

GENELLEŞTİRİLMİŞ DİFERANSİYAL QUADRATURE METODUNUN KİRİŞLERİN SERBEST TİTREŞİM ANALİZİNE UYGULANMASI

Zekeriya GİRĞİN, Ersin DEMİR, Cem KOL

Pamukkale Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Çamlık/Denizli

Geliş Tarihi : 29.03.2003

ÖZET

Bu çalışmada, kirişlerin serbest titreşim frekanslarının çözümü için Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature (GDQ) metodu kullanılmıştır. Geniş çapta ele alınan kiriş konfigürasyonları için temel frekans değerleri elde edilmiştir. Değişik sınır şartları için elde edilen GDQ sonuçları, mevcut gerçek ve diğer metotlarla elde edilen sonuçlarla karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Metodun temel avantajları, basitliği ve kolay programlanabilme sebebiyle hesaplama süresinin çok kısa olmasıdır. Sayısal örnekler, bu metodun mekanik sistemlerin analizi için, etkinliğini ve yüksek potansiyelini ortaya koymuştur.

Anahtar Kelimeler : Genelleştirilmiş diferansiyel quadrature metodu, Serbest kiriş titreşimi

APPLICATION OF THE GENERALIZED DIFFERENTIAL QUADRATURE METHOD TO FREE VIBRATION ANALYSIS OF BEAMS

ABSTRACT

In this paper, The Generalized Differential Quadrature is used to solve the problems on free vibration behavior of beams. Results are obtained for various boundary and loading conditions. Computed results are compared with existing exact and numerical solutions evaluated by other methods. An inherent advantage of the approach is its basic simplicity and small computational effort with easy programmability. Numerical examples have shown the efficiency and great potential of this method for the analysis of mechanical systems.

Key Words : Generalized differential quadrature method, Free beam vibrations

1. GİRİŞ

Kısmi Diferansiyel Denklemlerin çözümleri için kullanılan sayısal yaklaşım metotları, mühendislik bilimleri alanlarındaki ilerlemeler için çok büyük bir ehemmiyete sahiptir. Sonlu Farklar Metodu, Sonlu Elemanlar Metodu ve Sınır Eleman Yöntemi gibi klasik teknikler, son derece gelişmiş ve tanınmış metotlardır. Bu metotlarla, büyük sayıda düğüm noktaları kullanılarak, iyi tanımlanmış matematiksel modeller için, hızlı ve güvenilir sonuçlar elde edilebilir. Ancak bir çok durumda olduğu gibi

gerçek değere çok yakın sonuçlar, fiziksel alanda sadece birkaç özel noktada istenir. İlgilenilen bir noktada veya o nokta etrafında kabul edilebilir doğruluğa sahip sonuçlar elde etmek için, geleneksel Sonlu Elemanlar Metodu veya Sonlu Farklar Metodu gibi metotlar hala çok yüksek sayıda düğüm noktaları gerektirirler. Tabii ki bunun sonucunda, problemlerin çözümü için gerekli bilgisayar kapasite ihtiyacı bir çok durumda çok büyüktür.

Kabul edilebilir doğruluğa sahip sonuçlar elde etmek için daha az sayıda düğüm noktası kullanan alternatif bir sayısal metot bulma araştırmaları

sırasında Richard Bellman tarafından fen ve mühendislik bilimlerinin ilk ve/veya sınır değer problemleri için farklı bir çözüm tekniği olan Diferansiyel Quadrature Metodu (DQM) ortaya çıkarılmıştır ve bu metodun ilk-değer lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin, hızlı ve hassas çözümlerini sağlayabilecek bir özelliğe sahip olduğu iddia edilmiştir (Bellman and Casti, 1971; Bellman et al., 1971). Bu iddia, metodun genel ilk ve sınır değer problemlerine uygulanmasını içeren çeşitli çalışmalarla doğrulanmıştır (Bellman, Roth, 1979; Mingle, 1979; Civan and Slipecevic, 1983; 1986; Naadimuthu et al., 1984; Jang et al., 1989; Gutierrez et al., 1994; Bert and Malik, 1996).

