

DÖRTGEN DELİKLİ KOMPOZİT LEVHALARDA ELASTO-PLASTİK GERİLME ANALİZİ

Muzaffer TOPCU*, Ayşe ÖNDÜRÜCÜ**

*Pamukkale Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Denizli

**Süleyman Demirel Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Isparta

Geliş Tarihi : 10.05.1999

ÖZET

Bu çalışmada, üniform olarak dağılmış çekme yüküne maruz delikli kompozit levhalarda sonlu elemanlar yöntemiyle elasto-plastik gerilme analizi yapılmıştır. Çözümde dokuz düğümlü dörtgen izoparametrik elemanlar kullanılmıştır. 0 ve 90 derece takviye edilmiş kompozit levhalarda farklı delik geometrileri için artık gerilme değişimleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler : Elasto-plastik gerilme analizi, Sonlu elemanlar metodu, Kompozit malzemeler, Delikli levha

ELASTO-PLASTIC STRESS ANALYSIS OF COMPOSITE PLATES WITH QUADRILATERAL HOLES

ABSTRACT

In this study, elasto-plastic stress analysis have been made for composite plates containing a central hole subjected to uniaxial tension under various uniformly distributed loads. In the solution, isoparametric quadrilateral elements with nine nodes have been used. For different geometries of the holes and 0 and 90 degrees reinforcement angles, residual stress variations have been investigated.

Key Words: Elasto-plastic stress analysis, Finite element method, Composite materials, Plate with hole

1. GİRİŞ

Kompozit levhalarla ilgili birçok araştırma yapılmıştır. Theocaris ve Marketos (1964) ortasında delik bulunan ve iki ucundan çekilen düzlem levha problemlerini ele alarak elektriksel analogi metodu ile elasto-plastik gerilme analizi yapmışlardır. Jong (1981), dikdörtgen delikli ortotropik plaklarda meydana gelen gerilmeleri incelemiştir. Bahai-El-Din and Dvorak (1982), düzlem mekanik yükleme durumunda simetrik metal matrisli çok tabakalı kompozit plakların elasto-plastik davranışını sonlu eleman yöntemiyle ve deneysel olarak araştırmışlardır. Gerhardt (1984), düzlem halde elips ve dairesel delikli anizotrop levhalar için sonlu elemanlar metodu ile gerilme analizi yapmıştır. Karakuzu ve Sayman (1994), delikli ortotropik dönen disklerde sonlu elemanlar metodu kullanarak

farklı oryantasyon açılarında, yarıçap ve yükleme durumlarını değiştirerek plastik bölge dağılımlarını ve iç gerilmeleri elde etmişlerdir. Dadras ve Shivashankar (1996), çok tabakalı kompozit plakları yüksek sıcaklık altında birleştirmede ortaya çıkan artık gerilme dağılımını sonlu elemanlar ve sonlu farklar yöntemiyle incelemişlerdir. Karakuzu et al. (1997), metal matrisli çentikli levhalarda sonlu eleman yöntemiyle elasto-plastik gerilme analizi yapmışlardır. Özel ve Şen (1998), alüminyum-çelikten imal edilmiş çok tabakalı deliksiz ve delikli kompozit plakta üstten basınçla yüklemede sonlu eleman yöntemiyle elastik-plastik gerilme analizi yapmışlardır. Topcu (1998), elasto-plastik gerilme analizi için bir bilgisayar programı vererek metal matrisli kompozit levhalar için örnek çözümler yapmıştır.

Bu çalışmada, düzgün yayılı çekme yüküne maruz dörtgen delikli 0 ve 90 derece takviye edilmiş kompozit levhalar için elasto-plastik gerilme analizi yapılmıştır. Farklı yüklenme durumları için delik civarında meydana gelen artık gerilmeler incelenmiştir.

