X)$ dönüşümü $F(e_1) = \{h \in X \mid ucuz\}$ şeklinde tanımlansın.

$e_1 = ucuz$ $e_2 = \text{pahalı}$ $e_3 = \text{renkli}$ $e_4 = \text{modern}$ $e_5 = \text{akıllı}$ parametrelerine göre,

$F(e_1) = \{x_1, x_2\}$, $F(e_2) = \{x_1, x_2, x_3\}$, $F(e_3) = \{x_4\}$, $F(e_4) = \{x_2, x_5\}$, $F(e_5) = \varnothing$ olur. Böylece,

$$(F, E) = \left\{ \begin{matrix} (\text{ucuz ev}, \{x_1, x_2\}), (\text{pahalı ev}, \{x_1, x_2, x_3\}), (\text{renkli ev}, \{x_4\}), \\ (\text{modern ev}, \{x_2, x_5\}), (\text{akıllı ev}, \varnothing) \end{matrix} \right\}$$

bir soft küme olarak elde edilir.

Tanım 2.1.3: (F, A) ve (G, B), U evrensel kümesi üzerinde iki soft küme olmak üzere;

i. $A \subset B$

ii. $\forall x \in A$ için $F(x)$ ve $G(x)$ aynı kümedir.

koşulları sağlanıyor ise (F,A), (G,B)'nin bir *soft alt kümesi* olarak adlandırılır ve $(F,A)\tilde{\subseteq}(G,B)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4: (F,A) ve (G,B), U evrensel kümesi üzerinde iki soft küme olmak üzere $(F,A)\tilde{\subseteq}(G,B)$ ve $(G,B)\tilde{\subseteq}(F,A)$ ise (F,A) ve (G,B) *soft kümeleri eşittir* denir .

Tanım 2.1.5: (F,A), U evrensel kümesi üzerinde soft küme olmak üzere $\forall e\in E$ için, $F(e)=\varnothing$ ise (F,A) soft kümesine *boş soft küme* denir.

Tanım 2.1.6: (F,A) ve (G,B) U evrensel küme üzerinde iki soft küme ve $X=A\cap B$ olmak üzere $\forall e\in X$ için,

$$H(e)=\begin{cases} F(e), & e\in A-B \\ G(e), & e\in B-A \\ F(e)\cup G(e), & e\in A\cap B \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (H,X) soft kümesine (F,A) ile (G,B) *soft kümelerin birleşimi* denir ve $(F,A)\tilde{\cup}(G,B)=(H,C)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.7: (F,A) ve (G,B) , U evrensel küme üzerinde iki soft küme ve $C=A\cap B$ olmak üzere $\forall e\in C$ için $H(e)=F(e)$ veya $G(e)$ olan (H,C) soft kümesine (F,A) ile (G,B) *soft kümelerinin arakesiti* denir ve $(F,A)\tilde{\cap}(G,B)=(H,C)$ şeklinde gösterilir.

Önerme 2.1.8: (F,A) , U evrensel kümesi üzerinde bir soft küme olmak üzere, aşağıdaki ifadeler sağlanır.

i . $(F,A)\tilde{\cup}(F,A)=(F,A)$

ii . $(F,A)\tilde{\cap}(F,A)=(F,A)$

iii . $(F,A)\tilde{\cup}\varnothing=\varnothing$

iv . $(F,A)\tilde{\cap}\varnothing=\varnothing$

v . $(F,A)\tilde{\cup}\tilde{A}=\tilde{A}$

vi . $(F,A)\tilde{\cap}\tilde{A}=(F,A)$

Şimdi kısaca soft grup ve soft halka tanımları verilecektir. Bunlar, Aktaş ve Çağman (2007), Ali ve diğ. (2009) ve Acar ve diğ. (2010) kaynaklarından faydalanarak oluşturulmuştur.

Tanım 2.1.9: G bir grup olmak üzere (F,A), G üzerinde bir soft küme olsun. $\forall x\in A$ için $F(x)$, G nin bir alt grubu ise, (F,A)'ya G üzerinde bir *soft grup* denir.

Örnek 2.1.10: $G=X=S_3=\{e,(12),(13),(23),(123),(132)\}$ olup

$F(x)=\{y\in G|\ xRy\Leftrightarrow y=x^n, n\in N\}$ fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda $F(e)=\{e\}$, $F(12)=\{e,(12)\}$, $F(13)=\{e,(13)\}$, $F(23)=\{e,(23)\}$ ve $F(123)=F(132)=\{e,(123),(132)\}$ şeklinde elde edilir. Böylece $\forall x\in X$ için $F(x)$, G nin alt grubu olduğundan (F,X), G üzerinde bir soft gruptur.

Tanım 2.1.11: (F,A) ve (G,B), G üzerinde $A\cap B\neq\varnothing$ olacak şekilde iki soft grup olsun. $\forall c\in A\cap B$ için $H(c)=F(c)\cap G(c)$ olmak üzere $(F,A)\Cap(G,B)=(H,C)$ ile tanımlı ifadeye (F,A) ve (G,B) nin *kısıtlanmış kesişimi* denir.

Tanım 2.1.12: R bir halka ve (F,A), R üzerinde boştan farklı soft küme olsun. $\forall x\in A$ için $F(x)$, R nin alt halkası ise (F,A) ya R halkası üzerinde *soft halka* denir.

Örnek 2.1.13: $R = A = \mathbb{Z}_8 = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ ve $F : A \to P(R)$ fonksiyonu $F(x) = \{y \in R : xRy \Leftrightarrow x \cdot y = 0\}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$F(0) = R,\quad F(1) = \{0\},\quad F(2) = \{0,4\},\quad F(3) = \{0\},\quad F(4) = \{0,2,4,6\},$
$F(5) = \{0\},\ F(6) = \{0,4\}$ ve $F(7) = \{0\}$

elde edilir. Burada $\forall x \in A$ için $F(x)$, R nin alt halkasıdır. Böylece (F,A), R üzerinde bir soft halkadır.

2.2 Modüller

Soft modüllere geçmeden önce bu bölümde klasik cebirde yer alan modül tanımını, bazı özelliklerini ve özel tipteki alt modüller yer alacaktır. Bu anlamda daha geniş bilgi Hungerford (1974), Lam (1999) ve Anderson ve Fuller (1992) kaynaklarında yer almaktadır.

Tanım 2.2.1: R herhangi bir halka ve $(M,+)$ değişmeli bir grup olmak üzere

$R \times M \to M$, $(x,a) \to x \cdot a$ şeklinde tanımlanan fonksiyon,

$\forall x, y \in R$ ve $\forall a, b \in M$ için,

i. $x \cdot (a+b) = xa + xb$

ii. $(x+y) \cdot a = xa + ya$

iii. $(x \cdot y) \cdot a = x \cdot (y \cdot a)$

koşullarını sağlıyor ise M ye bir *sol* $R-$*modül* denir. Benzer şekilde sağ $R-$ modülde tanımlanır. M, hem sağ hem de sol $R-$modül ise M ye $R-$*modül* denir.

Eğer R birimli bir halka olmak üzere,

iv. $\forall a \in M$ için $1_R \cdot a = a$

koşulu sağlanıyor ise M modülüne *birimsel sol* $R-$*modül* denir.

Ayrıca R değişmeli bir halka ise her sol $R-$modül bir sağ $R-$modül olur.

Tanım 2.2.2: M bir $R-$modül ve $\varnothing \neq A \subseteq M$ olsun. A, M nin toplamsal alt grubu ve $\forall x \in R$, $\forall a \in A$ için $xa \in A$ $(ax \in A)$ koşulu sağlanıyor ise A ya M nin *bir alt modülü* denir ve $A \leq M$ ile gösterilir.

Önerme 2.2.3: M bir $R-$modül, $\{A_i \mid i \in I\}$, M nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. Böylece $\bigcap_{i \in I} A_i$ ve $\sum_{i \in I} A_i$ M nin alt modülleridir.

Tanım 2.3.4: M bir $R-$modül olsun. M nin her $A \neq M$ alt modülü $B \subset A \subset M$ olmak üzere $B = A$ veya $A = M$ olan M nin B alt modülü varsa, A ya M modülünün *maximal* alt modülü denir.

Tanım 2.2.5: M bir $R-$modül ve $0 \neq A \leq M$ olsun. M nin $0 \neq A$ alt modülü $P \subset A \subset M$ olmak üzere $P = A$ veya $P = \{0\}$ olan M nin P alt modülü varsa A ya M modülünün *minimal* alt modülü denir.

Tanım 2.2.6: R bir halka, I bir indis kümesi olmak üzere $\{A_i \mid i \in I\}$, $R-$modüller ailesi ve $\prod_{i \in I} A_i = \{(x_i) \mid x_i \in A_i\}$ kartezyen çarpımı olsun. $\forall (x_i), (y_i) \in \prod_{i \in I} A_i$ olmak üzere,

$$(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i) \text{ ve } r \cdot (x_i) = (r \cdot x_i)$$

işlemleri altında $\prod_{i \in I} A_i$ bir sol $R-$modül olur. $\prod_{i \in I} A_i$ ye $\{A_i \mid i \in I\}$ ailesinin *direkt çarpımı* denir.

