T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

KAPAK İLE SÜRÜLEN KAVİTE AKIŞI PROBLEMİNİN DEĞİŞİK SINIR ŞARTLARINDAKİ SAYISAL ÇÖZÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MEHMET ÜNAL

DENİZLİ, EYLÜL - 2021

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

KAPAK İLE SÜRÜLEN KAVİTE AKIŞI PROBLEMİNİN DEĞİŞİK SINIR ŞARTLARINDAKİ SAYISAL ÇÖZÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MEHMET ÜNAL

DENİZLİ, EYLÜL - 2021

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

Mehmet ÜNAL

ÖZET

KAPAK İLE SÜRÜLEN KAVİTE AKIŞI PROBLEMİNİN DEĞİŞİK SINIR ŞARTLARINDAKİ SAYISAL ÇÖZÜMÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

MEHMET ÜNAL
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI:DOÇ. DR. ZEKERİYA GİRGİN)

DENİZLİ, EYLÜL - 2021

Akışkanlar mekaniği alanının temel konularından olan kavite akış problemlerinin analizi, bu tezde iki boyutlu olarak ele alınmış olup kapak ile sürülen farklı sınır şartlarında sayısal çözüm ile yapılmıştır. Kavite akışının analizinde Sonlu Farklar Metodunun yanı sıra mühendislik uygulamalarında kullanımı pek yaygın olmayan Diferansiyel Quadrature Metodu (DQM) kullanılmıştır. Çözümde Diferansiyel Quadrature Metodunun seçilmesinin sebebi diğer sayısal yöntemlere nispeten daha az işlem adımıyla daha ayrıntılı sonuçların elde edilebilmesi göz önüne alınmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Kavite Akışı, Diferansiyel Denklemler, Diferansiyel Quadrature Metodu

ABSTRACT

NUMERICAL SOLUTIONS OF LID-DRIVEN CAVITY PROBLEM UNDER DIFFERENT BOUNDARY CONDITIONS
MSC THESIS
MEHMET ÜNAL
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MECHANICAL ENGINEERING
(SUPERVISOR:ASSOC. PROF. DR. ZEKERİYA GİRGİN)

DENİZLİ, SEPTEMBER 2021

The analysis of lid-driven cavity flow, which is one of the basic subjects of fluid mechanics, is handled in two dimensions is solved numerically under different boundary conditions. In addition to the Finite Difference Method, the Differential Quadrature Method (DQM), which is not widely used in engineering applications, was used in the analysis of lid-driven cavity flow. The reason for choosing the Differential Quadrature Method in the solution is that more detailed results can be obtained with less processing steps compared with other numerical methods.

KEYWORDS: Lid-driven cavity flow, Differential Quadrature Method, Iterative Differential Quadrature Method

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

TABLO LİSTESİ

<u>Sayfa</u>

SEMBOL LİSTESİ

ω	**:**	Vortisite
ψ	**:**	Akım Fonksiyonu
DQ	**:**	Diferansiyel Quadrature
DQM	**:**	Diferansiyel Quadrature Metodu
a	**:**	Ağırlıklı Katsayılar Matrisi
ν	**:**	kinematik viskozite
U	**:**	Akış Hızı
p	**:**	Basınç
ρ	**:**	Yoğunluk
Re	**:**	Reynolds Sayısı
u	**:**	x yönündeki hız bileşeni
v	**:**	y yönündeki hız bileşeni
N-S	**:**	Navier-Stokes Denklemi
t	**:**	Zaman

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitim dönemimde, özellikle içinde bulunduğumuz pandemi döneminde, emeğini ve vaktini esirgemeyen kıymetli hocam Doç. Dr. Zekeriya GİRGİN'e teşekkürlerimi sunuyorum.

Destelerini hep arkamda hissettiğim, anneme ve babama ayrıca teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

Kapak ile sürülen kavite akışı; akışkanlar mekaniği akış analizlerinde önemli yer tutmaktadır, dikdörtgen şeklindeki kavite içerisindeki akışın sayısal çözümleri ile ilk çalışmalar yapılmıştır (Ghia ve diğ. 1982). Kapak ile sürülen kavite akışı probleminin çözümünü ele almadan önce kavite akışı daha sonra da kapak ile sürülen kavite akışı incelenecektir.

Kavite; kelime anlamı olarak boşluk veya oyuktur. Kavite akışı ise katı yüzeylerdeki bulunan boşluk veya oyuklardaki akış demektir (Özsoy ve Aslan 2011). Kavite akışı akışkanlar mekaniğinin temel araştırma konularından birini oluşturmaktadır. Daha kısa tabirle akışkanlar mekaniğinde geçen kavite; akışkanla teması olan boşluğun (oyuk) yüzeylerinin şeklidir. Dikdörtgen şeklindeki kavite denildiğinde dikdörtgen şekilli bir oyuk anlaşılmadır. Kavite şekli dairesel, üçgen veya daha farklı geometrilerde olabilir.

Kapak ile sürülen kavite akışı; tüm yüzeyleri sabit ve içinde akışkan olan bir kavitenin kenarlarından birinde, bir kapağın yüzey boyunca sürülmesi (çekilmesi) ile kavite içinde oluşturulan akışkan hareketi demektir. Farklı şartlardaki birçok akış probleminin çözülebilmesi ve karşılaştırılabilmesi açısından birçok mühendislik problemi çözümünde ölçek olarak kullanılmaktadır. Diğer bir tabirle karmaşık akış problemlerini çözmeye ve test etmeye yarayan bir araçtır. Hidrolik sistemler, iç mekanların havalandırılması, uçak kanadı tasarımında kullanılan aerodinamik sistemler gibi akışkanın bulunduğu sistemlerde optimizasyon çalışmaları için kavite akış analizleri kullanılmaktadır (Yurtseven ve diğ. 2019).

Akışkanlar mekaniğinde akış analizleri; analitik veya nümerik yaklaşımlarla Navier-Stokes denklemleri kullanılarak yapılabilir. Navier-Stokes denklemi, ikinci mertebe, zamana bağlı, homojen olmayan ve lineer olmayan bir diferansiyel denklemdir. Basınç, reynolds sayısı ve hız; denklem içindeki temel değişkenlerdir. Bizim çalışmamızda akışkana ait akım fonksiyonu ve vortisite ele alınacağı için akım fonksiyonu ve vortisite karşılıkları Navier-Stokes denklemi içerisine yerleştirildiğinde Taşınım-Yayılım Denklemi elde edilir. Elde edilen Taşınım-Yayılım Denkleminin sayısal çözümüyle kavite içerisindeki vortisite ve akım fonksiyonu grafikleri elde edilir.

Akım fonksiyonu ve vortisite akış analizlerinde kullanımı yaygındır ve akışın görselleştirilmesinde önemli yer tutmaktadır. Akışın görselleştirilmesi önemlidir çünkü; her zaman gözle görülemeyen akış hareketleri görünür hale getirildiğinde akışkan ile akışkanla temas halindeki yüzey geometrileri olan ilişkisi gözlenebilir. Akım fonksiyonu (ψ) ile akışkan içerisinde oluşan akım çizgileri olarak gözlenebilir. Akım çizgileri akışkanın içerisindeki anlık çizgilerdir. Akışkan içerisinde oluşan hareket sonucunda, akışkan partiküllere ait hız vektörleri oluşur. Hız vektörleri akışkan taneciklerinin izlediği akım çizgisine teğettir. Bu bilgiden yola çıkarak, hız vektörleri referansıyla akım çizgileri elde edilir. Akım fonksiyonu görselleştirildiğinde akışın yoğunlaştığı konumlarda akış hızının artığı yorumu yapılabilir. Vortisite (ω); akışkan partikülünün dönme hareketinin farklı bir ifadesidir ve açısal hızın iki katı olarak bilinmektedir (Çengel ve John 2014). Kavite geometrisi içerisindeki vortisite görselleştirildiğinde, vortisite olan bölgelerde akışkan partiküllerinin döndüğü (rotasyon) bölgelerdir. Akışkan partikülleri dönüyorsa enerji, akışkan vortisite olan konumlarda enerji kaybına uğruyor demektir.

Akışkanlar mekaniğinde akış analizlerinde incelenen akım fonksiyonu ve vortisite grafikleri; geometrik şekil tasarımlarında enerji kayıplarının ve akışkan hızının daha iyi hesaplama olanağı sağlamıştır.

2. KAPAK İLE SÜRÜLEN KAVİTE AKIŞI PROBLEMİNİN DEĞİŞİK SINIR ŞARTLARINDA SONLU FARKLAR METODU İLE ÇÖZÜMÜ

2.1 Navier-Stokes Denklemi x-y Eksenlerinde Genel İfadesi

Sıkıştırılamayan akışkanlar için Navier-Stokes denkleminin x, y ve z ekseni yönündeki momentum bileşenleri, sırasıyla;

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \tag{2.3}$$

Şeklindedir. (2.1) denklemi genel denklemdir. Ayrıca süreklilik denklemi;

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{2.4}$$

halinde yazılır.

Burada yapılan çalışma iki boyutlu sıkıştırılamayan akışkanlar için yazıldığında, z boyutundaki terimler ihmal edilir ve denklemler;

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{2.8}$$

Şekline dönüşür. Yukarıdaki denklemlerde

u: akışkanın x yönündeki hız bileşeni,

v: akışkanın y yönündeki hız bileşeni.

p: basınç değeri

(ρ): akışkanın yoğunluğu ve

(ν): kinematik viskozite katsayısıdır.

Reynolds sayısı:

$$Re=\frac{UL}{\boldsymbol{\nu}} \tag{2.9}$$

U:akış hızı, L: akışın uzunluğu, $\boldsymbol{\nu}$ kinematik viskozite ile gerekli işlemler ve normalizasyonlar yapıldıktan sonra:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{2.11}$$

N-S denklemi x-y eksenlerinde Reynolds parametresi ile ifade edilmiş olur.

2.2 N-S denkleminin Vortisite denklemi ile Yeniden İfade Edilmesi

Bu kısımdaki amaç; N-S denklemini Vortisite (ω) parametresi türünden ifade etmektir.

Vortisite denklemi;

$$\omega=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.12}$$

şeklinde ifade edilir.

N-S denkleminin x ve y ekseninde eşitlikleri yazılır ve aşağıdaki gibi işlemler yapılır ve alt-alta toplanır. Sonuç;

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial t}+u\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+v\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$=-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}-\left(-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{2.13}$$

Şeklinde ifade edilir. Çıkan bu denklem içine vortisite parametresi yerine yazılırsa aşağıdaki denklem ortaya çıkar.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+u\frac{\partial \omega}{\partial x}+v\frac{\partial \omega}{\partial y}=\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right) \tag{2.14}$$

Denklemin son halinde basınç değişkeni yok edilmiş olup, çözüme daha elverişli olmuştur.

2.3 Akım Fonksiyonu (ψ) Denkleminin Tanımlanması

Akım çizgileri(ψ) fonksiyonu için şöyle tanımlama yapılır:

$$u=\frac{\partial \psi}{\partial y}\quad , \qquad v=-\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{2.15}$$

Yapılan bu kabul süreklilik denklemi göz önüne alınarak;

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{2.16}$$

Akım fonksiyonu (ψ) fonksiyonu için yapılan tanımlama doğrulanır:

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)}+\cancel{\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)}=0 \tag{2.17}$$

şeklinde ifade edilir.

2.4 Vortisite Denkleminin Akım Fonksiyonu (ψ) İle İfade Edilmesi

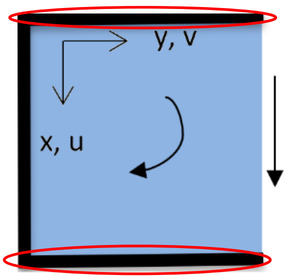
u (u=∂ψ/∂y) ve v (v=-∂ψ/∂x) yapılan kabul doğrultusunda (ψ türünden) vortisite şöyle yazılabilir;

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-\,\omega \tag{2.18}$$

Bu denkleme eliptik denklem ismi verilir.

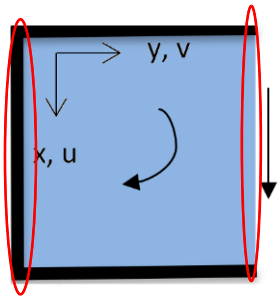
2.5 Akım Fonksiyonunun Dikdörtgen Kavite Sınırlarında (Duvarlarda) Değerleri

Dikdörtgen kavite sınırlarında, dört duvar (sınır) için normal hızlar ele alınarak akım fonksiyonu hakkında bir çıkarım yapılır. Yan duvarlarda u (x yönündeki hız) ve alt-üst duvarlarda v (y yönündeki hız) sıfırdır. Şekilde de gösterildiği gibi akım fonksiyonu (ψ) tüm sınırlarda sabit olduğu görülür. 4 duvarda ayrı ayrı sabit olan akım fonksiyonu, dört duvarın hepsinin bir döngü şeklinde sıralı olarak birbiri ile temas etmesinden dolayı, bütün duvarlarda(sınırlarda) eşit değerdedir. Hesapları kolaylaştırmak için sabit değer olarak $\Psi = 0$ olarak kabul edilir.



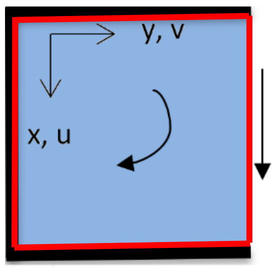
Şekil 2.1: Kavitenin y ekseni paraleli duvarlarındaki akım fonksiyonu

$$u=0 \Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \Rightarrow \psi = sabit\ değer \qquad (2.19)$$



Şekil 2.2: Kavitenin x ekseni paraleli duvarlarındaki akım fonksiyonu

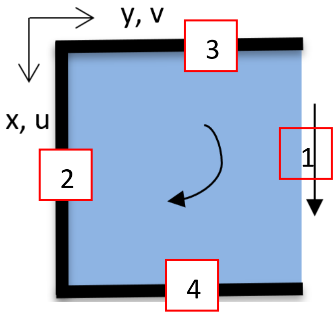
$$v=0 \Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \Rightarrow \psi = sabit\ değer \qquad (2.20)$$



Şekil 2.3: Kavitenin tüm duvarlarında sabit olan akım fonksiyonu

Sınırlardaki akım fonksiyonunun sabit ve dört duvarda da aynı değerdedir.