Ancak Bellman tarafından geliştirilen ilk DQ metodunda bazı temel zorluklar mevcuttur. Bu zorlukların üstesinden gelmek için yapılan çalışmalar sırasında Quan ve Chang DQ metodunun genel kollokasyon metoduna benzer bir metod olduğunu göstermiş ve birinci ve ikinci dereceden türevleri ifade eden polinomsal test fonksiyonu ağırlıklı katsayıları için genel bir formül elde etmişlerdir (Quan and Chang, 1989). Yeni yapılan çalışmalarda, Shu ve Richards (1992), tarafından Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu (GDQM) önerilmiştir. Shu ve Richards, n'inci dereceden türevlerin polinomsal test fonksiyonu ağırlıklı katsayıları için yinelenen bir bağıntı elde etmişler ve dairesel bir silindiri geçen akım problemi için Navier-Stokes denklemlerinin çözümüne GDQ metodunun uygulanışını göstermişlerdir. İlk sonuçlar GDQ metodunun çok efektif ve kullanışlı bir yöntem olduğunu göstermiştir (Bellman and Casti, 1971; Bellman et al., 1971).

Bu çalışmada, hassas, efektif ve kullanışlı bir metod olan genelleştirilmiş diferansiyel quadrature metodunun (GDQM) mekanik sistemlerin analizi için sahip olduğu potansiyel, metodun kirişlerin serbest titreşim analizine uygulanmasıyla gösterilecektir. Bu problemlere ait diferansiyel denklemlerin formülasyonu ve bunların GDQ analogları, değişik sınır şartları için ele alınmıştır.

2. UYGULAMALAR

Bu bölümde GDQ metodu kirişlerin serbest titreşim analizine uygulanmıştır. İlk önce ankastre bir kirişin boyuna titreşimi incelenmiştir. Daha sonra değişik sınır şartlarına sahip kirişlerin enine titreşim analizi yapılmıştır.

Düğüm noktalarının doğal ve sıkça kullanılan bir seçimi, her bir koordinat yönünde eşit aralıklı

dağılımı olan noktalardır ve x yönünde normalize edilmiş halde şu şekilde ifade edilirler:

Tip-1: Eşit aralıklı düğüm noktaları

$$X_i = \frac{i-1}{N_x-1}; i=1, 2, \dots, N \quad (1)$$

Düğüm noktalarının ikinci tip bir seçimi, kenarlara komşu δ -noktalarına sahip olan eşit aralıklı düğüm noktalarıdır. Bu komşu noktalar, sınır şartlarının genel denklemlere uygulanması için bazı durumlarda gereklidir. Bu komşu noktalar arasındaki mesafe, $\delta=10^{-4}$ veya $\delta=10^{-5}$ olarak alınabilir. Böylece bu noktalar yaklaşık olarak bir noktaya karşılık gelirler. Bu nokta da sınır noktasının kendisidir. Normalize edilmiş halde bu noktalar şu şekilde ifade edilebilirler:

Tip-2: Komşu δ -noktalarına sahip eşit aralıklı düğüm noktaları

$$X_1=0, X_2=\delta, X_{N_x-1}=1-\delta, X_{N_x}=1 \quad X_i = \frac{i-2}{N_x-3};$$

$$i=3, 4, \dots, (N_x-2) \quad (2)$$

2. 1. Titreşim Problemleri

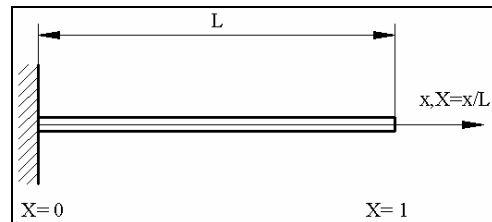
2. 1. 1. Boyuna Titreşim

İnce prizmatik bir Bernoulli-Euler kirişinin, boyuna titreşimine ait genel diferansiyel denklem, normalize edilmiş halde aşağıdaki öz değer diferansiyel denklemidir.