2. GERİLME ANALİZİ

Ortotropik malzemede düzlem gerilme halinde gerilme-şekil değiştirme bağıntısı aşağıdaki eşitliklerle ifade edilebilir (Tirupothi and Ashok, 1991; Reddy, 1993).

$$\{\sigma_{1,2}\} = [D]\{\epsilon_{1,2}\} \quad (1)$$

Burada

$$\{\sigma_{1,2}\} = \{\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \tau_{12}\}^T \quad (2)$$

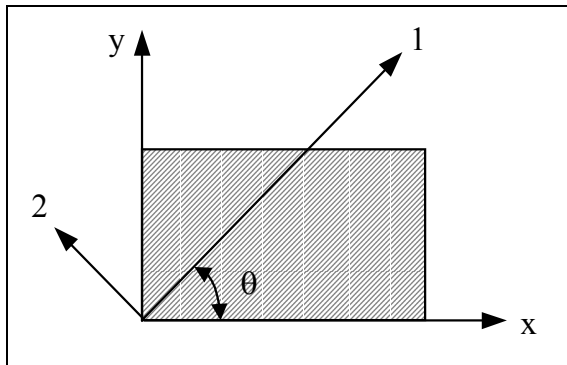
$$\{\epsilon_{1,2}\} = \{\epsilon_1 \quad \epsilon_2 \quad \gamma_{12}\}^T \quad (3)$$

olup D elastisite matrisi ise

$$D = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_1 E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_2 E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{21}\nu_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (4)$$

şeklindedir.

1 ve 2 indisleri takviye doğrultuları, x ve y referans eksenleridir (Şekil 1). x ve y eksenindeki gerilme ve şekil değiştirme bileşenleri



Şekil 1. Eksen takımları arasındaki ilişki

$$\{\sigma_{x,y}\} = [T]^{-1} \{\sigma_{1,2}\} \quad (5)$$

$$\{\epsilon_{1,2}\} = [T]\{\epsilon_{x,y}\} \quad (6)$$

olarak yazılır. Burada [T] transformasyon matrisi olup

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & \sin 2\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \quad (7)$$

şeklindedir. θ ise takviye açısıdır. 1 ve 4 nolu eşitlikler yardımıyla

$$\{\sigma_{x,y}\} = [\bar{D}]\{\epsilon_{xy}\} \quad (8)$$

yazılabilir. Burada \bar{D} genel elastisite matrisi aşağıdaki bağıntı ile verilir:

$$[\bar{D}] = [T]^{-1}[D][T] \quad (9)$$

3. ELASTO-PLASTİK ANALİZ

Eşdeğer gerilme akma dayanımını aştığı durumda gerilme analizi elasto-plastiktir. Bu çalışmada eşdeğer gerilmeler Tsai-Hill akma kriterine göre aşağıdaki bağıntı ile hesaplanmıştır:

$$\bar{\sigma}^2 = a_1\sigma_1^2 + 2a_{12}\sigma_1\sigma_2 + a_2\sigma_2^2 + a_3\tau_{12}^2 \quad (10)$$

Burada $\bar{\sigma}$ eşdeğer gerilme, σ_1, σ_2 ve τ_{12} gerilme bileşenleri; a_1, a_{12}, a_2 ve a_3 deneysel olarak elde edilen anizotropik malzeme parametrelerdir. Bu akma kriteri matris formunda yazılırsa

$$\{\bar{\sigma}\}^2 = \{\sigma_{1,2}\}^T [A]\{\sigma_{1,2}\} \quad (11)$$

şeklini alır. Burada

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

şeklinde ifade edilir.

