Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi,
Sayı 30 (Temmuz 2011/II), ss. 101-110

Dinamik Matematik Yazılımı ile Geometrik Temsilden Cebirsel Temsile: Parabol Kavramı

Tolga Kabaca*, Emine Gaye Çontay, Esra İymen*****

Özet

Matematik kavramları farklı yollar ile temsil edilebilirler. Bunların en bilinen ve formal biçimleri kavramın geometrik ve cebirsel temsilleridir. Bir matematik kavramının geometrik temsili görsel bir gösterim yolu iken, cebirsel temsili kavramın daha çok soyut görünümüdür. Bir kavramın farklı temsilleri arasındaki ilişkiler ile birlikte öğretilmesi matematik öğretiminin en önemli bileşenlerinden biri olarak görülmektedir. Bu çalışmada parabol kavramının geometrik temsili ile cebirsel temsili arasındaki ilişkinin çift yönlü olarak yapılandırılması amaçlanmıştır. Parabol eğrisi matematik tarihi içinde de öncelikle geometrik özellikleri ile belirmeye başlamış bir kavram olduğundan yapılandırmanın çıkış noktası olarak geometrik temsil seçilmiştir. Dinamik Matematik Yazılımı GeoGebra'nın sunduğu dinamik imkânlardan yararlanılarak 4 temel aşamada tasarlanan öğrenme ortamı bir Anadolu Lisesinin 11. sınıf öğrencilerinden oluşan 23 kişi üzerinde örnek bir ders şeklinde yürütülmüş ve öğrencilerin ders sürecindeki geri bildirimlerinden yola çıkılarak tasarlanan öğrenme ortamı uygulanabilir bulunmuştur. Bunun yanında öğrenme ortamını yönetmek için tasarlanan etkinlik öğrencilerin parabol kavramının ileri düzey özelliklerini incelemelerine de fırsat sağlamıştır.

Anahtar Kelimeler: Çoklu Temsiller, Dinamik Matematik Yazılımı, GeoGebra, Parabol

From Geometric Representation to Algebraic Representation with Dynamic Mathematics Software: The Concept of Parabola

Abstract

Mathematical concepts can be represented in different ways. Geometric and algebraic representations are the most well-known and formal versions. The algebraic representation is abstract view of the concept, while the geometric representation is rather visual. Teaching a concept by relationships between its different representations is one of the important components of mathematics teaching. This study aims to construct the concept of parabola with the relationship between its geometric and algebraic representations. This construction is planned as bidirectional. That is both from geometry to algebra and from algebra to geometry. Since curve of the parabola started to appear with its geometric views in mathematics history, geometric representation was chosen as starting point of the construction. A learning environment was designed in 4 phases by the help of facilities provided by the GeoGebra Dynamic Mathematics Software. This learning environment was applied in a sample course in which 23 students of the 11th graders of an Anatolian High school participated. The learning environment was found as practical from the feed backs of the students during the course. Furthermore, the activity, designed to manage the learning environment, provided the learners with an opportunity to examine some advanced properties of the parabola.

Key Words: Multiple representations, Dynamic Mathematics Software, GeoGebra, Parabola

---

* Yrd. Doç. Dr. Pamukkale Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Denizli.
e-posta: tkabaca@pau.edu.tr
** Arş. Grv. Pamukkale Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Denizli.
e-posta: gayeermec@gmail.com
*** YL Öğr. Pamukkale Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Denizli.
e-posta: esraiymen@gmail.com