Tanım 2.2.7: M bir $R-$modül, I bir indis kümesi olmak üzere $\{X_i : i \in I\}$, M nin bir alt modüller ailesi olsun. $\bigcup_{i \in I} X_i$ tarafından üretilen $\left\langle \bigcup_{i \in I} X_i \right\rangle$ alt modülü bazı $r \in \mathbb{Z}^+$, $(1 \leq k \leq r)$ için $x_{ik} \in X_{ik}$ olmak üzere $x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{ir}$ sonlu toplamlarından oluşur. Bu takdirde $\left\langle \bigcup_{i\in I} X_i \right\rangle$ alt modülü X_i alt modüllerinin *toplamı* olarak adlandırılır ve $\sum_{i\in I} N_i$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.8: M bir $R-$modül ve $\{A_i \mid i\in I\}$ ailesi, M nin bir $R-$modüller ailesi olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyor ise M ye $\{A_i \mid i\in I\}$ alt modüllerinin *direkt toplamı* denir ve $M = \bigoplus_{i\in I} A_i$ ile gösterilir.

(i) $M = \sum_{i\in I} A_i$, yani $\forall m \in M$ elemanı $a_i \in A_i$ olmak üzere sonlu toplam olarak, $m = \sum_{i\in I} a_i$ şeklinde yazılabilir.

(ii) Bu yazılış tek türlüdür.

Buradaki her bir A_i alt modülüne de M nin *direkt toplananları* denir.

Önerme 2.2.9: M bir $R-$modül ve $\{A_i \mid i\in I\}$ ailesi, M nin bir $R-$modüller ailesi olsun. $M = \bigoplus_{i\in I} A_i$ olması için gerek ve yeter şart,

(i) $M = \sum_{i\in I} A_i$,

(ii) Her $i \in I$ için $A_i \cap (\sum_{i\neq j} Aj) = 0$ olmasıdır.

Tanım 2.2.10: M ve N iki $R-$modül ve $f : M \to N$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in M$ ve $\forall r \in R$ için

i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$

ii) $f(r\cdot x) = r\cdot f(x)$

koşulları sağlanıyorsa ise, f ye bir R *modül homomorfizması* denir.

Tanım 2.2.11: Bir R modül homomorfizması, bire bir ise R modül *monomorfizması*, örten ise R modül *epimorfizması,* ayrıca hem bire bir hem de örten ise R modül *izomorfizması* olarak adlandırılır. M den M ye olan R modül homomorfizmasına *endomorfizma*, M den M ye olan R modül izomorfizmasına ise R modül *otomorfizma* denir.

Lemma 2.2.12 (Modüler Kuramı): M bir $R-$modül ve X,Y ve Z, M nin $X \leq Y$ koşulunu sağlayan alt modülleri olsun. Bu durumda $Y \cap (Z+X) = (Y \cap Z) + X$ dir.

Tanım 2.2.13: M bir $R-$modül ve N, M nin bir alt modülü olsun. Eğer M nin L öz alt modülü için $N + L \neq M$ ise, N ye M nin *küçük (small)* alt modülü denir ve $N \ll M$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.14: M bir $R-$modül ve N, M nin bir alt modülü olsun. M nin her $0 \neq K$ alt modülü için $N \cap K \neq 0$ oluyorsa veya buna denk olarak $L \leq M$ için $N \cap L = 0$ olduğunda $L = 0$ olmasını gerektiriyor ise N ye M nin *büyük (essential)* alt modülü denir ve $N \leq_e M$ ile gösterilir.

Önerme 2.215: M bir $R-$modül olsun. Bu durumda;

1. $N \leq M$ olsun. $N \leq_e M$ olması için gerek ve yeter koşul her $0 \neq m \in M$ için $N \cap mR \neq 0$ olmasıdır.
2. $K \leq N \leq M$ olmak üzere $K \leq_e M$ olması için gerek ve yeter koşul $K \leq_e N$ ve $N \leq_e M$ olmasıdır.
3. $1 \leq i \leq t$ olmak üzere her $t \geq 1$ için $N_i \leq K_i$ ise $(N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_t) \leq (K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_t)$ dır.
4. Her sıfırdan farklı indis kümesi I için, $i \in I$ olmak üzere $N_i \leq M_i$ ise $\bigoplus_{i \in I} N_i \leq \bigoplus_{i \in I} M_i$ dir.

Tanım 2.2.16: M bir $R-$modül ve N, M nin bir alt modülü olsun $N \cap K = 0$ özelliğine göre maksimal olan bir K alt modülüne N nin M modülündeki *komplementi* denir.

Ayrıca bir M modülünün X alt modülü, M de herhangi bir alt modülün komplementi ise X e M de bir *komplement* denir ve $X \leq_c M$ ile gösterilir. $0, M \leq_c M$ olduğu açıktır.

Sonuç 2.2.17: Bir M modülünün her direkt toplananı M de bir komplementtir.

Tanım 2.2.18: M bir $R-$modül olsun. M nin basit alt modüllerinin toplamına yada buna denk olarak tüm büyük alt modüllerinin arakesitine M modülünün *sokul'u (socle)* denir ve Soc(M) ile gösterilir.

3. SOFT MODÜLLER

Bu bölümde soft modüller, soft modülün sokul'u ve bazı özel tipteki soft alt modüller incelenecektir.

3.1 Soft Modüller ve Özellikleri

Klasik modül tanımını ve Molodtsov'un soft küme tanımını kullanarak Sun ve diğ. (2008) soft modülleri tanımlamışlar ve özelliklerini incelemişlerdir. Atagün ve Sezgin (2011), Shah ve Medhit (2014), Sun ve diğ. (2008) ve Türkmen ve Pancar (2013) soft modüller üzerine çeşitli çalışmalar yapmışlardır. Bu anlamda araştırmalar devam etmektedir. Bu bölümde soft modüller ile ilgili elde edilen sonuçlar verilecektir. Burada verilenler yukarıda adı geçen kaynaklardan yararlanılarak oluşturulmuştur.

Bu bölümde M sol $R-$modül, $A\neq\varnothing$ bir küme olmak üzere $F:A\to P(M)$ küme değerli fonksiyon ve (F,A), M üzerinde soft küme olarak alınacaktır.

Tanım 3.1.1: (F,A), M üzerinde soft küme olmak üzere, $\forall x\in A$ için

$F(x)$, M nin alt modülü ise (F,A), M üzerinde *soft modül* olarak adlandırılır.

Önerme 3.1.2: (F,A) ve (G,X), M üzerinde iki soft modül olsunlar. Bu durumda,

i. $A\cap X\neq\varnothing$ ise $(F,A)\tilde{\cap}(G,X)$, M üzerinde soft modüldür.

ii. $A\cap X=\varnothing$ ise $(F,A)\tilde{\cup}(G,X)$, M üzerinde soft modüldür.

İspat: i. $Y = A \cap X$ olsun. $\forall y \in Y$ için kabulden $H(y) = F(y) \leq M$ veya $H(y) = G(y) \leq M$ olduğundan $(F,A)\tilde{\cap}(G,X) = (H,Y)$, M üzerinde soft küme olup $(F,A)\tilde{\cap}(G,B)$, M üzerinde soft modül olur.

ii. $A \cap X = \varnothing$ ve $Y = A \cup X$ olmak üzere

$$H(t) = \begin{cases} F(t) & ,\mathrm{t} \in A - X \\ G(t) & ,\mathrm{t} \in X - A \\ F(t) \cup G(t) & ,\mathrm{t} \in A \cap X \end{cases}$$

şeklinde $(F,A)\tilde{\cup}(G,X) = (H,Y)$ soft kümesini tanımlansın. Böylece (F,A) ve (G,X) soft modül olduğundan (H,Y) de M üzerinde soft modül olur.

Tanım 3.1.3: (F,A) ve (G,B), M üzerinde iki soft modül olsunlar. $\forall (x,y) \in A \times B$ için $H(x,y) = F(x) + G(y)$ olmak üzere, (F,A) ve (G,B) *soft modüllerinin toplamı* $(F,A)+(G,B) = (H, A \times B)$ şeklinde tanımlanır.

Önerme 3.1.4: (F,A) ve (G,B), M üzerinde iki soft modül olsunlar. Bu durumda $(F,A)+(G,B)$ M üzerinde bir soft modüldür.

İspat: İspat Önerme 3.1.2 den açıktır.

Tanım 3.1.5: (F,A) ve (G,B) sırasıyla M ve N üzerinde soft modül olsunlar. $\forall (a,b) \in A \times B$ için $H(a,b) = F(a) \times G(b)$ olmak üzere (F,A) ve (G,B) *soft modüllerinin kartezyen çarpımı* $(F,A)\times(G,B) = (H, A \times B)$ şeklinde tanımlanır.

