

# DİFERANSİYEL QUADRATURE ELEMAN METODU (DQEM)'NUN KİRİŞ ELEMANLARIN TİTREŞİM ANALİZİNE UYGULANMASI

Zekeriya GİRGIN, Ersin DEMİR, Cem KOL

Pamukkale Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Çamlık/Denizli

Geliş Tarihi : 29.03.2003

## ÖZET

Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu (GDQM); fen ve mühendislik alanındaki diferansiyel denklemlerin direk çözümü için geliştirilmiş alternatif bir metottur. Bu çalışmada, GDQM'nin yeni bir versiyonu olan DQEM ile kiriş elemanların titreşim analizleri yapılmıştır. Bu metotta fiziksel sistem birden fazla parçaya bölünebilmektedir. DQEM ile titreşim analizi yapılırken ayrıca bir kütle matrisine ihtiyaç duyulmamaktadır. Metot daha önce geliştirilmiş olan GDQM'nin sağladığı tüm avantajları kullanmakla birlikte programlama kolaylığı ve hesaplama süresinin kısalığı ile etkinlik sağlamaktadır. Metot detaylı olarak ele alınmış, verilen sayısal örneklerle elde edilen sonuçların, önceki çalışmalarla uyumlu olduğu gösterilmiştir.

**Anahtar Kelimeler :** Diferansiyel quadrature eleman metodu, Kiriş elemanlar, Titreşim analizi

## APPLICATION OF THE DIFFERENTIAL QUADRATURE ELEMENT METHOD (DQEM) TO VIBRATION ANALYSIS OF BEAM ELEMENTS

### ABSTRACT

The Generalized Differential Quadrature Method (GDQM) is an alternative method direct solution of differential equations on the field of engineering and science. In this study, DQEM which is a new version of GDQM, is presented and applied to vibration analysis of beam elements. In this method, a physical system can be divided into more than one element and no need mass matrix to calculate the natural frequencies of beams. The method has all of the advantages of GDQM and is an effective method with the easy programmability and short computational time. The method considered in details and with the given numerical examples, it is shown that the result are in good agreement with the previous studies.

**Key Words :** Differential quadrature element method, Beam elements, Vibration analysis

### 1. GİRİŞ

Mühendislik problemlerinde, yapı elemanlarının titreşim analizi için birçok metot geliştirilmiştir. Bu metotlar genellikle iyi sonuçlar verir. Ancak bir problemin çözümünde göz önünde tutulması gereken tek şart, doğru sonuç vermesi değil aynı zamanda kullanımının kolay olması ve hızlı yanıt

verebilmesidir. DQEM bu şartların hepsini birden üzerinde toplamıştır. Metot az sayıdaki işlem sırasıyla, serbest ve zorlamalı durumdaki kirişlerin titreşim analizini yüksek doğruluk oranıyla çözebilmiştir. Ayrıca DQEM'nin genel özelliği olarak düğüm noktalarının eşit alınma zorunluluğu yoktur. GDQ (Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature)'da sistemin bir eleman olması zorunluydu (Jang, 1987; Bert et al., 1988; Du et al.,

1994). Ancak, bu metotta çözüm için böyle bir şart gerekli değildir. Ayrıca Quadrature Eleman Metodu (QEM)'de olduğu gibi düğüm noktaları yaklaştırma tekniği kullanılmadığından bu zorluk ortadan kaldırılmıştır (Striz et al., 1994; Striz et al., 1997; Chen et al., 2000). DQEM yapı problemlerinin titreşim analizinde kullanılan alternatif bir metottur.