Tüm duvarlarda eşit değerde olduğu anlaşılan akım fonksiyonundan yola çıkarak duvarlara paralel hızlar ve vortisite değerleri incelenir.



Şekil 2.4: Kavitenin duvarlarındaki vortisite gösterimi

3 ve 4 numaralı sınırda;

$$\mathrm{v}=0 \;\Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \cancel{\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}} = -\,\omega \;\Rightarrow\; \omega_{duvar} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \tag{2.21}$$

2 numaralı sınırda;

$$\mathrm{u}=0 \;\Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0\,, \qquad \cancel{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\,\omega \;\Rightarrow\; \omega_{duvar} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \tag{2.22}$$

1 numaralı sınırda;

$$\mathrm{u}=\mathrm{U}_{duvar} \;\Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial y} = \mathrm{U}_{duvar}\,, \qquad \cancel{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\,\omega \;\Rightarrow\; \omega_{duvar} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \tag{2.23}$$

değerleri elde edilir.

Bu duvarlardaki (sınırlardaki) akım fonksiyonundan vortisiteye ulaşılır. Kullanılacak iki ana denklem ele alındıktan sonra taylor serisi kullanılarak sınırlardan içe doğru çözümleme yapılacak.

2.6 İki Ana Denklem: Eliptik Denklem ve Taşınım-Yayılım Denklemi

Problemin çözümünde kullanılacak ilk denklem eliptik denklem ve ikinci denklem taşınım-yayılım denklemi :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -\,\omega \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right) \tag{2.25}$$

şeklinde ifade edilmiştir.

Eliptik denklem ve taşınım-yayılım denklemi sonlu farklar metodu ile açılarak başlanacağı için sonlu farklar metodu 2.6.1 başlığında kısaca anlatılmıştır.

2.6.1 Sonlu Farklar Metodu ve Taylor Denklemi

Akış problemi ele alınırken N-S denklemlerinin sayısal çözümleri ele alınırken farklı metotlar kullanılmaktadır. Kullanılan Sonlu Farklar Metodu ve Taylor serisi aşağıdaki denklemlerde verilmiştir.

Sonu farklar metodunun formülasyonlar; ileri farklar denklemi, merkezi farklar denklemi ve geri farklar denklemi olarak ele alınmıştır.

İleri farklar denklemi;

$$\frac{\Delta f\,(x)}{\Delta x} = \frac{f\,(x+h)-f\,(x)}{h}\ , \quad \frac{dy}{dx} \approx \frac{y_{i+1}-y_i}{h} \tag{2.26}$$

$$\frac{\Delta^2 f\,(x)}{\Delta x^2} = \frac{f\,(x+2*h)-2*f\,(x+h)+f\,(x)}{h^2}\ , \quad \frac{d^2y}{dx^2} \approx \frac{y_{i+2}-2*y_{i+1}+y_i}{h^2} \tag{2.27}$$

şeklinde ifade edilir.

Merkezi farklar denklemi;

$$\frac{\delta f(x)}{\delta x} = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2*h} \quad , \quad \frac{dy}{dx} \approx \frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2*h} \tag{2.28}$$

$$\frac{\delta^2 f(x)}{\delta x^2} = \frac{f(x+h)-2*f(x)+f(x-h)}{h^2} \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} \approx \frac{y_{i+1}-2*y_i+y_{i-1}}{h^2} \tag{2.29}$$

şeklinde ifade edilir.

Geri farklar denklemi;

$$\frac{\nabla f(x)}{\nabla x} = \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \quad , \quad \frac{dy}{dx} \approx \frac{y_i-y_{i-1}}{h} \tag{2.30}$$

$$\frac{\nabla^2 f(x)}{\nabla x^2} = \frac{f(x)-2*f(x-h)+f(x-2*h)}{h^2} \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} \approx \frac{y_i-2*y_{i-1}+y_{i-2}}{h^2} \tag{2.31}$$

şeklinde ifade edilir.

Sayısal çözüm yöntemlerinden bir diğeri olan Taylor serisi ise;

$$f(x_{i+1}) = y_{i+1} = \sum \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}(x_{i+1}-x_i)^n = y_i + \frac{y_i'}{1!}(x_{i+1}-x_i)^1 + \frac{y_i''}{2!}(x_{i+1}-x_i)^2 \ldots \tag{2.32}$$

şeklinde ifade edilir.

2.6.2 İki Ana Denklemin Sonlu Farklar Metodu ile Açılması

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\,\omega \tag{2.33}$$

$$\frac{\psi_{i+1,j}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i-1,j}^n}{h^2} + \frac{\psi_{i,j+1}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j-1}^n}{h^2} = -\,\omega_{i,j}^n \tag{2.34}$$

$$\frac{\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i-1,j}^n + \psi + \psi_{i,j-1}^n - 4\psi_{i,j}^n}{h^2} = -\,\omega_{i,j}^n \tag{2.35}$$

Denklem (2.8) üzerine u ve v parametreleri (2.9) denkleminde olduğu gibi yerine yazılıp düzenlenirse taşınım-yayılım denklemi olarak isimlendirilen **ikinci denklem** elde edilir. Taşınım-yayılım denklemine de sonlu farklar yaklaşımı uygulanır;

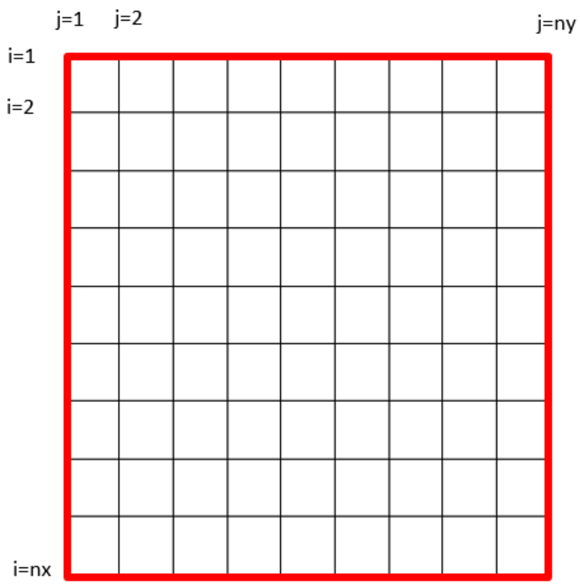
$$\frac{\omega_{i,j}^{n+1}-\omega_{i,j}^{n}}{\Delta t} = -\left(\frac{\Psi_{i,j+1}^{n}-\Psi_{i,j-1}^{n}}{2h}\right)\left(\frac{\omega_{i+1,j}^{n}-\omega_{i-1,j}^{n}}{2h}\right) + \left(\frac{\Psi_{i+1,j}^{n}-\Psi_{i-1,j}^{n}}{2h}\right)\left(\frac{\omega_{i,j+1}^{n}-\omega_{i,j-1}^{n}}{2h}\right) + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\omega_{i+1,j}^{n}+\omega_{i-1,j}^{n}+\omega_{i,j+1}^{n}+\omega_{i,j-1}^{n}-4\omega_{i,j}^{n}}{h^2}\right) \tag{2.36}$$

$$\omega_{i,j}^{n+1} = \omega_{i,j}^{n} + \Delta t\left[-\left(\frac{\Psi_{i,j+1}^{n}-\Psi_{i,j-1}^{n}}{2h}\right)\left(\frac{\omega_{i+1,j}^{n}-\omega_{i-1,j}^{n}}{2h}\right) + \left(\frac{\Psi_{i+1,j}^{n}-\Psi_{i-1,j}^{n}}{2h}\right)\left(\frac{\omega_{i,j+1}^{n}-\omega_{i,j-1}^{n}}{2h}\right) + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\omega_{i+1,j}^{n}+\omega_{i-1,j}^{n}+\omega_{i,j+1}^{n}+\omega_{i,j-1}^{n}-4\omega_{i,j}^{n}}{h^2}\right)\right] \tag{2.37}$$

İki ana denklem olarak sunulan eliptik denklem ve taşınım-yayılım denklemi sonraki aşamada kullanılmak amacıyla sonlu farklar yöntemi ile düzenlenmiştir.

2.7 Dikdörtgen Kavite Alanı Üzerinde Düğümlerin Belirlenmesi ve Sınırlardan içe Doğru Çözümleme Yapılması

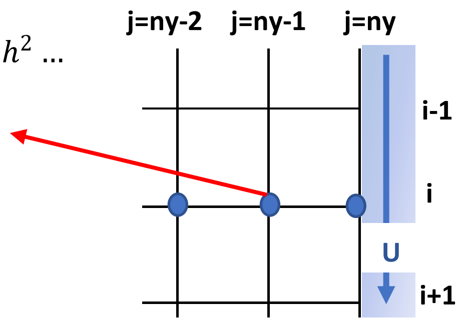
Duvardaki (sınırlardaki) vortisite bulunabilmesi için akım fonksiyonu ile yola çıkılır. (akım fonksiyonu duvarlarda sabit olduğu bölüm 2.5'te verilmiştir.)



Şekil 2.5: Kavite üzerinde düğümlerin belirlenmesi

Akım fonksiyonu sınırlardaki düğüm noktalarında biliniyor ve taylor serisi kullanılarak iç düğüm noktaları bulunur.

$$\Psi_{i,j=ny-1} = \Psi_{i,j=ny} + \frac{\partial \Psi_{i,j=ny}}{\partial y}\frac{1}{1!}(-h)^1 + \frac{\partial^2 \Psi_{i,j=1}}{\partial y^2}\frac{1}{2!}h^2 \ldots$$



Şekil 2.6: Sınır düğümlerinden iç düğümlere doğru çözümleme yapılması

Bu duvardaki $\mathrm{U_{duvar}} = \frac{\partial\psi}{\partial y}$, $\omega_{duvar} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$ denklemleri akım fonksiyonu denklemi içine yazılarak;

$$\psi_{i,j=ny-1} = \psi_{i,j=ny} + \mathrm{U_{duvar}}(-h) - \omega_{duvar}h^2 \tag{2.38}$$

Bu denklemlerdeki amaç; akım fonksiyonundan vortisite değerlerine geçiş yapabilmektir.

Vortisite yalnız bırakılırsa dikdörtgen kavitede **1** numaralı duvarda (j=ny) numaralı denklem elde edilir;

$$\omega_{duvar} = (\psi_{i,j=ny} - \psi_{i,j=ny-1})\frac{2}{h^2} - \mathrm{U_{duvar}}\frac{2}{h} \tag{2.39}$$

1 numaralı duvarda (j=1);

$$\omega_{duvar} = (\psi_{i,j=ny} - \psi_{i,j=ny-1})\frac{2}{h^2} + \mathrm{U_{duvar}}\frac{2}{h} \tag{2.40}$$

3 numaralı duvarda (i=1);

$$\omega_{duvar} = (\psi_{i=1,j} - \psi_{i=2,j})\frac{2}{h^2} + \mathrm{V_{duvar}}\frac{2}{h} \tag{2.41}$$

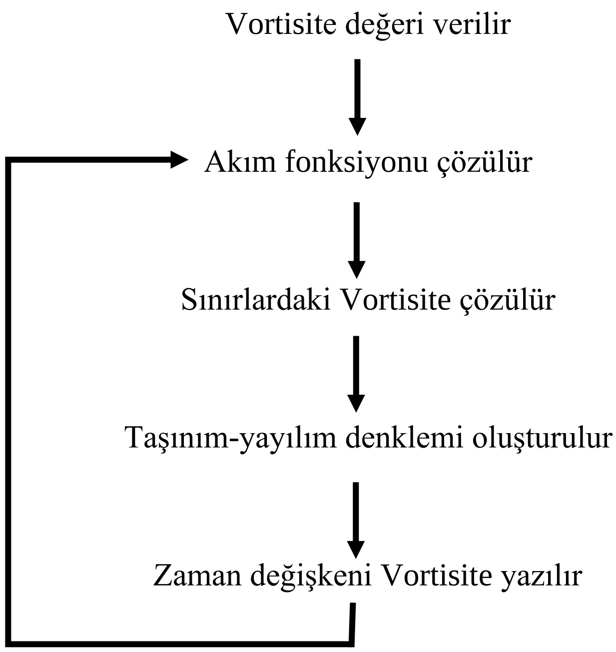
4 numaralı duvarda (i=nx);

$$\omega_{duvar} = (\psi_{i=nx,j} - \psi_{i=nx-1,j})\frac{2}{h^2} - \mathrm{V_{duvar}}\frac{2}{h} \tag{2.42}$$

Sınır düğümlerinden iç düğümlere doğru vortisite ifadelerini bulabilmek için eliptik denklem tekrar yazılır.

$$\frac{\psi^n_{i+1,j}+\psi^n_{i-1,j}+\psi^n_{i,j+1}+\psi^n_{i,j-1}-4\psi^n_{i,j}}{h^2} = -\,\omega^n_{i,j} \tag{2.43}$$

$$\psi^{n+1}_{i,j} = 0.25\left(\psi^n_{i+1,j} + \psi^{n+1}_{i-1,j} + \psi^n_{i,j+1} + \psi^{n+1}_{i,j-1} + h^2\psi^{n+1}_{i,j}\right) \tag{2.44}$$



Şekil 2.7: Kavite akış probleminin sonlu farklar metodu ile çözüm akışı

Kapak ile sürülen kavite akış probleminin sayısal çözümünün akış şeması şekil 2.7'de gösterilmiştir.

