

**T.C.  
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK  
ÇÖZÜMÜ İÇİN KLASİK ORTOGONAL POLİNOM TABANLI  
TEKNİKLER**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**FATMA ÇELİKTAŞ**

**DENİZLİ, OCAK - 2015**

**T.C.  
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK  
ÇÖZÜMÜ İÇİN KLASİK ORTOGONAL POLİNOM TABANLI  
TEKNİKLER**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**FATMA ÇELİKTAŞ**

**DENİZLİ, OCAK - 2015**

## KABUL VE ONAY SAYFASI

FATMA ÇELİKTAŞ tarafından hazırlanan “ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ İÇİN KLASİK ORTOGONAL POLİNOM TABANLI TEKNİKLER” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 16.01.2015 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Danışman  
Prof. Dr. Uğur YÜCEL

.....

Üye  
Prof. Dr. Orhan KARABULUT

.....

Üye  
Doç. Dr. Murat SARI

.....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez PAÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onaylanmıştır.

.....

Prof. Dr. Orhan KARABULUT

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

**Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.**

**FATMA ÇELİKTAŞ**

## ÖZET

### ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ İÇİN KLASİK ORTOGONAL POLİNOM TABANLI TEKNİKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FATMA ÇELİKTAŞ

PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. UĞUR YÜCEL)

DENİZLİ, OCAK - 2015

Bu tezde, adi diferansiyel denklemlerde spektral kollokasyon yöntemleriyle ilgili bir çalışma sunulmuştur. Bu yöntemler için gerekli klasik ortogonal polinomların (Jacobi, Legendre, Chebyshev, Laguerre ve Hermite polinomları) bazı özellikleri tekrar gözden geçirilerek, Chebyshev polinom sınıfının kullanıldığı duruma karşı gelen türevleme matrisleri Chebyshev noktaları kullanılarak oluşturulmuştur. Bu matrislerin adi diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerini çözmede nasıl kullanılacağı örneklendirilmiştir.

**ANAHTAR KELİMELER:** Ortogonal polinomlar, Spektral metotlar, Polinom yaklaşımı, Yaklaşık çözümler, Yakınsaklık

## **ABSTRACT**

### **CLASSICAL ORTHOGONAL POLYNOMIAL BASED TECHNIQUES FOR APPROXIMATE SOLUTION OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS**

**MSC THESIS**

**FATMA ÇELİKTAŞ**

**PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE**

**MATHEMATİCS**

**(SUPERVISOR: PROF. DR. UĞUR YÜCEL )**

**DENİZLİ, JANUARY 2015**

In this thesis, a survey on spectral collocation methods for ordinary differential equations is presented. Properties of the classical orthogonal polynomials (Jacobi, Legendre, Chebyshev, Laguerre, and Hermite polynomials) required in this context are reviewed. Differentiation matrices corresponding to Chebyshev case are constructed using the Chebyshev points. It is illustrated how such matrices can be used to solve boundary value problems for ordinary differential equations.

**KEYWORDS:**Orthogonal polynomials, Spectral methods, Polynomial approximation, Approximate solutions, Convergence

# İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT .....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
TABLO LİSTESİ.....	v
ÖNSÖZ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖZEL POLİNOM AİLELERİ .....	3
2.1 Sturm-Liouville Problemleri .....	3
2.2 Gama ve Beta Fonksiyonları .....	4
2.3 Jacobi Polinomları .....	5
2.4 Legendre Polinomları.....	8
2.5 Chebyshev Polinomları.....	10
2.6 Laguerre Polinomları .....	14
2.7 Hermite Polinomları .....	18
3. ORTOGONALLİK .....	22
3.1 İç çarpımlar ve Normlar .....	22
3.2 Ortogonal Fonksiyonlar .....	24
4. CHEBYSHEV TÜREVLEME MATRİSLERİ .....	27
5. ADI DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ .....	31
6. SONUÇ VE ÖNERİLER .....	48
7. KAYNAKLAR .....	49
8. ÖZGEÇMİŞ.....	51

## ŞEKİL LİSTESİ

### Sayfa

Şekil 2.1: Legendre polinomları, $P_n(x)$ , $1 \leq n \leq 6$ .....	9
Şekil 2.2: $P_{11}$ polinomu.....	10
Şekil 2.3: Chebyshev Polinomları ( $1 \leq n \leq 6$ ) .....	12
Şekil 2.4: $T_{11}$ Polinomu .....	13
Şekil 2.5: Laguerre Polinomları ( $1 \leq n \leq 6$ ve $\alpha = 0$ ) .....	16
Şekil 2.6: $L_7^{(0)}$ Polinomu .....	16
Şekil 2.7: Ölçeklendirilmiş Laguerre Fonksiyonları ( $1 \leq n \leq 12$ ve $\alpha = 0$ ) .....	17
Şekil 2.8: Hermite Polinomları ( $1 \leq n \leq 6$ ) .....	20
Şekil 2.9: $H_9$ Polinomu .....	21
Şekil 4.10 : $u(x) = e^x \sin(5x)$ in Chebyshev Türevlemesi .....	30
Şekil 5.11: $x_1, \dots, x_{N-1}$ noktalarına karşılık gelen $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_{N-1})^T$ vektörleri	31
Şekil 5.12: $u_{xx} = e^{4x}$ lineer sınır değer probleminin çözümü .....	33
Şekil 5.13: (5.2) lineer olmayan sınır değer probleminin çözümü .....	34
Şekil 5.14: (5.3) lineer sınır değer probleminin nümerik çözümü.....	37
Şekil 5.15: (5.8) lineer sınır değer probleminin nümerik çözümü.....	40
Şekil 5.16: (5.10) lineer sınır değer probleminin nümerik çözümü.....	41
Şekil 5.17: (5.11) lineer olmayan sınır değer probleminin nümerik çözümü ...	43



## TABLO LİSTESİ

### Sayfa

Tablo 5.1: (5.2) probleminin nümerik sonuçları.....	35
Tablo 5.2: (5.3) lineer sınır değer probleminin çözümündeki mutlak hata.....	38
Tablo 5.3: (5.8) lineer sınır değer probleminin çözümündeki mutlak hata.....	40
Tablo 5.4: (5.10) probleminin farklı metotlardaki değerleri .....	42
Tablo 5.5: (5.11) lineer olmayan sınır değer probleminin çözümündeki mutlak hata.....	44
Tablo 5.6: (5.12) özdeğer probleminin çözümündeki mutlak hata.....	45
Tablo 5.7: (5.12) özdeğer probleminin farklı N değerleri için mutlak hataları.....	46
Tablo 5.8: (5.14) özdeğer probleminin nümerik çözüm sonuçlarının Ghelardoni (1997) daki sonuçlarla karşılaştırılması .....	47

## ÖNSÖZ

Bu çalışmam süresince her türlü yardım ve fedakarlığı sağlayan, bilgi ve tecrübesi ile çalışmama ışık tutan, ayrıca bana bu çalışmayı vererek kendimi geliştirmeye yönelik de birkaç adım ileride olmamı sağlayan, çalışmamın yöneticisi Sayın Hocam Prof. Dr. Uğur YÜCEL' e ve her zaman maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

# 1. GİRİŞ

Spektral metotlar, diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için 1950'li yıllarda geliştirilen "Sonlu Farklar Metodu" ve 1960'lı yıllarda geliştirilen "Sonlu Elemanlar Metodu" na alternatif olarak 1970'li yıllarda ortaya atılmıştır. Doğal olarak bahsedilen üç metodun da temelleri daha da gerilere dayanmaktadır. Spektral metotlar için ortaya atılan bazı fikirler interpolasyon ve açılım kadar eskidir. Bu konudaki algoritmik gelişmeler Lanczos (1938), Clenshaw (1960), Fox ve Parker (1968) tarafından yapılmıştır. Daha sonra Orszag (1971) ve diğerlerinin alan dönüşümünü akışkanlar mekaniği ve meteoroloji problemleri üzerine uygulamalarıyla metod ün kazanmıştır. Modern spektral metotlar için literatürde dönüm noktası olarak kabul gören ilk yayınlar Gottlieb ve Orszag (1977) tarafından yazılan kısa kitap, Gottlieb ve diğ. (1984) tarafından yapılan inceleme ve Canuto ve diğ. (1988) tarafından yazılan monografidir. Daha sonraları Mercier (1989), Boyd (2000), Funaro (1992), Bernardi ve Maday (1992), Fornberg (1996), and Karniadakis ve Sherwin (1999) tarafından yayınlanan kitaplarla alana katkılar yapılmıştır.

Spektral metotlar son yirmi yıl içerisinde hızlı bir gelişim göstermiştir. Isı iletimi, akışkanlar mekaniği, kuantum mekaniği ve daha birçok farklı alanların nümerik simülasyonlarına uygulanmıştır. Günümüzde de diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için "Sonlu Farklar Metodu" ve "Sonlu Elemanlar Metodu" nun yanında güçlü bir araç olarak yerini almıştır. Spektral metotların en belirleyici özelliği deneme fonksiyonları olarak sonsuz diferansiyellenebilir global fonksiyonların çeşitli ortogonal sistemlerini kullanmasıdır. Farklı deneme fonksiyonlarının kullanımı farklı spektral yaklaşımları verir. Örneğin, periyodik problemler için trigonometrik polinomlar, periyodik olmayan problemler için Legendre polinomları ve Chebyshev polinomları, yarı sonsuz aralıkta Laguerre polinomları ve sonsuz aralıkta Hermite polinomları gibi.

Eğer basit bir bölgede bir kişi yüksek hassasiyetli bir adi diferansiyel denklem veya bir kısmi diferansiyel denklem çözmek isterse ve problemin verileri de düzgün ise spektral yöntemler en iyi araç olarak düşünülebilir. Sonlu farklar veya

sonlu elemanlar metodunun iki veya üç hassasiyet dereceli olduğu yerlerde spektral yöntemler genelde on hassasiyet derecesine ulaşabilir.

Bu çalışmada spektral metotların literatürde mevcut temel teorik sonuçları sunulacak ve adi diferansiyel denklemlere bazı uygulamaları çalışılacaktır. Spektral metotlarda fonksiyon yaklaşımları Sturm-Liouville problemleri olarak bilinen özdeğer problemlerinin polinom çözümleriyle yakından ilişkili olduğundan ikinci bölümde ilk önce bu problemler ele alınacak ve daha sonra sırasıyla Jacobi polinomları, Legendre polinomları, Chebyshev polinomları, Laguerre polinomları ve son olarak Hermite polinomlarının basit ve aynı zamanda dikkate değer özellikleri özetlenecektir. Üçüncü bölümde, yaklaşım teorisinin temel taşlarından olan “İç Çarpım” ve “Ortogonal fonksiyonlar” ele alınacaktır. Çünkü Bölüm 2’de verilecek polinom ailelerinin tümü uygun bir iç çarpıma göre ortogonal fonksiyonlar kümesi oluştururlar. Dördüncü bölümde, Chebyshev noktaları kullanılarak Chebyshev türevleme matrisleri elde edilecek ve bu matrisler kullanılarak bazı fonksiyonların türevlerine ulaşılacaktır. Beşinci bölümde, Chebyshev türevleme matrislerinin adi diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerine bazı uygulamaları verilecek ve altıncı bölümde temel gözlemler kısaca özetlenecektir.

## 2. ÖZEL POLİNOM AİLELERİ

Spektral yöntemlerle fonksiyonlara yaklaşımlar, Sturm-Liouville problemleri olarak bilinen, adi diferansiyel denklemlerdeki özdeğer problemlerinin polinom çözümleriyle ilişkilidir. Bu problemler, sınır-değer problemlerin analizinde değişkenlere ayırma metodunun uygulanmasında ortaya çıkar. Bu bölümde, bu tipte olan ve en çok kullanılan polinom ailelerinin basit ve dikkate değer özelliklerini ana hatlarıyla vereceğiz (Funaro 1992).

### 2.1 Sturm-Liouville Problemleri

$I, \mathbb{R}$  ' de bir açık aralık olsun.  $I$  aralığında  $w > 0$  ve  $\bar{I}$  aralığında  $a \geq 0$  sağlansın.  $a: \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $b: I \rightarrow \mathbb{R}$  ve  $w: I \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere  $I$  aralığında aşağıdaki özdeğer problemini ele alalım:

$$-(au')' + bu = \lambda wu \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} . \quad (2.1)$$

Burada amaç bu problemin  $(\lambda, u)$  çözümlerini elde etmektir. Burada  $\lambda$  'ya (2.1) probleminin özdeğerleri,  $u$  'ya da problemin özfonksiyonları adı verilir.  $u$  'nun tek olarak tanımlanabilmesi için çok değişik sınır-koşulları göz önüne alınabilir. Eğer  $\bar{I}$  aralığında  $a > 0$  ise (2.1) problemi düzgün (regüler) ve eğer  $\bar{I}$  aralığındaki en az bir noktada  $a \rightarrow 0$  oluyorsa (2.1) problemi tekil (singüler) olarak adlandırılır. Çoğu durumda özdeğerler kümesi reel pozitif sayıların bir ıraksak dizisi şeklindedir. Özfonksiyonlar ailesinin birçoğu literatürde yaygın olarak çalışılmıştır. Bunları temsilen Bessel fonksiyonları düşünülebilir. Bununla birlikte biz burada (2.1) denkleminin polinom çözümleriyle ilgileneceğiz. Bununla ilgili aşağıdaki genel sonuç ispatsız olarak verilecektir.

**2.1 Teorem:**  $n$  inci dereceden bir polinom  $u_n$  olsun. Eğer  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  (2.1) probleminin çözümlerinin bir dizisi ise, bu durumda

$$u_n(x) = (\rho_n x + \sigma_n)u_{n-1}(x) + \tau_n u_{n-2}(x), \quad \forall n \geq 2, \quad \forall x \in I, \quad (2.2)$$

olacak şekilde  $\{\rho_n\}, \{\sigma_n\}$  ve  $\{\tau_n\}$  reel dizileri bulmak mümkündür. (2.2) denklemine göre  $u_1(x) = (\rho_1 x + \sigma_1)u_0(x)$  olacak şekilde  $\rho_1, \sigma_1 \in \mathbb{R}$  tanımlayalım. Bu teorem bize  $u_0(x)$  ve  $u_1(x)$  değerlerinden başlanılarak, verilen bir  $x \in I$  noktasında ardışık olarak  $n$  inci polinomu hesaplamamıza yarar. (2.2) denkleminin türevi alınarak türev için benzer bir ilişki elde ederiz. Bu ilişki

$$u'_n(x) = (\rho_n x + \sigma_n)u'_{n-1}(x) + \rho_n u_{n-1}(x) + \tau_n u'_{n-2}(x), \quad \forall n \geq 2, \quad \forall x \in I \quad (2.3)$$

şeklinde yazılabilir. (2.2) ve (2.3) denklemleri ortak çözüldüğünde  $x$  noktasında  $u'_n$  nü verir. Yüksek mertebeden türevler benzer yolla elde edilebilir.