## 2. DQEM'DE KİRİŞ ELEMANLAR İÇİN TİTREŞİM FORMÜLASYONU

DQ metodunun önceki versiyonu olan DQM'de, bir boyutlu problemler için çözüm fonksiyonu  $v(x)$ ;

$$v(x) = \sum_{j=1}^N I_j(x) v_j \quad (1)$$

olarak alınmıştır (William, 1979). (1) numaralı denklemde N, hesaplama yapılacak olan elemanın, dış noktalarının toplam sayısı,  $I_j(x)$ , Lagrange interpolasyon fonksiyonu ve  $v_j$ , j noktasındaki çözüm fonksiyonudur. Çözüm fonksiyonunun i. düğüm noktasında k. dereceden türevi ise;

$$v_i^{(k)} = \sum_{j=1}^N I_j^{(k)}(x_i) v_j = \sum_{j=1}^n E_{ij} v_j \quad (2)$$

(i = 1,2,..., N)

şeklinde ifade edilmiştir (Wang, Gu, 1997). Denklem (2)'deki E, ağırlık katsayıları olarak ifade edilmiştir. Ancak bu çözüm fonksiyonu, çok boyutlu problemlerin sınır şartlarına uygulanırken yanlış ve elverişsiz sonuçlar vermektedir. Bunun için dördüncü dereceden diferansiyel denklem için çözüm fonksiyonu aşağıdaki şekilde göz önüne alınabilir (Wang and Gu, 1997).

$$v(x) = \sum_{j=3}^{N+1} h_j(x) v_{(j-1)} + h_1(x) v_1 + h_2(x) v'_1 + h_{N+2}(x) v'_N \quad (3)$$

Denklem (3)'teki N, hesaplama yapılacak olan elemanın, dış noktalarını da içeren düğüm noktalarının toplam sayısı,  $I_j(x)$ , Lagrange fonksiyonu ve  $v_j$ , j noktasındaki çözüm fonksiyonudur.  $v'_1$  ve  $v'_N$  1. ve N. Düğüm noktalarındaki çözüm fonksiyonlarının birinci dereceden türevleridir (Jang et al., 1989). Çözüm fonksiyonunun i. düğüm noktasında k. dereceden türevi ise;

$$v(x) = \sum_{j=3}^{N+1} h_j^{(k)}(x_{(j-1)}) v_{(j-1)} + h_1^{(k)}(x_1) v_1 + h_2^{(k)}(x_1) v'_1 + h_{N+2}^{(k)}(x_N) v'_N = \sum_{j=1}^{N+2} E_{ij} \delta_j \quad (4)$$

olarak elde edilir (Wang and Gu, 1997). Denklem (4)'de gösterilen E ifadesi daha önce ifade edildiği gibi k. dereceden türevi alınmış ağırlık katsayılarıdır.

Bernoilli-Euler kirişi için, küçük deformasyonlarda sistemi ifade eden diferansiyel denklem ve denge denklemleri aşağıdaki biçimde ifade edilebilir (William, 1979).

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = q(x); \quad EI \frac{d^3 v}{dx^3} = Q(x); \quad EI \frac{d^2 v}{dx^2} = M(x) \quad (x \in [0, L]) \quad (5)$$

Denklem (5)'de ifade edilen E, I, q(x), Q(x), M(x) sırasıyla elastisitemodülü, z eksenine göre kesit atalet momenti, yayılı yük, enine kesme kuvveti ve eğilme momentidir.

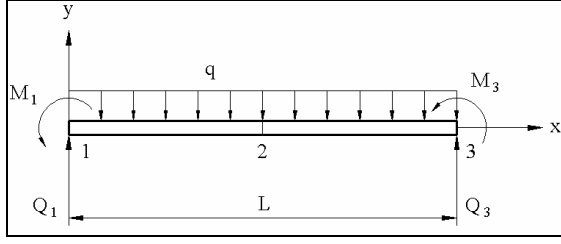
Şekil 1'de, 3 düğüm noktalı bir DQ kiriş elemanı görülmektedir. Denklem (5)'e DQEM uygulandığında;

$$Q_1 = \sum_{j=1}^5 C_{1j} \delta_j; \quad M_1 = -\sum_{j=1}^5 B_{1j} \delta_j; \quad q_2 = \sum_{j=1}^5 D_{3j} \delta_j; \quad Q_3 = -\sum_{j=1}^5 C_{4j} \delta_j; \quad M_3 = \sum_{j=1}^5 B_{4j} \delta_j \quad (6)$$

denklemleri elde edilir (Chen, 1994). Denklem (6)'daki  $B_{ij}$ ,  $C_{ij}$ , ve  $D_{ij}$  sırasıyla ikinci, üçüncü ve dördüncü dereceden türevlerin ağırlık katsayılarıdır. Ayrıca;

$$\{\delta\} = [v_1 \quad v'_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v'_3]^T \quad (7)$$

olarak elde edilir (Wang and Gu, 1997).