3. KAPAK İLE SÜRÜLEN KAVİTE AKIŞI PROBLEMİNİN DİFERANSİYEL QUADRATURE METODU İLE ÇÖZÜLMESİ

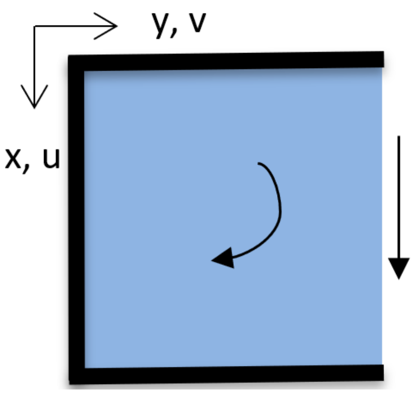
3.1 Diferansiyel Quadrature Metoduna Giriş

Diferansiyel Quadrature Metodu (DQM) genel ifadeyle, analiz bölgesinde herhangi bir noktada, bir koordinat referansına göre bir fonksiyonun çözümü, seçilen bu koordinat yönünde belirlenen bütün düğüm noktalarındaki değerlerin ağırlıklı lineer toplamı olarak düşünülür. DQM, belirlenen her düğüm noktasının her mertebe türevi için ağırlıklı katsayılarının hesaplanması üzerine temellendirilmiştir. (Demir 2009)

Aşağıdaki formüllerde kullanılan “a” ifadeleri ağırlıklı katsayı ifade eder. Ağırlıklı katsayı ile birinci derece türev hesaplanma formülü verilmiştir.

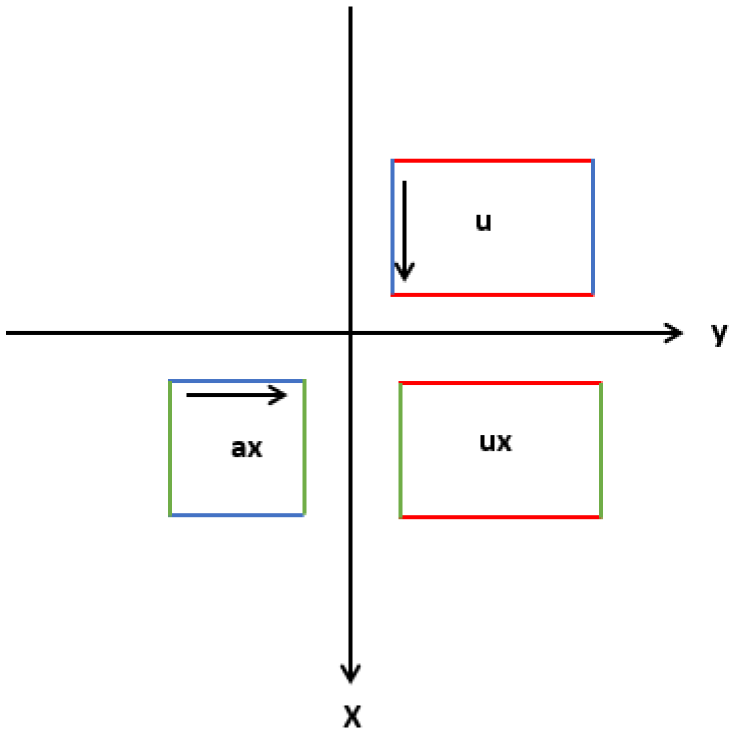
$$f^{(1)}(x_i) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{(1)} f(x_i) \qquad i = 1,2,3 \ldots N \tag{3.1}$$

Kartezyen koordinat sisteminde x ve y eksenlerinin yönleriyle birlikte kapak ile sürülen akış, şekil 3.1’de gösterilmiştir.



Şekil 3.8: Kapak ile sürülen dikdörtgen kavite akışı

DQ metodunda ağırlıklı katsayı (a), hız bileşenleri (u ve v) ve diğer parametrelerdeki işlemleri matris olarak ele alınır. DQ metodunun açıklanması amacıyla sadece u parametresinin x ve y eksenlerindeki durumu açıklanmıştır. Şekil 3.2'de İki boyutlu Navier-Stokes denklemindeki u parametresinin (x eksenindeki hız bileşeni) **x eksenine göre** birinci derece türevinin DQ metodunda elde edilme şekli gösterilmiştir.



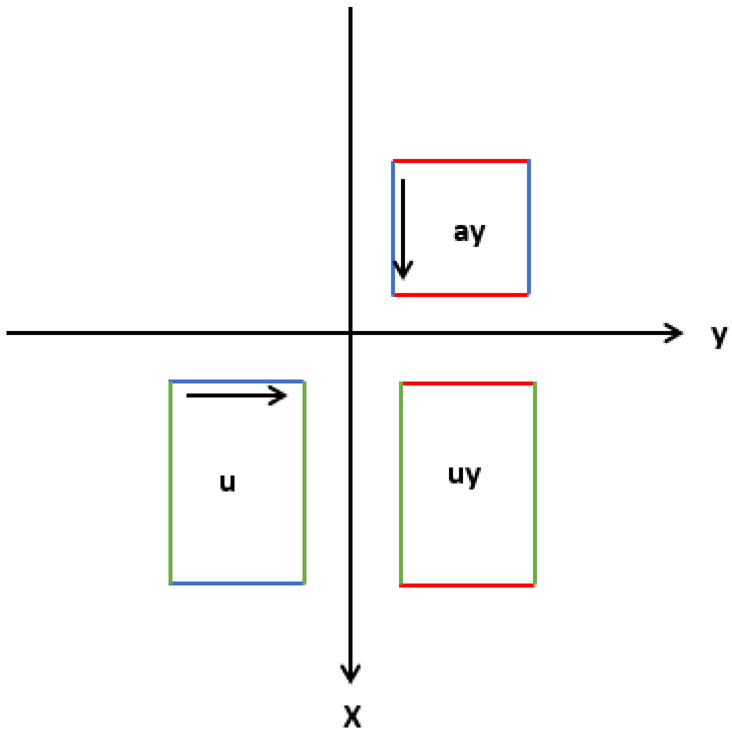
Şekil 3.12: DQ metodunda parametrelerin elde edilmesi (x)

Basit olarak ifade edilecek olursa Sonlu Farklar Metodundaki " $\frac{d}{dx}$ " ifadesine karşılık DQ metodunda "ax" ifadesi karşılık gelmektedir. DQ metodu karşılığı aşağıda verilmiştir.

$$\frac{d}{dx} u = \frac{du}{dx} = \mathrm{ax}.u = u\mathrm{x} \tag{3.2}$$

$$[\mathrm{ax}][u] = [u\mathrm{x}] \tag{3.3}$$

Şekil 3.3’te İki boyutlu Navier-Stokes denklemindeki u parametresinin (x eksenindeki hız bileşeni) **y eksenine göre** birinci derece türevinin DQ metodunda elde edilme şekli gösterilmiştir.



Şekil 3.3: DQ metodunda parametrelerin elde edilmesi (y)

$$\frac{d}{dy}\,u = \frac{du}{dy} = u.\mathrm{ay} = u\mathrm{y} \tag{3.4}$$

$$[u][\mathrm{ay}] = [u\mathrm{y}] \tag{3.5}$$

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}\ , \qquad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{3.6}$$

$$u = \Psi.\mathrm{ay}\,, \qquad v = -\mathrm{ax}.\Psi \tag{3.7}$$

3.2 DQ Metodu İle İki Ana Denklemin Tekrar Yazılması

Bu bölümde iki ana denklem olarak eliptik denklem ve taşınım-yayılım denklemi ele alınacaktır. Denklemler DQ metodu ile yeniden yazılacaktır.

3.2.1 DQ Metodu İle Eliptik Denklem Yazılması

Eliptik denklem aşağıda verilmiştir:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}=-\,\omega \tag{3.8}$$

Eliptik denklemin DQ metodu karşılığı aşağıda verilmiştir:

$$\mathrm{ax}.\mathrm{ax}.\Psi+\Psi.\mathrm{ay}.\mathrm{ay}=-\,\omega \tag{3.9}$$

3.2.2 DQ Metodu İle Taşınım-Yayılım Denklemi

Taşınım yayılım denklemi DQ metodu ile yeniden ifade edilmek üzere aşağıda tekrar verilmiştir.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}=-\frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial x}+\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right) \tag{3.10}$$

Bu denklemde zaman türevi açılarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\frac{\omega_{\mathrm{t+1}}-\omega_{\mathrm{t}}}{\Delta t}=-\frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial x}+\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right) \tag{3.11}$$

$$\omega_{t+1} = \omega_t + \Delta t \cdot \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \right) \qquad \Delta t = 0.001 \tag{3.12}$$

Yukarıdaki denklemin DQ metodu ile ifade edilmiş şekli aşağıda verilmiştir:

$$\omega = [(ax * \Psi).* (\omega * ay)] - [(ax * \omega).* (\Psi * ay)] + \frac{1}{\mathrm{Re}}(ax * ax * \omega + \omega * ay * ay) \tag{3.13}$$

$$\omega_{t+1} = \omega_t + \Delta t * \omega_t \tag{3.14}$$

Bizden u hızı istendiği takdirde;

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \Psi * ay \quad \text{aynı şekilde} \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -ax * \Psi \tag{3.15}$$

şeklinde ifade edilir.

3.2.3 Seçilen Düğüm Sayılasına Göre Ağırlıklı Katsayılar Matrisinin Hesaplanması

Ağırlıklı katsayılar, DQ Metodu hesaplarında en önemli yer tutmaktadır. Matris içerisinde köşegen konumda olmayan ağırlıklı katsayıların değerleri;

$$a_{ij}^{(1)} = \frac{M_{x_i}^{(1)}}{(x_i - x_j) * M_{x_j}^{(1)}} \quad , i \neq j \tag{3.16}$$

şeklinde ifade edilir. (Demir 2009) matris içerisinde köşegen konumda olan ağırlıklı katsayıların değerleri;

$$a_{ii}^{(1)} = -\sum_{j=1,}^{N} a_{ij}^{(1)} \quad , j \neq i \tag{3.17}$$

şeklinde ifade edilir. Denklemler içerisinde geçen $M^{(1)}$ ise;

$$M_{x_i}^{(1)} = \prod_{k=1}^{N}(x_i - x_k) \; , k \neq i \tag{3.18}$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki formülasyonlar daha önceki çalışmalardan alınmıştır. (Quan, ve and Chang 1989a,b)

Örnek olarak bir ekseni 5 düğümlü seçilen birinci dereceden a_{5x5} ağırlıklı katsayılar matrisinin bulunması gösterilmiştir.

İlk olarak x_i değerleri bulunması aşamasından başlanır. Bu değerlerin belirlenmesi; bir (1) bütün parçanın belirlenen sayıda bölünmesi esasına dayanmaktadır. 5 düğüm için x_1=0, x_2=0,25, x_3=0,5, x_4=0,75 ve x_5=1 olarak belirlenir.

DQ Metodu ile farklı parametrelerle oluşturulan sürekliliği sağlanmış örnek sonuçlar aşağıda verilmiştir;

$$M_{x_1}^{(1)} = (x_1 - x_2) * (x_1 - x_3) * (x_1 - x_4) * (x_1 - x_5) \tag{3.19}$$

$$M_{x_2}^{(1)} = (x_2 - x_1) * (x_2 - x_3) * (x_2 - x_4) * (x_2 - x_5) \tag{3.20}$$

$$M_{x_3}^{(1)} = (x_3 - x_1) * (x_3 - x_2) * (x_3 - x_4) * (x_3 - x_5)$$

$$M_{x_4}^{(1)} = (x_4 - x_1) * (x_4 - x_2) * (x_4 - x_3) * (x_4 - x_5) \tag{3.21}$$

$$M_{x_5}^{(1)} = (x_5 - x_1) * (x_5 - x_2) * (x_5 - x_3) * (x_5 - x_4) \tag{3.22}$$

Yukarıdaki denklemlerde x_1=0, x_2=0,25, x_3=0,5, x_4=0,75 ve x_5=1 olarak yazıldığında $M_{x_1}^{(1)} =$ 0,09375 , $M_{x_2}^{(1)} = -0{,}02344$, $M_{x_3}^{(1)} =$ 0,015625 , $M_{x_4}^{(1)} = -0{,}02344$ ve $M_{x_5}^{(1)} = 0{,}09375$ olarak elde edilir.