Anizotropi parametreleri şu şekilde saptanır: Şekil 1'de gösterilen 1 doğrultusunda çekme deneyi yapılırsa 1 doğrultusu ve referans eksenini çakıştırdığından $\bar{\sigma} = \sigma_1 = X$ 'dir. Burada X, 1 doğrultusundaki akma gerilmesidir. Diğer gerilme

bileşenleri sıfır olduğundan $a_1 = 1$ bulunur. Aynı şekilde işlemler yapılırsa diğer parametreler

$$a_{12} = -0.5, a_2 = \frac{X^2}{Y^2} \text{ ve } a_3 = \frac{X^2}{S^2} \quad (13)$$

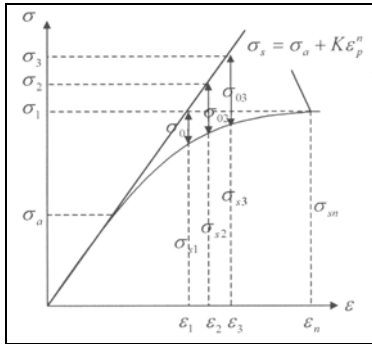
olarak elde edilir. Burada Y , 2 doğrultusundaki akma gerilmesi, S ise kayma akma gerilmesidir. Bu durumda kompozit malzemeler için Tsai-Hill akma kriteri şu şekildedir (Jones, 1975; Sayman ve Aksoy 1982).

$$\frac{\sigma_1^2}{X^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} = 1 \quad (14)$$

olarak bilinmektedir.

Elasto-plastik gerilme analizi için nümerik çözüm yöntemlerinden Başlangıç Gerilmesi Metodu kullanılmıştır.

Şekil 2’de verilen bu yöntemle göre lineer elastik olarak hesaplanmış σ_1 gerilmesinin toplam deformasyonu ε_1 ’dir. Elasto- plastik gerilme,



Şekil 2. Başlangıç gerilmesi metodu

$$\sigma_s = \sigma_a + K\varepsilon_p^n \quad (15)$$

olarak bilinmektedir. Burada σ_a akma gerilmesi ve σ_s ’de elasto-plastik gerilmedir. K ve n ise sırasıyla plastik deformasyon çarpanı ve plastik deformasyon üstelidir. Tek eksenli durumda σ_1 gerilmesine karşılık gelen başlangıç gerilmesi σ_{01} ,

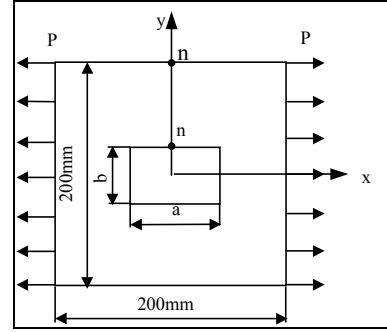
$$\sigma_{01} = \sigma_1 - \sigma_{s1} \quad (16)$$

olarak hesaplanır. Gerilme $\Delta\sigma$ kadar artırılarak buna karşılık gelen ε_2 değeri hesaplanır. ε_2 ’ye karşılık gelen gerçek gerilme ile σ_2 arasındaki fark σ_{02} ’yi verir. Benzer şekilde σ_3 ve diğer gerilmeler hesaplanır. Bu iterasyon $\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}$ farkı sıfır veya çok küçük bir değer oluncaya kadar devam eder. İki

eksenli durumda formülasyon vektörel olarak ifade edilir.

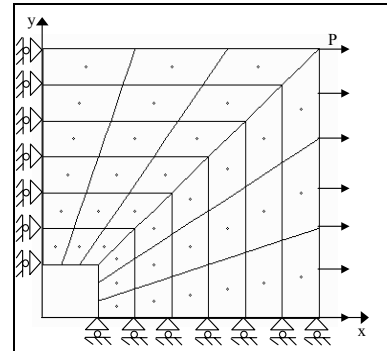
4. PROBLEMİN SONLU ELEMEN MODELİ VE ÇÖZÜM

200 x 200 mm² ve $t = 5$ mm kalınlığında düzgün yayılı çekme yüküne maruz Al-Çelik Kompozit levha ele alınmıştır (Şekil 3).