$$\frac{d^2 W}{dX^2} = -\omega^2 \cdot W(X) \quad (3)$$

Bu denklemde, $W(X)$ boyuna yer değiştirmeye ait boyutsuz mod fonksiyonunu, X kiriş eksen boyunca boyutsuz koordinatı, ω boyuna kiriş titreşimlerinin boyutsuz frekans değerini göstermektedir.

Şekil 1'de görülen ankastre bir kiriş ele alınsın. Bu kirişin iki ucundaki sınır şartları şu şekildedir.



Şekil 1. Ankastre mesnet-serbest kenarlı bir kirişin gösterimi

$$W(0)=0; \quad W'(1) = 0 \quad (4)$$

Denklem (3)'deki genel diferansiyel denklemin ve Denklem (4)'deki sınır şartlarının GDQ eşitlikleri,

$$W_1=0 \quad (5)$$

$$\sum_{j=2}^N c_{ij}^{(2)} \cdot W_j = -\omega^2 \cdot W_i \quad ; i=2,3,\dots,(N-1) \quad (6)$$

$$\sum_{j=2}^N c_{Nj}^{(1)} W_j = 0 \quad (7)$$

şeklinde. Bu öz değer denklemlerinden temel frekans değerleri kolayca elde edilebilir.

Bu kirişin boyuna titreşimi için, birinci tip düğüm noktaları kullanılarak elde edilen sonuçlar Tablo 1'de verilmiştir. GDQ metodunun yakınsaması bu tablodan görülebilir.

Tablo 1. Prizmatik Ankastre Bir Kirişin Boyuna Titreşimi İçin Elde Edilen Temel Frekans Değerleri (Gerçek Sonuç: $\omega=1.57079633$)

Düğüm Noktalarının Sayısı	ω (GDQ)
N=7	1.5708537
N=8	1.5707893
N=9	1.5707959
N=10	1.57079636
N=11	1.57079633

2. 1. 2. Enine Titreşim

İnce prizmatik bir Bernoulli-Euler kirişinin, lineer serbest titreşimine ait genel diferansiyel denklem, normalize edilmiş halde aşağıdaki öz değer diferansiyel denklemdir.

$$\frac{d^4 W}{dX^4} = \omega^2 \cdot W \quad (8)$$

Bu denklemde, W(X) enine yer değiştirmeye ait boyutsuz mod fonksiyonunu, X kiriş eksen boyunca boyutsuz koordinatı, ω enine kiriş titreşimlerinin boyutsuz frekans değerini göstermektedir.

Şekil 1'deki ankastre bir kirişin X=0 ucundaki sınır şartları, ankastre bir uçta çökme ve dönme değerleri sıfır olduğu için şu şekildedir.

$$W = \frac{dW}{dX} = 0; \quad X=0 \quad (9)$$

Bu kirişin X=1 ucundaki sınır şartları ise, serbest bir uçta eğilme momenti ve kesme kuvveti sıfır olduğu için şu şekildedir.

$$\frac{d^2 W}{dX^2} = \frac{d^3 W}{dX^3} = 0; \quad X=1 \quad (10)$$

Bu problemin GDQ formülasyonunda şu nokta göz önünde bulundurulmalıdır. Dördüncü dereceden bir diferansiyel denklem olan Denklem (8), iki sınır noktasında her birinde ikişer koşul bulunan (Denklem (9) ve (10)) toplam 4 tane sınır şartına sahiptir. Bundan dolayı çözüm için gerekli olan N tane denklemden dördü (9) ve (10) numaralı denklemlerden, diğer (N-4) denklemden (8) numaralı denklemden elde edilmelidir. Bu amaçla denklem (8)'in GDQ analogu,

$$\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(4)} \cdot W_j = \omega^2 \cdot W_i \quad ; i=3,4,\dots,(N-2) \quad (11)$$

şeklinde gösterilebilir.