Köşegen konumdaki ağırlıklı katsayıların değerleri;

$$a_{11}^{(1)} = -(a_{12}^{(1)} + a_{13}^{(1)} + a_{14}^{(1)} + a_{15}^{(1)}) \tag{3.23}$$

$$a_{22}^{(1)} = -(a_{21}^{(1)} + a_{23}^{(1)} + a_{24}^{(1)} + a_{25}^{(1)}) \tag{3.24}$$

$$a_{33}^{(1)} = -(a_{31}^{(1)} + a_{32}^{(1)} + a_{34}^{(1)} + a_{35}^{(1)})$$

$$a_{44}^{(1)} = -(a_{41}^{(1)} + a_{42}^{(1)} + a_{43}^{(1)} + a_{45}^{(1)}) \tag{3.25}$$

$$a_{55}^{(1)} = -(a_{51}^{(1)} + a_{52}^{(1)} + a_{53}^{(1)} + a_{54}^{(1)}) \tag{3.26}$$

olduğu için ilk olarak matris içinde diğer konumlardaki ağırlıklı katsayı değerleri;

$$a_{12}^{(1)} = \frac{M_{x_1}^{(1)}}{(x_1 - x_2) * M_{x_2}^{(1)}} = \frac{0,09375}{(0 - 0,25) * (-0,02344)} = 16 \tag{3.27}$$

$$a_{13}^{(1)} = \frac{M_{x_1}^{(1)}}{(x_1 - x_3) * M_{x_3}^{(1)}} = \frac{0,09375}{(0 - 0,5) * (0,015625)} = -12 \tag{3.28}$$

$$a_{14}^{(1)} = \frac{M_{x_1}^{(1)}}{(x_1 - x_4) * M_{x_4}^{(1)}} = \frac{0,09375}{(0 - 0,75) * (-0,02344)} = 5,33 \tag{3.29}$$

$$a_{15}^{(1)} = \frac{M_{x_1}^{(1)}}{(x_1 - x_5) * M_{x_5}^{(1)}} = \frac{0,09375}{(0 - 1) * (0,09375)} = -1 \tag{3.30}$$

$$a_{21}^{(1)} = \frac{M_{x_2}^{(1)}}{(x_2 - x_1) * M_{x_1}^{(1)}} = \frac{-0,02344}{(0,25 - 0) * (0,09375)} = -1 \tag{3.31}$$

$$a_{23}^{(1)} = \frac{M_{x_2}^{(1)}}{(x_2 - x_3) * M_{x_3}^{(1)}} = \frac{-0,02344}{(0,25 - 0,5) * (0,015625)} = 6 \tag{3.32}$$

$$a_{24}^{(1)} = \frac{M_{x_2}^{(1)}}{(x_2 - x_4) * M_{x_4}^{(1)}} = \frac{-0,02344}{(0,25 - 0,75) * (-0,02344)} = -2 \tag{3.33}$$

$$a_{25}^{(1)} = \frac{M_{x_2}^{(1)}}{(x_2 - x_5) * M_{x_5}^{(1)}} = \frac{-0,02344}{(0,25 - 1) * (0,09375)} = 0,33 \tag{3.34}$$

$$a_{31}^{(1)} = \frac{M_{x_3}^{(1)}}{(x_3 - x_1) * M_{x_1}^{(1)}} = \frac{0,015625}{(0,5 - 0) * (-0,02344)} = 0,33 \tag{3.35}$$

$$a_{32}^{(1)} = \frac{M_{x_3}^{(1)}}{(x_3 - x_2) * M_{x_2}^{(1)}} = \frac{0,015625}{(0,5 - 0,25) * (0,09375)} = -2,67 \tag{3.36}$$

$$a_{34}^{(1)} = \frac{M_{x_3}^{(1)}}{(x_3 - x_4) * M_{x_4}^{(1)}} = \frac{0,015625}{(0,5 - 0,75) * (-0,02344)} = 2,67 \tag{3.37}$$

$$a_{35}^{(1)} = \frac{M_{x_3}^{(1)}}{(x_3 - x_5) * M_{x_5}^{(1)}} = \frac{0,015625}{(0,5 - 1) * (0,09375)} = -0,33 \tag{3.38}$$

$$a_{41}^{(1)} = \frac{M_{x_4}^{(1)}}{(x_4 - x_1) * M_{x_1}^{(1)}} = \frac{-0,02344}{(0,75 - 0) * (0,09375)} = -0,33 \tag{3.39}$$

$$a_{42}^{(1)} = \frac{M_{x_4}^{(1)}}{(x_4 - x_2) * M_{x_2}^{(1)}} = \frac{-0,02344}{(0,75 - 0,25) * (-0,02344)} = 2 \tag{3.40}$$

$$a_{43}^{(1)}=\frac{M_{x_4}^{(1)}}{(x_4-x_3)*M_{x_3}^{(1)}}=\frac{-0,02344}{(0,75-0,5)*(0,015625)}=-6 \tag{3.41}$$

$$a_{45}^{(1)}=\frac{M_{x_4}^{(1)}}{(x_4-x_5)*M_{x_5}^{(1)}}=\frac{-0,02344}{(0,75-1)*(0,09375)}=1 \tag{3.42}$$

$$a_{51}^{(1)}=\frac{M_{x_5}^{(1)}}{(x_5-x_1)*M_{x_1}^{(1)}}=\frac{-0,02344}{(1-0)*(0,09375)}=1 \tag{3.43}$$

$$a_{52}^{(1)}=\frac{M_{x_5}^{(1)}}{(x_5-x_2)*M_{x_2}^{(1)}}=\frac{-0,02344}{(1-0,25)*(-0,02344)}=-5,33 \tag{3.44}$$

$$a_{53}^{(1)}=\frac{M_{x_5}^{(1)}}{(x_5-x_3)*M_{x_3}^{(1)}}=\frac{-0,02344}{(1-0,5)*(0,015625)}=12 \tag{3.45}$$

$$a_{54}^{(1)}=\frac{M_{x_5}^{(1)}}{(x_5-x_4)*M_{x_4}^{(1)}}=\frac{-0,02344}{(1-0,75)*(-0,02344)}=-16 \tag{3.46}$$

şeklinde bulunur. Buradan yola çıkarak $a_{11}^{(1)}$, $a_{22}^{(1)}$, $a_{33}^{(1)}$, $a_{44}^{(1)}$ ve $a_{55}^{(1)}$ ağırlıklı katsayılar;

$$a_{11}^{(1)} = -8,33 \tag{3.47}$$

$$a_{22}^{(1)} = -3,33 \tag{3.48}$$

$$a_{33}^{(1)} = 0 \tag{3.49}$$

$$a_{44}^{(1)} = 3,33 \tag{3.50}$$

$$a_{55}^{(1)} = 8,33 \tag{3.51}$$

olarak bulunur. Tüm veriler toparlandığında;

$$a = \begin{bmatrix} 8,33 & 16 & -12 & 5,33 & -1 \\ -1 & -3,33 & 6 & -2 & 0,33 \\ 0,33 & -2,67 & 0 & 2,66 & -0,33 \\ -0,33 & 2 & -6 & 3,33 & 1 \\ 1 & -5,33 & 12 & -16 & 8,33 \end{bmatrix} \tag{3.52}$$

5*5 ağırlıklı katsayılar matrisi elde edilmiş olur.

Aynı formülasyonlar (genel) kullanılarak düğüm sayıları çoğaltılabilir. Benzer şekilde işlemler sonucunda elde edilen 11*11 düğümlü ağırlıklı katsayılar matrisi;

$$
a = \begin{bmatrix}
-29,2 & 100 & -225 & 400 & -525 & 504 & -350 & 171,43 & -56,25 & 11,11 & -1 \\
-1 & 18,29 & 45 & -60 & 70 & -63 & 42 & -20 & 6,43 & -1,25 & 0,11 \\
0,11 & -2,22 & -12,18 & 26,67 & -23,33 & 18,67 & -11,67 & 5,33 & -1,67 & 0,32 & -0,028 \\
-0,03 & 0,42 & -3,75 & -7,60 & 17,5 & -10,5 & 5,83 & -2,5 & 0,75 & -0,14 & 0,012 \\
0,01 & -0,16 & 1,08 & -5,71 & -3,67 & 12 & -5 & 1,90 & -0,54 & 0,095 & -0,008 \\
-0,008 & 0,10 & -0,60 & 2,38 & -8,33 & 0 & 8,33 & -2,38 & 0,60 & -0,099 & 0,008 \\
0,008 & -0,10 & 0,54 & -1,90 & 5 & -12 & 3,67 & 5,71 & -1,07 & 0,16 & -0,012 \\
-0,012 & 0,14 & -0,75 & 2,5 & -5,83 & 10,5 & -17,5 & 7,60 & 3,75 & -0,42 & 0,028 \\
0,028 & -0,32 & 1,67 & -5,33 & 11,67 & -18,67 & 23,33 & -26,67 & 12,18 & 2,22 & -0,11 \\
-0,11 & 1,25 & -6,43 & 20 & -42 & 63 & -70 & 60 & -45 & 18,29 & 1 \\
1 & -11,11 & 56,25 & -171,43 & 350 & -504 & 525 & -400 & 225 & -100 & 29,29
\end{bmatrix} \quad (3.53)
$$

şeklinde verilmiştir.

3.2.4 Ağırlıklı Katsayılar Matrisinde İleri Farklar, Merkezi Farklar ve Geri Farklar Metodu Birlikte Kullanılarak Düğüm Sayılarının Arttırılması

Yukarıdaki bölümde seçilen düğüm sayısına göre ağırlıklı katsayılar matrislerinin elde edilmesi açıklanmıştır. Bu bölümde ise yukarıdaki metot ile sonlu farklar metodunun birlikte kullanılmasıyla ağırlıklı katsayıların elde edilmesi üzerinde durulmuştur. Örneğin 9*9 katsayılar matrisi elde etmek için yukarıda verilen 5*5 ağırlıklı katsayılar matrisi kullanılarak elde edilebilir.

Tablo 3.1: 5*5 düğümlü ağırlıklı katsayılar matrisi

-8,333	16	-12	5,3333	-1
-1	-3,333	6	-2	0,3333
0,3333	-2,667	0	2,6667	-0,3333
-0,333	2	-6	3,3333	1
1	-5,333	12	-16	8,3333

Tablo 3.2: 9*9 düğümlü matrisinin sonlu farklar metodu ile birlikte oluşturulması

-8,333	16	-12	5,3333	-1	0	0	0	0	İleri Farklar Metodu ile
-1	-3,333	6	-2	0,3333	0	0	0	0	
0,3333	-2,667	0	2,6667	-0,333	0	0	0	0	Merkezi Farklar Metodu ile
0	0,3333	-2,667	0	2,6667	-0,333	0	0	0	
0	0	0,3333	-2,667	0	2,6667	-0,333	0	0	
0	0	0	0,3333	-2,667	0	2,6667	-0,333	0	
0	0	0	0	0,3333	-2,667	0	2,6667	-0,333	
0	0	0	0	-0,333	2	-6	3,333	1	Geri Farklar Metodu ile
0	0	0	0	1	-5,333	12	-16	8,3333	

Tablo 3.2’de verildiği gibi 9*9 matris elde edilir. 5*5 matrisin üçüncü satırı matrisin merkez satırıdır. Bu sebeple 5*5 matrisin ilk iki satırı 9*9 matrisin ilk iki satırına (ileri farklar metodu) yerleştirilir. Aynı şekilde 5*5 düğümlü matrisin son iki satırı 9*9 düğümlü matrisin son iki satırına (geri farklar metodu) yerleştirilir. Merkezi satır ise birer kaydırılarak (merkezi farklar metodu) 9*9 düğümlü matris içinde yerleştirilir.

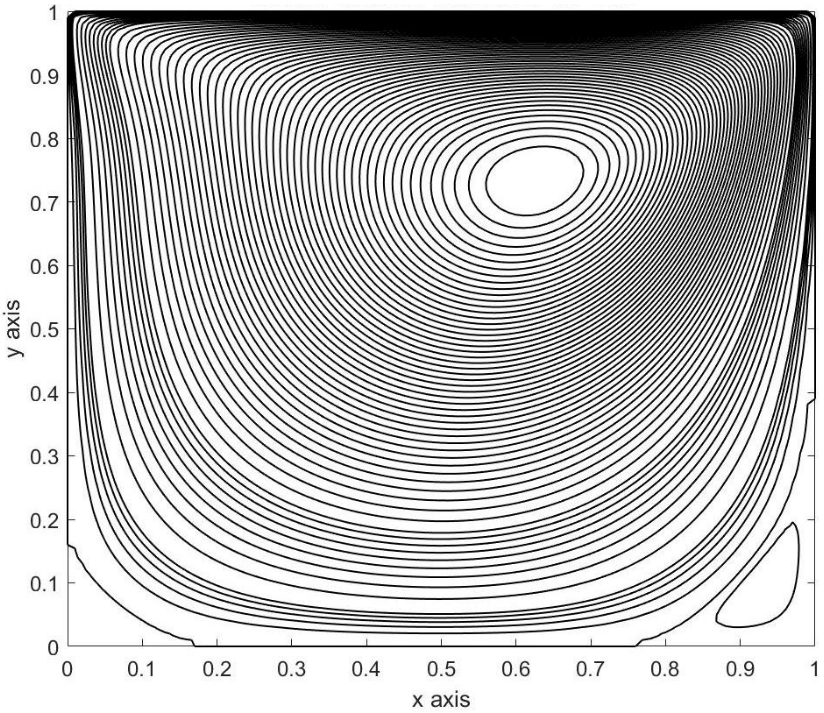
Üzerinde çalıştığımız kavitede 101*101 düğüm kullanılmıştır. Yukarıda verilmiş olan 11*11 düğümlü ağırlıklı katsayı matrisinden yola çıkılmış olup yukarıdaki örnekteki gibi 11*11 düğümlü matrisin ilk ve son 5 satırı 101*101 düğümlü matrisin ilk ve son kısmına yerleştirilmiştir. 11*11 düğümlü ağırlıklı katsayı matrisinin merkezi matrisi her satırda birer kaydırılarak (101 satır) 101*101 düğümlü matris tamamlanmıştır.

3.2.5 Değişik Sınır Şartlarında Örnek Çözümlerin Gösterilmesi

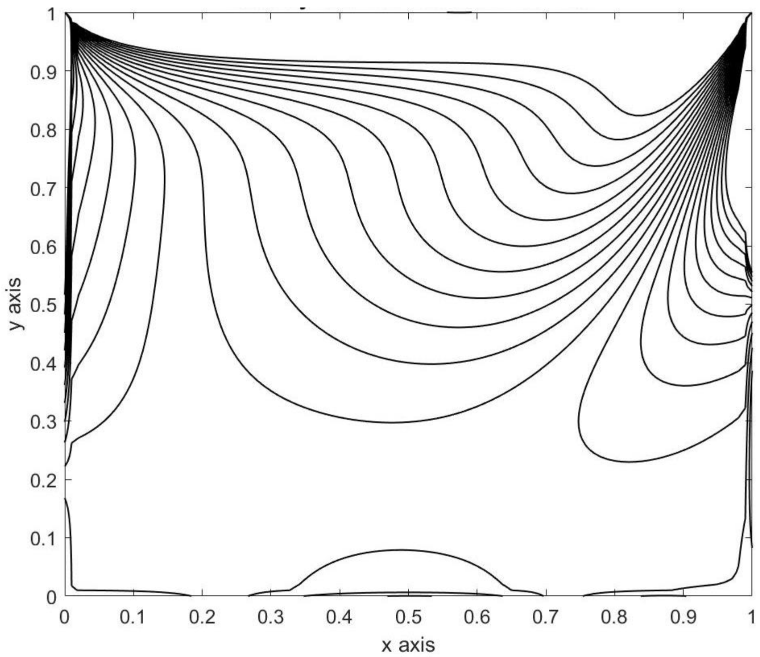
Bu kısma kadar DQ metodu içeriği ve kapak ile sürülen kavite akışı çözümünde önemli noktalara değinilmiştir. Metot ayrıntıları açıklandıktan sonra kavite akışında sınır şartlarının belirlenmesi, akışkan özelliği gibi uygulama adımları oluşturulmuştur.