## 2.2 Gama ve Beta Fonksiyonları

Polinom özfonksiyonlarının analizine geçmeden önce Gama ve Beta fonksiyonları ve bunların bazı önemli özelliklerini verelim. Herhangi bir reel pozitif  $x$  sayısı için

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt,$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona *Gama* fonksiyonu denir. Yukarıdaki denkleme kısmi integral uygulandığında

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0, \quad (2.4)$$

fonksiyonel denklemi elde edilir.  $n$  bir tamsayı olduğunda tümevarımla (2.4) denkleminde temel bir bağıntı olan  $\Gamma(n+1) = n!$  elde edilir. Diğer önemli bağıntı

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad 0 < x < 1. \quad (2.5)$$

(2.5) denkleminde  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$  olduğu kolayca bulunabilir.

Beta fonksiyonu,  $x > 0$  ve  $y > 0$  olmak üzere

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanımdan faydalanılarak

$$\int_{-1}^1 (1+t)^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = 2^{x+y-1} \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad x > 0, y > 0, \quad (2.6)$$

şeklinde kullanışlı bir eşitlik elde edilir. Binom katsayıları

$$\binom{x}{k} = \frac{\Gamma(x+1)}{k! \Gamma(x-k+1)}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad x > k-1, \quad (2.7)$$

şeklinde genelleştirilebilir.

### 2.3 Jacobi Polinomları

Şimdi, (2.1) için polinom çözümleri ailesinden ilkinin tanımlayalım. Bu Jacobi polinomları olarak adlandırılır. Bunlar  $\alpha > -1, \beta > -1$  olmak üzere  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gibi iki parametreye bağlıdır. Bu parametrelerin uygun bir seçimi bizi iyi bilinen diğer ailelere (Legendre polinomları, Chebyshev polinomları, v.b.) götürür. Şimdi, (2.1) probleminde  $I = (-1, 1)$  olarak alalım ve  $a, b$  ve  $w$  yi

$$\begin{aligned} a(x) &= (1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta+1}, \quad \forall x \in \bar{I} \\ b(x) &= 0, \quad w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta, \quad \forall x \in I \\ \alpha &> -1, \quad \beta > -1 \end{aligned}$$

şeklinde seçelim. Bu seçim bizi, sadeleştirmeden sonra,

$$-(1-x^2)u'' + ((\alpha + \beta + 2)x + \alpha - \beta)u' = \lambda u \quad (2.8)$$

şeklinde singüler özdeğer problemine götürür. Bu problemin Frobenius metodu kullanılarak çözülmesiyle aşağıdaki sonuç elde edilir:

**2.2 Teorem:** (2.8) denkleminin çözümü sadece  $\lambda = n(n + \alpha + \beta + 1)$  ,  $n \in \mathbb{N}$  olduğunda  $n$  inci dereceden bir polinom olur.

(2.8) singüler özdeğer probleminin tek çözümü olarak  $n$  inci dereceden Jacobi polinomunu,  $P_n^{(\alpha, \beta)}$  ,

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(1) = \binom{n + \alpha}{n} = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n! \Gamma(\alpha + 1)} , \quad n \in N , \quad (2.9)$$

şeklinde veya buna denk olarak

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(-1) = (-1)^n \binom{n + \beta}{n} , \quad n \in N , \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlayalım.

Görüldüğü gibi (2.8) problemi üzerine herhangi bir sınır koşulu konulmamıştır. Bunların yerine çözümün polinom olma şartı kullanılmıştır. (2.9) (veya (2.10)) koşulu sadece tek bir özfonksiyon seçimi için konulur, aksi taktirde bir sabit katı şeklinde tanımlıdır.

Bu polinom ailesi için iyi bilinen birçok teorem ve özellik literatürde mevcuttur. Bunlardan biri Rodrigues formülüdür ve bu formül

$$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[ (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} \right] , \quad n \in N \quad (2.11)$$



şeklindedir. Bu daha açık olarak

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{k} \binom{n+\beta}{n-k} (x-1)^{n-k} (x+1)^k$$

$$= \frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{2^n n! \Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \left[ x^n + \frac{(\alpha-\beta)n}{2n+\alpha+\beta} x^{n-1} + \dots \right], n \in \mathbb{N}, \quad (2.12)$$

şeklinde yazılabilir.  $(\alpha, \beta)$  parametre çiftinin farklı seçimleriyle birçok formül Jacobi polinomlarıyla ilişkilendirilebilir. Bunlardan biri

$$\frac{d}{dx} \left[ P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \right] = \frac{1}{2} (n+\alpha+\beta+1) P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}, \quad n \geq 1, \quad (2.13)$$

şeklindedir. (2.11) veya (2.12) den

$$\left. \begin{aligned} P_0^{(\alpha, \beta)}(x) &= 1 \\ P_1^{(\alpha, \beta)}(x) &= \frac{1}{2} (\alpha + \beta + 2)x + \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \end{aligned} \right\}, \quad (2.14)$$

elde edilir. (2.11) ve (2.12) denklemleri yeterince pratik olmadığında yüksek dereceden polinomlar Teorem 2.1 kullanılarak tanımlanabilirler. Daha açık olarak

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \frac{(\alpha^2 - \beta^2)(2n + \alpha + \beta - 1)}{2n(n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta - 2)} \\ \rho_n &= \frac{(2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta - 1)}{2n(n + \alpha + \beta)} \\ \tau_n &= -\frac{(n + \alpha - 1)(n + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta)}{n(n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta - 2)}, n \geq 2 \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Dahası  $\rho_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 2)$ ,  $\sigma_1 = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ . Türevler (2.3) ya da (2.13) kullanılarak düzeltilebilirler.

Son olarak,  $\bar{I}$  aralığında aşağıdaki tahmini verelim (Szegő, 1939):

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |P_n^{(\alpha, \beta)}(x)| = \max \left\{ |P_n^{(\alpha, \beta)}(\pm 1)| \right\} = \max \left\{ \binom{n+\alpha}{n}, \binom{n+\beta}{n} \right\}, n \in \mathbb{N}. \quad (2.16)$$

Daha fazla özellikler “ultra-küresel (ya da Gegenbauer) polinomlar” için ispatlanabilir. Bunlar  $\alpha = \beta$  olmak üzere Jacobi polinomlarıdır.

## 2.4 Legendre Polinomları

Jacobi polinomlarında  $\alpha = \beta = 0$  alınırsa Legendre polinomları elde edilir. Gösterimlerde kolaylık olması açısından  $P_n^{(0,0)} = P_n$  kısaltmasını kullanacağız. Şimdi bu polinomların temel özelliklerinden bazılarını verelim. Teorem 2.2 ye göre

$$(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.17)$$

diferansiyel denklemini elde ederiz. (2.9) ve (2.10) koşullarından sırasıyla  $P_n(1) = 1$ ,  $P_n(-1) = (-1)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  olduklarını elde ederiz. Yineleme formülü

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n} x P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x), \quad x \in \bar{I}, \quad n \geq 2, \quad (2.18)$$

dir.  $P_n$  nin çift (ya da tek) fonksiyon olması için gerek ve yeter şart  $n$  nin çift (ya da tek) olmasıdır ve bunu kontrol etmekte kolaydır. Ayrıca (2.17) den

$$P_n'(\pm 1) = -\frac{n(n+1)}{2} (\pm 1)^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.19)$$

dir. Bundan başka (2.16) dan

$$|P_n(x)| \leq 1, \quad |x| \leq 1, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.20)$$

olur. Ek olarak, (2.13) ve (2.16) birleşiminden, türev için aşağıdaki tahmin elde edilebilir:

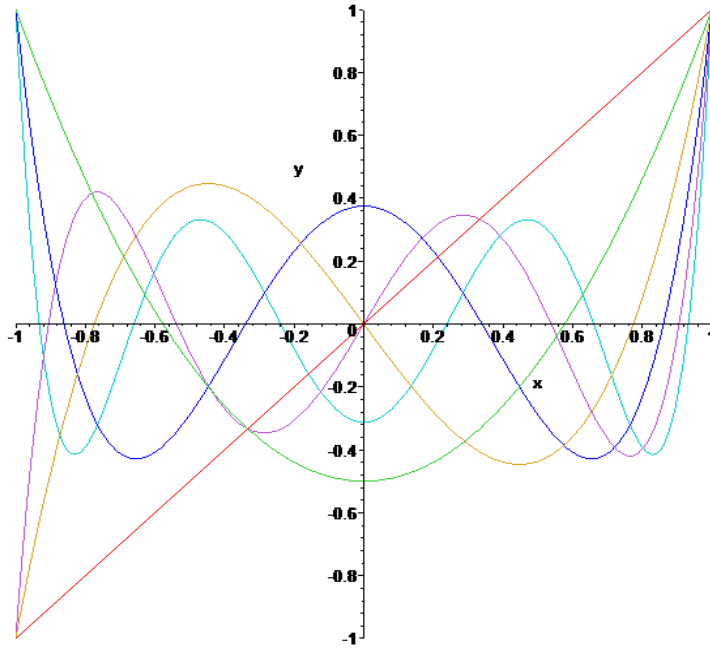
$$|P_n'(x)| \leq \frac{1}{2} n(n+1), \quad |x| \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.21)$$

Kullanışlı diğer bir bağıntı (2.18)'de  $x=0$  alındığında

$$P_n(0) = \begin{cases} 0 & , n \text{ tek ise} \\ n!2^{-n} \left[ \left( \frac{n}{2} \right)! \right]^{-2} & , n \text{ çift ise} \end{cases} \quad (2.22)$$

şeklinde bulunur. Böylece  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(0) = 0$  sonucu çıkarılır.

Şekil 2.1'de  $1 \leq n \leq 6$  için  $P_n$  polinomlarının grafikleri verilmiştir. Şekil 2.2 de  $P_{11}$  in davranışını göstermektedir.



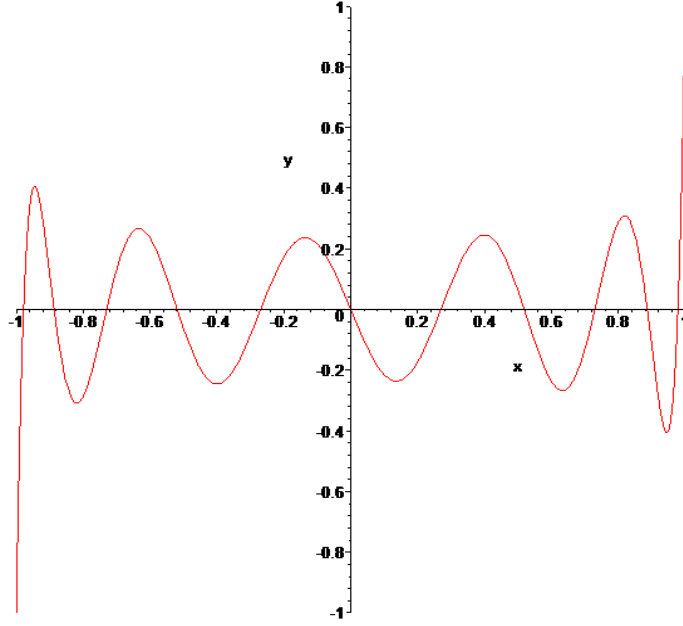
Şekil 2.1: Legendre polinomları,  $P_n(x)$ ,  $1 \leq n \leq 6$

Legendre polinomlarının davranışları hakkında bazı genel fikirler vermek için aşağıdaki iki sonucu verelim.

**2.3 Teorem:** Herhangi  $n \geq 5$  için,  $x$  1 den 5 e arttığında  $|P_n(x)|$  in birbiri ardı sıra gelen ilişkili maksimum değerleri de artar.