Önerme 3.1.6: (F,A) ve (G,B) sırasıyla M ve N üzerinde iki soft modül olsunlar. Bu durumda $(F,A)\times(G,B)$, $M \times N$ üzerinde bir soft modüldür.

İspat: Tanım 3.1.5 den kolaylıkla elde edilir.

Tanım 3.1.7: (F,A) ve (G,B), M üzerinde iki soft modül olsunlar. Bu durumda,

i. $B \subset A$

ii. $\forall x \in B$ için $G(x) \leq F(x)$

koşulları sağlanıyor ise (G,B) ye (F,A) nın *soft alt modülü* denir ve $(G,B)\tilde{\leq}(F,A)$ şeklinde gösterilir.

Ayrıca e, A nin birim elemanı olmak üzere $B=\{e\}$ için, (F,A) nın kendisi ve (F,B) gibi en az iki soft alt modülleri vardır ve bunlar *aşikar soft alt modül* olarak adlandırılır.

Önerme 3.1.8: (F,A) ve (G,B) M üzerinde iki soft modül olsunlar. Eğer $\forall x \in A$ için $G(x) \subseteq F(x)$ ise (G,B), (F,A) nın soft alt modülüdür.

İspat: Tanım 3.1.7 den ispatı açıktır.

Önerme 3.1.9: (F,A), M üzerinde soft modül ve $\{(G_i,X_i): i \in I\}$, (F,A) da boş olmayan bir soft alt modüller ailesi olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

i. $\sum_{i\in I}(G_i,X_i)$, (F,A) nın soft alt modüldür.

ii. $\bigcap_{i\in I}(G_i,X_i)$, (F,A) nın soft alt modüldür.

iii. $\forall i,j \in I$ için $X_i \cap X_j = \emptyset$ olmak üzere $\bigcup_{i\in I}(G_i,X_i)$, (F,A) da soft alt modüldür.

Önerme 3.1.10: (F,A) ve (G,B), M üzerinde iki soft alt modül ve (G,B), (F,A) nın soft alt modülü olsun. Eğer $f : M \to N$ modül homomorfizması ise $(f(F),A)$ ve $(f(G),B)$, N üzerinde soft modüllerdir ve ayrıca $(f(G),B)\tilde{\leq}(f(F),A)$ olur.

İspat: $f: M \to N$ bir modül homomorfizması olduğundan $\forall x \in A$ ve $\forall y \in B$ için $f(F(x))$ ve $f(G(y))$, N de alt modüllerdir. Böylece $(f(F), A)$ ve $(f(G), B)$, N de soft modül olurlar. Eğer (G, B), (F, A) nın bir soft alt modülü ise, bu durumda $\forall x \in B$ için $G(x), F(x)$in alt modülüdür. Ayrıca $f(G(x))$, $f(F(x))$in alt modülü olduğundan Tanım 3.1.7 den $(f(G), B)$, $(f(F), A)$nın soft alt modülü olur.

Tanım 3.1.11: (F, A) ve (G, B) sırasıyla M ve N üzerinde iki soft modül ve $f: M \to N, g: A \to B$ iki fonksiyon olsunlar. Bu durumda,

i. $f: M \to N$ modül homomorfizması,

ii. $g: A \to B$ bir fonksiyon,

iii. $\forall x \in A$ için $f(F(x)) = G(g(x))$

koşulları sağlanıyor ise $(f, g): (F, A) \to (G, B)$ dönüşümü *soft homomorfizma* olarak adlandırılır.

Buna göre $(F, A), (G, B)$soft modülleri *soft homomorfiktir* denir ve $(F, A) \simeq (G, B)$ şeklinde gösterilir. Eğer $f: M \to N$ bir $R-$modül izomorfizması ve $g: A \to B$dönüşümü bire bir ise $(F, A), (G, B)$ ye *soft izomorftur* denir ve $(F, A) \cong (G, B)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.12: (F, A) ve (G, B) M üzerinde iki soft modül ve $(G, B), (F, A)$ nın soft alt modülü olsun. Bu durumda $\forall x \in B$ için $G(x)$, $F(x)$ in maksimal alt modülü ise $(G, B), (F, A)$ nın *maksimal soft alt modülü* ve $\forall x \in B$ için $G(x)$, $F(x)$ in minimal alt modülü ise, (G, B), (F, A) nın *minimal soft alt modülü* olarak adlandırılır.

Önerme 3.1.13: (F,A), M üzerinde bir soft modül olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

i. Eğer $\{(G_i,B_i):\ i\in I\}$, (F,A) nın boştan farklı bir maksimal soft alt modül ailesi ise $\bigcap_{i\in I}(G_i,B_i)$, (F,A) nın maksimal soft alt modülüdür.

ii. Eğer $\{(G_i,B_i):\ i\in I\}$, (F,A) nın boştan farklı bir minimal soft alt modül ailesi ise $\sum_{i\in I}(G_i,B_i)$, (F,A)'nın minimal soft alt modülüdür.

Tanım 3.1.14: (F,A), M üzerinde bir soft modül olsun. O halde $\forall x\in A$ için,

i. 0, M nin sıfır elemanı olmak üzere $F(x)=0$ ise, (F,A) ya M üzerinde *boş soft modül* ve

ii. $F(x)=M$ ise (F,A) ya M üzerinde *mutlak soft modül* olarak adlandırılır.

Türkmen ve Pancar (2013) soft alt modüllerin toplamlarını ve direkt toplamlarını tanımlayıp, önemli sonuçlar elde etmişlerdir. Aşağıdaki kısım oluşturulurken bu kaynaktan yararlanılmıştır.

Tanım 3.1.15: (F,A), M de bir soft modül ve I boş olmayan bir indis kümesi olmak üzere $\{(F_i,A_i)\}_{i\in I}$, (F,A) nın bir soft alt modül ailesi olsun. (F_i,A_i) *soft alt modüllerinin toplamı* $\forall a\in\bigcup_{i\in I}A_i$ ve $i\in I$ için $I(a)$, $a\in A_i$ elemanlarının kümesi olmak üzere $H(a)=\sum_{i\in I(a)}F_i(a)$ olup $\sum_{i\in I}(F_i,A_i)=\left(H,\bigcup_{i\in I}A_i\right)$ şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.1.16: (F,A), M de bir soft modül ve $\{(F_i,A_i)\}_{i\in I}$, (F,A) nın bir soft alt modül ailesi ve $\forall i\in I$ için $(F_i,A_i)\tilde{\leq}(F,A)$ olmak üzere,

i. $\sum_{i\in I}(F_i,A_i)$, M de bir soft modül olup, $\sum_{i\in I}(F_i,A_i)$, (F,A) nın bir soft alt modülüdür.

ii. Her (F_i,A_i), $\sum_{i\in I}(F_i,A_i)$ nin bir soft alt modülüdür.

İspat: **(i)** Her $i\in I$ için $A_i\neq\varnothing$ olduğundan, $\bigcup_{i\in I}A_i\neq\varnothing$ olur. $I(a)=\{i\in I: a\in A_i\}$ olmak üzere her $a\in\bigcup_{i\in I}A_i$ için Tanım 3.1.15 den $H(a)=\sum_{i\in I(a)}F_i(a)$ olup, $\tilde{\sum_{i\in I}}(F_i,A_i)=\left(H,\bigcup_{i\in I}A_i\right)$ elde edilir. M nin herhangi sayıda alt modüllerinin toplamı M de bir alt modül olduğundan $H(a)$, M nin bir alt modülü olur. Bu nedenle H iyi tanımlıdır. Dolayısıyla $\left(H,\bigcup_{i\in I}A_i\right)=\sum_{i\in I}(F_i,A_i)$, M üzerinde soft modüldür. Tanım 3.1.7 den ispat tamamlanır.

ii. Tanım 3.1.7 den açıktır.

Önerme 3.1.17: (F,A) ve (F',A') M de iki soft modül olsunlar. $(F',A')\tilde{\leq}(F,A)$ olmak üzere $(F',A')+(F,A)=(F,A)$ dir.

İspat: Tanım 3.1.7 ve Tanım 3.1.15 den ispat açıktır.

Teorem 3.1.18 (Soft Modüler Kuralı): M modülü üzerinde bir soft modülün $(G,Y)\tilde{\leq}(F,X)$ ve $X\cap Z\neq\varnothing$ koşulunu sağlayan (F,X),(G,Y) ve (T,Z) soft alt modülleri olsunlar. Bu durumda

$$(F,X)\Cap\left[(T,Z)+(G,Y)\right]=(F,X)\Cap(T,Z)+(G,Y)$$

olur.

İspat:

$$H_1(x)=\begin{cases}F(x)\cap T(x) & ,\mathrm{x}\in X\cap(Z\setminus Y)\\ G(x) & ,\mathrm{x}\in X\cap(Y\setminus Z)\\ F(x)\cap(T(x)+G(x)) & ,\mathrm{x}\in X\cap(Y\cap Z)\end{cases}$$

olmak üzere $(F,X)\Cap\left[(T,Z)+(G,Y)\right]=\left(H_1,X\cap(Z\cup Y)\right)$ olsun.