Şekil 1. Üç düğüm noktalı DQEM kiriş elemanı

Denklem (6) matris biçiminde yazıldığında;

$$[K]\{\delta\} = \{F\} \quad (8)$$

elde edilir. Denklem (7)'deki  $\{F\}$ ;

$$\{F\} = [Q_1 \ M_1 \ \rho A \omega^2 v_2 \ \rho A \omega^2 v_3 \ \dots \ \rho A \omega^2 v_{N-1} \ Q_N \ M_N] \quad (9)$$

şeklinde (Wang, Gu, 1997). Elde edilen kütle katsayıları;

$$\begin{bmatrix} K_{ee} & K_{ei} \\ K_{ie} & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_e \\ \delta_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_e \\ \rho A \omega^2 \delta_i \end{Bmatrix} \quad (10)$$

biçiminde düzenlenir. Denklem (9)'da verilen e ve i harfleri sırasıyla iki uç noktayı ve tüm iç noktaları ifade etmektedir. Denklem (9);

$$[K_{ee}]\{\delta_e\} + [K_{ei}]\{\delta_i\} = \{F_e\} \quad (11)$$

$$[K_{ie}]\{\delta_e\} + [K_{ii}]\{\delta_i\} = \rho A \omega^2 \{\delta_i\} \quad (12)$$

olarak ta yazılabilir. Denklem (10) ve (11) den  $\{\delta_e\}$  değeri çekildiğinde;

$$\{\delta_e\} = [K_{ee}]^{-1} (\{F_e\} - [K_{ei}]\{\delta_i\}) \quad (13)$$

olarak bulunabilir. Ayrıca Denklem (12), Denklem (11)'de yerine yazıldığında genel denklem;

$$\begin{aligned} & ([K_{ii}] - [K_{ie}][K_{ee}]^{-1}[K_{ei}])\{\delta_i\} = \\ & = \rho A \omega^2 \{\delta_i\} - [K_{ie}][K_{ee}]^{-1}\{F_e\} \end{aligned} \quad (14)$$

biçiminde elde edilir. Kirişlerin serbest titreşim analizinde,  $[K_{ie}][K_{ee}]^{-1}\{F_e\}$  ifadesi genel denklemde yer almaz (Thomson, 1993) Bunun nedeni, genel kuvvetlerin sıfır olmasından veya genel yer değiştirmelerin sıfır olmasından dolayı elimine edilmesindedir. Çeşitli sınır koşullarındaki

kirişler için frekanslar aşağıdaki biçimde elde edilebilir.

$$[\bar{K}]\{\delta_i\} = \frac{\rho A \omega^2 L^4}{EI} \{\delta_i\} = \bar{\omega}^2 \{\delta_i\} \quad (15)$$

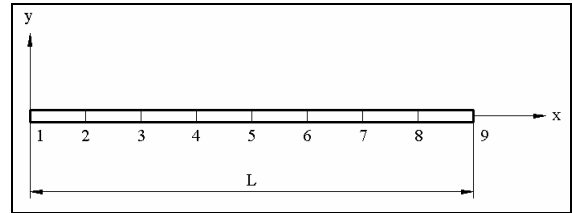
Denklem (14) ile elde edilen sonuçlar analitik yöntemlerle elde edilen sonuçlar analitik yöntemlerle elde edilen sonuçlar ile tam uyum sağlamıştır. Ancak sonuçların tam uygun çıkabilmesi için elemandaki düğüm sayısının en az doku düğümlü olarak alınması gerekir. Ayrıca Şekil 1'de verilen 3 düğüm noktalı kiriş eleman için  $[K]$  matrisi, Denklem (6) ve Denklem (7)'den aşağıdaki biçimde elde edilebilir.