**2.4 Teorem:** Herhangi  $n \in \mathbb{N}$  ve herhangi  $x \in \bar{I}$  için

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left( x + i\sqrt{1-x^2} \cos \theta \right)^n d\theta. \quad (2.23)$$



Şekil 2.2:  $P_{11}$  polinomu

## 2.5 Chebyshev Polinomları

Birinci tür Chebyshev polinomları Jacobi polinomlarında  $\alpha = \beta = -1/2$  alınmasıyla ilişkilendirilen polinomlardır. Gerçekten

$$\delta_n = \frac{(n!2^n)^2}{(2n)!} = \frac{n!\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} = \left[ \binom{n - \frac{1}{2}}{n} \right]^{-1}$$

olmak üzere

$$T_n = \delta_n P_n\left(\frac{-1, 1}{2, 2}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.24)$$

olarak tanımlanır. Neticede bunlar

$$(1-x^2)T_n'' - xT_n' + n^2T_n = 0 \quad , \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.25)$$

şeklindeki Sturm-Liouville problemlerinin çözümleridirler. (2.15)'de  $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$  alınarak ve uygun boyut ayarı yapılarak  $T_0(x) = 1$  ve  $T_1(x) = x$  olmak üzere

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad , \quad x \in \bar{I} \quad , \quad n \geq 2 \quad , \quad (2.26)$$

şeklindeki yineleme formülü elde edilir. Genel olarak  $T_n(\pm 1) = (\pm 1)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  olduğu bulunur. (2.25) denklemini  $x = \pm 1$  noktasında hesaplanırsa

$$T_n'(\pm 1) = -(\pm 1)^n n^2 \quad , \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.27)$$

elde edilir. Ayrıca  $T_n$  nin çift (tek) olması için gerek ve yeter şart  $n$  nin çift (tek) olmasıdır.  $n$  inci dereceden Chebyshev polinomları için açık bir ifade

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left( (-1)^k \sum_{m=k}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2m} \binom{m}{k} \right) x^{n-2k} \\ &= 2^{n-1} x^n - n 2^{n-3} x^{n-2} + \frac{1}{2} n(n-3) 2^{n-5} x^{n-4} + \dots, \quad x \in \bar{I}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

(2.28) de  $[\bullet]$ ,  $\bullet$  nin tamsayı kısmını gösterir. En çok dikkate değer tanımlama

$$T_n(\cos \theta) = \cos n\theta \quad , \quad \theta \in [0, \pi] \quad , \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.29)$$

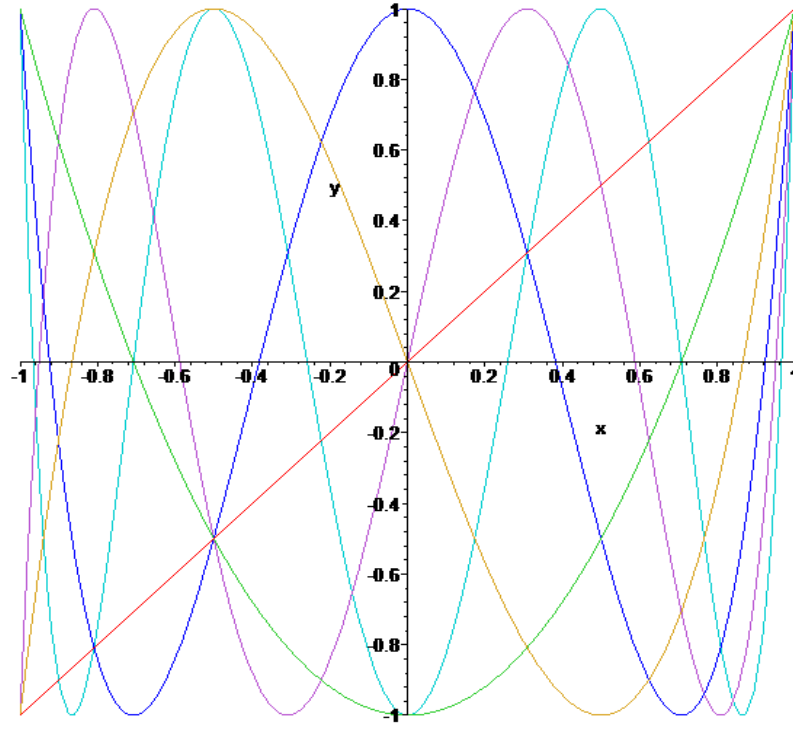
şeklinindedir. Bu ifade cebirsel ve trigonometrik polinomları ilişkilendirmektedir. Bu önemli özellik  $x = \cos \theta$ ,  $\theta \in [0, \pi]$  ve  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere

$$\frac{dT_n}{dx}(\cos \theta) = \frac{n \sin n\theta}{\sin \theta} \quad , \quad (2.30)$$

$$\frac{d^2 T_n}{dx^2}(\cos \theta) = \frac{n \sin n\theta \cos \theta}{\sin^3 \theta} - \frac{n^2 \cos n\theta}{\sin^3 \theta} \quad (2.31)$$

kullanılarak ispat edilir. Böylece  $x$  yerine  $\cos \theta$  yazılarak (2.25) denklemi sağlanır.

Birçok özellik (2.29) denkleminin direkt sonucudur. Özel olarak,  $|T_n(x)| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \bar{I}$  dir. Ayrıca  $T_n$  nin  $\bar{I}$  de  $n$  tane kökü vardır. Dolayısıyla  $T_n'$  nün  $\bar{I}$  de  $n-1$  tane kökü olur.  $\bar{I}$  aralığında  $|T_n|$  fonksiyonu maksimum değeri olan 1 değerini  $n+1$  defa alır. Şekil 2.3 de  $T_n$  nin  $1 \leq n \leq 6$  için grafikleri verilmiştir. Ek olarak da Şekil 2.4 de  $T_{11}$  çizilmiştir.



Şekil 2.3: Chebyshev Polinomları ( $1 \leq n \leq 6$ )

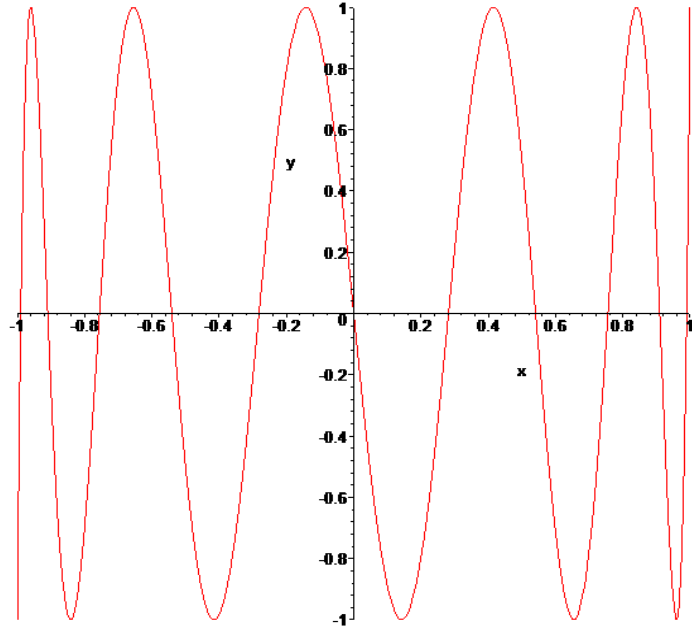
Diğer basit bağıntılar kolayca kurulabilir:

$$T_n(x) = \frac{1}{2}(e^{in\theta} + e^{-in\theta}) = \frac{1}{2} \left[ (x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n \right] \quad (2.32)$$

$, x = \cos \theta \in \bar{I} \quad , n \in \mathbb{N}$

$$T_n = \frac{1}{2} \left[ \frac{T'_{n+1}}{n+1} - \frac{T'_{n-1}}{n-1} \right] \quad , n \geq 2 \quad (2.33)$$

$$T_m(T_n(x)) = T_{mn}(x) \quad , \forall x \in \bar{I} \quad , \forall n, m \in \mathbb{N} \quad (2.34)$$



Şekil 2.4:  $T_{11}$  Polinomu

İkinci tür Chebyshev polinomları olarak bilinen bir diğer polinom ailesi

$$U_n = \frac{1}{n+1} T'_{n+1} \quad , \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.35)$$

şeklinde tanımlanır. Bunlar da aynı zamanda ultra-küresel polinomlardır. (2.13) ve (2.24) den yararlanılarak

$$U_n = \delta_{n+1} P_n^{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.36)$$

elde edilir.  $U_n$  ler birinci tür Chebyshev polinomlarıyla benzer özellikleri sağlarlar.

## 2.6 Laguerre Polinoları

Bu bölümde, Sturm-Liouville probleminin polinom çözümlerinin bir diğer ailesi olan Laguerre polinomlarını ele alacağız.  $\alpha > -1$  ve  $I = (0, \infty)$  olsun. Denklem (2.1) deki katsayıları

$$a(x) = x^{\alpha+1} e^{-x}, \quad \forall x \in \bar{I}$$

$$b(x) = 0, \quad w(x) = x^\alpha e^{-x}, \quad \forall x \in I$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda aşağıdaki özdeğer problemini elde ederiz:

$$x u'' + (\alpha + 1 - x)u' + \lambda u = 0. \quad (2.37)$$

Bu denklemin sadece  $\lambda = n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  olması durumunda polinom çözümleri mevcuttur. Bu nedenle,  $n$  inci dereceden Laguerre polinomu,  $L_n^{(\alpha)}$ , (2.37) singüler probleminin

$$L_n^{(\alpha)}(0) = \binom{n+\alpha}{n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \alpha > -1 \quad (2.38)$$

koşulunu sağlayan tek çözümü olarak tanımlanır. Rodrigues formülü

$$e^{-x} x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in I \quad (2.39)$$

şeklindedir. Ayrıca aşağıdaki ifade de mevcuttur:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \bar{I}. \quad (2.40)$$



Teorem 2.1 den yararlanılarak,  $L_0^{(\alpha)}(x)=1$  ve  $L_1^{(\alpha)}(x)=1+\alpha-x$  olmak üzere aşağıdaki 3-terimli yineleme formülü elde edilir:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{2n+\alpha-1-x}{n} L_{n-1}^{(\alpha)}(x) - \frac{n+\alpha-1}{n} L_{n-2}^{(\alpha)}(x) \quad , \quad \forall n \geq 2. \quad (2.41)$$

Çeşitli denklemler  $\alpha$  parametresinin farklı değerlerine karşılık gelen Laguerre polinomlarıyla ilişkilendirilebilir. Bunlara bazı örnekler aşağıda verilmiştir:

$$\frac{d}{dx} L_{n+1}^{(\alpha)} = -L_n^{(\alpha+1)} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \quad , \quad \alpha > -1 \quad (2.42)$$

$$L_{n+1}^{(\alpha)} = L_{n+1}^{(\alpha+1)} - L_n^{(\alpha+1)} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \quad , \quad \alpha > -1. \quad (2.43)$$

(2.43) denkleminde

$$L_n^{(\alpha+1)} = \sum_{k=0}^n L_k^{(\alpha)} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \quad , \quad \alpha > -1 \quad (2.44)$$

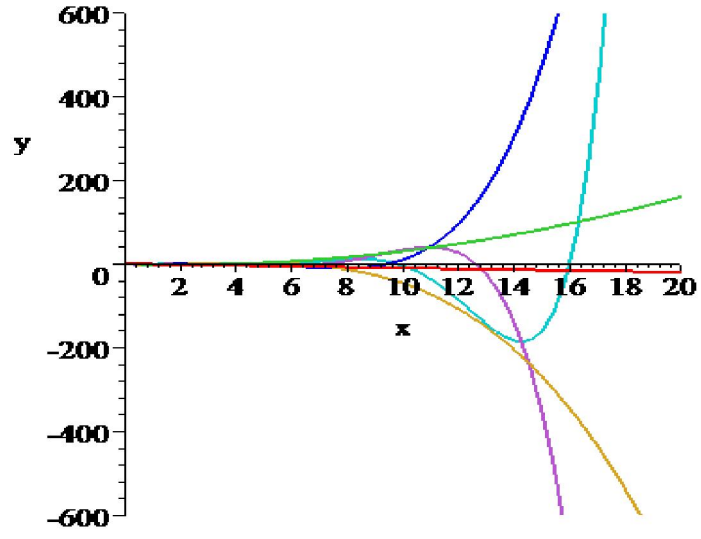
elde edilir. Laguerre ve Jacobi polinomları aşağıdaki gibi bir asimptotik formülle ilişkilendirilebilir:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[ P_n^{(\alpha, \beta)} \left( 1 - \frac{2x}{\beta} \right) \right] \quad , \quad \forall x \in [0, \infty). \quad (2.45)$$

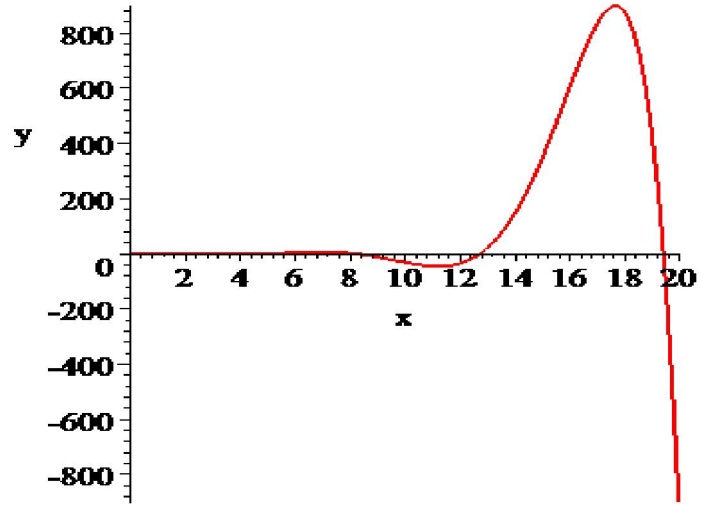
Bu ifade (2.8) ve (2.37) diferansiyel denklemlerinin yardımıyla kontrol edilebilir.

Şekil 2.5'te  $1 \leq n \leq 6$  için  $L_n^{(0)}$ 'ın ve Şeki 2.6'da  $L_7^{(0)}$ 'ın grafikleri görülmektedir. Pencerenin ölçüsü Şekil 2.5'de  $[0, 20] \times [-600, 600]$  ve Şekil 2.6'da  $[0, 20] \times [-900, 900]$ .  $n$  arttığında Laguerre polinomlarının gösterimini elde etmek zordur.

Daha esnek nümerik hesaplamalar için  $S_n^{(\alpha)}: \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}$  şeklinde ölçekleme fonksiyonu kullanarak



Şekil 2.5: Laguerre Polinomları ( $1 \leq n \leq 6$  ve  $\alpha = 0$ )



Şekil 2.6:  $L_7^{(0)}$  Polinomu

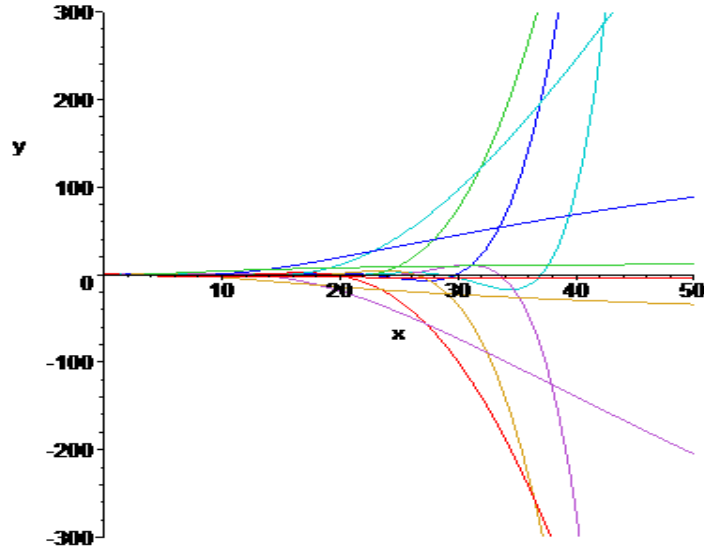
$$\hat{L}_n^{(\alpha)} = S_n^{(\alpha)} L_n^{(\alpha)} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \quad , \quad \alpha > -1 \quad (2.46)$$

tanımlayalım. Amacımız Laguerre polinomlarının nokta değerleri hesap edildiğinde

kötü-koşullu işlemlerden kaçınmaktır.  $S_n^{(\alpha)}$  nın etkili bir seçimi

$$S_0^{(\alpha)}(x) = 1 \quad , \quad S_n^{(\alpha)}(x) = \left[ \binom{n+\alpha}{n} \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{x}{4k} \right) \right]^{-1} \quad , \quad n \geq 1 \quad (2.47)$$

(Funaro,1990a). “Ölçeklendirilmiş Laguerre Fonksiyonları” nın ailesi olarak  $\hat{L}_n^{(\alpha)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  gösterilebilir. Bunlar polinom değildir.  $\hat{L}_n^{(0)}$  nın çizimleri  $1 \leq n \leq 12$  için Şekil 2.7’de verilmiştir. Burada pencere ölçüsü  $[0,50] \times [-300,300]$  dir.