Şekil 3. Düzgün yayılı çekme yüküne maruz dörtgen delikli levha

Problem düzlem levha olarak tanımlanmış olup 9 düğümlü izoparametrik dörtgen elemanlar kullanılmıştır. Düzlem levha problemlerinde her düğümün iki serbestlik derecesi vardır. Problem iki eksene göre simetrik olduğu için 0 ve 90 derece takviye edilmiş kompozit malzemeler için levhanın 1/4’lük kısmının ele alınıp incelenmesi yeterlidir. Problemin sonlu eleman modeli 169 düğüm ve 36 elemandan oluşmuştur (Şekil 4).



Şekil 4 Problemin sonlu eleman modeli

Tablo 1’de Al-Çelik kompozit malzemenin mekanik özellikleri verilmiştir. Bu değerler deneysel olarak elde edilmiştir. Çelik fiber hacim oranı 0.40’tır.

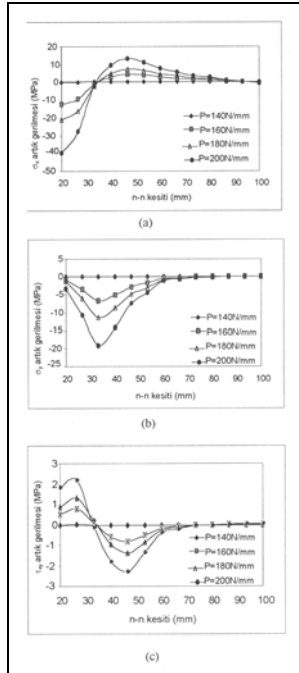
Tablo 1. Al-Çelik Kompozitinin Mekanik Özellikleri

E_1	83 GPa	X	130 GPa
E_2	56 GPa	Y	54 GPa
G_{12}	50.4 GPa	S	23.5 GPa
ν_{12}	0.37	K	270 GPa
		n	0.63

5. SONUÇLAR ve DEĞERLENDİRME

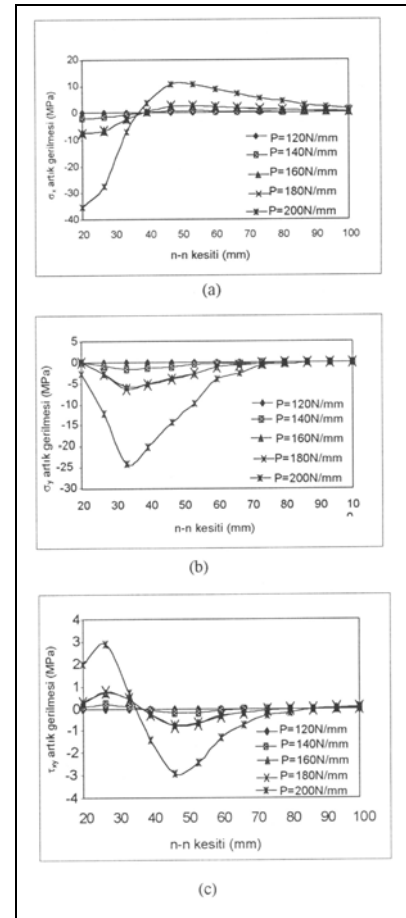
Bu çalışmada, ortasında kare veya dikdörtgen bir delik bulunan 0° ve 90° derece takviye edilmiş kompozit levhalar için elasto-plastik gerilme analizi yapılmıştır. Farklı (axb) boyutlarındaki delikler için levhanın n-n kritik kesiti üzerindeki artık gerilme değişimleri incelenmiştir.