X=0 ve X=1'deki sınır şartlarının GDQ analogları ise şu şekilde ifade edilebilir.

$$W_i = 0, \quad \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} \cdot W_j = 0 \quad ; i=1 \quad (12)$$

$$\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} \cdot W_j = 0, \quad \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(3)} \cdot W_j = 0 \quad ; i=N \quad (13)$$

Böylece sınır şartlarının GDQ analog denklemleri, sınır noktaları (i=1, i=N) ve bunların komşu noktalarında (i=2, i=N-1) genel diferansiyel denklemin GDQ analoglarının yerine geçmiş olur. (11), (12) ve (13) numaralı denklemler birleştirildiğinde aşağıdaki lineer denklem seti elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{11}^{(1)} & c_{12}^{(1)} & c_{1(N-1)}^{(1)} & c_{1N}^{(1)} & c_{13}^{(1)} & \dots & c_{1(N-2)}^{(1)} \\ c_{N1}^{(2)} & c_{N2}^{(2)} & c_{N(N-1)}^{(2)} & c_{NN}^{(2)} & c_{N3}^{(2)} & \dots & c_{N(N-2)}^{(2)} \\ c_{N1}^{(3)} & c_{N2}^{(3)} & c_{N(N-1)}^{(3)} & c_{NN}^{(3)} & c_{N3}^{(3)} & \dots & c_{N(N-2)}^{(3)} \\ c_{31}^{(4)} & c_{32}^{(4)} & c_{3(N-1)}^{(4)} & c_{3N}^{(4)} & c_{33}^{(4)} & \dots & c_{3(N-2)}^{(4)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{(N-2)1}^{(4)} & c_{(N-2)2}^{(4)} & c_{(N-2)(N-1)}^{(4)} & c_{(N-2)N}^{(4)} & c_{(N-2)3}^{(4)} & \dots & c_{(N-2)(N-2)}^{(4)} \end{bmatrix} \rightarrow \quad (14)$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \dots \\ W_{(N-1)} \\ W_N \\ W_3 \\ \dots \\ W_{(N-2)} \end{bmatrix} = \omega^2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ W_3 \\ \dots \\ W_{(N-2)} \end{bmatrix}$$

Denklem (14) aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} [S_{ss}] & [S_{sd}] \\ [S_{ds}] & [S_{dd}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{W_s\} \\ \{W_d\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \omega^2 \{W_d\} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

Burada b ve d ifadeleri sınır şartlarının ve diferansiyel denklemin GDQ analoglarının yazımı için kullanılan düğüm noktalarını göstermektedir. (4×1) sütun vektörü olan $\{W_s\}$ elimine edilirse aşağıdaki standart öz değer problemi elde edilir.

$$[S] \cdot \{W_d\} - \omega^2 \cdot [I] \cdot \{W_d\} = 0 \quad (16)$$

Bu öz değer probleminin çözümünden temel frekans değerleri elde edilir.

Denklem (1) ve (2)'de belirtilen iki tip düğüm nokta seçimi kullanılarak ilk dört moda ait enine titreşim frekansları için elde edilen GDQ çözüm sonuçları Tablo-2'de verilmiştir. (9) ve (10) nolu sınır şartlarına tabi tutulan denklem (8)'in analitik çözümü şu şekildedir (Meirovitch, 1986).

$$\text{Cosh}\beta \times \text{Cos}\beta + 1 = 0, \quad \beta = \omega^4 \quad (17)$$

(17) numaralı denklemden elde edilen gerçek frekans değerleride Tablo 2'de verilmiştir. Diğer örneklerde olduğu gibi bu özdeğer problemi için de GDQ çözümlerinin yakınsaması bu tablodan görülebilir. İkinci tip düğüm nokta seçimi daha iyi sonuçlar vermektedir.