Şekil 2.7: Ölçeklendirilmiş Laguerre Fonksiyonları ( $1 \leq n \leq 12$  ve  $\alpha = 0$ )

Görüldüğü gibi ölçeklendirilmiş Laguerre fonksiyonları daha yumuşak bir davranış sergilemektedir. Burada  $\hat{L}_n^{(\alpha)}(0) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$  olduğunu unutmayalım. (2.41) de yerine koyduktan ve sadeleştirdikten sonra  $\forall n \geq 2$  olmak üzere yineleme formülü

$$\hat{L}_n^{(\alpha)}(x) = \frac{4n}{(n+\alpha)(4n+x)} \left[ (2n+\alpha-1-x) \hat{L}_{n-1}^{(\alpha)}(x) - \frac{4(n-1)^2}{4n+x-4} \hat{L}_{n-2}^{(\alpha)}(x) \right] \quad (2.48)$$

ile  $\hat{L}_0^{(\alpha)}(x) = 1$  ve  $\hat{L}_1^{(\alpha)}(x) = \frac{4(\alpha+1-x)}{(\alpha+1)(x+4)}$  elde edilir. Ayrıca türevler için  $\forall n \geq 2$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \hat{L}_n^{(\alpha)}(x) = \frac{4n}{(n+\alpha)(4n+x)} & \left[ (2n+\alpha-1-x) \frac{d}{dx} \hat{L}_{n-1}^{(\alpha)}(x) \right. \\ & \left. - \frac{6n+\alpha-1}{4n+x} \hat{L}_{n-1}^{(\alpha)}(x) + \frac{4(n-1)^2}{4n+x-4} \left( \frac{2(4n+x-2)}{(4n+x)(4n+x-4)} \hat{L}_{n-2}^{(\alpha)}(x) - \frac{d}{dx} \hat{L}_{n-2}^{(\alpha)}(x) \right) \right] \end{aligned} \quad (2.49)$$

ile  $\frac{d}{dx} \hat{L}_0^{(\alpha)}(x) = 0$  ve  $\frac{d}{dx} \hat{L}_1^{(\alpha)}(x) = -\frac{\alpha+5}{\alpha+1} \frac{4}{(x+4)^2}$  elde edilir.

## 2.7 Hermite Polinomları

Bu bölümde son olarak  $H_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  Hermite polinomlarını ele alacağız.  $H_n$  ler (2.1) denkleminde

$$a(x) = w(x) = e^{-x^2}, \quad b(x) = 0, \quad \forall x \in I \equiv \mathbb{R}$$

alınarak elde edilen singüler olmayan Sturm-Liouville probleminin çözümleridirler. Böylelikle

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.50)$$

şeklindeki diferansiyel denklemi kolayca elde ederiz. Normalleştirme şartı aşağıdaki gibidir:

$$H_n(0) = (-1)^{n/2} \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!}, \quad n \text{ çiftse} \quad (2.51)$$

$$H'_n(0) = (-1)^{(n-1)/2} \frac{(n+1)!}{\left(\frac{(n+1)}{2}\right)!}, \quad n \text{ tekse} \quad (2.52)$$

$n$  inci dereceden  $H_n$  polinomu,  $n$  in değerine göre çift ya da tek fonksiyon olur. Benzer şekilde Rodrigues formülü

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.53)$$

olarak bulunur. Daha açık olarak ifade edecek olursak

$$\begin{aligned} H_n(x) &= n! \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^m (2x)^{n-2m}}{m! (n-2m)!} \\ &= 2^n x^n - n(n-1)2^{n-2} x^{n-2} + n(n-1)(n-2)(n-3)2^{n-5} x^{n-4} - \dots, \end{aligned} \quad (2.54)$$

$n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$

Karşılık gelen 3-terimli yineleme formülü  $H_0(x) = 1$  ve  $H_1(x) = 2x$  olmak üzere

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x), \quad \forall n \geq 2. \quad (2.55)$$

(2.53) türevinin alınmasından

$$H'_n(x) = 2xH_n(x) - 2H_{n+1}(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.56)$$

elde edilir. Böylece (2.55) ile birlikte türev vb. hesaplamalar yapmak için aşağıdaki basit bağıntıyı elde ederiz:

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.57)$$

Şekil 2.8 ve Şekil 2.9'da Hermite polinomlarının grafikleri verilmiştir. Pencerelelerinin ölçüleri  $[-5, 5] \times [-900, 900]$  ve  $[-5, 5] \times [-450000, 450000]$ .

Hermite polinomları

$$H_n(x) = (-1)^{n/2} 2^n \left(\frac{n}{2}\right)! L_{n/2}^{(-1/2)}(x^2), \quad n \text{ çiftse} \quad (2.58)$$

$$H_n(x) = (-1)^{(n-1)/2} 2^n \left(\frac{n-1}{2}\right)! x L_{(n-1)/2}^{(1/2)}(x^2), \quad n \text{ tekse} \quad (2.59)$$

şeklinde Laguerre polinomları kullanılarak ifade edilebilirler. Bunlar (2.37)-(2.38) ve (2.50)-(2.52) formülleri yardımıyla kolayca çıkarılabilirler. (2.58)-(2.59) yardımıyla (2.46)-(2.47) tanımlarını tekrar hatırlarsak

$$\hat{H}_n(x) = \hat{L}_{n/2}^{(-1/2)}(x^2), \quad n \text{ çiftse} \quad (2.60)$$

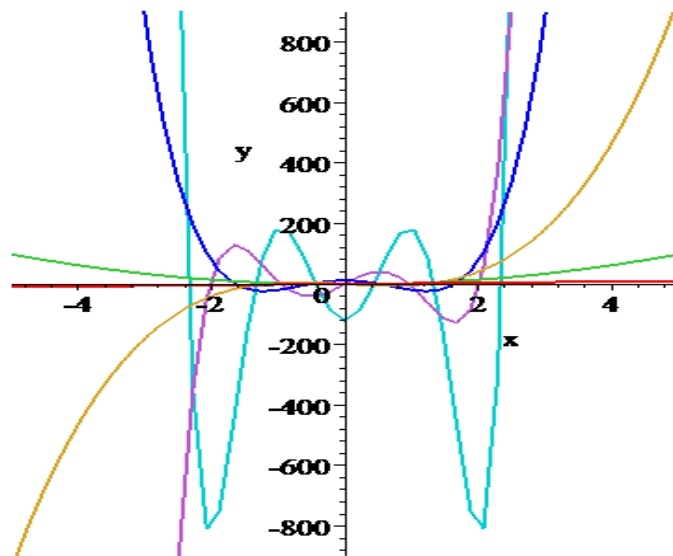
$$\hat{H}_n(x) = \hat{L}_{(n-1)/2}^{(1/2)}(x^2), \quad n \text{ tekse} \quad (2.61)$$

şeklinde ölçeklendirilmiş Hermite fonksiyonları tanımlanır. Sonuç olarak

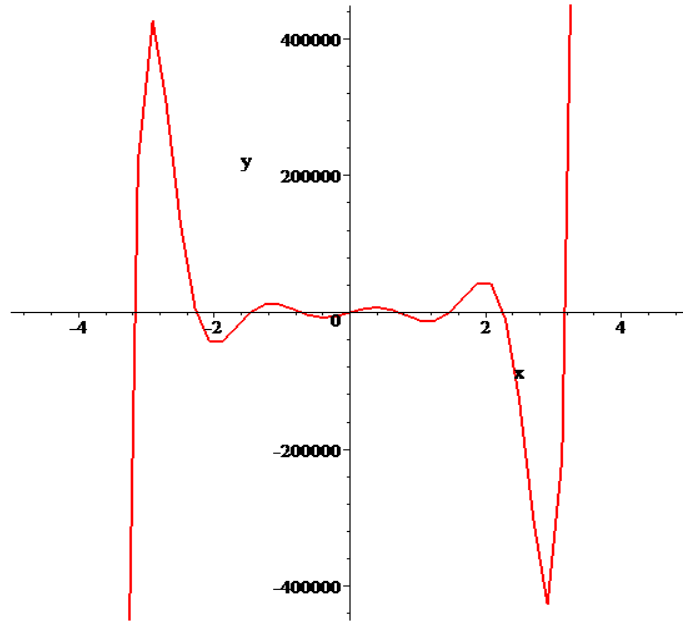
$$\hat{H}_n(0) = 1, \quad n \text{ çiftse} \quad (2.62)$$

$$\hat{H}'_n(0) = 1, \quad n \text{ tekse} \quad (2.63)$$

elde edilir. Türevler (2.48) ve (2.49) denklemleri kullanılarak hesaplanabilir.



Şekil 2.8: Hermite Polinomları ( $1 \leq n \leq 6$ )



Şekil 2.9:  $H_9$  Polinomu

### 3. ORTOGONALLİK

İç çarpımlar ve ortogonal fonksiyonlar yaklaşım teorisinde temel kavramlardır. İkinci Bölüm'de verilen ailelerin tümü uygun bir iç çarpıma göre ortogonal fonksiyonlar kümesi oluştururlar. Bu özellik pek çok değişik diğer hususları ortaya çıkaracaktır.

#### 3.1 İç çarpımlar ve Normlar

**Tanım (İç çarpım):**  $X$  bir reel vektör uzayı olsun.  $\forall u, v \in X$  vektör çiftine bir  $(u, v)$  reel sayısı karşılık geldiğini kabul edelim.  $(\cdot, \cdot): X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu aşağıdaki üç özelliği sağlıyorsa  $X$  üzerinde bir (reel) iç çarpım olarak adlandırılır. Lineerlik özelliği:

$$(au_1 + bu_2, v) = a(u_1, v) + b(u_2, v) \quad , \quad \forall u, v \in X \quad (3.1)$$

Simetri özelliği:

$$(u, v) = (v, u) \quad , \quad \forall u, v \in X \quad (3.2)$$

Pozitif tanımlılık özelliği:

$$(u, v) \geq 0 \quad , \quad \forall u \in X \quad , \quad (u, u) = 0 \Leftrightarrow u \equiv 0 \quad (3.3)$$

Bir iç çarpımla beraber  $X$  vektör uzayına iç çarpım uzayı (reel iç çarpım uzayı) denir.

**Tanım (Norm):**  $X$  bir iç çarpım uzayı olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan  $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}^+$  şeklindeki fonksiyona  $X$  'de bir norm denir:

$$\|u\| \geq 0 \quad , \quad \forall u \in X \quad , \quad \|u\| = 0 \Leftrightarrow u \equiv 0 \quad (3.4)$$



$$\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|, \forall u \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (3.5)$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \forall u, v \in X \quad (\text{üçgen eşitsizliği}) \quad (3.6)$$

Genel olarak iç çarpımlar ve normlar bağımsız kavramlardır. Bununla birlikte, her ne zaman  $X$  'de bir iç çarpım varsa otomatik olarak bir norm

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}, \quad \forall u \in X \quad (3.7)$$

şeklinde tanımlanır. Özellikle (3.6) eşitsizliği

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|, \forall u, v \in X \quad (3.8)$$

şeklinde iyi bilinen Schwarz eşitsizliğinin bir yan ürünüdür.

Şimdi bir örnek verelim.  $\bar{I}$  aralığında sürekli fonksiyonların lineer uzayı  $X = C^0(\bar{I})$  olsun.  $w: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $w > 0$  koşulunu sağlayan ve sürekli integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Bu takdirde,  $I$  sınırlı olduğu zaman,  $(\cdot, \cdot)_w$  bir iç çarpım ve ona karşılık gelen  $\|\cdot\|_w$  normu

$$(u, v)_w = \int_I u v w dx, \quad \forall u, v \in C^0(\bar{I}) \quad (3.9)$$

$$\|u\|_w = \left( \int_I u^2 w dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in C^0(\bar{I}) \quad (3.10)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $w$  fonksiyonu “*ağırlık fonksiyonu*” olarak adlandırılır.  $I$  sınırlı olmazsa (3.9) ve (3.10)'daki integrallerin sonlu olmasına dikkat etmek zorundayız.

Bu kısa başlangıcın yardımıyla Sturm-Liouville problemlerinin çözümlerinin daha ayrıntılı analizini yapmaya hazır hale gelmiş bulunuyoruz.

### 3.2 Ortogonal Fonksiyonlar

$u, v \in C^0(\bar{I})$  fonksiyonları bir  $w$  ağırlık fonksiyonu için  $(u, v)_w = 0$  koşulunu sağlarsa *ortogonaldir* denir.

(2.1) denklemindeki  $a$  fonksiyonunun,  $I$  aralığının uç noktalarında sıfıra gittiğini varsayalım (yani,  $I$  aralığı sınırlı değilse  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} a(x) = 0$ ). Bu takdirde aşağıdaki temel sonucu elde ederiz:

**3.1 Teorem:**  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  özdeğerlerine karşılık gelen (2.1) denkleminin çözümlerinin bir dizisi  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  olsun.  $n \neq m$  ise  $\lambda_n \neq \lambda_m$  olduğunu şart koşalım. Bu takdirde

$$\int_I u_n u_m w dx = 0, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad n \neq m \quad (3.11)$$

olur.

Bu teorem, Bölüm 2’de gösterilen bütün polinom ailelerinin, onlara karşılık gelen ağırlık fonksiyonu  $w$  olmak üzere, (3.9) iç çarpımına göre ortogonal olduğunu gösterir. Yani, herhangi  $n, m \in \mathbb{N}$  ve  $n \neq m$  için

$$\text{(Jacobi)} \quad \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_m^{(\alpha, \beta)}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx = 0 \quad (3.12)$$

$$\text{(Legendre)} \quad \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0 \quad (3.13)$$

$$\text{(Chebyshev)} \quad \int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad (3.14)$$

$$(Laguerre) \quad \int_0^{\infty} L_n^{\alpha}(x) L_m^{\alpha}(x) x^{\alpha} e^{-x} dx = 0 \quad (3.15)$$

$$(Hermite) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = 0 \quad (3.16)$$

olur. Ölçeklendirilmiş Laguerre (ya da Hermite) fonksiyonlarının ortogonal olmadığını unutmayalım.