Şekil 5'te merkezinde (40 x 40) mm kare bir delik bulunan 0° takviyeli kompozit levha için n-n kesitinde meydana gelen artık gerilmeler görülmektedir. Levha $P = 140\text{N/mm}$ değerinde akmaya başlamış ve bu P yükü kademeli olarak artırılarak farklı P yükleri için σ_x , σ_y , τ_{xy} artık gerilmeleri elde edilmiştir. Şekil 5a'da verilen σ_x artık gerilmelerinin n-n kesiti boyunca 30 mm'ye kadar bası karakterli, 30mm'den sonra çeki karakterli olduğu görülmektedir. σ_x artık gerilme değerleri delik dibinde en büyük, kesitin uç kısmında azalarak sıfıra doğru gitmektedir. Şekil 5b'de σ_y artık gerilmeleri 70 mm'ye kadar bası karakterli, 70 mm'den sonra sıfır olmaktadır. Şekil 5c'de verilen τ_{xy} artık gerilmeleri 30 mm'ye kadar çeki, 30 mm'den 70 mm'ye kadar bası karakterli, 70mm'den sonra sıfıra doğru gitmektedir. Ayrıca Şekil 5'ten τ_{xy} artık gerilme değerlerinin σ_x ve σ_y artık gerilmelerinden daha küçük olduğu gözlenmiştir.



Şekil 5 (40 x 40) mm kare delikli 0° takviyeli kompozit levha için n-n kritik kesiti üzerinde meydana gelen artık gerilmeler

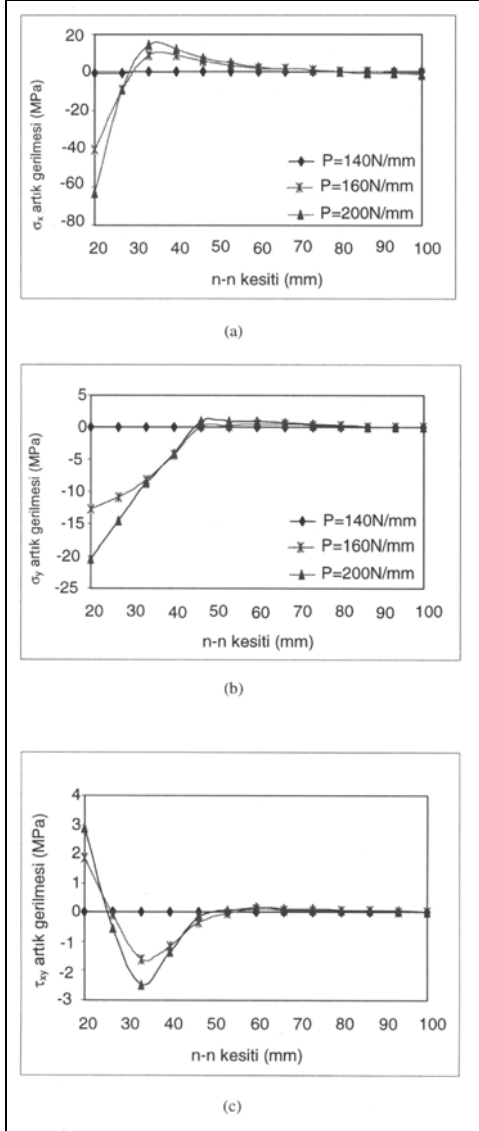
Şekil 6'da ise 90° takviyeli kare deliğe sahip kompozit levha için n-n kesiti boyunca artık gerilme değişimleri verilmiştir. Şekil 6a'da σ_x artık gerilmeleri 0° takviyeli levhada meydana gelen σ_x artık gerilmelerine benzer karakterde ancak aynı P yükü için daha küçük değerdedir. Şekil 6 b'de verilen σ_y artık gerilmeleri 0° takviyeli levhada olduğu gibi n-n kesiti boyunca 70 mm'ye kadar bası karakterli, 70mm'den sonra sıfıra doğru gitmektedir. Şekil 6c'de verilen τ_{xy} artık gerilmeleri 0° takviyeli levhada meydana gelen τ_{xy} artık gerilmelerine benzer karakterde olduğu fakat aynı P yükü için daha büyük değerde olduğu gözlenmektedir.