Reynolds sayısının değeri “100” olarak verilmiş örneklerden başlanarak “2500“ değerine kadar çıkılmıştır. Örneklerde kavitenin düğüm sayıları 101x101, 101x201 ve 101x301 olarak denenmiştir. Ayrıca farklı şartlarda verilen hızlarda sonuçlarda görselleştirilmiştir. DQ Metodu ile farklı parametrelerle oluşturulan sürekliliği sağlanmış örnek sonuçlar aşağıda verilmiştir;

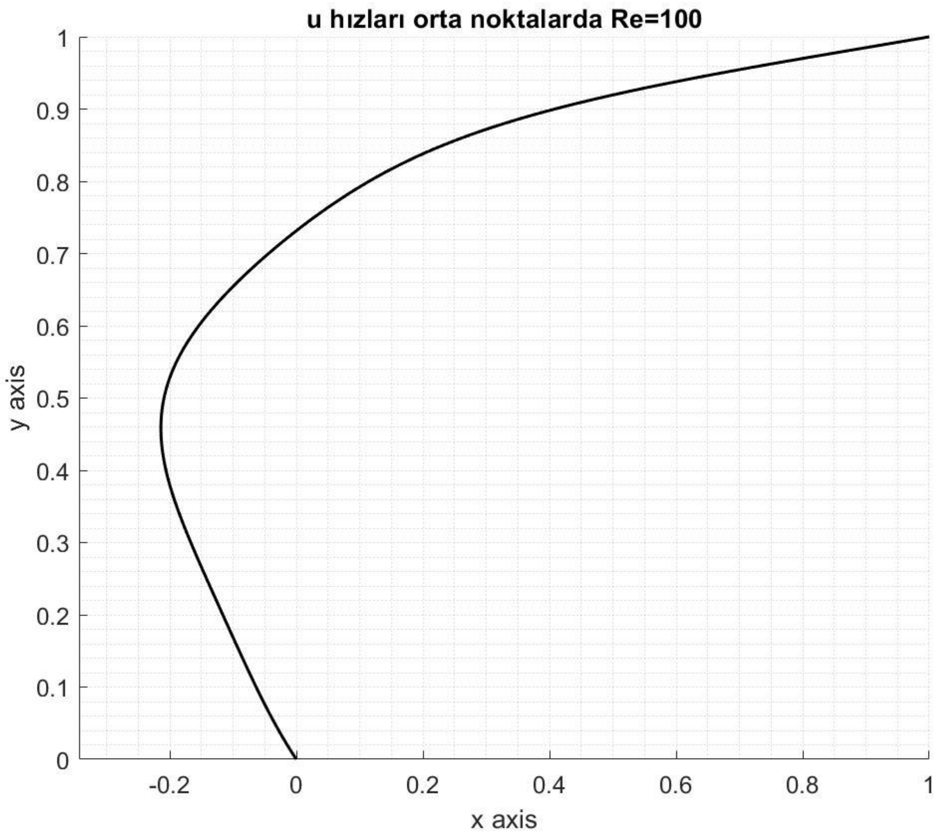
Örnek sonuç 1: (101x101) düğümlü kavitede y=1 ekseni (kavitenin üst duvarı) boyunca u=1 hızı verilen ve Re=100 için sonuçlar şekil 3.4, 3.5, 3.6 ve 3.7’de verilmiştir.



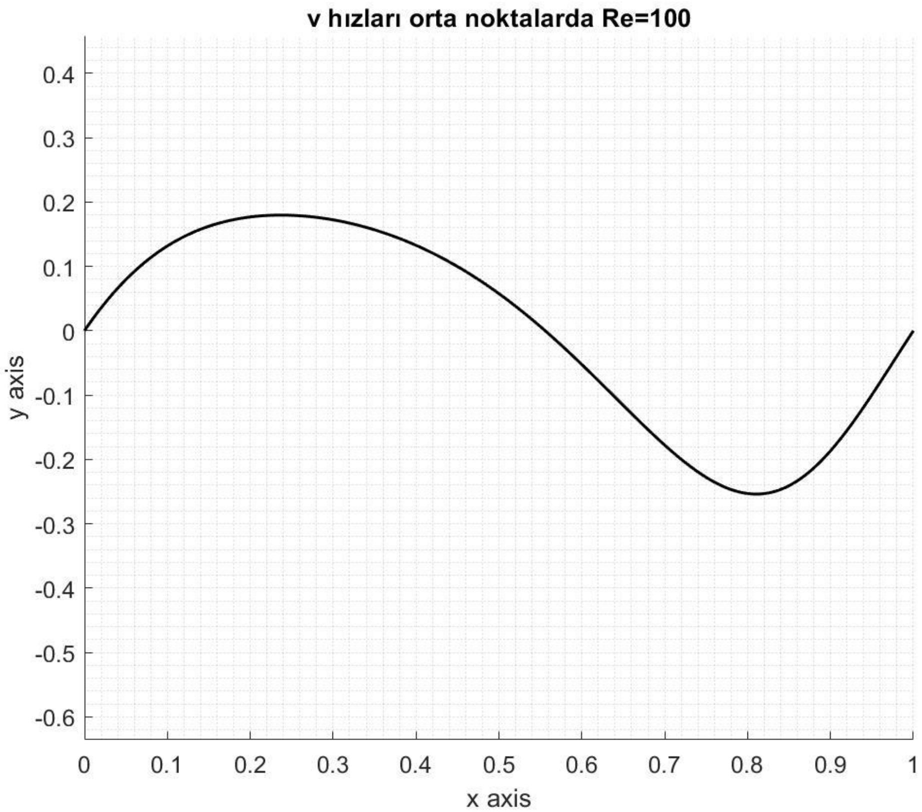
Şekil 3.4: Tek yönlü akış, (101 x 101) düğüm, Reynolds =100 için akım fonksiyonu



Şekil 3.5: Tek yönlü akış, (101 x 101) düğüm, Reynolds =100 için vortisite

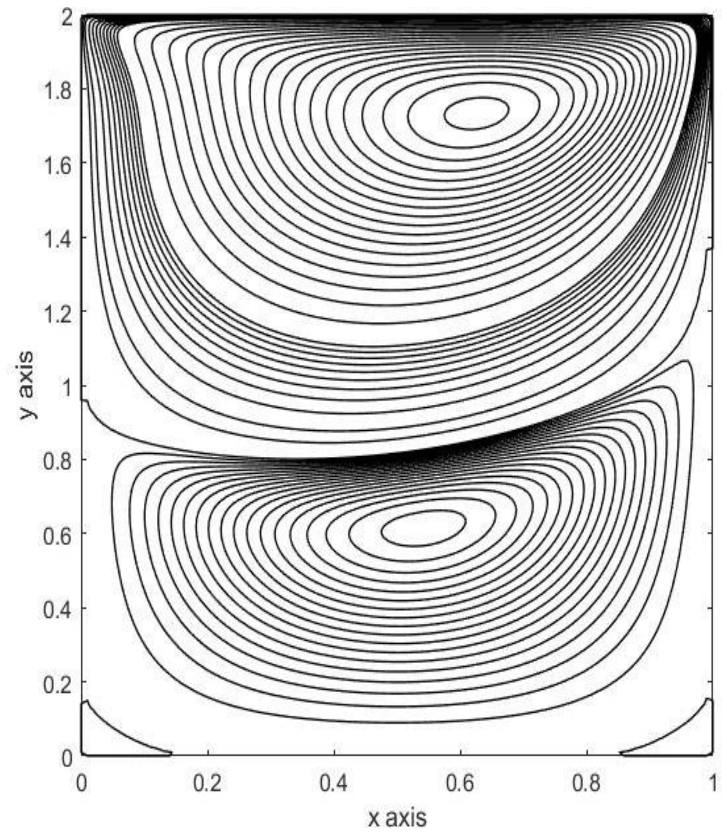


Şekil 3.6: Tek yönlü akış, (101 x 101) düğüm, Reynolds =100 için orta noktalarda u hızları



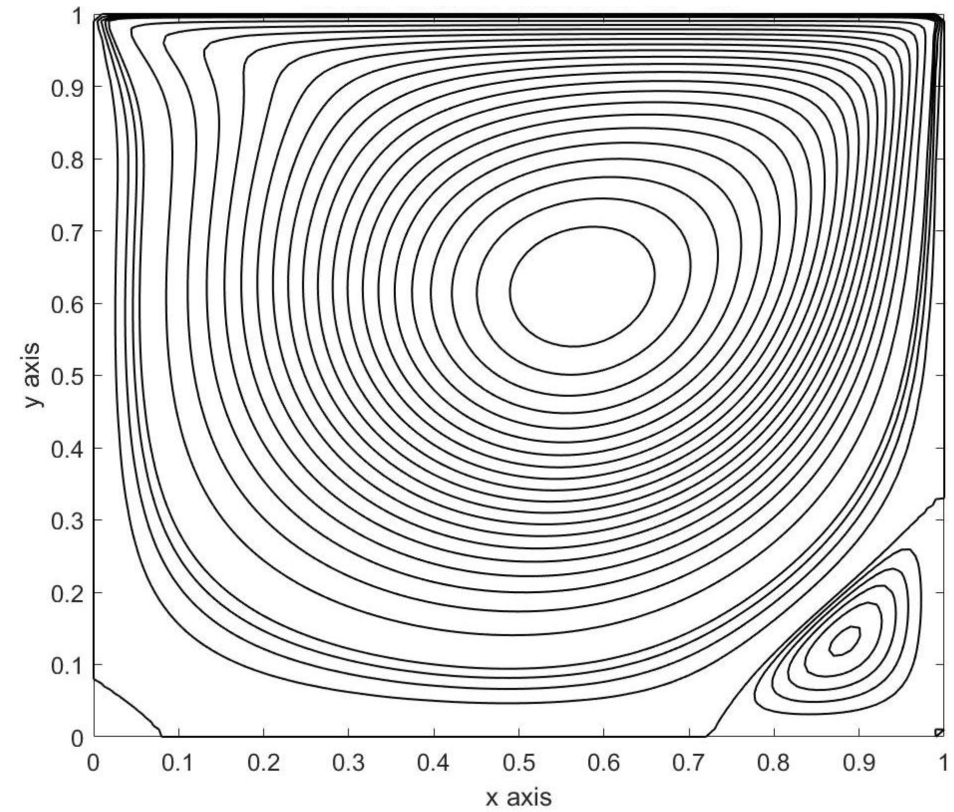
Şekil 3.7: Tek yönlü akış, (101 x 101) düğüm, Reynolds =100 için orta noktalarda v hızları

Örnek sonuç 2: (101x201) düğümlü kavitede y=1 ekseni (kavitenin üst duvarı) boyunca u=1 hızı verilen ve Re=100 için sonuçlar şekil 3.6'da verilmiştir.