Ayrıca,  $b \equiv 0$  olduğunu göz önüne alırsak, (3.11) ve

$$\int_I a u'v' dx + \int_I buv dx = \lambda \int_I uvw dx$$

denklemleri ortogonal polinomların

$$\int_I au'_n u'_m dx = 0, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad n \neq m \quad (3.17)$$

denklemini sağladığını gösterir. Bu da  $a$  ağırlık fonksiyonuna göre türevlerin ortogonal polinomlar olduğunu gösterir.

Herhangi  $n \geq 1$  için,  $p$  en çok  $n-1$  dereceden polinom olduğunda  $\int_I p u_n w dx = 0$  eşitliğini elde ederiz. Çünkü,  $k \leq n-1$  için  $p, u_k$  ların lineer birleşimidir.

Denklem (3.13) de  $x = \cos \theta$  alınırsa ve (2.29) göz önüne alındığında, trigonometrik fonksiyonlar için iyi bilinen ortogonal bir bağıntı elde edilir:

$$\int_0^{\pi} \cos n\theta \cos m\theta d\theta = 0, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad n \neq m \quad (3.18)$$

Bu da Chebyshev polinomlarını karakterize etmemize olanak sağlayacaktır.

**3.2 Teorem:** Herhangi  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 \left[ P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \right]^2 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \\
 \text{(Jacobi)} \quad & = \begin{cases} 2^{\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} & , n=0 \\ \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{(2n+\alpha+\beta+1)n!} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} & , n>0 \end{cases} \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

$$\text{(Legendre)} \quad \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1} \quad (3.20)$$

$$\text{(Chebyshev)} \quad \int_{-1}^1 T_n^2(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \pi & , n=0 \\ \frac{\pi}{2} & , n>0 \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\text{(Laguerre)} \quad \int_0^{+\infty} \left[ L_n^{(\alpha)}(x) \right]^2 x^\alpha e^{-x} dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \quad (3.22)$$

$$\text{(Hermite)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} H_n^2(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi} . \quad (3.23)$$

## 4. CHEBYSHEV TÜREVLEME MATRİSLERİ

Birinci tür Chebyshev polinomları ( $T_n(x)$ ,  $n \geq 1$ )  $[-1,1]$  aralığında  $n+1$  tane ekstremuma sahiptir ve bunlar

$$x_j = \cos(j\pi/N) \quad , \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (4.1)$$

formülüyle bulunabilirler. Bu bölümde bu noktaları kullanarak Chebyshev türevleme matrisleri oluşturulacak ve daha sonra bu matrisler bazı fonksiyonların türevlenmesine uygulanacaktır.

Chebyshev noktalarında tanımlı bir  $v$  ızgara fonksiyonu verildiğinde  $w$  ayrık türevini aşağıdaki iki adımda hesaplayabiliriz.

- $p(x_j) = v_j$ ,  $0 \leq j \leq N$  olacak şekilde derecesi  $N$  ye eşit ya da daha küçük polinom  $p$  olsun.
- $w_j = p'(x_j)$  alalım.

Bu işlem lineer olduğundan dolayı  $(N+1) \times (N+1)$  tipinde  $\mathbf{D}_N$  ile göstereceğimiz bir matris ile çarpma olarak

$$\mathbf{w} = \mathbf{D}_N \mathbf{v}$$

şeklinde temsil edilebilir. Buradaki  $N$  çift ya da tek keyfi bir pozitif tamsayıdır. İnterpolasyon işlemi için genel bir fikir oluşturmada  $N=1$  ve  $N=2$  durumlarına bakmamız faydalı olacaktır.

İlk olarak  $N=1$  durumunu göz önüne alalım. Bu durumda interpolasyon noktaları  $x_0 = 1$  ve  $x_1 = -1$ .  $v_0$  ve  $v_1$  'leri kullanarak Lagrange formunda yazılan interpolasyon polinomu

$$p(x) = \frac{1}{2}(1+x)v_0 + \frac{1}{2}(1-x)v_1$$

olur. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$p'(x) = \frac{1}{2}v_0 - \frac{1}{2}v_1$$

elde edilir. Bu formül  $2 \times 2$  tipinde aşağıdaki  $\mathbf{D}_1$  matrisini verir:

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Şimdi de  $N=2$  yi göz önüne alalım. İnterpolasyon noktaları  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 0$  ve  $x_2 = -1$  dir ve interpolant

$$p(x) = \frac{1}{2}x(1+x)v_0 + (1+x)(1-x)v_1 + \frac{1}{2}x(1-x)v_2$$

ikinci dereceden bir denklemdir. Türevi

$$p'(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)v_0 - 2xv_1 + \left(x - \frac{1}{2}\right)v_2$$

şeklinde lineer bir polinomdur. Türevleme matrisi  $3 \times 3$  tipindeki  $\mathbf{D}_2$  matrisidir ve bu matris yukarıdaki ifadede sırasıyla  $x = 1, 0$  ve  $-1$  konulduğunda

$$\mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

şeklinde bulunur. Şimdi keyfi  $N$  için  $\mathbf{D}_N$  matrisinin formülünü bulalım.

**4.1 Teorem (Chebyshev Türevleme Matrisi):** Herhangi  $N \geq 1$  için,  $(N+1) \times (N+1)$  tipindeki Chebyshev spektral türevleme matrisi  $\mathbf{D}_N$  'nin satır ve sütunları 0 'dan  $N$  'ye kadar indekslenir. Bu matrisin elemanları

$$c_i = \begin{cases} 2 & , i = 0 \text{ ya da } N \\ 1 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere

$$(\mathbf{D}_N)_{00} = \frac{2N^2 + 1}{6} \quad , \quad (\mathbf{D}_N)_{NN} = -\frac{2N^2 + 1}{6} \quad , \quad (4.3)$$

$$(\mathbf{D}_N)_{jj} = \frac{-x_j}{2(1-x_j^2)} \quad , \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (4.4)$$

$$(\mathbf{D}_N)_{ij} = \frac{c_i}{c_j} \frac{(-1)^{i+j}}{(x_i - x_j)} \quad , \quad i \neq j \quad i, j = 0, \dots, N, \quad (4.5)$$

şeklindedir.

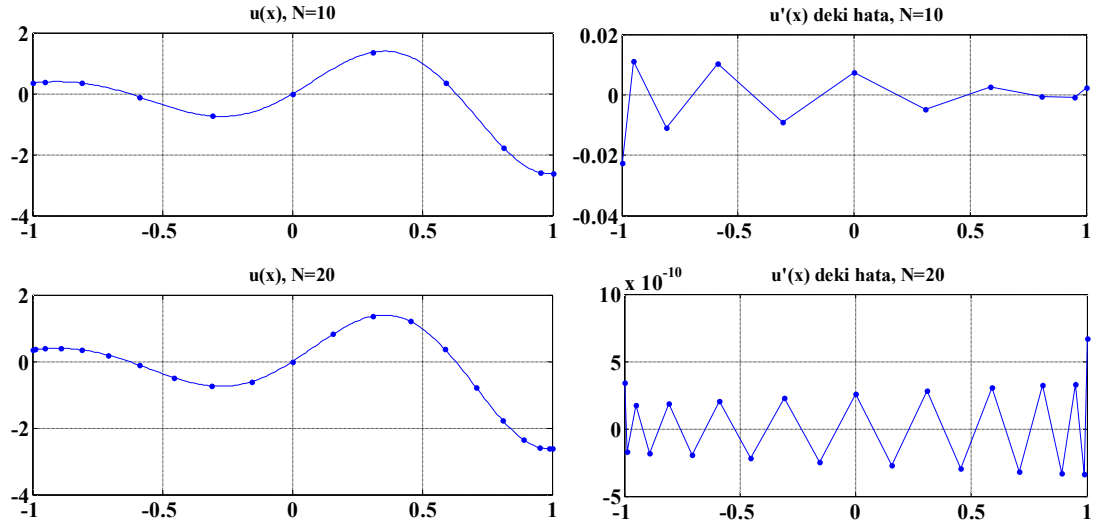
Chebyshev spektral türevleme matrisi  $\mathbf{D}_N$  'yi hesaplamak için program yazılırken (4.3)-(4.5) formüllerini tam anlamıyla kullanmak yerine; ilk önce matrisin köşegen elemanları dışındaki diğer elemanlarını (4.5) formülüyle hesaplamak, daha sonra da (4.3) ve (4.4) formülleri ile verilen köşegen elemanlarını

$$(\mathbf{D}_N)_{ii} = -\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N (\mathbf{D}_N)_{ij} \quad , \quad (4.6)$$

özdeşliğini kullanarak hesaplamak daha uygun olacaktır.

**4.1 Örnek:**  $u(x) = e^x \sin(5x)$  şeklindeki periyodik olmayan düzgün fonksiyonun türevini Chebyshev spektral türevleme matrisi  $\mathbf{D}_N$  'yi kullanarak

hesaplayalım. Şekil 4.10'da sırasıyla  $N = 10$  ve  $N = 20$  kullanarak elde edilen  $u(x)$  in grafiği ve  $u'(x)$  teki hatanın grafiği verilmiştir.



Şekil 4.10 :  $u(x) = e^x \sin(5x)$  in Chebyshev Türevlemesi



## 5. ADI DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Bölüm 4’de  $\mathbf{D}_N$  Chebyshev türevleme matrisi tanımlanmıştı. Bu bölümde  $\mathbf{D}_N$  matrisini kullanarak adi diferansiyel denklemler için bazı sınır değer problemlerinin çözümleri üzerinde duracağız.

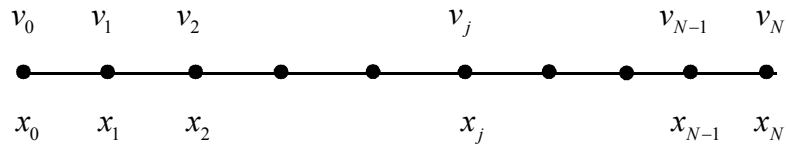
**5.1 Örnek:** İlk uygulama olarak, aşağıdaki lineer adi diferansiyel denklem için sınır değer problemini göz önüne alalım [14]:

$$u_{xx} = e^{4x} \quad , \quad -1 < x < 1 \quad , \quad u(\pm 1) = 0. \quad (5.1)$$

Bu sınır değer problemi, analitik çözümü  $u(x) = \frac{1}{16} [e^{4x} - x \sinh(4) - \cosh(4)]$  olan bir boyutlu Poisson denklemdir.

Problemin nümerik çözümü için  $\mathbf{D}_N$  nin karesi  $\mathbf{D}_N^2$  ile ikinci türev hesaplanabilir. Problemin diğer yarısı  $u(\pm 1) = 0$  sınır koşullarının kullanımınıdır. Bu şekilde homojen Dirichlet sınır koşullarına sahip basit problemler için aşağıdaki gibi devam edilebilir.

Hesaplama noktaları olarak  $x_1, \dots, x_{N-1}$  şeklinde iç Chebyshev noktalarını alalım (Şekil 5.11). Bunlara karşı gelen bilinmeyenler vektörü  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_{N-1})^T$  olsun.



**Şekil 5.11:**  $x_1, \dots, x_{N-1}$  noktalarına karşılık gelen  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_{N-1})^T$  vektörleri

Bu durumda spektral türevleme aşağıdaki şekilde uygulanabilir:

- $p(\pm 1) = 0$  ve  $p(x_j) = v_j$ ,  $1 \leq j \leq N-1$  olacak şekilde derecesi  $N$  ye eşit ya da küçük tek polinom  $p(x)$  olsun.
- $w_j = p''(x_j)$ ,  $1 \leq j \leq N-1$  alalım.

O halde  $\mathbf{D}_N^2$ ,  $(v_0, \dots, v_N)^T$  vektörünü  $(w_0, \dots, w_N)^T$  vektörüne dönüştüren  $(N+1) \times (N+1)$  boyutlu bir matristir. Tanımlanan bu işlem istediğimiz

- $v_0 = v_N = 0$  al.
- $w_0$  ve  $w_N$  ihmal et.

sonuçlarına ulaşmamızı sağlar. Bu da  $\mathbf{D}_N^2$  nin ilk ve son sütunlarının herhangi bir etkisinin olmadığını (sıfırla çarpıldıklarından dolayı) ve ilk ve son satırlarının da herhangi bir işlevinin kalmadığını gösterir (ihmal edildiklerinden dolayı):

$$\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ w_{N-1} \\ w_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{D}_N^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{N-1} \\ v_N \end{pmatrix}.$$

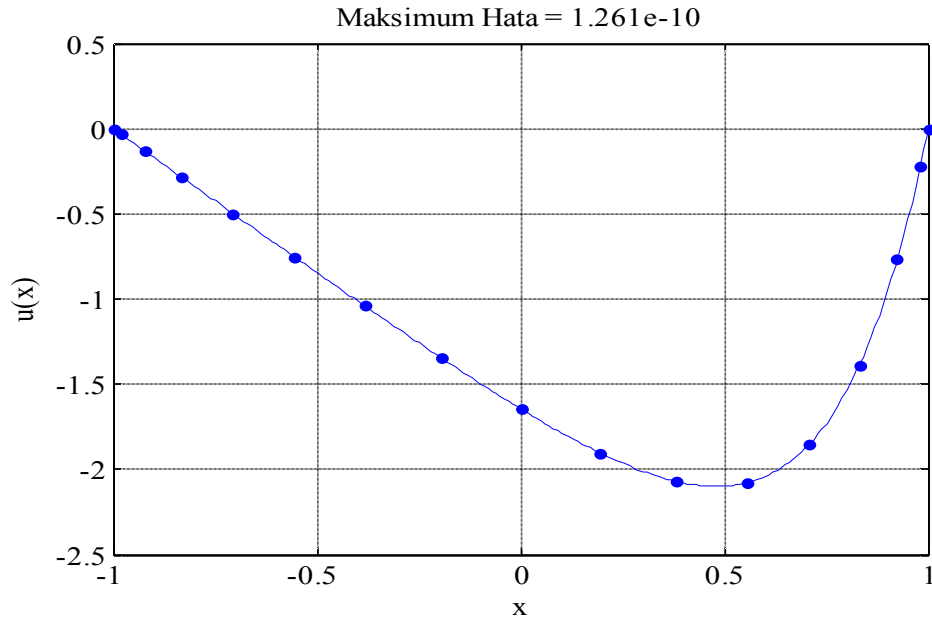
Diğer bir deyişle, bir Chebyshev spektral metotla bir-boyutlu Poisson problemini çözmek için  $\mathbf{D}_N^2$  nin ilk ve son satır ve sütunları atılarak elde edilen  $(N-1) \times (N-1)$  tipindeki  $\tilde{\mathbf{D}}_N^2$  matrisi kullanılabilir. O halde,  $\tilde{\mathbf{D}}_N^2$  kullanıldığında (5.1) in nümerik çözümü aşağıdaki formda bir lineer denklem sistemini çözme problemine indirgenir:

$$\tilde{\mathbf{D}}_N^2 \mathbf{v} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{f} = (e^{4x_1}, \dots, e^{4x_{N-1}})^T.$$

Bu lineer denklem sistemi de uygun bir bilgisayar programı yardımıyla  $u$  nun yaklaşım vektörü  $(v_1, \dots, v_{N-1})^T$  için kolayca çözülebilir.