Ayrıca

$$H_2(x)=\begin{cases} F(x)\cap T(x) & ,x\in(X\cap Z)\setminus Y \\ G(x) & ,x\in Y\setminus(X\cap Y) \\ F(x)\cap T(x)+G(x) & ,x\in(X\cap Z)\cap Y \end{cases}$$

olmak üzere $(F,X)\Cap(T,Z)+(G,Y)=\left(H_2,(X\cap Z)\cup Y\right)$ olsun.

$X\cap(Z\cup Y)=(X\cap Z)\cup Y$ olduğu açıkça görülür. x , $X\cap(Z\cup Y)$nin elemanı olsun.

Eğer $x\in X\cap(Z\setminus Y)$ ise $X\cap(Z\setminus Y)=(X\cap Z)\setminus Y$ olduğundan $H_1(x)=F(x)\cap T(x)=H_2(x)$ olur.

Eğer $x\in X\cap(\ Y\ )$ ise $X\cap(Y\setminus Z)=Y\setminus(X\cap Z)$ olduğundan $H_1(x)=H_2(x)$ elde edilir.

Eğer $x\in X\cap(Z\cap Y)$ ise $H_1(x)=F(x)\cap\left(T(x)+G(x)\right)$ olur. $G(x)$, $F(x)$ nın alt modülü olduğundan modüler kuralı gereği $H_1(a)=F(x)\cap\left(T(x)+G(x)\right)=F(x)\cap T(x)+G(x)=H_2(x)$ bulunur.

Tanım 2.2.13 den $\left(H_1,X\cap(Z\cup Y)\right)=\left(H_2,(X\cap Z)\cup Y\right)$ olur. Böylece $(F,X)\Cap\left[(T,Z)\tilde{+}(G,Y)\right]=(F,X)\Cap(T,Z)\tilde{+}(G,Y)$ elde edilir.

Tanım 3.1.19: (F,A) (G,B) M modülünde soft modüller ve $(G,B)\tilde{\leq}(F,A)$ olsun. Eğer $(G,B)+(T,C)=(F,A)$ ve $(G,B)\Cap(T,C)$ aşikar olma koşulunu sağlayacak şekilde (F,A) nın bir (T,C) soft alt modülü var ise (F,A) ya (G,B) ve (T,C) nin *direkt toplamı* denir ve $(G,B)\oplus(T,C)=(F,A)$ ile gösterilir. Burada (G,B) ve (T,C) soft alt modüllerine de (F,A) nın *direkt toplananı* denir.

Teorem 3.1.20: (F,A), (G,B) M modülünde $(G,B)\tilde{\leq}(F,A)$ soft modüller olsun. olsun. Eğer (G,B) aşikar ise $(G,B)\oplus(F,A)=(F,A)$ dır.

İspat : Önerme 3.1.17 den ispat elde edilir.

Teorem 3.1.21: $(F,A), M$ modülünde bir soft modül ve $(F',A),(F'',A)\tilde{\leq}(F,A)$ olsun. Bu durumda $(F',A)\oplus(F'',A)=(F,A)$ olması için gerek ve yeter koşul $\forall a\in A$ için $G(a)\oplus T(a)=F(a)$ olmasıdır.

İspat: $(F',A)\oplus(F'',A)=(F,A)$ olsun. Böylece $\forall a\in A$ için $F'(a)+F''(a)=F(a)$ ve $F'(a)\cap F''(a)=0$ dır. Dolayısıyla $F'(a)\oplus F''(a)=F(a)$ elde edilir.

Diğer yandan $\forall a\in A$ için varsayımdan $F'(a)+F''(a)=F(a)$ olduğundan $(F',A)+(F'',A)=(F,A)$ olur. $F'(a)\cap F''(a)=0$ olduğu için de $(G,A)\Cap(T,A)$ aşikardır. Yani $(G,A)\oplus(T,A)=(F,A)$ bulunur.

3.2 Küçük Soft Alt Modüller

Burada, bir modülün küçük alt modülünün soft modüllere genişletilmesi olan bir soft modüldeki küçük soft alt modülünün tanımı ve bununla ilgili elde edilmiş sonuçlar verilecektir. Bu bölümde Türkmen ve Pancar (2013) den yararlanılmıştır.

Tanım 3.2.1: (F,A) ve (G,X) M modülünde soft modüller ve $(G,X)\tilde{\leq}(F,A)$ olsun. Eğer $\forall x\in X$ için $G(x)$, $F(x)$de küçük alt modül ise (G,X), (F,A) nın *small (küçük)* soft alt modül olarak adlandırılır ve $(G,X)\tilde{\ll}(F,A)$ ile gösterilir.

Önerme 3.2.2: Soft modülün her aşikar soft alt modülü, soft modülde küçük olur.

İspat: İspat Tanım 3.1.1 den açıktır.

Önerme 3.2.3: (F,A) ve (G,X) M modülünde soft modüller ve $(G,X)\tilde{\leq}(F,A)$ olsun. Eğer $(G,X)\tilde{\ll}(F,A)$ ise (G,X) nin her soft alt modülü (F,A) da küçük olur.

İspat: (T,Y), (G,X) nin soft alt modülü ve $F(y)$ nin bazı N_y alt modülleri için $\forall y \in Y$ için $T(y)+N_y = F(y)$ olsun. $(T,Y)\tilde{\leq}(G,B)$ olduğundan $y \in X$ için $T(y) \leq G(y)$ olur. O halde $T(y)+N_y = F(y)$ bulunur. Dolayısıyla $G(y)+N_y = F(y)$ olur. Hipotezden $N_y = F(y)$ alınırsa, $T(y) \ll F(y)$ elde edilir. Dolayısıyla (T,Y), (F,A) nın küçük soft alt modülüdür.

Önerme 3.2.4: $(T,Y)\tilde{\leq}(G,X)\tilde{\leq}(F,A)$ şeklinde bir M modül üzerinde soft modüller olsun. Eğer $(T,Y)\tilde{\ll}(G,X)$ ise $(T,Y),(F,A)$ nın küçük soft alt modülüdür.

İspat: $a \in C$ ve $N_y \leq F(y)$ olmak üzere $T(y)+N_y = F(y)$ olsun. Modüler kuralından $G(y) = G(y)\cap F(y) = G(y)\cap\big(T(y)+N_y\big) = T(y)+G(y)\cap N_y$ elde edilir. Dolayısıyla $T(y) \ll G(y)$ olur. $N_y = F(y)$ alınırsa, $(T,Y)\tilde{\ll}(F,A)$ elde edilir.

Teorem 3.2.5: (F,A), M üzerinde soft modül ve $(G,X),(F,A)$ nın direkt toplananı olsun. (F,A) nın (T,Y) soft alt modülü (G,X) de küçük olması için gerek ve yeter koşul (F,A) da küçük olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$: Önerme 3.2.4 den açıktır.

$(\Leftarrow)$: Diğer taraftan $y \in Y$ olsun. Hipotezden $(G,X)\tilde{\oplus}(H,Z) = (F,A)$ olan (F,A) nın bir (H,Z) soft alt modülü vardır. Böylece $(G,X)\tilde{+}(H,Z) = (F,A)$ ve $(G,X)\Cap(H,Z) = 0$ olur. $y \in Y \cap Z$ olsun. $G(y)+H(y) = F(y)$ olduğunu göz önünde bulundurursak $F(y) = G(y)+H(y) = T(y)+N_y+H(y)$ olur. Hipotezden $F(y) = N_y + H(y)$ elde edilir. Modüler kuralı gereğince

$G(y)=G(y)\cap F(y)=G(y)\cap\left(N_y+H(y)\right)=N_y+H(y)\cap G(y)=N_y$ bulunur. Böylece (T,Y), (F,A) da küçük soft alt modüldür.

Teorem 3.2.6: (F_i,A_i) $(i=1,2,3,\ldots,n)$, M modülünde (F,A) nın soft alt modüllerinin herhangi sonlu bir koleksiyonu olsun. Eğer her (F_i,A_i), (F,A) soft modülünde küçük ise $(F_1,A_1)+(F_2,A_2)+\ldots+(F_n,A_n)\tilde{\ll}(F,A)$ dır.

İspat: $(F_1,A_1)+(F_2,A_2)+\ldots+(F_n,A_n)\tilde{\ll}(F,A)$ olduğunu ispatlamak için n üzerinden tümevarım yönteminde $n=2$ için doğru olduğunu göstermek yeterlidir. $a\in A_1\cup A_2$ olsun. Eğer $a\in A_1\setminus A_2$ ise kabul ve Tanım 3.1.15 den $F_1(a)\ll F(a)$ olur. Benzer şekilde $a\in A_2\setminus A_1$ için $F_2(a)\ll F(a)$ olduğu kolayca görülür. Şimdi $a\in A_1\cap A_2$ olsun. $F_1(a)$ ve $F_2(a)$, $F(a)$ da küçük olduğundan $F_1(a)$ ve $F_2(a)$ toplamı $F(a)$ nın küçük alt modülüdür. Yani $(F_1,A_1)+(F_2,A_2)\tilde{\ll}(F,A)$ olduğu elde edilir.