$$[K] = \frac{1}{L^4} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ -B_{11} & -B_{12} & -B_{13} & -B_{14} & -B_{15} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & D_{35} \\ -C_{41} & -C_{42} & -C_{43} & -C_{44} & -C_{45} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} & B_{45} \end{bmatrix} \quad (16)$$

### 3. UYGULAMALAR

#### 3. 1. Üniform Dağılımlı Düğüm Noktalarına Sahip Kiriş Elemanlar

Şekil 2'deki gibi düzgün olarak dağılmış dokuz, on bir ve on üç düğüm noktasına sahip kiriş elemanların değişik sınır koşullarındaki doğal frekanslarının DQEM ile ve analitik olarak çözülmüş sonuçları, sırasıyla aşağıda verilmiştir.



Şekil 2. Üniform dağılımlı 9 düğüm noktasına sahip kiriş eleman

Tablo 1. C-F Kirişine Ait Doğal Frekans Değerleri

	N=9	N=11	N=13
QDEM	3.5160098	3.5161958	3.5449920
GDQ	3.5172413	3.5160033	3.5160153

Tablo 2. C-C Kirişine Ait Doğal Frekans Değerleri

	N=9	N=11	N=13
QDEM	22.373457	22.373282	22.373282
GDQ	22.352922	22.374209	22.373270

Tablo 3. C-SS Kirişine Ait Doğal Frekans Değerleri

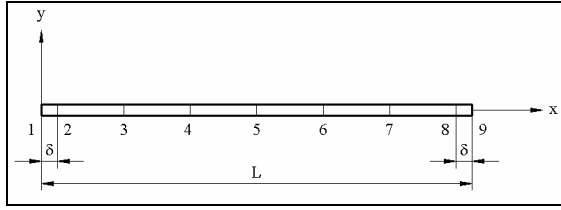
	N=9	N=11	N=13
QDEM	15.418130	15.418209	15.418844
GDQ	15.415890	15.417999	15.418207

Tablo 4. SS-SS Kirişine Ait Doğal Frekans Değerleri

	N=9	N=11	N=13
QDEM	9.8696198	9.8696041	9.8696430
GDQ	9.8669445	9.8696525	9.8696038

### 3. 2. Üniform Dağılımlı Olmayan Düğüm Noktalarına Sahip Kiriş Elemanlar

Şekil 3'deki gibi düzgün olarak dağılmamış ve  $\delta = 0.01$  birim olan dokuz, on bir ve on üç düğüm noktasına sahip kiriş elemanların değişik sınır koşullarındaki doğal frekanslarının DQEM ile ve analitik olarak çözülmüş sonuçları, sırasıyla aşağıda verilmiştir.



Şekil 3. Üniform dağılımlı olmayan 9 düğüm noktasına sahip kiriş eleman

Tablo 1. C-F Kirişine Ait Doğal Frekans Değerleri

	N=9	N=11	N=13
QDEM	3.5160338	3.5163743	3.5068361
GDQ	3.5172413	3.5160033	3.5160153

Tablo 2. C-C Kirişine Ait Doğal Frekans Değerleri

	N=9	N=11	N=13
QDEM	22.373242	22.373285	22.373285
GDQ	22.352922	22.374209	22.373270

Tablo 3. C-SS Kirişine Ait Doğal Frekans Değerleri

	N=9	N=11	N=13
QDEM	15.418238	15.418203	15.418415
GDQ	15.415890	15.417999	15.418207

Tablo 4. SS-SS Kirişine Ait Doğal Frekans Değerleri

	N=9	N=11	N=13
QDEM	9.8695966	9.8695980	9.8697003
GDQ	9.8669445	9.8696525	9.8696038

## 4. EKLER

### 4. 1. Kiriş Elemana Ait Direngenlik Matrisleri

Üç düğüm noktalı ve düğüm noktalarının koordinatı  $[0, L/2, L]$  olan kiriş elemana ait  $[k]$  direngenlik matrisi;