Tablo 2. Bir Ankastre Kirişin Serbest Titreşim Analizi İçin, 1. Tip ve 2. Tip ($\delta = 10^{-5}$) Düğüm Noktaları Kullanılarak Elde Edilen GDQ Sonuçları Mod 1:

Gerçek Frekans, $\omega_1 = 3.5160153$

GDQ Çözümleri :

N	Tip-1	Tip-2
7	3.473657	3.486260
8	3.522366	3.519970
9	3.517241	3.516698
10	3.516074	3.516045
11	3.516003	3.516010
12	3.516016	3.516015

Mod 2:

Gerçek Frekans, $\omega_2 = 22.0344916$

GDQ çözümleri:

N	Tip-1	Tip-2
10	22.213061	22.130299
11	22.030212	22.032315
12	22.025301	22.030391
13	22.035240	22.034807
14	22.034840	22.034626
15	22.034490	22.034489

Mod 3 :

Gerçek Frekans, $\omega_3 = 61.6972144$

GDQ Çözümleri:

N	Tip-1	Tip-2
13	61.319704	61.533831
14	61.746492	61.716811
15	61.731450	61.709716
16	61.695050	61.696470
17	61.695275	61.696592
18	61.697339	61.697252

Mod 4:

Gerçek frekans, $\omega_4 = 120.901916$

GDQ Çözümleri:

N	Tip-1	Tip-2
16	121.613361	121.146755
17	120.814501	120.872797
18	120.832166	120.880396
19	120.909038	120.904009
20	120.907202	120.903375
21	120.901531	120.901814

Eğer kiriş değişken kesitliyse, ince bir Bernoulli-Euler kirişinin, lineer serbest titreşimine ait genel diferansiyel denklem, normalize edilmiş halde aşağıdaki şekildedir.

$$(E.I(X).W'')'' - \omega^2 \cdot \rho.A(X).L^4.W = 0 \quad (18)$$

Kiriş kalınlığının lineer şekilde değiştiği bir durumda (Şekil 2) bu denklem şu şekle gelir.

$$(\alpha.X+1)^2 \cdot \frac{d^4W}{dX^4} + 6\alpha(\alpha.X+1) \cdot \frac{d^3W}{dX^3} + 6\alpha^2 \cdot \frac{d^2W}{dX^2} - \omega^2.W = 0 \quad (19)$$

Bu denklemde ω^2 ifadesi şu şekildedir.

$$\omega^2 = \frac{\rho.A(0).\omega^2.L^4}{E.I(0)} \quad (20)$$

Eğer kiriş $X=0$ 'da ankastre ve $X=1$ 'de basit mesnetli ise, sınır şartları ve elde edilen lineer denklem sistemi şu şekildedir.

$$W(0) = W'(0) = 0, \quad W(1) = W''(1) = 0 \quad (21)$$

$$\sum_{j=2}^{N-1} c_{2j}^{(1)}.W_j = 0 \quad (22)$$

$$\sum_{j=2}^{N-1} [(\alpha.X_i+1)^2 \cdot c_{ij}^{(4)} + 6\alpha(\alpha.X_i+1) \cdot c_{ij}^{(3)} + 6\alpha^2 \cdot c_{ij}^{(2)}].W_j - \omega^2.W_i = 0; \quad (i=3, \dots, N-2) \quad (23)$$

$$\sum_{j=2}^{N-1} c_{(N-1)j}^{(2)}.W_j = 0 \quad (24)$$

Eğer kiriş $X=0$ 'da ankastre ve $X=1$ 'de serbest ise, sınır şartları ve elde edilen lineer denklem sistemi şu şekildedir.