Şekil 6. (40 x 40) mm kare delikli 90° takviyeli kompozit levha için n-n kritik kesiti üzerinde meydana gelen artık gerilmeler

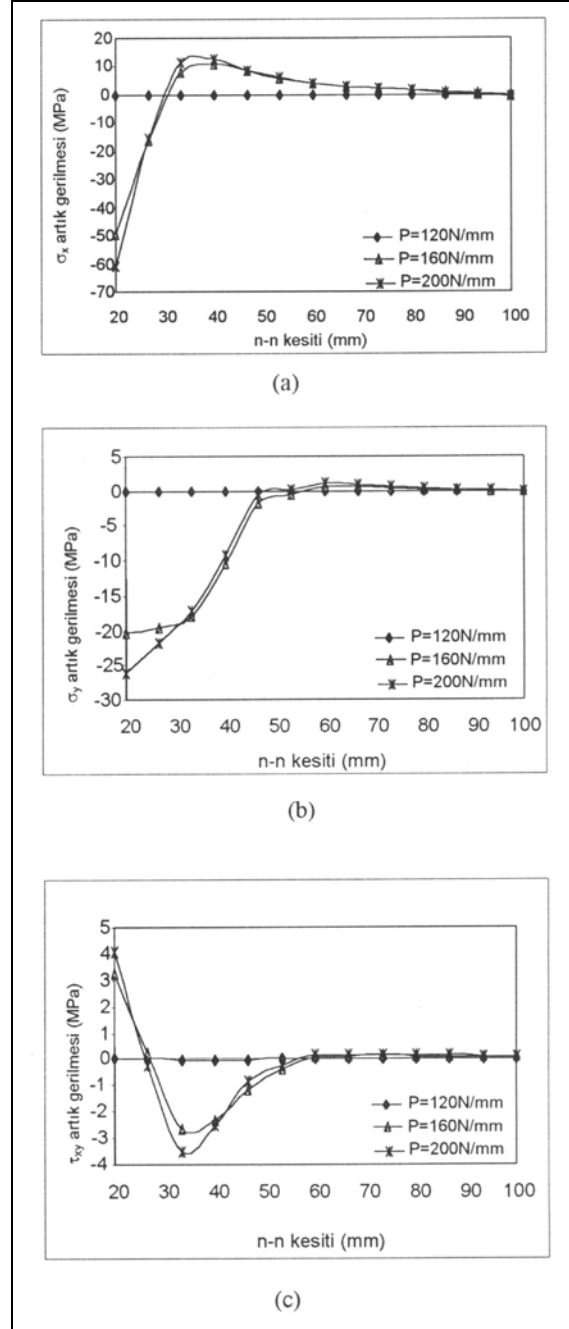
Şekil 7'de (20 x 40) mm dikdörtgen delikli 0° takviyeli kompozit levha için n-n kesitinde meydana gelen artık gerilmeler verilmiştir. Şekil 7a'da σ_x artık gerilmeleri n-n kesiti boyunca 30 mm'ye kadar bası, 30-70 mm arası çeki karakterli, 70 mm'den 100mm'ye kadar sıfır olduğu görülmektedir. Şekil 7b'de σ_y artık gerilmeleri 45 mm'ye kadar

bası, 45-80 mm arası çeki karakterli, 80-100 mm arası sıfırdır. Şekil 7c'de verilen τ_{xy} artık gerilmelerinin ise 25 mm'ye kadar çeki, 25 mm - 70 mm arası bası karakterli, 70-100 mm arası sıfır olduğu gözlenmiştir.