Teorem 3.2.7: $(F,A),(G,X)$ ve (T,Y) M modülünde soft alt modüller, $(f,g):(F,A)\to(G,X)$ soft homomorfizma ve $(T,Y)\tilde{\leq}(F,A)$ olsun. $(T,Y)\ll(F,A)$ ise $\left(f(T),g(Y)\right)\tilde{\ll}\left(f(F),g(A)\right)$ olur.

İspat: $y\in Y$ ve $N_y\tilde{\leq}f\left(F(y)\right)$ için $f\left(T(y)\right)+N_y=f\left(F(y)\right)$ olsun. O halde $T(y)+f^{-1}\left(N_y\right)=F(y)$ olduğundan ve hipotezden $f^{-1}\left(N_y\right)=F(y)$ olur. Böylece $N_y=f\left(F(y)\right)$ bulunur. Başka bir deyişle $f\left(T(y)\right)\ll f\left(F(y)\right)$ dır. Yani $\left(f(T),g(Y)\right)\tilde{\ll}\left(f(F),g(A)\right)$ elde edilir.

3.3 Soft Modüllerde Sokul

Bu bölümde Davvaz ve diğ. (2019) nin tanımlayıp temel özelliklerini araştırdığı bir soft modülde sokul incelenmiştir.

Tanım 3.3.1: (F,A), M üzerinde soft modül olsun. Her $a \in A$ için $S(a) = SocF(a)$ olmak üzere (S,A) soft modülüne (F,A) soft modülünün M üzerinde sokul'u (socle'u) denir ve $(S,A) = Soc_M(F,A)$ şeklinde gösterilir.

Örnek 3.3.2: n büyük bir tam sayı ve $e_i > 0$ olmak üzere $n = p_1^{e_1} \ldots p_t^{e_t}$ şeklinde asal çarpımı olarak yazılsın. $M = \mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Z}-$modülü, $A = \mathbb{N}$ ve $a \in A$ için $F(a) = \mathbb{Z}_n$ olsun. Bu durumda (F,A), $\mathbb{Z}_n$ de soft modül olur. $SocF(a) = Soc\mathbb{Z}_n = \sum_{p_i|n} \frac{n}{p_i}\mathbb{Z}_n \cong \bigoplus_{p_i|a} \mathbb{Z}_{p_i}$ dır. Buradan $Soc_M(F,A) = (S,A)$ ve $S(a) \cong \bigoplus_{p_i|a} \mathbb{Z}_{p_i}$ olur. Tanım 3.3.1 den $Soc_M(F,A) \tilde{\leq} (F,A)$ olur.

Önerme 3.3.3: (F,A), M modülünde soft modül, $(G,B) \tilde{\leq} (F,A)$ olsun. Bu durumda,

$$Soc_M(G,B) = (G,B) \Cap Soc_M(F,A)$$

olur. Ayrıca, $Soc_M(Soc_M(F,A)) = Soc_M(F,A)$ dır.

İspat: $(G,B) \tilde{\leq} (F,A)$ olduğundan $\forall b \in B$ için $G(b) \leq F(b)$ dir. Anderson ve Fuller (1992) den $\forall b \in B$ için $Soc\ G(b) \leq Soc\ F(a)$ dir. Buradan $Soc_M(G,B) \tilde{\leq} Soc_M(F,A)$ olur. Dolayısıyla $Soc_M(G,B) = (G,B) \Cap Soc_M(F,A)$ elde edilir. Ayrıca $(G,B) = Soc_M(F,A)$ alınırsa $Soc_M(Soc_M(F,A)) = Soc_M(F,A)$ bulunur.

Önerme 3.3.4: (F,A), M üzerinde bir soft modül olsun. $Soc_M(F,A)\tilde{\leq}_e(F,A)$ olması için gerek ve yeter koşul (F,A) nın aşikar her soft alt modülünün minimal soft alt modül içermesidir.

İspat: İlk olarak $Soc_M(F,A)\tilde{\leq}_e(F,A)$ olsun. Bu durumda $\forall a\in A$ için $Soc\,F(a)\leq_e F(a)$ olur. (H,B), (F,A) nın aşikar olmayan soft bir alt modülü olsun. O halde $H(b)\neq\varnothing$, $F(b)$ de bir alt modül olacak şekilde $b\in B\subseteq A$ vardır. (Anderson ve Fuller 1992, Corollary 9.10) Böylece $H(b)$nin minimal bir alt modül içerdiğini gösterir. L_b, $H(b)$ nin minimal alt modülü olsun. $C=\{b\}$, $T(b)=L_b$ olmak üzere (T,C), (H,B) nin boş olmayan soft alt modülü olur. Böylece (T,C), (H,B) nin minimal soft alt modülü olur.

Tersine, (F,A) nın sıfır olmayan her soft alt modülü minimal bir soft alt modül içersin. $a\in A$ için $K_a\neq 0$, $F(a)$ nın herhangi alt modülü olsun. Bu durumda $B_{K_a}=\{a\}$, $G_{K_a}(a)=K_a$ olmak üzere $\left(G_{K_a},B_{K_a}\right)$, (F,A) nın aşikar olmayan soft alt modülü olur. (T,C), $\left(G_{K_a},B_{K_a}\right)$nın minimal soft alt modül olsun. O halde $C=B_{K_a}=\{a\}$ ve $T(a)$, $G_{K_a}(a)=K_a$nın minimal alt modülü olur, dolayısıyla $F(a)$ nın minimal alt modülü olur. Yani $F(a)$nın sıfır olmayan her alt modülü, minimal alt modül içerir. Böylece $\forall a\in A$ için $Soc\,F(a)\leq_e F(a)$ olur. Buradan $Soc_M(F,A)\tilde{\leq}_e(F,A)$ elde edilir.

Önerme 3.3.5: (F,A) ve (G,B) sırasıyla M ve N üzerinde soft modüller ve $(f,g):(F,A)\rightarrow(G,B)$bir soft homomorfizma olsun. Bu durumda $(f,g)\left(Soc_M(F,A)\right)\tilde{\leq}Soc_N(G\circ g,A)$ olur.

İspat: (f,g)bir soft homomorfizma olduğundan $\forall a\in A$ için $f\left(F(a)\right)=G\left(g(a)\right)$ olur. Anderson ve Fuller (1992), (Corollary 9.8) den $f|_{F(a)}:F(a)\rightarrow G\left(g(a)\right)$

homomorfizması için $f\left(Soc\ F(a)\right) \leq Soc\ G\left(g(a)\right)$ olur. Böylece $(f,g)\left(Soc_M(F,A)\right) \tilde{\leq} Soc_N(G \circ g, A)$ elde edilir.

Teorem 3.3.6: (F,A), M üzerinde bir soft modül olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} Soc_M(F,A) &= \Cap\left\{(G,A) : (G,A) \tilde{\leq}_e (F,A)\right\} \\ &= \sum\left\{(G,B) : (G,B), (F,A) \text{da minimal soft alt modül}\right\} \end{aligned}$$

olur.

İspat: $(S,A) = Soc_M(F,A)$ ve $(H,A) = \Cap\left\{(G,A) : (G,A) \tilde{\leq}_e (F,A)\right\}$ olsun. $\forall a \in A$ için $H(a) = \bigcap_{(G,A)\tilde{\leq}_e (F,A)} G(a)$ dır. Yani $H(a)$, $F(a)$ nın büyük alt modüllerinin bir kesişimidir. Tanım 3.3.1 ve Anderson ve Fuller (1992), (Proposition 9.7) den $S(a) = SocF(a)$, $F(a)$ nın tüm büyük alt modüllerinin kesişimidir. Böylece $S(a) \tilde{\leq} H(a)$ dır. Buradan $(S,A) \tilde{\leq} (H,A)$ elde edilir.

Tersine, $a_0 \in A$ için L_{a_0}, $F(a_0)$ ın herhangi büyük alt modülü ve

$$G_{L_{a_0}} = \begin{cases} L_{a_0} & , a = a_0 \\ F(a) & , a \neq a_0, a \in A \end{cases}$$ olsun.

O halde $\left(G_{L_{a_0}}, A\right)$, (F,A) nın büyük soft alt modülü olur. Böylece her $a_0 \in A$ için ve L_{a_0}, $F(a_0)$ da büyük olmak üzere $(H,A) = \Cap\left\{(G,A) : (G,A) \tilde{\leq}_e (F,A)\right\} \tilde{\leq} \left(G_{L_{a_0}}, A\right)$ dır.

Bu nedenle $(H,A) \tilde{\leq} \Cap\left\{\left(G_{L_{a_0}}, A\right) : L_{a_0} \leq_e F(a_0), a_0 \in A\right\}$ olur.