Bu bölümde gerekli tüm programlar ve grafik çizimleri için MATLAB, hata ölçümleri için ise  $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} (|x_i|)$  şeklinde tanımlanan sonsuz norm kullanılmıştır.

Şekil 5.12’de (5.1) probleminin nümerik çözümünün grafiği verilmiştir. Bu grafiği elde etmek için yazılan kod sadece Chebyshev noktalarında  $u$  nun yaklaşım vektörünü  $((v_1, \dots, v_{N-1})^T)$  hesaplasa bile, elde edilen nümerik çözümde polinom interpolasyonu yapılarak problemin çözümü için Şekil 5.12’deki düz çizgi grafiği elde edilmiştir. Bu interpolasyon işlemi basit bir MATLAB komutuyla (*polyval(polyfit(...))*) yapılmıştır. Bu durum bundan sonraki örneklere de uygulanmıştır.



Şekil 5.12:  $u_{xx} = e^{4x}$  lineer sınır değer probleminin çözümü

**5.2 Örnek:** İkinci uygulama olarak,

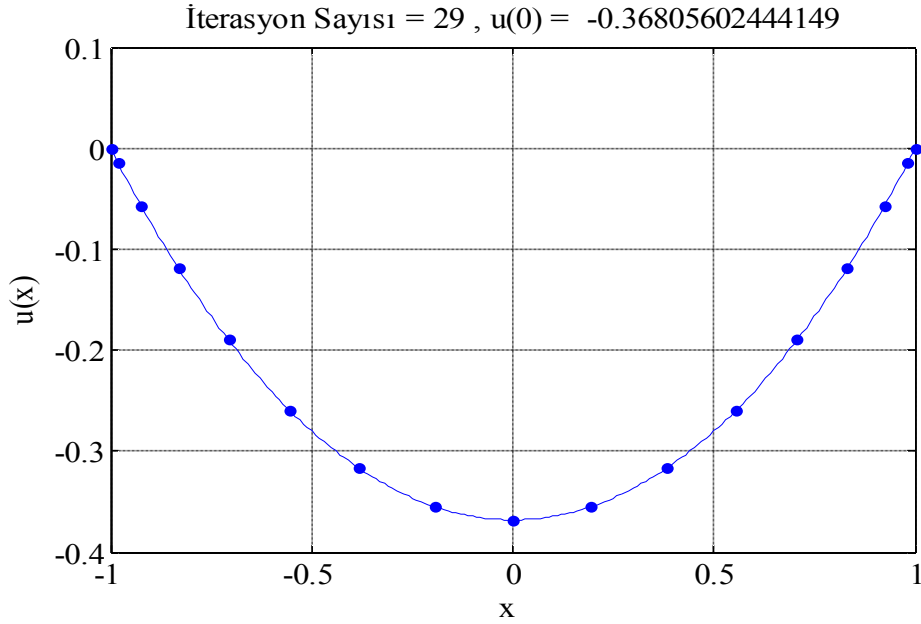
$$u_{xx} = e^u, \quad -1 < x < 1, \quad u(\pm 1) = 0, \quad (5.2)$$

şeklindeki lineer olmayan sınır değer problemini ele alalım (Trefethen 2000).

Denklemin lineer olmamasından dolayı ikinci mertebeden  $\tilde{\mathbf{D}}_N^2$  türevleme matrisini terslemek yukarıdaki örnekte olduğu gibi yeterli olmayacaktır. Bunun yerine problemi iterasyonla çözebiliriz. Her iterasyon yönteminin kullanımında olduğu gibi burada da bir başlangıç tahmini kullanmamız gereklidir. Bunun için sıfır vektörünü seçelim. Böylece  $e^{v_j}$  bileşenleri tarafından tanımlanan sütun vektörü  $e^v$  olmak üzere

$$\tilde{\mathbf{D}}_N^2 \mathbf{v}_{yeni} = e^{v_{eski}},$$

şeklindeki denklem sistemini iterasyon için kullanabiliriz. Basit bir iterasyonu durdurma kriteri kullanarak (burada  $\|\varepsilon\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} (|v_{yeni} - v_{eski}|) < 10^{-15}$  kullanılmıştır) elde edilen sonuç Şekil 5.13'te grafik olarak verilmiştir.



Şekil 5.13: (5.2) lineer olmayan sınır değer probleminin çözümü

Şekil 5.13'te görüldüğü gibi 29 iterasyonda belirlenen kriterde yakınsaklık gerçekleşmiştir. Elde edilen çözümün doğruluğunu görmek için yazılan koda basit

bir ekleme yapılarak çeşitli  $N$  değerleri için sonuçları yazdırabiliriz. Bu durum Tablo 5.1'de verilmektedir.  $N=16$  olduğunda bile  $u(0)$  için 12 veya 13 haneli doğruluğa ulaşılabilmektedir.

**Tablo 5.1:** (5.2) probleminin nümerik sonuçları

N	İterasyon Sayısı	$u(0)$
2	34	-0.35173371124920
4	29	-0.36844814823915
6	29	-0.36805450387666
8	29	-0.36805614384219
10	29	-0.36805602345302
12	29	-0.36805602451189
14	29	-0.36805602444069
16	29	-0.36805602444149
18	30	-0.36805602444143
20	29	-0.36805602444143

**5.3 Örnek:** Üçüncü uygulama olarak, aşağıdaki lineer sabit katsayılı homojen adi diferansiyel denklem için sınır değer problemini göz önüne alalım.

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 3. \quad (5.3)$$

Bu problemin analitik çözümü  $y = e^{-t} + (3t - 1)t e^{-t}$ .

Problemin nümerik çözümü için Örnek 5.1'deki metot izlenecektir. Fakat o metodu kullanabilmek için problemin tanımlı olduğu aralığın  $[-1,1]$  ve sınır koşullarının homojen olması gerekmektedir. Dolayısıyla ilk önce  $[0,1]$  aralığını  $[-1,1]$  aralığına dönüştürmemiz gerekmektedir.

Herhangi  $[a,b]$  aralığı

$$t = \left( \frac{b-a}{2} \right) x + \left( \frac{b+a}{2} \right), \quad a \leq t \leq b, \quad (5.4)$$

dönüşümüyle kolayca  $[-1,1]$  aralığına getirilebilir. O halde (5.3) probleminde

$t = \frac{x+1}{2}$  dönüşümünü yaparsak, zincir kuralından

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = 2 \frac{dy}{dx}, \quad (5.5)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dt} \right) = 4 \frac{d^2y}{dx^2}, \quad (5.6)$$

olduklarından dolayı (5.3) problemi

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + \frac{1}{4}y = 0, \quad y(-1) = 1, \quad y(1) = 3, \quad (5.7)$$

formuna indirgenmiş olur.

Şimdi de sınır koşullarını homojen yapmamız gerekmektedir. Bunun için de (5.7) probleminde

$$y = x + 2 + u(x),$$

dönüşümünü yapalım. Bu durumda

$$y' = 1 + u'(x), \quad y'' = u''(x),$$

elde edilir. Bulduğumuz bu ifadeleri (5.7) denkleminde yerine yazarsak

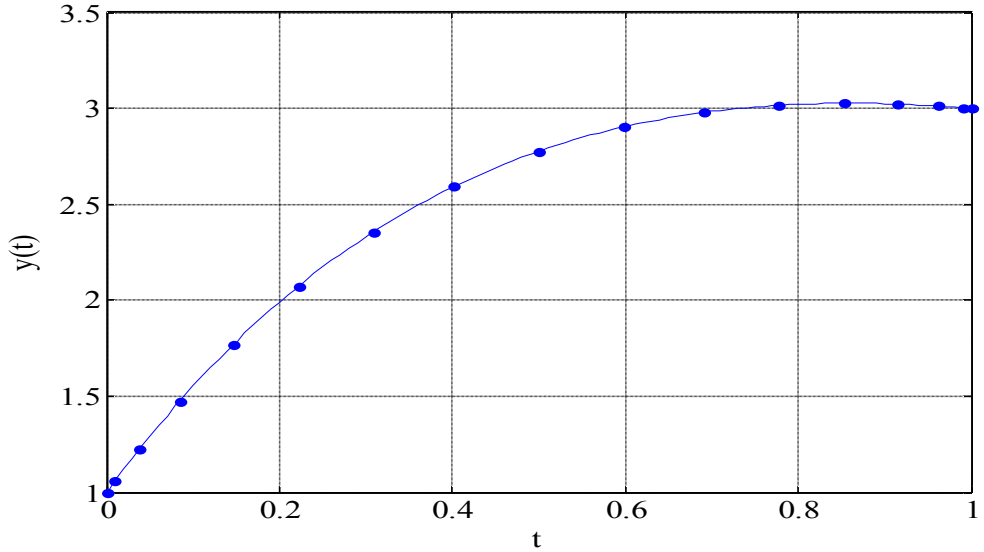
$$u'' + u' + \frac{1}{4}u = -\left( \frac{x}{4} + \frac{3}{2} \right), \quad u(\mp 1) = 0,$$

şeklinde homojen sınır koşullarına sahip sınır değer problemini elde ederiz. Bu problemi  $x_1, \dots, x_{N-1}$  şeklindeki iç Chebyshev noktalarında

$$\left( \tilde{\mathbf{D}}_N^2 + \tilde{\mathbf{D}}_N + \frac{1}{4} \mathbf{I} \right) \mathbf{v} = \mathbf{f},$$

olarak lineer denklem sistemi formunda yazabiliriz. Burada  $\mathbf{I}$ ,  $(N-1) \times (N-1)$  boyutlu birim matris ve  $\mathbf{f}$  de elemanları  $f_j = -\left(\frac{x_j}{4} + \frac{3}{2}\right)$ ,  $j=1,2,\dots,N-1$  olan sütun vektörüdür. Bu sistem bilinmeyen  $\mathbf{v}$  vektörü için kolayca çözümlenerek iç Chebyshev noktalarında  $u(x_j)$  değerleri bulunur. Daha sonrada yapılan dönüşümlerde yerine koyma işlemleri gerçekleştirilerek ele alınan asıl (5.3) probleminin yaklaşık çözümlerine ulaşılmış olunur.

Şekil 5.14'de ele alınan problemin nümerik çözümünün grafiği verilmiştir. Tablo 5.2'de de mutlak hata verilmiştir. Sonuçlar incelendiğinde hatanın ne kadar küçük olduğu açıkça görülmektedir.



Şekil 5.14: (5.3) lineer sınır değer probleminin nümerik çözümü

**5.4 Örnek:** Bu problemde değişken katsayılı, lineer, homojen adi diferansiyel denklem için aşağıdaki sınır değer problemini göz önüne alalım:

$$y''(t) + 4ty'(t) + 2(1 + 2t^2)y(t) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1. \quad (5.8)$$

Bu problemin analitik çözümü  $y = te^{-t^2+1}$ .

**Tablo 5.2:** (5.3) lineer sınır değer probleminin çözümündeki mutlak hata

$t_j$	$y_{analitik}$	$y_{nümerik}$	Mutlak Hata
0	1.0000000000000000	1.0000000000000000	0.0000
0.1	1.5522346095794486	1.5522346095794446	$3.9968 \times 10^{-15}$
0.2	1.9903091595578664	1.9903091595578606	$5.7732 \times 10^{-15}$
0.3	2.3309501912006318	2.3309501912006265	$5.3291 \times 10^{-15}$
0.4	2.5887345880899950	2.5887345880899888	$6.2172 \times 10^{-15}$
0.5	2.7763472359065098	2.7763472359065045	$5.3291 \times 10^{-15}$
0.6	2.9048091101918980	2.9048091101918923	$5.7732 \times 10^{-15}$
0.7	2.9836790870470296	2.9836790870470264	$3.1086 \times 10^{-15}$
0.8	3.0212324124078527	3.0212324124078500	$2.6645 \times 10^{-15}$
0.9	3.0246184447783091	3.0246184447783069	$2.2204 \times 10^{-15}$
1.0	3.0000000000000000	3.0000000000000000	0.0000

Bir önceki örnekteki metodu izleyebilmemiz için problemin tanımlı olduğu aralığı  $[0,1]$  'den  $[-1,1]$  'e dönüştürmeliyiz. Bunun için (5.4) denklemini

kullandığımızda  $t = \frac{x+1}{2}$  dönüşümünü elde ederiz. (5.5) ve (5.6) ifadelerini (5.8)

probleminde yerine koyduğumuzda

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (x+1)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{2} + \frac{(x+1)^2}{4}\right)y = 0, \quad y(-1) = 0, \quad y(1) = 1, \quad (5.9)$$

elde edilir. Koşulları homojen yapmak içinde  $y = \frac{x+1}{2} + u(x)$  dönüşümünden faydalanılır. Bu durumda

$$y' = \frac{1}{2} + u'(x), \quad y'' = u''(x),$$

ifadelerini (5.9) denkleminde yerine yazarsak



$$u'' + (x+1)u' + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x+1)^2\right)u = -\left(\frac{x+1}{2}\right)\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}(x+1)^2\right), \quad u(\mp 1) = 0,$$

şeklinde  $[-1,1]$  aralığında homojen sınır koşullarına sahip sınır değer problemini elde ederiz. Bu problemi  $x_1, \dots, x_{N-1}$  şeklindeki iç Chebyshev noktalarında

$$\left\{ \tilde{\mathbf{D}}_N^2 + (x_j + 1)\tilde{\mathbf{D}}_N + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x_j + 1)^2\right] \mathbf{I} \right\} \mathbf{v} = \mathbf{f},$$

olarak lineer denklem sistemi formunda yazabiliriz. Burada  $\mathbf{I}$ ,  $(N-1) \times (N-1)$  boyutlu birim matris ve  $\mathbf{f}$  de elemanları

$$f_j = -\left(\frac{x_j + 1}{2}\right)\left[\frac{3}{2} + \frac{1}{4}(x_j + 1)^2\right], \quad j = 1, 2, \dots, N-1,$$

olan sütun vektörüdür. Bu sistem bilinmeyen  $\mathbf{v}$  vektörü için kolayca çözülerek iç Chebyshev noktalarında  $u(x_j)$  değerleri bulunur. Daha sonra da bir önceki örneğe benzer şekilde yapılan dönüşümlerde yerine koyma işlemleri gerçekleştirilerek ele alınan asıl (5.8) probleminin yaklaşık çözümlerine ulaşılmış olunur.