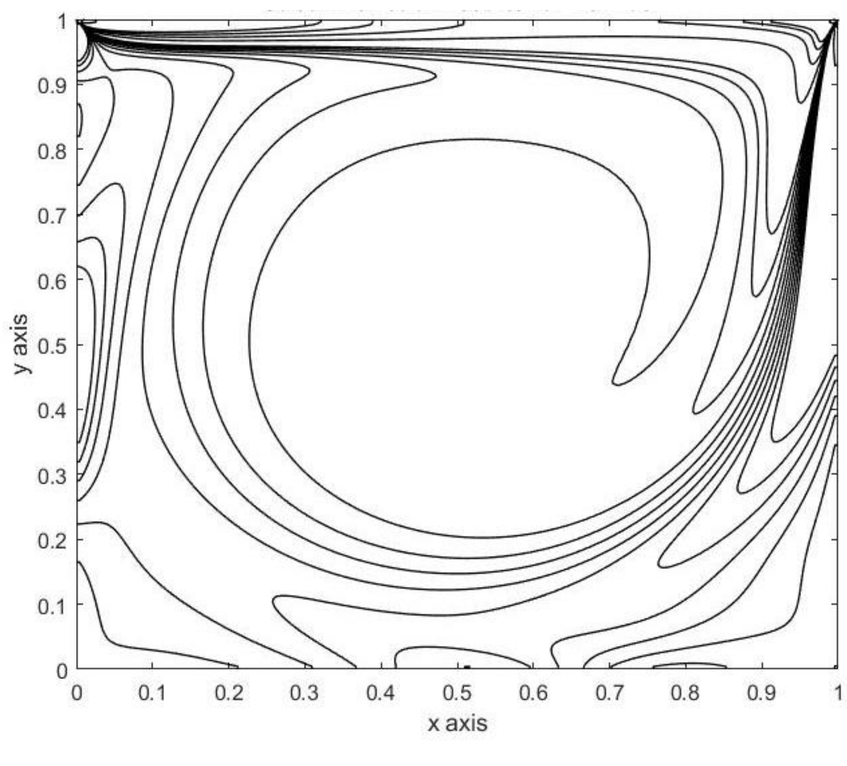


Şekil 3.8: Tek yönlü akış, (101 x 201) düğüm, Reynolds=100 için akım fonksiyonu

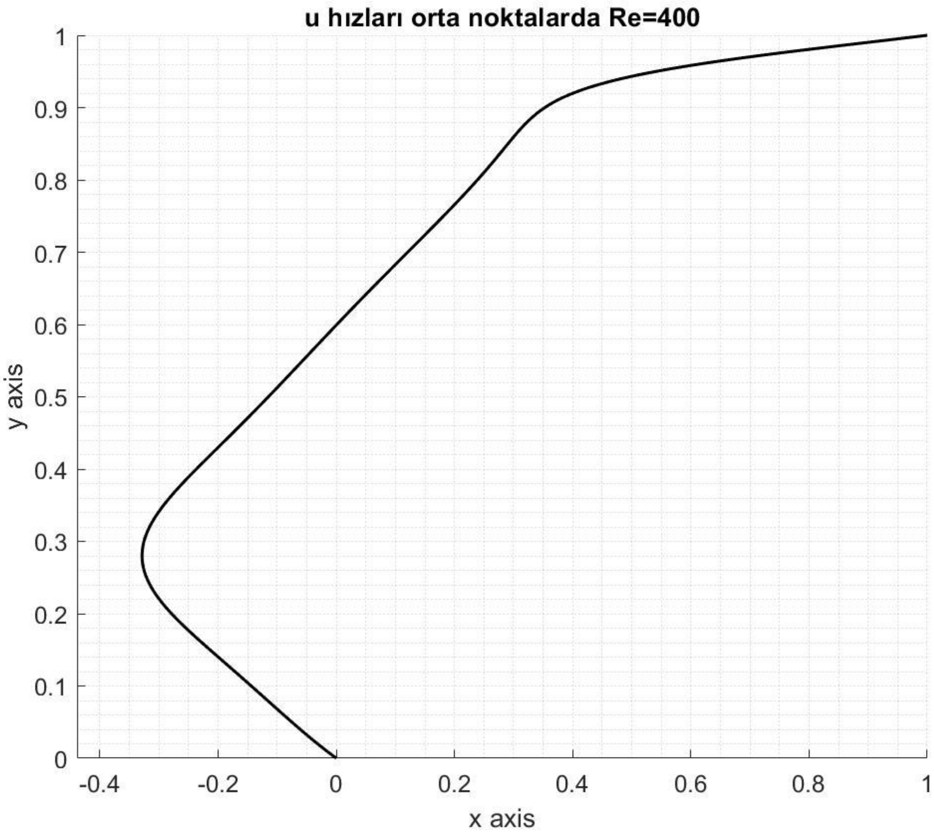
Örnek sonuç 3: (101x101) düğümlü bir kavitede y=1 ekseni (kavitenin üst duvar) boyunca u=1 hızı verilen ve Re=400 için sonuçlar şekil 3.9, 3.10, 3.11 ve 3.12'de verilmiştir.



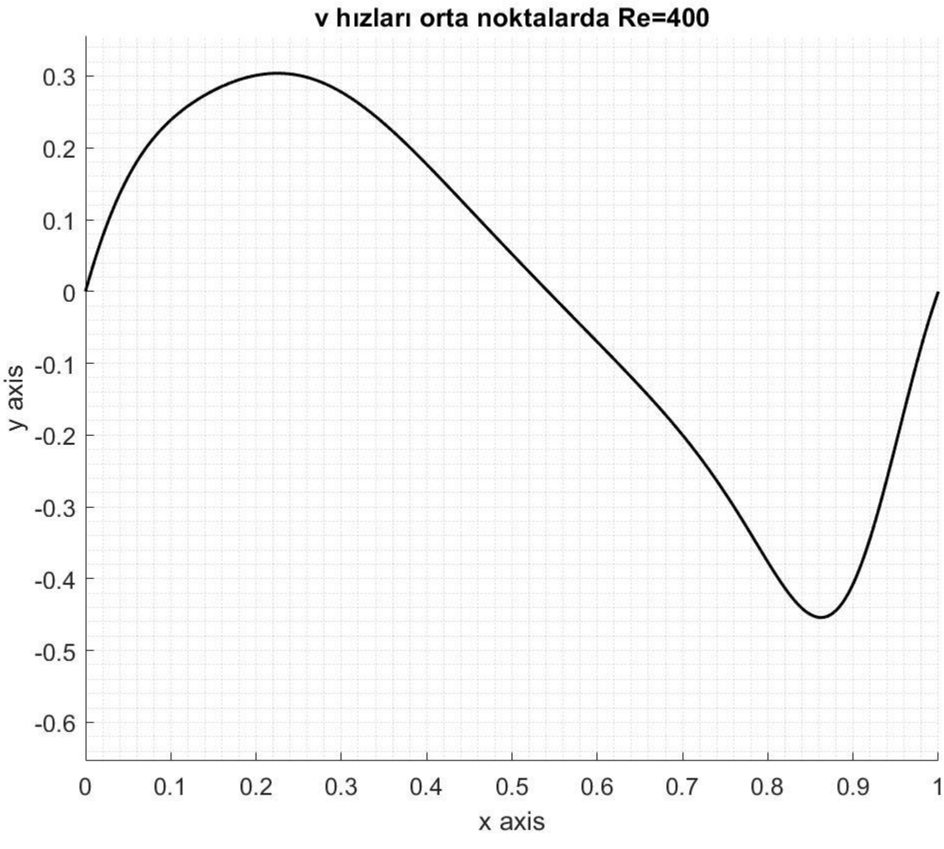
Şekil 3.9: Tek yönlü akış, (101 x 101) düğüm, Reynolds= 400 için akım fonksiyonu



Şekil 3.10: Tek yönlü akış, (101 x 101) düğüm, Reynolds=400 için vortisite



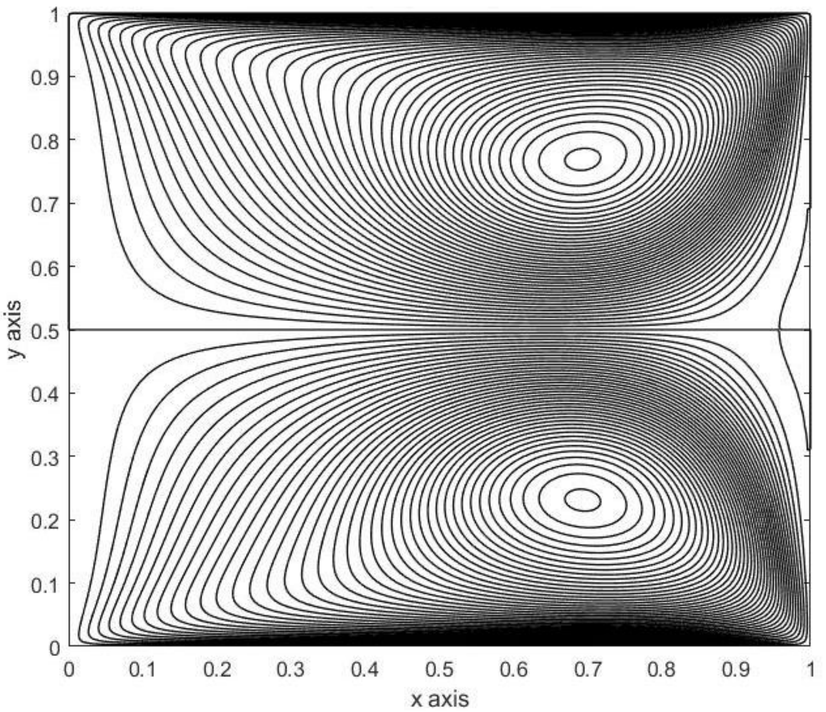
Şekil 3.11: Tek yönlü akış, (101 x 101) düğüm, Reynolds=400 için orta noktalarda u hızları



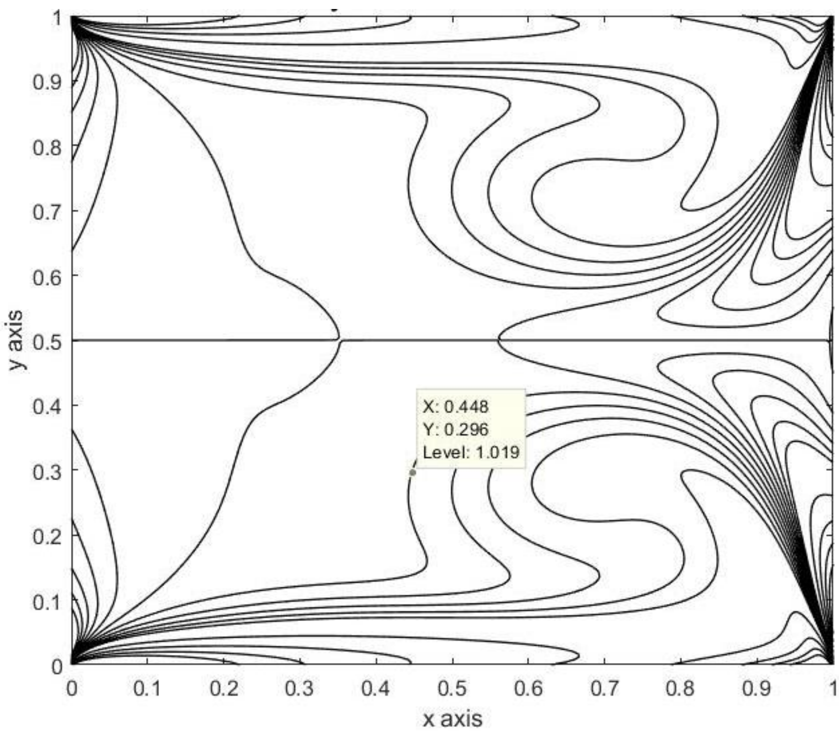
Şekil 3.12: Tek yönlü akış, (101 x 101) düğüm, Reynolds=400 için orta noktalarda v hızları

Örnek sonuç 4: (101x101) düğümlü kavitede y=1 ve y=0 eksenleri (kavitenin üst ve alt duvarı) boyunca paralel yönde sırasıyla u=1 ve u=-1 hızları uygulanan ve Re=400 özelliğindeki akışkan için sonuçlar şekil 3.13 ve 3.14'te verilmiştir.

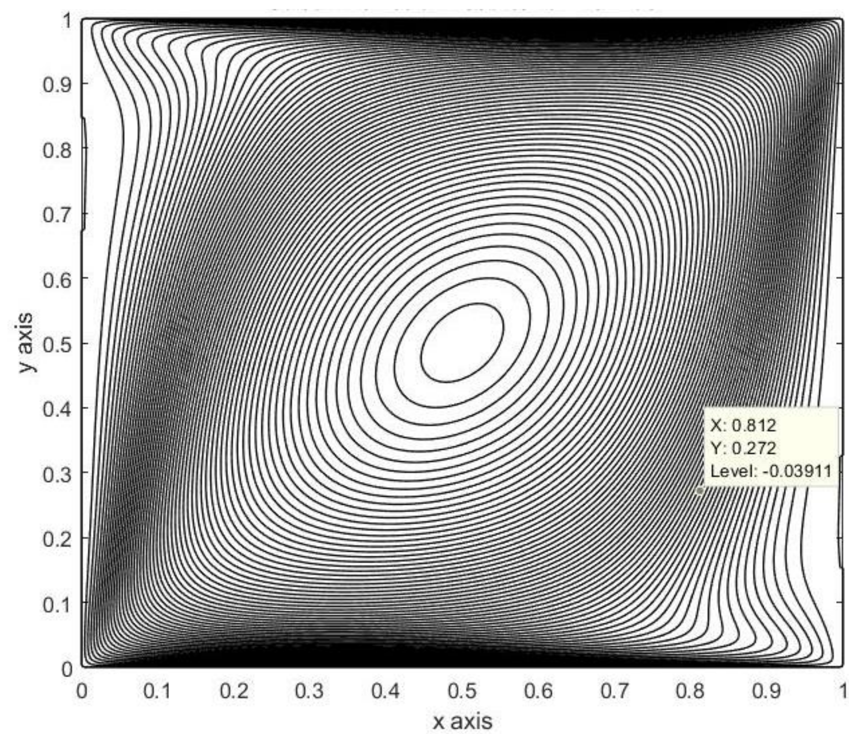
Ayrıca aynı örneğin çift yönlü ters akış için çıkan sonuç şekil 3.15'te verilmiştir.