Her $a_0 \in A$ için L_{a_0}, $F(a)$ nın tüm büyük soft alt modülleri olmak üzere Anderson ve Fuller (1992), (Proposition 9.7) den $\bigcap_{L_{a_0} \leq F(a_0)} L_{a_0} = Soc\ F(a)$ elde edilir. Bunu $(H,A) \tilde{\leq} \Cap\left\{\left(G_{L_{a_0}}, A\right) : L_{a_0} \leq_e F(a_0), a_0 \in A\right\}$ de yazarsak $(H,A) \tilde{\leq} (S,A)$ bulunur.

Şimdi teoremin ikinci eşitliği ispatı için $(K,A)=\sum\{(G,B):(G,B),(F,A)da\text{ minimal}\}$ olsun. $a\in B$ için (G,B), (F,A) nın tüm minimum soft alt modüllerini temsil etmek üzere $K(a)=\sum_{a\in B}G(a)$ olur. $K(a)$, $F(a)$'nın bazı minimal alt modüllerinin toplamıdır. $S(a)=Soc\ F(a)$, $F(a)$'nın tüm minimal alt modüllerin toplamıdır. O halde $\forall a\in A$ için $K(a)\tilde{\leq}S(a)$ dır. Bu nedenle $(K,A)\tilde{\leq}(S,A)$ olur.

Tersine, eğer $a\in A$ için S_a, $F(a)$ nın minimal alt modülü olmak üzere $B_{S_a}=\{a\}$ ve $G_{S_a}(a)=S_a$ şeklinde tanımlansın. O halde (G_{S_a},B_{S_a}), (F,A)nın minimal soft alt modülü ve $(G_{S_a},B_{S_a})\tilde{\leq}\sum\{(G,B):(G,B),(F,A)da\text{ minimal}\}=(K,A)$ olur. Dolayısıyla $(S,A)=\sum\{(G_{S_a},B_{S_a}):a\in A,\ S_a\ F(a)da\ \min imal\}\tilde{\leq}(K,A)$ elde edilir.

Böylece $\forall a\in A$ için $\sum\{S_a:S_a,F(a)da\text{ minimal}\}=Soc\ F(a)$ eşitliğini bulunur.

3.4 Büyük ve Komplement Soft Alt Modüller

Literatürde var olan özel tipteki büyük ve komplement alt modüller Yücel ve Acar (2017) tarafından büyük ve komplement soft altmodüllere taşınarak temel özellikleri araştırılmıştır. Ayrıca Davvaz ve diğ. (2019) büyük soft modül olma tanımını karakterize etmişlerdir. Bu bölümde yukarıda belirtilen kaynaklardan yararlanılarak elde edilen sonuçlar incelenmiştir.

Bu bölüm boyunca M sağ $R-$modül olarak alınacaktır**.**

Tanım 3.4.1: (F,A), M üzerinde soft modül ve (G,B), (F,A)nın aşikar olmayan soft alt modülü olsun. $B\cap C\neq\varnothing$ olmak üzere $\forall(T,C)\tilde{\leq}(F,A)$ aşikar olmayan soft alt modülü için $(G,B)\Cap(T,C)$, (F,A) aşikar değil ise (G,B)ye (F,A) nın *büyük (essential) soft alt modülü* denir ve $(G,B)\tilde{\leq}_e(F,A)$ ile gösterilir. (F,A), M modül üzerinde aşikar olmayan soft modül ise kendisinin büyük soft alt olur.

Örnek 3.4.2: $M=\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modül, $A=\mathbb{Z}$ ve $\forall n\in A$ için $F(n)=M$ şeklinde tanımlanan $F:A\to P(M)$ küme değerli bir fonksiyon olmak üzere (F,A), M modülünde bir soft küme olsun. Böylece (F,A), M modülünde soft modül olur. Ayrıca $B=2\mathbb{Z}$ ve $G:B\to P(M)$, $G(n)=6\mathbb{Z}$ ile tanımlanan bir fonksiyon olduğu kabul edilsin. Bu durumda (G,B), (F,A) nın soft alt modülü olur. (F,A) nın $B\cap C\neq\varnothing$ olan her aşikar olmayan (T,C) alt modülü $\forall x\in B\cap C$ için $T(x)\cap G(x)\neq 0$ olduğundan $(G,B)\Cap(T,C)$ aşikar değildir. Böylece $(G,B)\tilde{\leq}_e(F,A)$ olur.

Teorem 3.4.3: (F,A), (G,B) M üzerinde soft modüller ve $(G,B)\tilde{\leq}(F,A)$ olsun. $(G,B)\tilde{\leq}_e(F,A)$ olması için gerek ve yeter şart her $a\in A$ için $A=B$ ve $G(a)\leq_e F(a)$ olmasıdır.

İspat: Her $a\in A$ için $A=B$ ve $G(a)\leq_e F(a)$ ve (F,A) nın $(G,A)\Cap(H,C)=0$ koşulunu sağlayan bir (H,C) soft alt modülü olsun. Bu durumda kabulden $c\in C\subseteq A$ için $G(c)\cap H(c)=0$ dır. Böylece $G(c)$, $F(c)$ nin büyük alt modülü olur. Yani $\forall c\in C$ için $H(c)=0$ olup $(H,C)=0$ elde edilir. Tanım 3.4.1 den $(G,B)\tilde{\leq}_e(F,A)$ olur.

Tersine $(G,B)\tilde{\leq}_e(F,A)$ ve $B\subsetneq A$ olsun. O halde $A-B\neq\varnothing$ olur. (T,A), (F,A) nın $T(a)=\begin{cases}F(a) & ,a\in A-B\\ 0 & ,a\in B\end{cases}$ olan soft alt modülü olsun.

Bu durumda (T,A), (F,A) nın aşikar olmayan soft alt modülü olur ve $(G,B)\Cap(T,A)$ aşikardır. Bu ise bir çelişkidir. O halde $A=B$ olmalıdır. $a\in A$ için $K\cap G(a)=0$ olacak şekilde $K\leq F(a)$ ve $C=\{a\}$ ve $T(a)=K$ olsun. Bu durumda $C \subseteq A$, $(T,C)\tilde{\leq}(F,A)$ ve $(T,C)\Cap(G,A)=0$ olur. Böylece $(T,C)=0$ bulunur. Özel olarak $K=T(a)=0$ alınırsa $a \in A$ için $G(a)\tilde{\leq}_e F(a)$ elde edilir.

Örnek 3.4.4: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}-$modül olmak üzere $(F,\mathbb{N})$, $\mathbb{Z}$ modülünde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $F(n)=\mathbb{Z}$ olan tam soft modül olsun. Ayrıca $(G,\mathbb{N})$, $\mathbb{Z}$ modülünde $n \in \mathbb{N}$ için $G(n)=n\mathbb{Z}$ olan soft modül ise $n\mathbb{Z} \leq_e \mathbb{Z}$ olduğundan Teorem 3.4.3 den $(G,\mathbb{N})\tilde{\leq}_e(F,N)$ elde edilir.

Sonuç 3.4.5: (F,A), (G,B) M modülünde soft modüller ve $(G,B)\tilde{\leq}(F,A)$ olsun. $(G,B)\tilde{\leq}_e(F,A)$ olması için gerek ve yeter koşul $A=B$ ve $\forall a \in A$, $0 \neq x \in F(a)$ için $0 \neq xr \in G(a)$ olacak şekilde bir $r \in R$ vardır.

İspat: Teorem 3.4.3 den $(G,B)\tilde{\leq}_e(F,A)$ olması için gerek ve yeter şart $A=B$ ve $\forall a \in A$ için $G(a) \leq F(a)$ olması gerektiğinden Lam (1999) dan $\forall a \in A$ ve $0 \neq x \in F(a)$ için $0 \neq xr \in G(a)$ olacak şekilde bir $r \in R$ vardır.

Lemma 3.4.6: (F,A) , M modülünde soft modül olsun. Eğer (K,B) ve (L,C), $B \cap C \neq \varnothing$ olacak şekilde (F,A) nın büyük soft alt modülleri ise $(K,B)\Cap(L,C)\tilde{\leq}_e(F,A)$ dır.

İspat : (N,E), $E\cap(B\cap C)\neq\varnothing$ olacak şekilde (F,A) nın aşikar olmayan soft alt modülü olsun. O zaman $E \cap B \neq \varnothing$ dır. (K,B), (F,A) büyük soft alt modülü olduğundan $(N,E)\Cap(K,B)$ soft alt modülü aşikar değildir. Hipotezden $[(N,E)\Cap(K,B)]\Cap(L,C)$ aşikar olmadığından $(N,E)\Cap[(K,B)\Cap(L,C)]=[(N,E)\Cap(K,B)]\Cap(L,C)$ olur. Dolayısıyla $(K,B)\Cap(L,C)$, (F,A) nın büyük soft alt modülü olur.

Sonuç 3.4.7: (F,A), M üzerinde soft modül olsun. Eğer (K,B) büyük soft alt modül ve (T,C), $B\cap C\neq\varnothing$ olacak şekilde (F,A) nın aşikar olmayan soft alt modülü ise, $\forall x\in B\cap C$ için $K(x)$, $F(x)$ in büyük alt modülüdür.