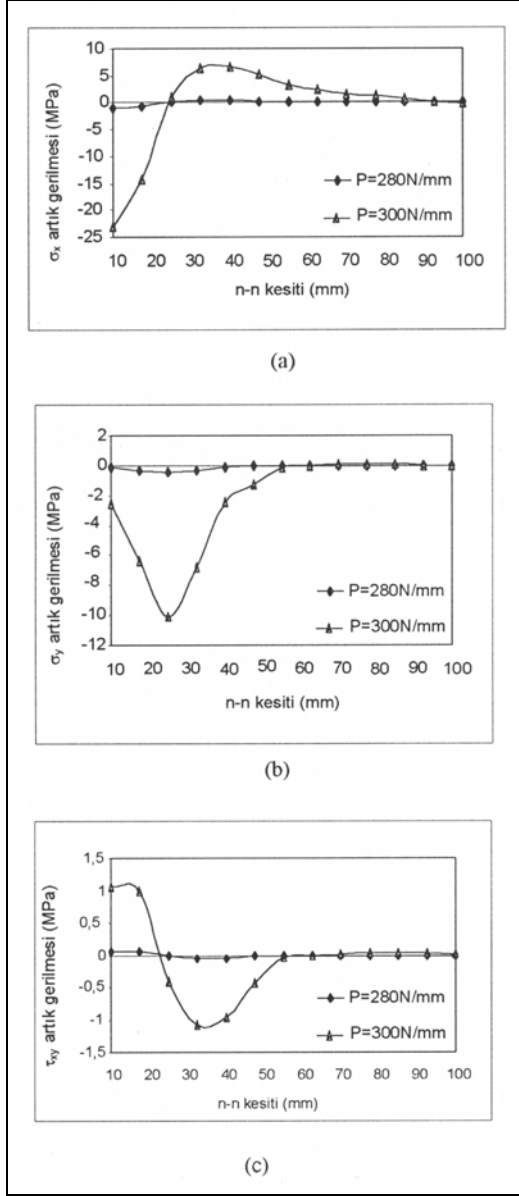
Şekil 7. (20 x 40) mm dikdörtgen delikli 0° takviyeli kompozit levha için n-n kritik kesiti üzerinde meydana gelen artık gerilmeler

Şekil 8'de Şekil 7 ile aynı dikdörtgen deliğe sahip 90° takviyeli kompozit levhada meydana gelen artık gerilmeler ele alınmıştır. Burada verilen artık gerilmelerin Şekil 7'de verilen 0° takviyeli levhada meydana gelen artık gerilmelerle aynı karakterde olduğu; σ_y ve τ_{xy} artık gerilmelerinin aynı P yüklerinde 0° takviyeli levhaya göre daha büyük değerde olduğu görülmektedir.



Şekil 8 (20x40)mm dikdörtgen delikli 90° takviyeli kompozit levha için n-n kritik kesiti üzerinde meydana gelen artık gerilmeler

Şekil 9'da (40 x 20) mm dikdörtgen delikli 0° takviyeli kompozit levhada n-n kesiti boyunca meydana gelen artık gerilmeler verilmiştir. σ_x artık gerilmeleri n-n kesiti boyunca 25mm'ye kadar bası, 25mm'den sonra çeki karakterlidir. σ_y artık gerilmeleri ise 50 mm'ye kadar bası karakterli, 50mm'den sonra sıfır olmaktadır. τ_{xy} artık gerilmeleri 25 mm'ye kadar çeki, 25-50 mm arası bası karakterli ve 50 mm'den sonra sıfırdır.