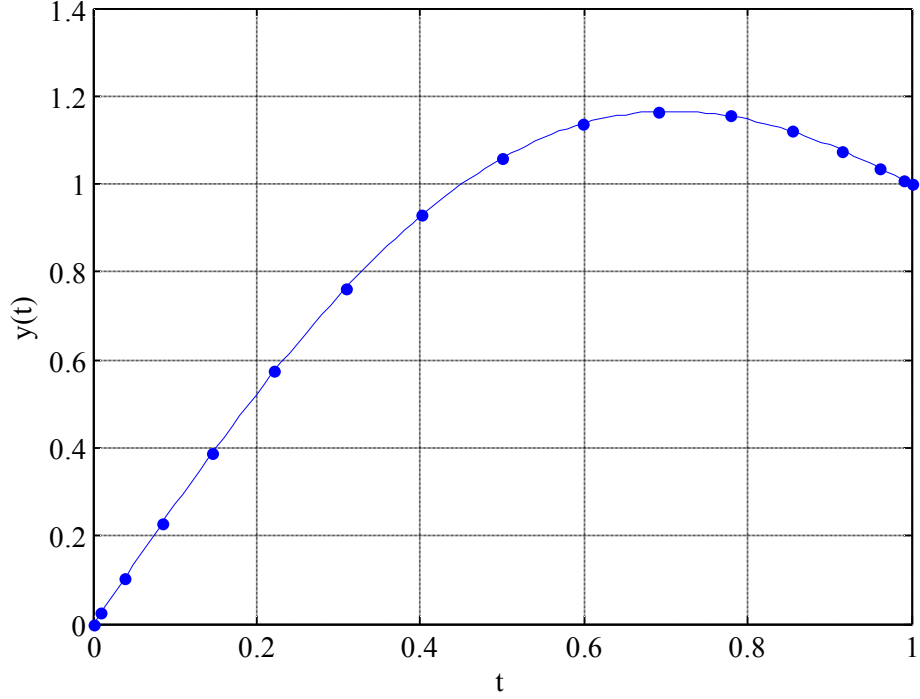
Şekil 5.15, problemin nümerik çözümünün grafiğini göstermektedir. Tablo 5.3'de mutlak hata verilmiştir.

**5.5 Örnek:** Burada ele alınan problemde, aşağıdaki lineer değişken katsayılı homojen olmayan adi diferansiyel denklem için sınır değer problemini göz önüne alalım (Gerald 1994).

$$y''(t) + \left(1 - \frac{t}{5}\right)y(t) = t, \quad y(1) = 2, \quad y(3) = -1. \quad (5.10)$$

Bu problemin analitik çözümü mevcut değildir.

Daha önce verilen Örnek (5.3) ve (5.4) de yapılan işlemler burada da tekrar edilirse



Şekil 5.15: (5.8) lineer sınır değer probleminin nümerik çözümü

Tablo 5.3: (5.8) lineer sınır değer probleminin çözümündeki mutlak hata

$t_j$	$y_{analitik}$	$y_{nümerik}$	Mutlak Hata
0	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000
0.1	0.2691234472349263	0.2691234472349186	$7.6605 \times 10^{-15}$
0.2	0.5223392946846236	0.5223392946846281	$4.5519 \times 10^{-15}$
0.3	0.7452967600154451	0.7452967600154399	$5.2180 \times 10^{-15}$
0.4	0.9265467907124366	0.9265467907124342	$2.4425 \times 10^{-15}$
0.5	1.0585000083063374	1.0585000083063356	$1.7764 \times 10^{-15}$
0.6	1.1378885275829709	1.1378885275829673	$3.5527 \times 10^{-15}$
0.7	1.1657038364621204	1.1657038364621242	$3.7748 \times 10^{-15}$
0.8	1.1466635316482721	1.1466635316482632	$8.8818 \times 10^{-15}$
0.9	1.0883246378915263	1.0883246378915328	$6.4393 \times 10^{-15}$
1.0	1.0000000000000000	1.0000000000000000	$2.2204 \times 10^{-16}$

$$u'' + \left(\frac{x-3}{5}\right)u = \frac{3x^2 + 23}{10}, \quad u(\mp 1) = 0,$$

şeklinde  $[-1,1]$  aralığında homojen sınır koşullarına sahip sınır değer problemini elde ederiz. Bu problemi  $x_1, \dots, x_{N-1}$  şeklindeki iç Chebyshev noktalarında

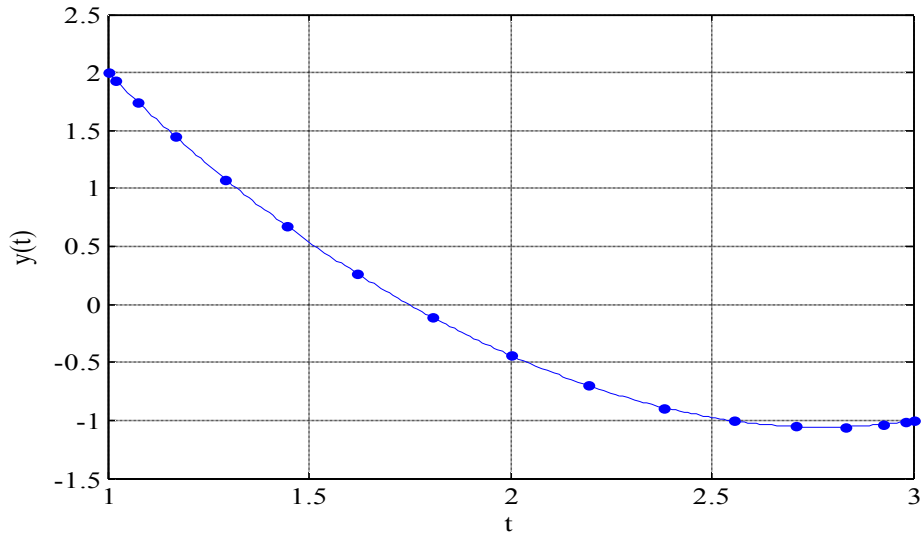
$$\left[ \tilde{\mathbf{D}}_N^2 + \left( \frac{x_j - 3}{5} \right) \mathbf{I} \right] \mathbf{v} = \mathbf{f},$$

olarak lineer denklem sistemi formunda yazabiliriz. Burada  $\mathbf{I}$ ,  $(N-1) \times (N-1)$  boyutlu birim matris ve  $\mathbf{f}$  de elemanları

$$f_j = \frac{3x_j^2 + 23}{10}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1,$$

olan sütun vektörüdür.

Şekil 5.16'da problemin Chebyshev spektral metodu kullanılarak yapılan nümerik çözümünün grafiği görülmektedir. Tablo 5.2 de, (5.10) probleminin sonlu farklar metodu, atış metodu ve Chebyshev spektral metodu kullanılarak elde edilen sonuçları karşılaştırılmıştır.



Şekil 5.16: (5.10) lineer sınır değer probleminin nümerik çözümü

**Tablo 5.4:** (5.10) probleminin farklı metotlardaki değerleri

x	Sonlu Farklar Metodu	Atış Metodu	Spektral Metot
1.0	2.000	2.000	2.000
1.2	1.351	1.348	1.350
1.4	0.792	0.787	0.790
1.6	0.311	0.305	0.308
1.8	-0.097	-0.104	-0.099
2.0	-0.436	-0.443	-0.438
2.2	-0.705	-0.712	-0.707
2.4	-0.903	-0.908	-0.904
2.6	-1.022	-1.026	-1.023
2.8	-1.058	-1.060	-1.058
3.0	-1.000	-1.000	-1.000

**5.6 rnek:** Bu uygulamaya gelince aşağıdaki lineer olmayan adi diferansiyel denklem için sınır değer problemini göz önüne alalım.

$$y''(t) = e^{y(t)}, \quad y(0) = y(1) = 0. \quad (5.11)$$

Bu problemin analitik zm

$$y = -\log 2 + 2 \log \left[ c \sec \left( \frac{c}{2} \left( t - \frac{1}{2} \right) \right) \right], \quad c = 1.3360557.$$

Bu problem örnek 5.2'deki probleme benzer bir problemdir. Burada sadece sınır koşulları farklıdır. Bu nedenle problemin tanımlı olduğu  $[0,1]$  aralığını  $[-1,1]$  aralığına dönüştürme işlemi yapmamız yeterli olacaktır. (5.4) denklemini yardımıyla (5.11) problemini

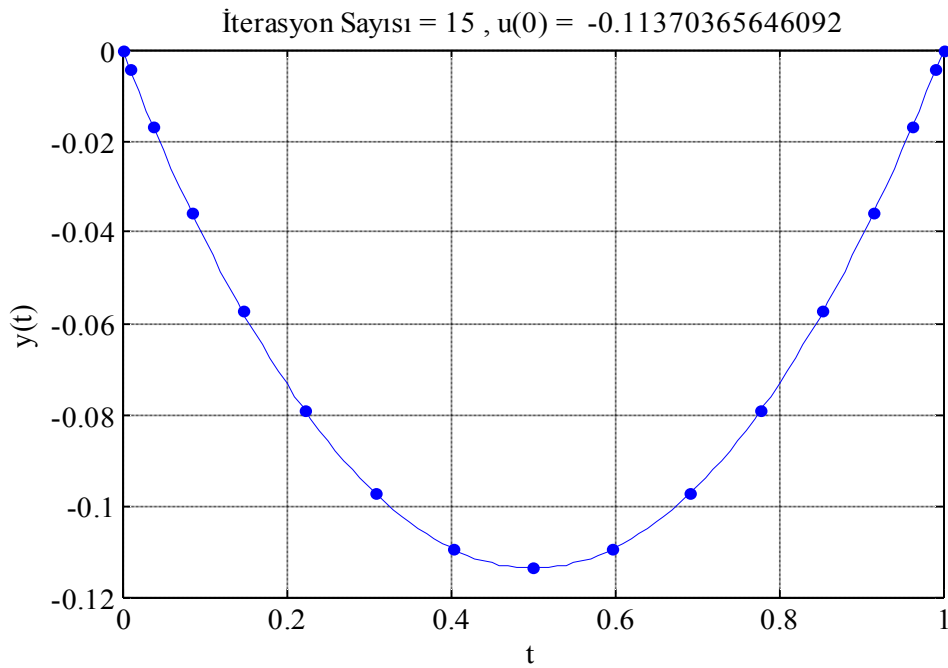
$$y''(x) = \frac{1}{4} e^{y(x)}, \quad y(\mp 1) = 0$$

formunda yazabiliriz. Bu aşamadan sonra örnek 5.2'de uyguladığımız nümerik zm yöntemini uygulayabiliriz. Burada iterasyon için kullanılacak sistem

$$\tilde{\mathbf{D}}_N^2 \mathbf{v}_{yeni} = \frac{1}{4} e^{v_{eski}},$$

şeklinde olacaktır.

Şekil 5.17 de, (5.11) probleminin Chebyshev spektral metodu kullanılarak elde edilen nümerik çözümünün grafiği verilmiştir. Tablo 5.5’de problemin tanımlı olduğu aralığın bazı noktalarında nümerik ve analitik sonuçlarla birlikte mutlak hata listelenmektedir.



Şekil 5.17: (5.11) lineer olmayan sınır değer probleminin nümerik çözümü

**5.7 Örnek:** Aşağıdaki sınır değer problemini (özdeğer problemini) göz önüne alalım:

$$y''(t) + \lambda^2 y(t) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad (5.12)$$

Bu problemin özdeğerleri  $\lambda_n = n\pi$ ,  $n = 1, 2, \dots$  olarak kolayca bulunabilir.

**Tablo 5.5:** (5.11) lineer olmayan sınır değer probleminin çözümündeki mutlak hata

$t_j$	$y_{analitik}$	$y_{nümerik}$	Mutlak Hata
0	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	-0.0414356150669102	-0.0414356232499765	$8.1831 \times 10^{-9}$
0.2	-0.0732683738021976	-0.0732683817378910	$7.9357 \times 10^{-9}$
0.3	-0.0957998399122669	-0.0957998476744659	$7.7622 \times 10^{-9}$
0.4	-0.1092377136455410	-0.1092377213048893	$7.6593 \times 10^{-9}$
0.5	-0.1137036488356470	-0.1137036564609157	$7.6253 \times 10^{-9}$
0.6	-0.1092377136455410	-0.1092377213048893	$7.6593 \times 10^{-9}$
0.7	-0.0957998399122669	-0.0957998476744659	$7.7622 \times 10^{-9}$
0.8	-0.0732683738021976	-0.0732683817378910	$7.9357 \times 10^{-9}$
0.9	-0.0414356150669102	-0.0414356232499765	$8.1831 \times 10^{-9}$
1.0	0.0000	0.0000	0.0000

Örnek 5.6 da olduğu gibi bu problemde de sınır koşulları homojen olduğundan dolayı problemin tanımlı olduğu  $[0,1]$  aralığını  $[-1,1]$  aralığına

dönüştürürken (5.4) denkleminde yararlanırsak,  $\mu = -\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2$  olmak üzere

$$y''(x) = \mu y, \quad y(\mp 1) = 0. \quad (5.13)$$

Problemini elde ederiz. Bu problemi  $x_1, \dots, x_{N-1}$  şeklindeki iç Chebyshev noktalarında

$$\tilde{\mathbf{D}}_N^2 \mathbf{y} = \mu \mathbf{y}$$

olarak  $(N-1) \times (N-1)$  boyutlu özdeğer denklem sistemi formunda yazabiliriz. Bu sistemde uygun bir MATLAB komutu kullanılarak  $\mu$  özdeğerleri için çözülebilir. Daha sonrada  $\lambda = \sqrt{-4\mu}$  kullanılarak ele alınan orijinal problemin özdeğerlerine ulaşılabilir.