Lemma 3.4.8: (F,A), M üzerinde soft modül, $B\cap E\neq\varnothing$ ve $C\cap S\neq\varnothing$ olmak üzere $(G,B),(L,C),(X,E),(T,S)$, (F,A) nın soft alt modülleri olsun. Eğer $(G,B)\tilde{\leq}_e(L,C)$ ve $(X,E)\tilde{\leq}_e(T,S)$ ise $(G,B)\Cap(X,E)\tilde{\leq}_e(L,C)\Cap(T,S)$ dir.

İspat: (K,D), $D\cap B\cap E\neq\varnothing$ olacak şekilde $(L,C)\Cap(T,S)$ nin aşikar olmayan soft alt modül olsun. O halde $D\cap B\neq\varnothing$ dır. $(G,B)\tilde{\leq}_e(L,C)$ olduğundan $(K,D)\Cap(G,B)$ aşikar değildir. Yani $D\cap B\subseteq D\subseteq C\cap S\subseteq S$ ve $(K,D)\Cap(G,B)\tilde{\leq}(T,S)$ olur. $(X,E)\tilde{\leq}_e(T,S)$ olduğundan $[(K,D)\Cap(G,B)]\Cap(X,E)$ soft alt modülü aşikar değildir. Böylece, $(G,B)\Cap(X,E)\tilde{\leq}_e(L,C)\Cap(T,S)$ elde edilir.

Lemma 3.4.8 in ifadesini genelleştirerek aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Sonuç 3.4.9: (F,A), M üzerinde soft modül ve her $1\leq i\leq t$ için $B_i\cap E_i\neq\varnothing$ olmak üzere (G_i,B_i) ve (X_i,E_i), (F,A) nın soft alt modülleri olsun. Eğer her $(G_i,B_i)\tilde{\leq}_e(X_i,E_i)$ ise,

$$(G_1,B_1)\Cap(G_2,B_2)\Cap\ldots\Cap(G_t,B_t)\tilde{\leq}_e(X_1,E_1)\Cap(X_2,E_2)\Cap\ldots\Cap(X_t,E_t)$$

olur.

İspat: Lemma 3.4.8 den açıktır.

Lemma 3.4.10: (F,A), M üzerinde soft modül ve (L,C), (F,A) nın aşikar olmayan soft alt modül olsun. Eğer $(K,B)\tilde{\leq}_e(F,A)$ ve $B\cap C\neq\varnothing$ ise $(K,B)\Cap(L,C)\tilde{\leq}_e(L,C)$ dır. Özel olarak (K,B), (L,C) nin aşikar olmayan soft alt modül ise $(K,B)\tilde{\leq}_e(L,C)$ dir.

İspat: $(K,B)\tilde{\leq}_e(F,A)$ ve $(L,C)\tilde{\leq}(F,A)$ olsun. Her aşikar olmayan $\boldsymbol{B \cap E \neq \emptyset}$ olmak üzere $(T,E)\tilde{\leq}(F,A)$ için $(K,B)\Cap(T,E)$ aşikar değildir. Bu durumda $I \cap B \neq \emptyset$ olmak üzere her $(X,I)\tilde{\leq}(L,C)\tilde{\leq}(F,A)$ için $(K,B)\Cap(X,I)$ aşikar değildir. Böylece $I \cap (B \cap C) \neq \emptyset$ olduğundan $(X,I)\Cap((K,B)\Cap(L,C))=((X,I)\Cap(K,B))\Cap(L,C)$ aşikar değildir. O halde $(K,B)\Cap(L,C)\tilde{\leq}_e(L,C)$ elde edilir.

Lemma 3.4.11: (F,A), M üzerinde soft modül olsun. Bu durumda $(K,B)\tilde{\leq}_e(F,A)$ olması için gerek ve yeter koşul $(K,B)\tilde{\leq}_e(N,E)\tilde{\leq}_e(F,A)$ olmasıdır.

İspat: $(K,B)\tilde{\leq}(N,E)\tilde{\leq}(F,A)$ ve $(K,B)\tilde{\leq}_e(F,A)$ olsun. Lemma 3.3.10 dan $(K,B)\tilde{\leq}_e(N,E)$ dir. $\boldsymbol{E \cap L \neq \emptyset}$ olmak üzere (T,L), (F,A) nın aşikar soft alt modülü olsun. $(K,B)\Cap(T,L)$ aşikar olmadığından $(N,E)\Cap(T,L)$ aşikar değildir. Böylece $(N,E)\tilde{\leq}_e(F,A)$ elde edilir.

Tersine $\boldsymbol{L \cap B \cap E \neq \emptyset}$ olacak şekilde $(K,B)\tilde{\leq}_e(N,E)\tilde{\leq}_e(F,A)$ ve (T,L), (F,A) nın aşikar olmayan soft alt modülü olsun. Buradan $(K,B)\Cap(T,L)=(K,B)\Cap((N,E)\Cap(T,L))$ olduğu açıktır. $(N,E)\tilde{\leq}_e(F,A)$ olduğundan $(K,B)\Cap((N,E)\Cap(T,L))$ soft alt modülü aşikar değildir. Dolayısıyla $(K,B)\Cap(T,L)$, (F,A) nın aşikar olmayan soft alt modülü olur. Böylece $(K,B)\tilde{\leq}_e(F,A)$ olduğu görülür.

Tanım 3.4.12: (F,A), M üzerinde soft modül ve $(G,B)\tilde{\leq}(F,A)$ olsun. Eğer $\boldsymbol{B \cap C \neq \emptyset}$ olmak üzere $(G,B)\Cap(T,C)$ aşikar olma koşuluna göre (T,C), (F,A) nın maksimal soft alt modülü ise (T,C), (F,A) da (G,B) nin *komplementi* olarak adlandırılır.

Bir soft alt modülün komplementi tek olmayabilir. Aşağıdaki teorem ise her soft alt modülün bir komplementinin olduğunu gösterir.

Teorem 3.4.13: (F,A), M üzerinde soft modül olsun. Eğer $B \cap C \neq \emptyset$ olmak üzere $(G,B) \Cap (T,C)$ aşikar olacak şekilde (G,B) ve (T,C), (F,A)nın soft alt modülleri ise, (F,A)da $(T,C) \tilde{\leq} (K,D)$ olacak şekilde (G,B)nin bir (K,D) komplementi vardır.

İspat: $E \cap B \neq \emptyset$ ve $Z = \left\{ (X,E) \tilde{\leq} (F,A) \,\middle|\, (T,C) \tilde{\leq} (X,E) \text{ ve } (X,E) \Cap (G,B) \text{ aşikar} \right\}$ olsun. Böylece $(T,C) \in Z$ olduğundan $Z \neq \emptyset$ dir. $\left(Z, \tilde{\subseteq} \right)$ tam dizi olduğu açıktır. $\left\{ (X_i,E_i) \,\middle|\, i \in I \right\}$, Z de bir zincir olsun. $V = \bigcup_{i \in I} E_i$ ve $V \cap B \neq \emptyset$ olmak üzere $(S,V) = \bigcup_{i \in I} (X_i,E_i)$ olsun. Bu durumda $(S,V) \tilde{\leq} (F,A)$ olur. Yani $\forall i \in I$ için $(T,C) \tilde{\leq} (X_i,E_i)$ aşikardır. Bu nedenle $\bigcup_{i \in I} (X_i,E_i) \Cap (G,B)$ aşikar ve $(S,V) \in Z$ olur. O halde (S,V), $\left\{ (X_i,E_i) \,\middle|\, i \in I \right\}$ zincirinin bir üst sınırı olur. Zorn's Lemma dan Z nin bir (K,D) maksimal elemanı vardır. Yani $(T,C) \tilde{\leq} (K,D)$ olan (G,B)nin (F,A) da bir (K,D) komplementi vardır.

Tanım 3.4.14: (F,A), M üzerinde soft modül olsun. (F,A) nın bir (N,E) soft alt modülü, eğer (F,A) da bir (T,C) soft alt modülünün komplementi ise (N,E) ye (F,A) da *komplementir* denir ve $(N,E) \tilde{\leq}_c (F,A)$ ile gösterilir.

Önerme 3.4.15: (F,A), M üzerinde soft modül olsun. $(G,B) \tilde{\leq}_e (K,C) \tilde{\leq}_c (F,A)$ olacak şekilde (K,C) soft alt modülü vardır.

İspat: (G',B'), (G,B) nin (F,A) da bir komplementi olsun.

Teorem 3.4.13 den $(G,B) \subseteq (K,C)$ olan (G',B')nün (F,A)da bir (K,C) komplementi vardır. (L,T), (K,C)nin aşikar olmayan büyük soft alt modülü olsun.