Şekil 3.13: Çift yönlü paralel akış, (101 x 101) düğüm, Reynolds= 400 için akım fonksiyonu

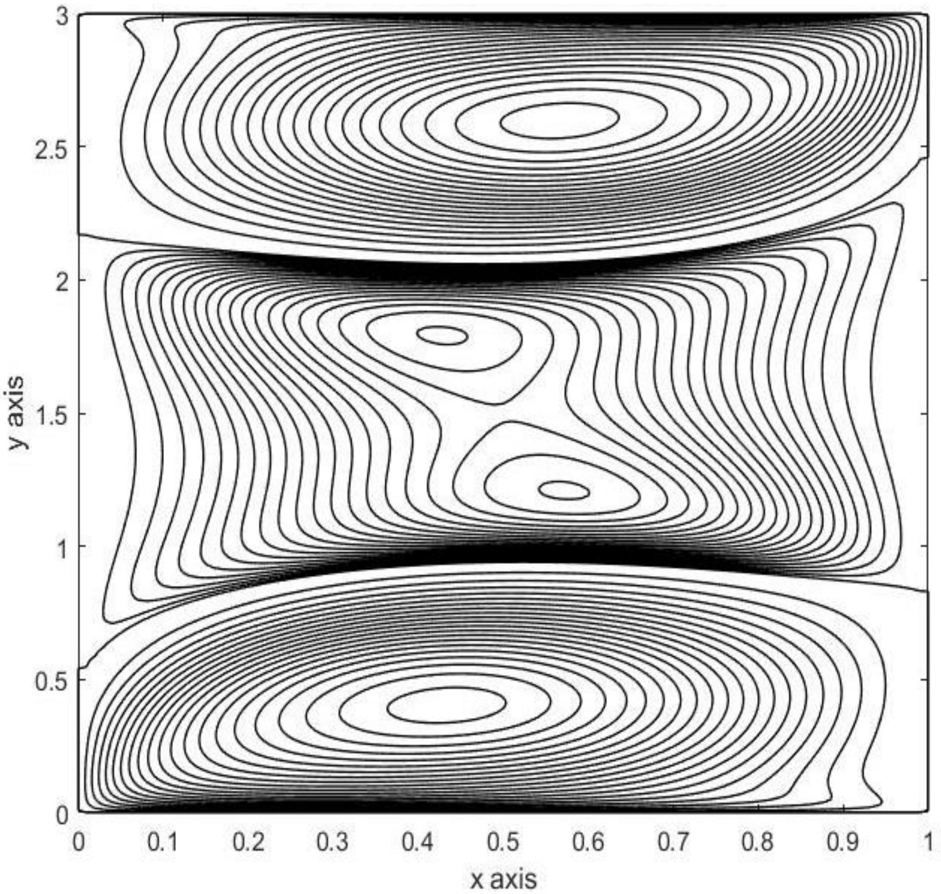


Şekil 3.14: Çift yönlü paralel akış, (101 x 101) düğüm, Reynolds= 400 için vortisite



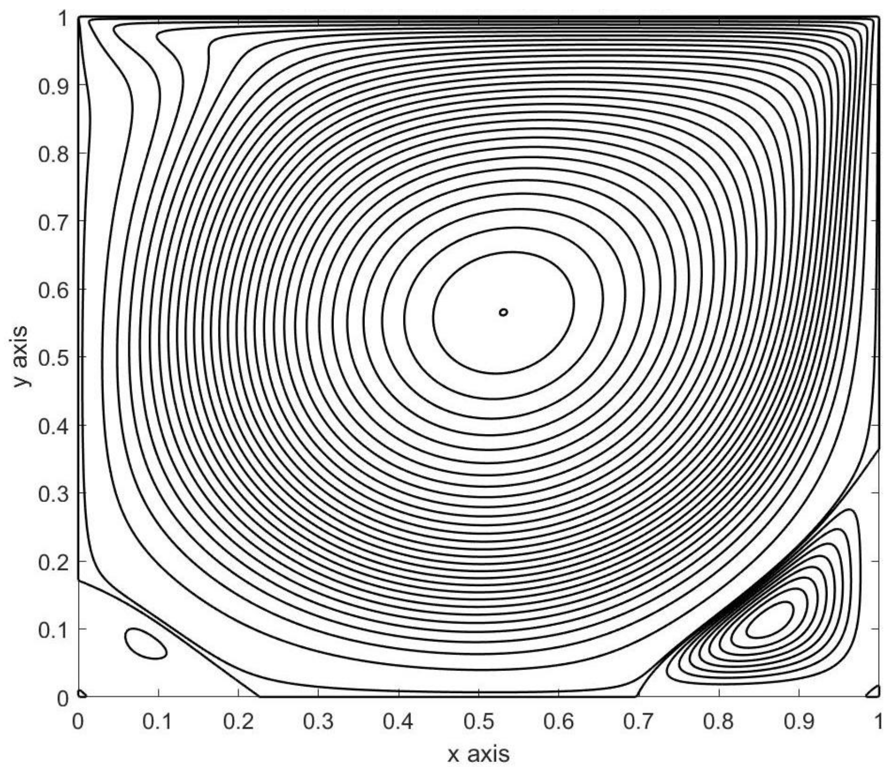
Şekil 3.15: Çift yönlü ters akış, (101 x 101) düğüm, Reynolds= 400 için akım fonksiyonu

Örnek sonuç 5: (101x301) düğümlü bir kavitede y=1 ve y=0 eksenleri (kavitenin üst ve alt duvarı) boyunca ters yönde sırasıyla u=1 ve u=-1 hızları uygulanan ve Re=400 özelliğindeki akışkan için sonuç şekil 3.16'da verilmiştir.

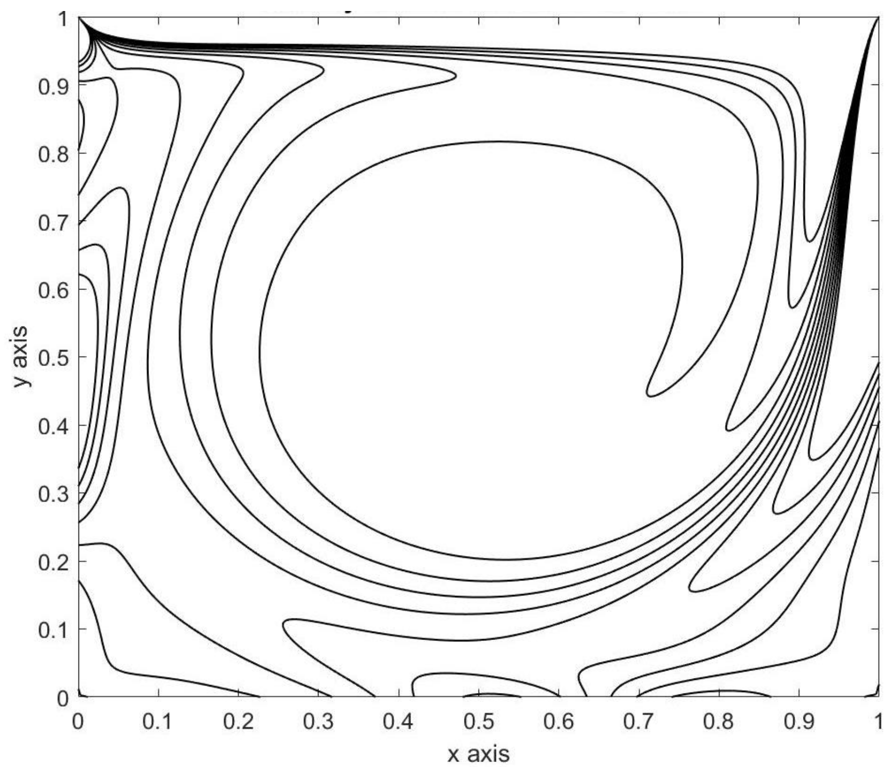


Şekil 3.16: Çift yönlü ters akış, (101 x 301) düğüm, Reynolds= 400 için akım fonksiyonu

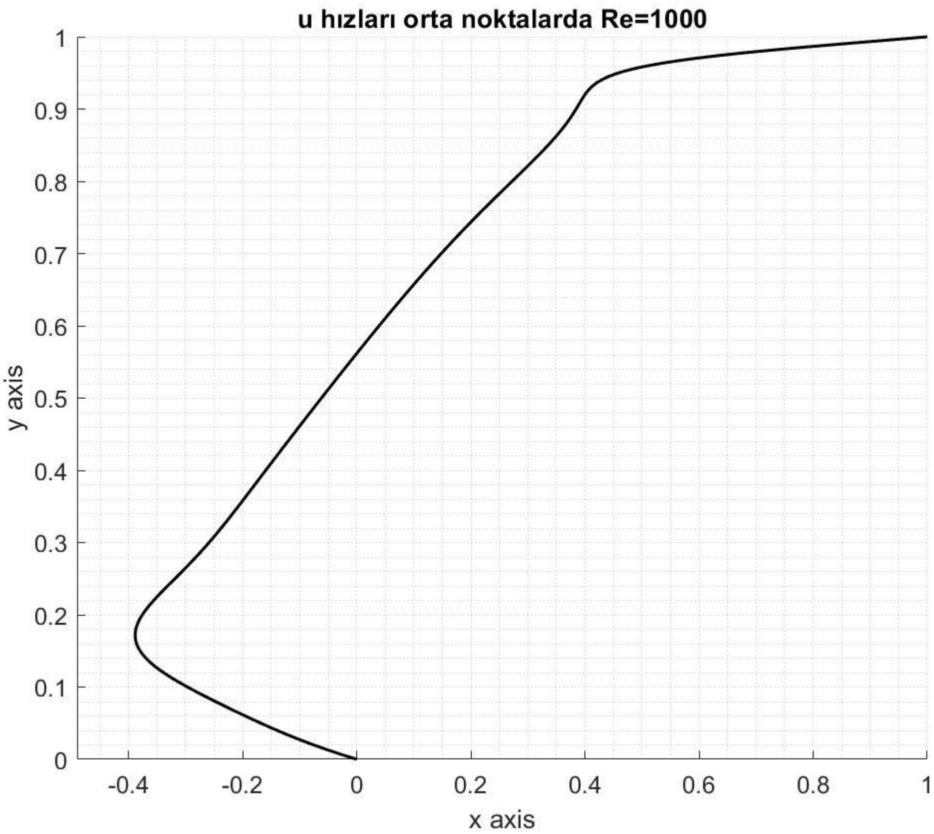
Örnek sonuç 6: (101x101) düğümlü kavitede y=1 ekseni (kavitenin üst duvarı) boyunca u=1 hızı verilen ve Re=1000 için sonuçlar şekil 3.17-3.20 aralığında verilmiştir.



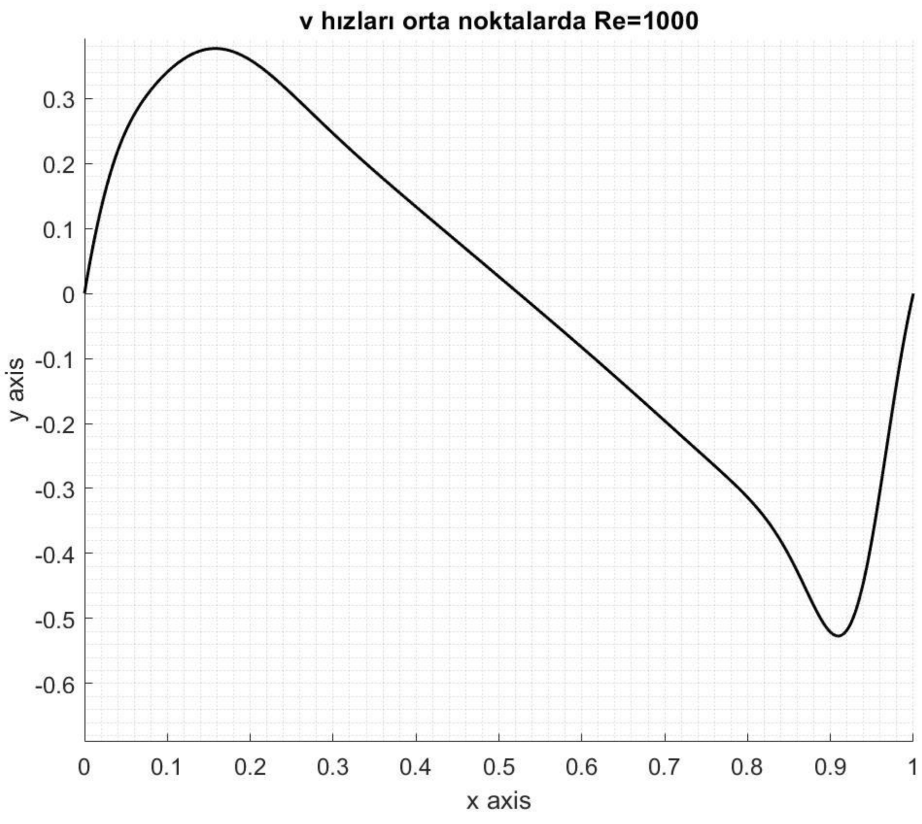
Şekil 3.17: Tek yönlü akış, (101 x 101) düğüm, Reynolds=1000 için akım fonksiyonu



Şekil 3.18: Tek yönlü akış, (101 x 101) düğüm, Reynolds=1000 için vortisite

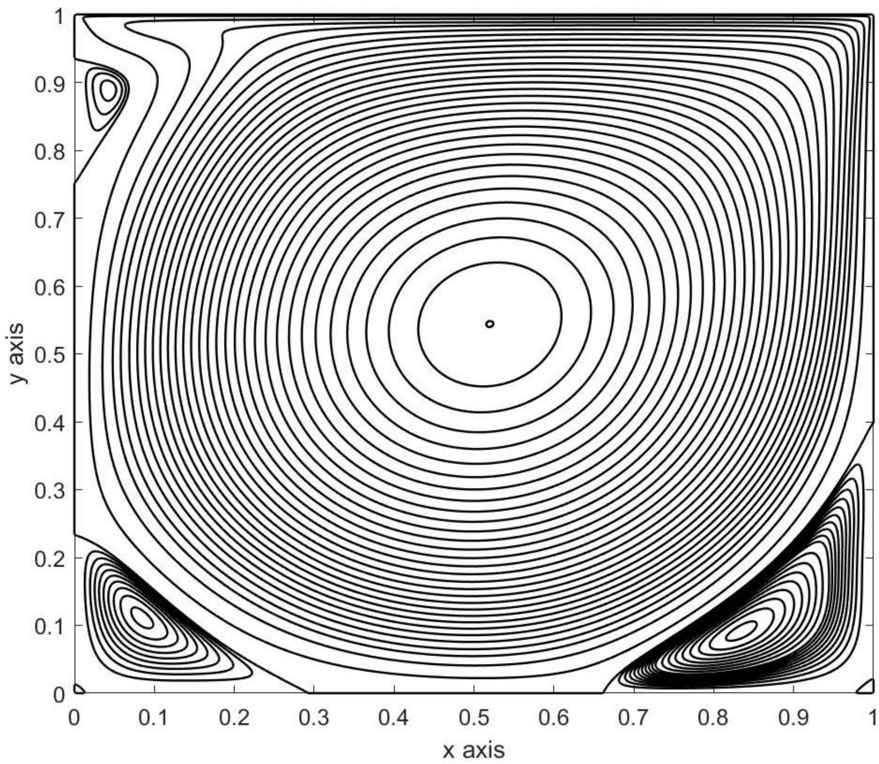


Şekil 3.19: Tek yönlü akış, (101 x 101) düğüm, Reynolds=1000 için orta noktalarda u hızları