$$W(0)=W'(0)=0, W''(1)=W'''(1)=0 \quad (25)$$

$$\sum_{j=2}^N c_{2j}^{(1)} \cdot W_j = 0 \quad (26)$$

$$\sum_{j=2}^N [(\alpha \cdot X_i + 1)^2 \cdot c_{ij}^{(4)} + 6 \cdot \alpha \cdot (\alpha \cdot X_i + 1) \cdot c_{ij}^{(3)} + 6 \cdot \alpha^2 \cdot c_{ij}^{(2)}] \cdot W_j - \omega^2 \cdot W_i = 0$$

; (i=3, ..., N-2) (27)

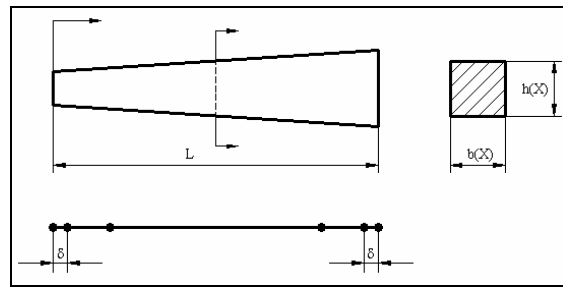
$$\sum_{j=2}^N c_{(N-1)j}^{(3)} \cdot W_j = 0 \quad (28)$$

$$\sum_{j=2}^N c_{(N)j}^{(2)} \cdot W_j = 0 \quad (29)$$

Şekil 2'de gösterilen değişken kesitli kiriş için ilk üç moda ait temel frekans katsayıları aşağıdaki sınır şartları için sonlu eleman çözümleriyle (kiriş 40 elemana bölünmüştür) birlikte Tablo 3, 4 ve 5'de verilmiştir.

- İki ucu basit mesnetli
- Ankastre-basit mesnetli
- İki ucu ankastre
- Ankastre-serbest

Elde edilen sonuçlar sonlu eleman çözümleriyle uyum içindedir.



i=1,2,3,...,N-2,N-1,N

Şekil 2. Lineer değişken kesitli bir kirişin gösterimi

Tablo 3. Değişken Kesitli Bir Kirişin Serbest Titreşimine Ait Temel Frekans Katsayıları ω_1 ($\delta=10^{-4}$, N=10 Düğüm, Sonlu Eleman Sonuçları 40 Eleman Kullanılarak Elde Edilmiştir)

α	GDQ Metodu		
Basit mesnetli	0.1	0.2	0.3
Ankastre-Basit mes.	10.356	10.829	11.290
Ankastre-Ankastre	15.968	16.509	17.038
Ankastre-Serbest	23.478	24.572	25.469
	3.479	3.448	3.421
α	Sonlu Elemanlar Metodu		
Basit mesnetli	0.1	0.2	0.3
Ankastre-Basit mes.	10.355	10.827	11.286
Ankastre-Ankastre	15.969	16.504	17.024
Ankastre-Serbest	23.480	24.564	25.628
Basit mesnetli	3.479	3.446	3.417

Tablo 4. İkinci temel Frekans Katsayıları ω_2 ($\delta=10^{-4}$, N=11 Düğüm, Sonlu Eleman Sonuçları 40 Eleman Kullanılarak Elde Edilmiştir.)

α	GDQ Metodu		
Basit mesnetli	0.1	0.2	0.3
Ankastre-Basit mes.	41.454	43.368	45.251
Ankastre-Ankastre	52.290	54.501	56.663
Ankastre-Serbest	64.794	67.757	70.657
	22.724	23.386	24.032
α	Sonlu Elemanlar Metodu		
Basit mesnetli	0.1	0.2	0.3
Ankastre-Basit mes.	41.434	43.356	45.249
Ankastre-Ankastre	52.239	54.465	56.649
Ankastre-Serbest	64.721	67.706	70.633
Basit mesnetli	22.713	23.376	24.023

Tablo 5. Üçüncü Temel Frekans Katsayıları ω_3 ($\delta=10^{-4}$, N=16 Düğüm, Sonlu Eleman Sonuçları 40 Eleman Kullanılarak 0.1 Elde Edilmiştir)