Bu durumda $(G',B') \subseteq (L,T)+(G',B')$ olur. Böylece $((L,T)+(G',B')) \Cap (G,B)$ aşikar değildir. Bundan dolayı

$$H(a)=\begin{cases} G(a)\cap L(a) & , a\in B\cap(T\setminus B') \\ 0 & , a\in B\cap(B'\setminus T) \\ L(a) & , a\in B\cap(T\cap B') \end{cases}$$ olmak üzere

$(G,B) \Cap ((L,T)+(G',B')) = (H, B\cap(T\cup B'))$ aşikar değildir. $\varnothing \neq H(a) \in (G,B) \Cap (L,T)$ olduğundan $(G,B) \Cap (L,T)$ aşikar değildir. Böylece $(G,B) \tilde{\leq}_e (K,C)$ elde edilir.

Önerme 3.4.15 deki koşulu sağlayan (K,C) soft alt modülüne (G,B) nin (F,A) daki *kapanışı* denir.

Önerme 3.4.16: (F,A), M üzerinde soft modül ve (G,B), (F,A) nın soft alt modülü olsun. $(G,B) \tilde{\leq}_c (F,A)$ olması için gerek ve yeter koşul $(G,B) \tilde{\leq}_e (N,C) \tilde{\leq} (F,A)$ ise $(G,B)=(N,C)$ olmasıdır.

İspat: $(G,B) \tilde{\leq}_c (F,A)$ ve $(G,B) \tilde{\leq}_e (N,C) \tilde{\leq}_e (F,A)$ olsun. Bu durumda (G,B), (X,E) nin (F,A) da komplementi olacak şekilde $(X,E) \tilde{\leq} (F,A)$ vardır. Lemma 3.4.8 den $(G,B) \Cap (X,E) \tilde{\leq}_e (N,C) \Cap (X,E)$ olur. Yani $(G,B) \Cap (X,E)$ aşikar olduğundan $(N,C) \Cap (X,E)$ aşikardır. Böylece $(G,B) \Cap (X,E)$ aşikar olma durumuna göre (G,B) maksimaldir. Dolayısıyla $(G,B)=(N,C)$ elde edilir.

Tersine $(G,B) \tilde{\leq} (F,A)$ olsun. Önerme 3.4.15 den $(G,B) \tilde{\leq}_e (N,C) \tilde{\leq}_c (F,A)$ olacak şekilde $(N,C) \tilde{\leq} (F,A)$ vardır. Dolayısıyla $(G,B)=(N,C)$ olduğundan $(G,B) \tilde{\leq}_e (F,A)$ elde edilir.

Önerme 3.4.17: (F,A), M üzerinde soft modül ve $(K,C),(N,E)$, (F,A) nın soft alt modülleri olsun. Eğer $(K,C)\tilde{\leq}_c(N,E)$ ve $(N,E)\tilde{\leq}_c(F,A)$ ise $(K,C)\tilde{\leq}_c(F,A)$ olur.

İspat: (K,C), (K',C')nün (N,E)de ve (N,E), (N',E')nün (F,A)daki komplementleri, ayrıca $C\cap I\cap E\neq\varnothing$ olmak üzere $(K,C)\tilde{\leq}_e(L,I)\tilde{\leq}(F,A)$ olsun. Böylece

$$H(a)\begin{cases}0 & ,\ a\in C\cap(C'\setminus E')\\ 0 & ,\ a\in C\cap(E'\setminus C')\\ K(a)\cap(K'(a)+N'(a)) & ,\ a\in C\cap(C'\cap E')\end{cases}$$ olacak şekilde

$(K,C)\Cap\left[(K',C')+(N',E')\right]=(H,C\cap(C',E'))$ olur.

$x\in K(a)\cap(K'(a)+N'(a))$ olsun. Bu durumda $k'\in K'(a)$ ve $n'\in N'(a)$ için $x=k'+n'$ olur. $C\cap(C'\cap E')\subseteq C\cap C'$ olduğundan $x-k'=n'\in N(a)\cap N'(a)=0$ ve $x=k'\in K(a)\cap K'(a)=0$ elde edilir. Bundan dolayı $(K,C)\Cap\left[(K',C')+(N',E')\right]$ aşikardır.

Lemma 3.4.8 den $(K,C)\Cap\left[(K',C')+(N',E')\right]\tilde{\leq}_e(L,I)\Cap\left[(K',C')+(N',E')\right]$ olur. Böylece $(L,I)\Cap\left[(K',C')+(N',E')\right]$aşikardır. Soft modüler kuralına göre

$$\begin{aligned}\left[(N,E)\bigcap((L,I)+(N',E'))\right]\Cap(K',C') &=\left[(N,E)\Cap(K',C')\right]\Cap\left[(L,I)+(N',E')\right]\\ &=(K',C')\Cap\left[(L,I)+(N',E')\right]\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde$(K',C')\Cap\left[(K',C')+(N',E')\right]$ aşikardır. (K,C), (K',C')nün(N,E)de komplementi olduğundan $(K,C)\Cap(K',C')$ aşikar olma koşuluna göre (K',C') soft maksimal alt modüldür. $(K,C)\subseteq(N,E)\Cap((L,I)+(N',E'))$ve yukarıdaki eşitlikten yararlanılarak $(N,E)\Cap\left[(L,I)+(N',E')\right]=(K,C)$ elde edilir. Benzer şekilde $(N',E')\Cap\left[(N,E)+(L,I)\right]$ aşikardır. Böylece (N,E), (N',E')nün (F,A)da komplementi olduğundan $(N,E)+(L,I)=(N,E)$ olur. Yani $(L,I)\tilde{\leq}(N,E)$ elde edilir. Bu nedenle

$$(L,I)=(L,I)\Cap\left[(L,I)+(N',E')\right]\tilde{\leq}(N,E)\Cap\left[(L,I)+(N',E')\right]=(K,C)$$ olur.

O halde Önerme 3.4.16 dan $(K,C)\tilde{\leq}_e(F,A)$ bulunur.

Teorem 3.4.18: (F,A), M üzerinde soft modül olsun. O zaman (F,A) nın her direkt toplananı (F,A) da bir komplementtir.

İspat: (G,B), (F,A) nın bir direkt toplananı olsun. Bu durumda $(G,B)\Cap(T,C)$ aşikar ve $(G,B)\tilde{\oplus}(T,C)=(F,A)$ olacak şekilde (F,A) nın bir (T,C) soft alt modülü vardır. $(G,B)\subseteq(K,D)\subseteq(F,A)$ olmak üzere $(K,D)\tilde{\leq}(F,A)$ ve $(K,D)\Cap(G,B)$ aşikar olsun. Soft modüler kuralından $(K,D)=(T,C)$ olduğu görülür. Böylece (K,D), (F,A) nın maksimal soft alt modülü olur. Dolayısıyla (K,D), (G,B) nin (F,A) daki komplementi olduğu görülür.

4. KAYNAKLAR

Acar, U., Koyuncu, F., Tanay, B., “Soft Sets and Soft Rings”, *Computers and Mathematics with Applications,* 59, 3458-3463, (2010).

Aktaş, H., Çağman, N., “Soft Sets and Soft Groups”, *Information Sciences*, 177, 2726-2735, (2007).

Ali, M. I, Feng, F., Liu, X., Min, W. K., Shabir, M., “On Some New Operations in Soft Set Theory”, *Computers and Matematics with Applications*, 57, 1547-1553, (2009).

Anderson, F. W., Fuller, K. R., “*Rings and Categories of Modules*”, Springer-Verlag, New York, (1992).

Atagün, A. O., Sezgin, A., “Soft Substructures of Rings, Field and Modules”, *Computers and Mathematics with Applications*, 61, 592-601, (2011).

Davvaz, B., Ma, J., Sun, C., “A Note on Essential Soft Submodules”, *International Journal of Fuzzy Logic and Intelligent System*, 19, 10-17, (2019).

Hungerford, T. W., “*Algebra*”, Holt, Rinehart and Wiston, Inc., New York, (1974).

Lam, T. Y., “*Lectures on modules and rings*”, Springer-Verlag, New York, (1999).

Maji, P. K., Biswas, R., Roy, A. R., “Soft Set Theory”, *Computers and Mathematics with Applications,* 45, 555-562, (2003).

Molodtsov, D., “Soft Set Theory-First Results”, *Computers and Mathematics with Applications*, 37, 19-31, (1999).

Shah, T., Medhit, S., “Primary Decomposition in a Soft Ring and a Soft Module”, *Iranian J. of Science and Technology*, 38, 311-320, (2014).

Sun, Q. M., Zhang, Z. L., Liu, J., “Soft Sets and Soft Modules”, In: Wang G., Li T., Grzymala-Busse J.W., Miao D., Skowron A., Yao Y. (eds) Rough Sets and

Knowledge Technology, Lecture Notes in Computer Science, vol 5009. Springer, Berlin, Heidelberg ,403-409, (2008).

Türkmen, E., Pancar, A., "On Some New Operations in Soft Module Theory", *Springer-Verlag London Limited*, 1233-1237, (2013).

Yücel, C. C., Acar, U., "A Note on Soft Modules", *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser A1 Math. Stat*., 66, 66-74, (2017).

Yüzbaşı, E. "Soft Kümeler ve Soft Modüller", Yüksek Lisans Tezi, *Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Denizli, (2017).