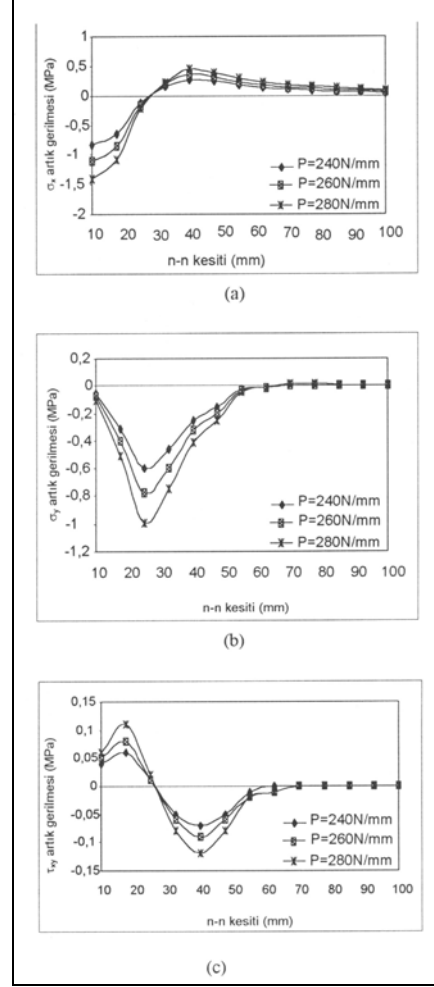


Şekil 9. (40 x 20) mm dikdörtgen delikli 0° takviyeli kompozit levha için n-n kritik kesiti üzerinde meydana gelen artık gerilmeler

Şekil 10'daki (40 x 20) mm dikdörtgen delikli 90° takviyeli kompozit levha içinde artık gerilmeler 0° takviyeli levha ile benzer karakterdedir.

Yapılan incelemelerden şu sonuçlar çıkarılmıştır:

- 1) Artık gerilmeler delik civarında daha büyüktür. Delik dibinden uzaklaştıkça artık gerilmeler aniden azalmakta ve sıfıra doğru gitmektedir.
- 2) Yükleme miktarı arttıkça artık gerilmelerde de bir artış olduğu gözlenmiştir.
- 3) τ_{xy} kayma artık gerilmeleri diğer artık gerilmeler yanında oldukça küçüktür.



Şekil 10. (40 x 20) mm dikdörtgen delikli 90° takviyeli kompozit levha için n-n kritik kesiti üzerinde meydana gelen artık gerilmeler

6. KAYNAKLAR

- Bahai-El-Din, Y. A., Dvorak, G. J. 1982. Plasticity Analysis of laminated Composite Plates, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 30, 740-746.
- Dadras, P., Shivashankar, S. 1996. Bonding Residual Stresses in High Temperature Composites, Computer & Structures, Vol. 59, 407-417.
- Gerhart, T. D. 1984. A Finite Element Approach for Stress Analysis of Notched Anisotropic Materials, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 51, s. 804-810
- Jones, R. M. 1975. Mechanics of Composite Materials, Mc. Graw-Hill, Kogosusha Ltd.
- Jong, T. 1981. Stresses Around Rectangular Holes in Orthotropic Plates, J. Composite Materials, Vol. 15, 311-328.

Karakuzu, R., Özel, A. and Sayman, O. 1997. Elasto-Plastic finite element analysis of metal matrix plates with edge notches. *Computer & Structures*, Vol. 63, 551-558.

Karakuzu, R., Sayman, O. 1994. Elasto-Plastic Finite Element Analysis of Orthotropic Rotating Discs with Holes, *Computers & Structures*, Vol. 51, 695-703.

Özel, A., Şen, S. 1998. "Çok Tabakalı Kompozit Plakalarda Üstten Basınçla Yüklemede Elastik-Plastik Gerilme Analizi" 8. Uluslar Arası Makine Tasarım ve İmalat Kongresi, s. 175-185.

Reddy, J. N. 1993. An Introduction to the Finite

Element Method, McGraw-Hill Inc., New York, USA.

Sayman, O., Aksoy, S. 1982. *Kompozit Malzemeler*, Ege Üniversitesi Matbaası, İzmir.

Theocaris, P. S., Marketos, E. 1964. Elasto-Plastic Analysis of Perforated Thin Strips of a Strain Hardening Material, *Journal Mech. Phys. Solids.*, Vol. 12, 377-390.

Tirupothi, R. C., Ashok, D. B. 1991. *Introduction to Finite Elements in Engineering*, New Jersey.

Topcu, M. 1998. "Elasto-Plastik Gerilme Analizi İçin Bir Paket Program", *PAÜ-Mühendislik Bilimleri Dergisi*, Cilt 4 (1-2), 519-525.