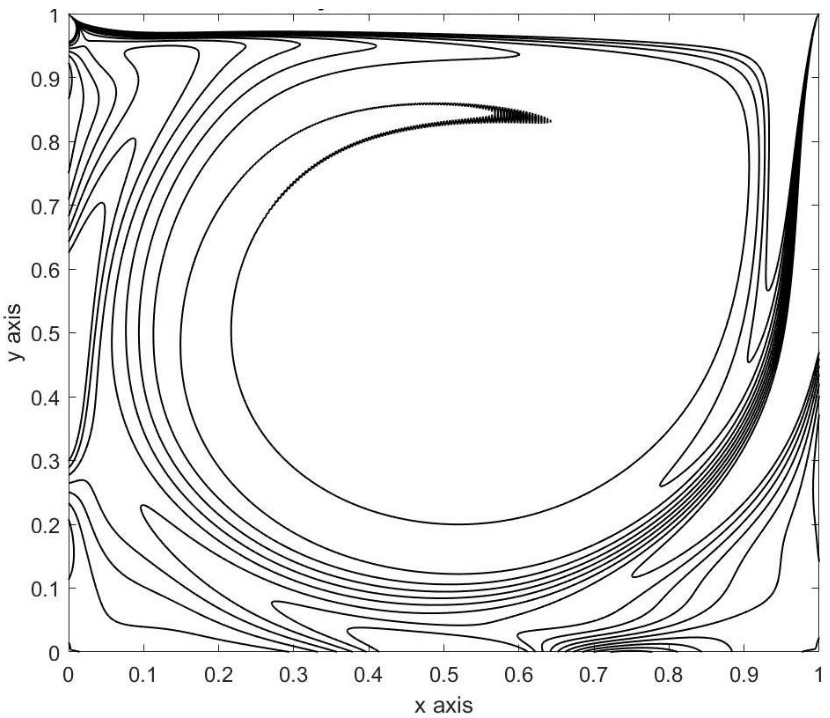


Şekil 3.20: Tek yönlü akış, (101 x 101) düğüm, Reynolds=1000 için orta noktalarda v hızları

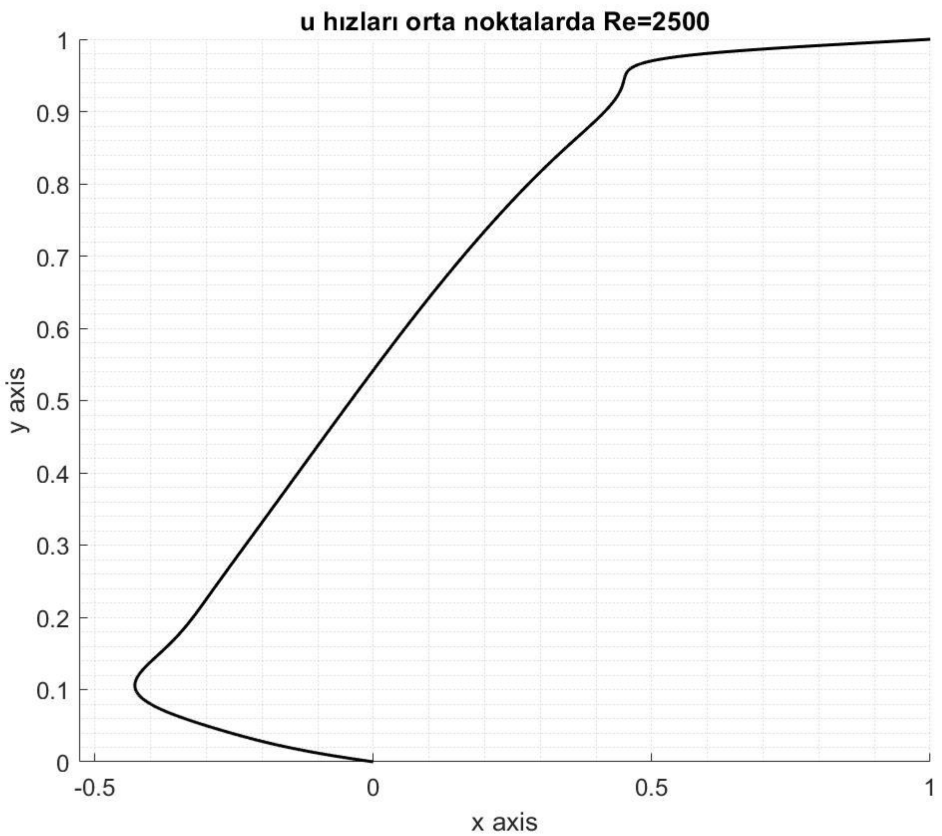
Örnek sonuç 7: (101x101) düğümlü kavitede y=1 ekseni (kavitenin üst duvarı) boyunca u=1 hızı verilen ve Re=1000 için sonuçlar şekil 3.21 ve 3.24 aralığında verilmiştir.



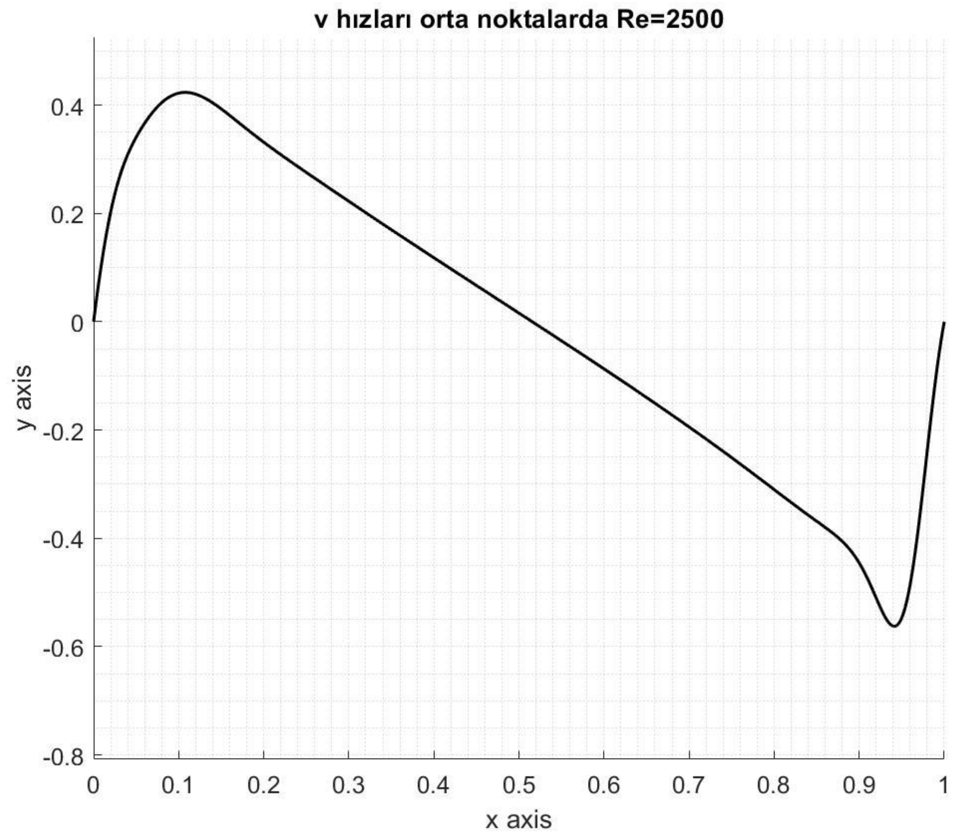
Şekil 3.21: Tek yönlü akış, (101 x 101) düğüm, reynolds=2500 için akım fonksiyonu



Şekil 3.22: Tek yönlü akış, (101 x 101) düğüm, Reynolds=2500 için vortisite



Şekil 3.23: Tek yönlü akış, (101 x 101) düğüm, Reynolds=2500 için orta noktalarda u hızları



Şekil 3.24: Tek yönlü akış, (101 x 101) düğüm, Reynolds=2500 için orta noktalarda v hızları

4. BULGULAR

Bu bölümde, kavite içindeki x-y koordinatları verilen belirli noktalardaki DQ metodu ile elde edilen sonuçlar ile farklı çalışmalardaki değerler karşılaştırılmıştır.

Tablo 4.1: Bulguların karşılaştırılması

Reynolds Sayısı	Kaynak	Minimum Akım Fonksiyonu ψ	Vortisite ω	x	y
100	Bu çalışma	-0.10352048	-3.17098231	0.62	0.74
100	Ertürk (Erturk, 2009)	−0.1035173	−3.181031	0.62	0.74
400	Bu çalışma	-0.1139886	-2.2953466	0.55	0.61
400	Ghia ve Diğ.	-0.113909	-2.29469	0.55	0.61
1000	Bu çalışma	-0.11893575	-2.0677164	0.53	0.57
1000	Ertürk ve Gokcol (Erturk ve Gokcol, 2006)	-0.118938	−2.067760	0.53	0.57
1000	Barragy ve Carey (Barragy ve Carey 1997)	−0.11893	-	-	-
1000	Botella ve Peyret (Botella ve Peyret, 1998)	−0.1189366	−2.067753	0.53	0.57
2500	Bu çalışma	-0.1214700	-1.9749238	0.52	0.54
2500	Ertürk (Erturk, 2009)	-0.1212883	-1.973684	0.52	0.54
2500	Ertürk ve Gokcol (Erturk ve Gokcol, 2006)	−0.121472	−1.976132	0.52	0.54
2500	Ertürk (Erturk ve diğ 2005)	−0.121470	−1.976117	-	-
2500	Barragy ve Carey (Barragy ve Carey 1997)	−0.1214621	-	0.52	0.54

Tablo 4.1'de de görüldüğü gibi bu çalışmada DQM metodu ile elde ettiğimiz sonuçlar diğer çalışmalardaki değerlerle doğrulanmıştır. DQ metodu ile ele aldığımız değişik sınır şartlarındaki kavite akış probleminde düğüm sayılarını daha kapsamlı ve doğru sonuçlar elde edebildik.

Dikdörtgen kavite üzerinde yaptığımız bu çalışmadaki sonuçlar; sadece kavitenin iç komşuluğunda olan noktaları değil, aynı zamanda kavitenin gerçek geometrik sınır noktalarını da tam olarak karşılamaktadır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

DQ metodu Diferansiyel denklemlerin sayısal analizinde kullanılan metotlardan bir tanesidir. Bu metodu kullanmanın olumlu tarafı, sınır değer problemlerine kolaylıkla uygulanabilmesidir. Diğer önemli bir durum ise Diferansiyel Quadrature Metodunda (DQM) kullanılan katsayılar matrislerinin sabit olup, çözümden çözüme değişmemesidir. Bu metodu kullanmanın olumsuz tarafı ise belirlenen nokta sayısının kısıtlı olmasıdır. Çoğu diferansiyel denklemin sayısal çözümüne kolaylıkla uygulanabildiği gibi lineer olmayan diferansiyel denklemlerin analizinde de kullanılabilmektedir (Girgin 2020).

Bu çalışmayla akışkanlar mekaniği N-S denklemi kullanılarak kapak ile sürülen kavite akışı problemi Diferansiyel Quadrature Metodu (DQM) ile çözülmüş olup DQM metodu ile çözüm adımlarının daha az olduğu buna karşılık elde edilen sonuçların daha hassas olduğu gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

Barragy E, Carey GF., “Stream function-vorticity driven cavity solutions using p finite elements”, Computers and Fluids, 26:453–468, (1997)

Botella O, Peyret R., “Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow”, Computers and Fluids, 27:421–433, (1998)

Çengel, Y. A., John, M., Fluid mechanics : fundamentals and applications, New York: CimbalaMcGraw-Hill, (2014)

Demir, E., “Lineer Olmayan Titreşim Problemlerinin Çözümünde Birleşim (Diferansiyel Quadrature Ve Simülasyon) Metodu”, Doktora, Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Denizli, (2009)

Erturk E, Corke TC, Gokcol C. “Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers”, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 48:747–774, (2005)

Erturk E, Gokcol C., “Fourth order compact formulation of Navier–Stokes equations and driven cavity flow at high Reynolds numbers”, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 50: 421–436, (2006)

Erturk, E., *“*Comparison of wide and compact fourth-order formulations of the Navier–Stokes equations*”,*60, 992-1010, (2009)

Ghia U, Ghia K. N., Shin C. T., “High-Re solutions for incompressible flow using the Navier Stokes equations and a multigrid method”, Journal of Computational Physics, 48 (3): 387–411, (1982)

Girgin, Z., “Combining Differential Quadrature Method with Simulation Technique to Solve Non-linear Differential Equations”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 75,722-734, (2008).

Girgin, Z., “Sayısal Analiz Ders Notları”, Pamukkale Üniversitesi Mühendislik Fak. Makine Mühendisliği, Denizli, (2020).

Özsoy, E., Aslan, A. R., *"*Üç boyutlu bir kavite üzerindeki sıkıştırılamaz akışın sayısal bir yöntemle analizi*",* İTÜDERGİSİ/d, 10 (3), 149-159, (2011).

Quan, J. R., and Chang, "C. T. New Insights in Solving Distributed System Equations by The Quadrature Methods" (1989a), I. Computational Chemical Engineering, 13: 779-788, (1989)

Quan, J. R., and Chang, C. T., "New Insights in Solving Distributed System Equations by The Quadrature Methods (1989b), II. Computational Chemical Engineering*"*, 13: 1017-1024, (1989)

Yurtseven, A., Çoşgun, T., Vardar, N., "Kapak Etkili Hücre İçindeki Türbülanslı Akıma Taban Geometrisinin Etkisi", Politeknik Dergisi, 22 (3), 531 – 543, (2019).