α	GDQ Metodu		
Basit mesnetli	0.1	0.2	0.3
Ankastre-Basit mes.	93.210	97.550	101.774
Ankastre-Ankastre	109.083	114.052	118.866
Ankastre-Serbest	126.852	132.742	138.695
	64.438	66.938	69.563
α	Sonlu Elemanlar Metodu		
Basit mesnetli	0.1	0.2	0.3
Ankastre-Basit mes.	93.222	97.534	101.773
Ankastre-Ankastre	109.206	114.059	118.819
Ankastre-Serbest	126.879	132.726	138.461
Basit mesnetli	64.356	66.962	69.520

3. DEĞERLENDİRME

Kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için geliştirilen, sayısal bir teknik olan genelleştirilmiş diferansiyel quadrature metodu; değişik sınır şartlarına sahip kirişlerin enine ve boyuna serbest titreşimine ait bazı problemlerin çözümünde kullanılmıştır. GDQ metodu orjinal DQ metodunda karşılaşılabilecek tekillik problemlerinin de üstesinden gelmiştir. Değişik problemlere uygulanmasıyla bu metodun etkili bir yaklaşım

tekniki olarak yüksek bir potansiyele sahip olduğu gösterilmiştir. Çözüm için çok az sayıda düğüm noktası kullanılmasına rağmen incelenen problemlerde mükemmel sonuçlar elde edilmiştir. GDQ metodunun çözümü ve programlanması ve sınır şartlarının diferansiyel denklemlere uygulanması çok daha kolaydır. Bu metotla elde edilen sonuçların hassasiyeti ve mekanik sistemlere kolay uygulanabilirliği metodun avantajlarını göstermektedir.

4. KAYNAKLAR

- Bellman R. E. and Casti, J. 1971. Differential Quadrature and Long-term Integration, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 34, 235-238.
- Bellman, R. E. and Roth, R. S. 1979. Scanning Technique for System Identification, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 71, 403-411.
- Bellman, R. E., Kashef, B. G. and Casti, J. 1971. Differential Quadrature: a Technique for the Rapid Solution of Non-Linear Partial Differential Equations, Journal of Computational Physics, 10, 40-52.
- Bert, C. W. and Malik, M. 1996. Differential Quadrature Method in Computational Mechanics: a Review, Applied Mechanical Reviews, 49, 1-27.
- Civan, F. and Sliepcevich, C. M. 1983. Application of Differential Quadrature to Transport Processes, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 93, 206-221.
- Civan, F. and Sliepcevich, C. M. 1986. Solving Integro-Differential Equations by the Quadrature Method, Integral Methods in Science and Engineering, Hemisphere Publishing, Washington DC, 106-113.
- Gutierrez, R. H., Laura, P. A. A. and Rossi, R. E. 1994. The Method of Differential Quadrature and its Application to the Approximate Solution of Ocean Engineering Problems, Ocean Engineering, Pergamon Press, 21, 57-66, 1994.
- Jang, S. K., Bert, C. W. and Striz, A. G. 1989. Application of Differential Quadrature to Static Analysis of Structural Components, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 28, 561-577.
- Meirovitch, L. 1986. Elements of Vibration Analysis, McGraw-Hill, New York.
- Mingle, J. O. 1979. The Method of Differential Quadrature for Transient Non-Linear Diffusion, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 71, 403-411.
- Naadimuthu, G., Bellman, R. E. Wang, K. M. and Lee, E. S. 1984. Differential Quadrature and Partial Differential Equatin: Some Numerical Results, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 98, 220-235.
- Quan, J. R. ve Chang, C. T. 1989. 'New Insights in Solving Distributed System Equations by The Quadrature Method-I. Analysis', Computational Chemical Engineering, 13, 779-788.
- Shu, C. and Richards, B. E. 1992. Application of Generalized Differential Quadrature to solve two-Dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations, Internal Journal of Numerical Methods in Fluids, 15, 791-798.