Tablo 5.6 da (5.12) özdeğer probleminin nümerik ve analitik sonuçlarıyla birlikte mutlak hatası verilmiştir. Bu hesaplamaları yaparken  $N = 36$  kullanılmıştır.

$N$  değerini arttırdıkça,  $n$  in artan değerlerinde mutlak hatanın daha da azaldığı Tablo 5.7 de görülmektedir.

**Tablo 5.6:** (5.12) özdeğer probleminin çözümündeki mutlak hata

$n$	$\lambda_n^{\text{analitik}}$	$\lambda_n^{\text{nümerik}}$	Mutlak Hata (N=36)
1	3.1415926535897931	3.1415926535898273	$3.4195 \times 10^{-14}$
2	6.2831853071795862	6.2831853071795969	$1.0658 \times 10^{-14}$
3	9.4247779607693793	9.4247779607693616	$1.7764 \times 10^{-14}$
4	12.5663706143591720	12.5663706143591650	$7.1054 \times 10^{-15}$
5	15.7079632679489660	15.7079632679489830	$1.7764 \times 10^{-14}$
6	18.8495559215387590	18.8495559215387440	$1.4211 \times 10^{-14}$
7	21.9911485751285520	21.9911485751285550	$3.5527 \times 10^{-15}$
8	25.1327412287183450	25.1327412287183480	$3.5527 \times 10^{-15}$
9	28.2743338823081380	28.2743338823081130	$2.4869 \times 10^{-14}$
10	31.4159265358979310	31.4159265359014910	$3.5598 \times 10^{-12}$
11	34.5575191894877210	34.5575191895327410	$4.5020 \times 10^{-11}$
12	37.6991118430775170	37.6991118417635680	$1.3139 \times 10^{-9}$
13	40.8407044966673140	40.8407044857329710	$1.0934 \times 10^{-8}$
14	43.9822971502571040	43.9822972939357370	$1.4368 \times 10^{-7}$
15	47.1238898038468930	47.1238906418435520	$8.3800 \times 10^{-7}$
16	50.2654824574366900	50.2654784307486220	$4.0267 \times 10^{-6}$
17	53.4070751110264870	53.4070049236580500	$7.0187 \times 10^{-5}$
18	56.5486677646162760	56.5492953441990880	$6.2758 \times 10^{-4}$
19	59.6902604182060660	59.6850323783517140	$5.2280 \times 10^{-3}$
20	62.8318530717958620	62.8658922773754800	$3.4039 \times 10^{-2}$

**5.8 Örnek:** Son uygulama olarak, aşağıdaki

$$-y''(t) + e^t y(t) = \lambda y(t), \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0, \quad (5.14)$$

özdeğer problemini göz önüne alalım (Ghelardoni 1997).

Örnek 5.6 ve 5.7 de olduğu gibi burada da sınır koşulları homojen olduğundan, problemin tanımlı olduğu  $[0, \pi]$  aralığını  $[-1, 1]$  aralığına dönüştürmek için (5.4)

denkleminde yararlanarak  $t = \frac{\pi}{2}(x+1)$  dönüşümü yaparsak

**Tablo 5.7:** (5.12) özdeğer probleminin farklı N değerleri için mutlak hataları

$n$	$N = 54$	$N = 72$	$N = 90$
1	$1.9718 \times 10^{-13}$	$4.7162 \times 10^{-13}$	$6.0130 \times 10^{-13}$
2	$5.5067 \times 10^{-14}$	$2.4336 \times 10^{-13}$	$2.1316 \times 10^{-13}$
3	$3.1974 \times 10^{-14}$	$6.9278 \times 10^{-14}$	$2.7711 \times 10^{-13}$
4	$3.9080 \times 10^{-14}$	$8.5265 \times 10^{-14}$	$1.5454 \times 10^{-13}$
5	$5.3291 \times 10^{-14}$	$8.8818 \times 10^{-14}$	$1.4211 \times 10^{-14}$
6	$3.1974 \times 10^{-14}$	$7.1054 \times 10^{-14}$	$6.7502 \times 10^{-14}$
7	$6.0396 \times 10^{-14}$	$8.5265 \times 10^{-14}$	$3.9080 \times 10^{-14}$
8	$5.3291 \times 10^{-14}$	$6.7502 \times 10^{-14}$	$1.1013 \times 10^{-13}$
9	$3.9080 \times 10^{-14}$	$6.3949 \times 10^{-14}$	$6.7502 \times 10^{-14}$
10	$3.5527 \times 10^{-14}$	$4.2633 \times 10^{-14}$	$3.9080 \times 10^{-14}$
11	$5.6843 \times 10^{-14}$	$4.9738 \times 10^{-14}$	$3.5527 \times 10^{-14}$
12	$2.8422 \times 10^{-14}$	$7.1054 \times 10^{-14}$	$3.5527 \times 10^{-14}$
13	0.0000	$1.4211 \times 10^{-14}$	$7.1054 \times 10^{-14}$
14	$4.2633 \times 10^{-14}$	$2.1316 \times 10^{-14}$	$1.7764 \times 10^{-13}$
15	$3.5527 \times 10^{-14}$	$4.2633 \times 10^{-14}$	$5.6843 \times 10^{-14}$
16	$7.1054 \times 10^{-14}$	$8.5265 \times 10^{-14}$	$6.3949 \times 10^{-14}$
17	$1.4211 \times 10^{-14}$	$7.1054 \times 10^{-15}$	$6.3949 \times 10^{-14}$
18	$3.9080 \times 10^{-13}$	$4.9738 \times 10^{-14}$	$1.5632 \times 10^{-13}$
19	$3.5527 \times 10^{-12}$	$9.9476 \times 10^{-14}$	$1.9895 \times 10^{-13}$
20	$5.4278 \times 10^{-11}$	$7.1054 \times 10^{-15}$	$8.5265 \times 10^{-14}$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{2}{\pi} \frac{dy}{dx}, \quad (5.15)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dt} \right) = \frac{4}{\pi^2} \frac{d^2y}{dx^2}, \quad (5.16)$$

olur. Bulduğumuz bu ifadeleri (5.14) probleminde yerine koyarsak,  $\mu = -\frac{\lambda\pi^2}{4}$

olmak üzere

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{\pi^2}{4} e^{\frac{\pi}{2}(x+1)} y = \mu y, \quad y(\mp 1) = 0, \quad (5.17)$$

elde edilir.

Bu problemi  $x_1, \dots, x_{N-1}$  şeklindeki iç Chebyshev noktalarında



$$\left[ \tilde{\mathbf{D}}_N^2 - \frac{\pi^2}{4} e^{\frac{\pi}{2}(x_j+1)} \mathbf{I} \right] \mathbf{y} = \mu \mathbf{y},$$

olarak  $(N-1) \times (N-1)$  boyutlu özdeğer denklem sistemi formunda yazabiliriz. Bu sistemde uygun bir MATLAB komutu kullanılarak  $\mu$  özdeğerleri için çözülebilir. Daha sonrada  $\lambda = -\frac{4}{\pi^2} \mu$  kullanılarak ele alınan orijinal problemin özdeğerlerine ulaşılabilir.

Tablo 5.8’de (5.14) özdeğer probleminin nümerik çözüm sonuçlarının kaynak Ghelardoni (1997) daki sonuçlarla karşılaştırılması verilmiştir. Örnek 5.7’deki gibi burada da hesaplamaları yaparken  $N = 36$  kullanılmıştır.

**Tablo 5.8:** (5.14) özdeğer probleminin nümerik çözüm sonuçlarının Ghelardoni (1997) daki sonuçlarla karşılaştırılması

$n$	$\lambda_n$ (Ghelardoni 1997)	$\lambda_n^{\text{nümerik}}$
1	4.8966694	4.8966693799675927
2	10.045190	10.0451898932537060
3	16.019267	16.0192672504921670
4	23.266271	23.2662709400223520
5	32.263707	32.2637070458044090
6	43.220020	43.2200196405341190
7	56.181594	56.1815940228476830
8	71.152998	71.1529975370578850
9	88.132119	88.1321191915456550
10	107.11668	107.1166761383116500
11	128.10502	128.1050212738456100
12	151.09604	151.0960437311901200
13	176.08900	176.0889966896045600
14	203.08337	203.0833726083327000
15	232.07881	232.0788214682687900
16	263.07507	263.0750212996061400
17	296.07196	296.0711263491726300
18	331.06934	331.0768973706437900
19	368.06713	368.0007229508149700
20	407.06524	407.5003908282532700

## 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, spektral metotların literatürde mevcut bazı temel teorik sonuçları verilmiş ve adi diferansiyel denklemlere uygulamaları çalışılmıştır. Spektral metotlarda fonksiyon yaklaşımları Sturm-Liouville problemlerinin polinom çözümleriyle yakından ilişkili olduğundan ilk önce bu problemler ele alınmış ve daha sonra sırasıyla Jacobi polinomları, Legendre polinomları, Chebyshev polinomları, Laguerre polinomları ve Hermite polinomlarının basit ve aynı zamanda dikkate değer özellikleri özetlenmiştir. Bu polinom ailelerinin tümü uygun bir iç çarpıma göre ortogonal fonksiyonlar kümesi oluşturduklarından üçüncü bölümde yaklaşım teorisinin temel taşlarından “İç Çarpım” ve “Ortogonal fonksiyonlar” ele alınmıştır. Dördüncü bölümde, Chebyshev noktaları kullanılarak Chebyshev türevleme matrisleri elde edilmiş ve bu matrisler kullanılarak bazı fonksiyonların türevlerine ulaşılmıştır. Son olarak, beşinci bölümde, Chebyshev türevleme matrislerinin adi diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerine bazı uygulamaları verilmiştir.

Verilen uygulamalarda ikinci mertebeden lineer ve lineer olmayan bazı sınır değer problemleri ile bunların özel bir hali olan ikinci mertebeden Sturm-Liouville problemleri ele alınmıştır. Ele alınan bu problemlerin Chebyshev spektral metoduyla çözümleri detaylı olarak incelenmiştir. Bu problemler ikinci mertebeden bir adi diferansiyel denklem ile Dirichlet (veya birinci tip) sınır koşulları (homojen veya homojen olmayan) içeren problemlerdir.

Chebyshev türevleme matrisleri  $[-1,1]$  aralığında  $n+1$  tane Chebyshev noktası kullanılarak oluşturulduğundan dolayı, ele alınan problemlerin tanımlı oldukları aralıklar  $[-1,1]$  değilse, bunlar uygun dönüşümler yardımıyla bu aralığa dönüştürüldükten sonra çözümleri gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sonuçlar, eğer mevcutsa ele alınan problemlerin analitik çözümleriyle, değilse de literatürde mevcut diğer nümerik çözüm yöntemlerinin (sonlu farklar yöntemi, atış yöntemi, v.b. gibi) sonuçlarıyla karşılaştırılmış ve Chebyshev spektral metodu çözümlerinin oldukça iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir. Bu metot kısmi diferansiyel denklemlere de kolaylıkla uygulanabilir ve bunlar için bazı sonuçlar literatürde mevcuttur.

## 7. KAYNAKLAR

Bernardi, C. and Maday, Y., *Approximations spectrales de problèmes aux limites elliptiques*, Berlin: Springer-Verlag, (1992).

Boyd, J. P., *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*, 2nd ed., New York, (2000).

Canuto, C. Hussaini, M. Y. Quarteroni, A. and Zang, T. A., *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Berlin: Springer-Verlag, (1988).

Clenshaw, C. W. and Curtis, A. R., “A method for numerical integration on an automatic computer”, *Numer. Math.* 2, 197-205, (1960).

Fornberg, B., *A practical guide to pseudospectral methods*, UK: Cambridge University Press, Cambridge, (1996).

Fox, L. and Parker, I. B., *Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis*, UK: Oxford University Press, Oxford, (1968).

Funaro, D., “Computational Aspects of Pseudospectral Laguerre Approximations”, *Appl. Numer. Math.*, 6, 447–457, (1990a).

Funaro, D., *Polynomial Approximation of Differential Equations*, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1-26, (1992).

Gerald, C. F. and Wheatley, P. O., *Applied Numerical Analysis*, Fifth edition, Addison-Wesley, (1994).

Ghelardoni, P., “Approximations of Sturm–Liouville eigenvalues using Boundary Value Methods”, *Appl. Numer. Math.*, 23, 311–325, (1997).

Gottlieb, D., Hussaini, M. Y., and Orszag, S. A., *Introduction: Theory and Applications of Spectral Methods*, in Voight, R. G., Gottlieb, D., and Hussaini, M. Y., eds., *Spectral Methods for Partial Differential Equations*, SIAM, Philadelphia, (1984).

Gottlieb, D. and Orszag, S. A., *Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications*, SIAM, Philadelphia, (1977).

Karniadakis, G. E. and Sherwin, S. J., *Spectral/hp element method for CFD*, UK: Oxford University Press, Oxford, (1999).

Lanczos, C., “Trigonometric interpolation of empirical and analytical functions”, *J. Math. Phys.* 17, 123-199, (1938).

Mercier, B., *An Introduction to the Numerical Analysis of Spectral Methods*, New York: Springer-Verlag, (1989).

Orszag, S. A., “Accurate solution of the orr-sommerfeld stability equation”, *J. Fluid Mech.* 50, 689-703, (1971).

Trefethen, L. N., *Spectral Methods in Matlab*, England: Oxford University, Oxford, (2000).

## 8. ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad : Fatma ÇELİKTAŞ

Doğum Yeri ve Tarihi : Acıpayam / 24.04.1987

Lisans Üniversite : Celal Bayar Üniversitesi

Elektronik Posta : f.celiktas@hotmail.com

İletişim Adresi : Remzi Şenel Mah. Demirel Cad. No:22  
Yatağan/ DENİZLİ