$$[k] = \frac{1}{L^4} \begin{bmatrix} 108L & 30L^2 & -192L & 84L & -18L^2 \\ 22L^2 & 8L^3 & -32L^2 & 10L^2 & -2L^3 \\ -192 & -48L & 384 & -192 & 48L \\ 84L & 18L^2 & -192L & 108L & -30L^2 \\ -10L^2 & -2L^3 & 32L^2 & -22L^2 & 8L^3 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Dört düğüm noktalı ve düğüm noktalarının koordinatı

$$[k] = \frac{1}{L^4} \begin{bmatrix} \frac{969L}{2} & 87L^2 & -\frac{1701L}{2} & \frac{1215L}{2} & -\frac{483L}{2} & 33L^2 \\ \frac{111L^2}{2} & 13L^3 & -81L^2 & \frac{81L^2}{2} & -15L^2 & 2L^3 \\ -828 & -144L & 1458 & -972 & 342 & -36L \\ \frac{342}{483L} & 36L & -\frac{972}{1215L} & \frac{1458}{1701L} & -\frac{828}{969L} & \frac{144L}{87L^2} \\ -\frac{2}{15L^2} & -33L^2 & \frac{2}{81L^2} & -\frac{2}{81L^2} & \frac{2}{111L^2} & -\frac{2}{13L^3} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Beş düğüm noktalı ve düğüm noktalarının koordinatı  $[0, L/4, L/2, 3L/4, L]$  olan kiriş elemana ait  $[k]$  direngenlik matrisi;

$$[k] = \frac{1}{L^4} \begin{bmatrix} \frac{4420L}{3} & 190L^2 & -\frac{8192L}{3} & 2112L & -\frac{4096L}{3} & \frac{1532L}{3} & -50L^2 \\ \frac{998L^2}{9} & \frac{56L^3}{3} & -\frac{512L^2}{3} & 96L^2 & \frac{512L^2}{9} & \frac{62L^2}{3} & -2L^3 \\ \frac{7232}{3} & -320L & 4096 & -2304 & \frac{2048}{3} & -64 & 0 \\ \frac{3008}{3} & 80L & -\frac{8192}{3} & 3456 & -\frac{8192}{3} & \frac{3008}{3} & -80L \\ -64 & 0 & \frac{2048}{3} & -2304 & 4096 & -\frac{7232}{3} & 320L \\ \frac{1532L}{3} & 50L^2 & -\frac{4096L}{3} & 2112L & \frac{8192L}{3} & \frac{4420L}{3} & -190L^2 \\ -\frac{62L^2}{3} & -2L^3 & \frac{512L^2}{9} & -96L^2 & \frac{512L^2}{3} & -\frac{998L^2}{9} & \frac{56L^3}{3} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Dokuz düğüm noktalı ve düğüm noktalarının koordinatı  $[0, L/8, L/4, 3L/8, L/2, 5L/8, 3L/4, 7L/8, L]$  olan kiriş elemana ait  $[k]$  direngenlik matrisi;

$$[k] = \frac{1}{L^4} \begin{bmatrix} 289914L & 47707L^2 & -776801L & 335872L & -76750L & 69696L & 145490L & 102309L & -21667L & 145297L & 4566L^2 \\ 13 & 35 & 15 & 5 & & & 3 & 4 & 2 & 47 & -35 \\ 82543L^2 & 1592L^3 & -8192L^2 & 57344L & 1120L^2 & 35171L^2 & 1584L^2 & 8192L^2 & 1662L^2 & -21L^3 \\ 134 & 35 & 7 & 45 & 1120L & 46 & 49 & 35 & 35 & 165 \\ -562575 & 79635L & 89609 & 324847 & -111475 & 260416 & 440229 & 189531 & 222736 & 69559 & 25708L \\ 28 & 47 & 4 & 6 & 11 & 5 & 4 & 11 & 12 & 105 \\ 113303 & 15719L & 59027 & 319397 & 179423 & 61184 & 161073 & 82193 & 30316 & 164989 & 7808L \\ 10 & 37 & 2 & 11 & 44 & 3 & 7 & 6 & 5 & 94 & 165 \\ -41042 & 12596L & 88691 & 108527 & 337119 & 99104 & 111038 & 1792 & -33668 & 26955 & 1516L \\ 13 & 105 & 6 & 3 & 7 & 3 & 11 &td> 9 & 43 & 86 & 105 \\ 64753 & 656L & 145160 & 372645 & 937893 & 166016 & 937893 & 372645 & 145160 & 64753 & 656L \\ 78 & 21 & 37 & 23 & 23 & 3 & 23 & 23 & 37 & 78 & 21 \\ 26955 & 1516L & -33668 & -1792 & 111038 & -99104 & 337119 & 108527 & 88691 & -41042 & 12596L \\ 86 & 105 & 43 & 9 & 11 & 3 & 7 & 6 & 5 & 13 & 105 \\ 164989 & 7808L & 30316 & 82193 & 161073 & -61184 & 20389 & 319397 & 59027 & 113303 & 15719L \\ -94 & -105 & 5 & 6 & 7 & 5 & 11 & 2 & 10 & 37 & -94 \\ 69550 & 25708L & -222736 & 189531 & 440229 & 360416 & -224847 & 49669 & -562575 & 79635L & 69550 \\ 12 & 105 & 11 & 4 & 5 & 3 & -111475 & 6 & 4 & 28 & 47 \\ 145297L & 4566L^2 & -21667L & 102309L & -145490L & -76750L & 201523L & 76401L & 289914L & -47707L^2 & 145297L \\ 47 & 35 & 2 & 4 & 3 & 69696L & -76750L & 3 & 15 & 13 & 38 \\ 1662L^2 & -21L^3 & 8192L^2 & 3584L^2 & 22178L^2 & -1120L^2 & 57344L^2 & 3584L^2 & 8192L^2 & 82543L^2 & 1592L^3 \\ 35 & & 49 & 9 & 29 & & 45 & 3 & 7 & 134 & 35 \end{bmatrix} \quad (20)$$

## 5. KAYNAKLAR

- Bert, C. W., Jang, S. K. and Striz, A. G. 1988. Two New Approximate Methods for Analyzing Free Vibration of Structural Components, AIAA Journal Vol. 26, 612 – 618, No. 5.
- Chen, W. L. 1994. A New Approach for Structural Analysis: The Quadrature Element Method, Ph. D. Dissertation, The University of Oklohoma, Norman, Ok.
- Chen, W. L., Striz, A. G., Bert, C. W. 2000. High - Accuracy Plane Stress and Plate Elements in the Quadrature Elements Method, Int. J. of Solid and Struc. 37, 627 – 647.
- Du, H., Lim, M. K. and Lin, R. M. 1994. Application of Generalized Differential Quadrature Method To Structural Problems, Int. J. For Numer. Meth. In Eng., Vol. 37, 1881 – 1896.
- Jang, S. K. 1987. Application of Differential Quadrature to the Analysis of Structural Components, Ph. D. Dissertation, the University of Oklahoma, Norman, Ok.
- Jang, S. K., Bert, C. W. and Striz, A. G. 1989. Application of Differential Quadrature to Static Analysis of Structural Components, Int. J. For Numer. Meth. In Eng., Vol. 28, 561 – 577.
- Striz, A.G., Chen, W.L. and Bert, C. W. 1997. Free Vibration of Plates By the High Accuracy Quadrature Element Method, J. of Sound and Vib. 200 (5), 689 – 702.
- Striz, A. G., Chen, W. L. and Bert, C. W. 1994. Static Analysis of Structures By the Quadrature Element Method (QEM), Int. J. Solid Struc. Vol. 31, No. 20, pp. 2807 – 2818.
- Thomson, W. T. 1993. Theory of Vibration With Application, Prentice Hall, ISBN 0-13-915323-3, New Jersey.
- Wang, X. W. and Gu, H. Z. 1997. Static Analysis of Frame Structures by the Differential Quadrature Element Method, Int. J. For Numer. Meth. In Eng., Vol. 40, 759 – 772.
- William, A. N. 1979. Strength of Material (Çev. : Sacit Sümer), McGraw-Hill Book Company, Güven Kitabevi Yayınları, Ankara.
-