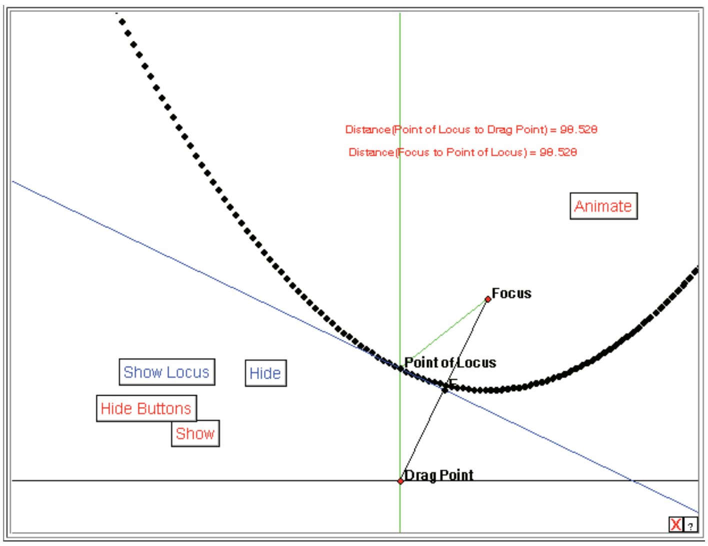
Giriş

Bir matematik kavramının, farklı gösterim biçimlerinin her birine o matematik kavramının bir temsili denilmektedir (Goldin ve Kaput, 1996). Kavramın yapısına göre bir kavramın iki veya daha fazla temsile sahip olması mümkündür. Bu temsillerin her biri o kavramı farklı şekillerde tanımlayabilmektedir. Farklı temsiller arasındaki ilişkilerden yararlanarak kavramın yapılandırılması matematik öğrenmenin önemli bileşenlerinden biri olarak görülmektedir (Duval, 1999).

Dinamik matematik yazılımları matematik kavramlarının geometrik temsillerini incelemede sundukları fırsatlar açısından çok önemli araçlardan biridir. Ücretsiz olarak kullanılabilmesi ve aralarında Türkçe de olan birçok dile çevrilmiş olması açısından matematik öğretmenlerinin sınıf ortamında kullanılabilir bulduğu (Edwards ve Jones, 2006; Kabaca ve ark.., 2010) bir dinamik matematik yazılımı olan GeoGebra özellikle farklı temsiller arasındaki ilişkileri incelemeye imkan sağlama felsefesi üzerine yapılandırılmıştır (Hohenwarter ve Preiner, 2007). GeoGebra'nın geometri ve cebir pencereleri sayesinde bir matematik kavramının cebirsel temsili ile geometrik temsili aynı anda gözlemlenebilmektedir. Dinamik bir şekilde herhangi birindeki değişiklik senkronize olarak diğerinde gerçekleşmektedir. Bu yolla, matematik kavramlarının iki önemli temsili olan geometri ve cebir arasındaki ilişkiler anlamlandırılabilmektedir (Hohenwarter, Jarvis ve Lavicza, 2009; Carter ve Ferruci, 2009).

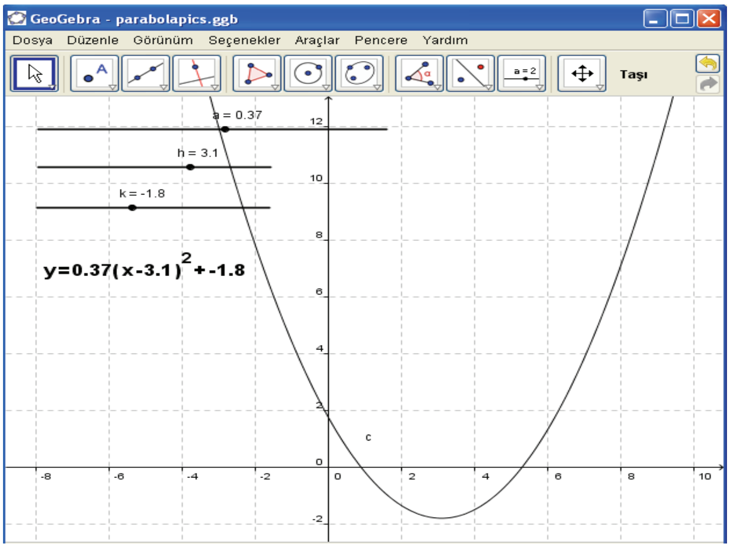
Antik çağlarda, Pergeli Apollonius tarafından (M.Ö. 262-190) bir koni ile düzlemin arakesiti olarak statik bir yapıda tanımlanan konik kesitler (parabol, hiperbol, elips, çember) (Sertöz, 1996) 17. yüzyıl matematik dünyasında dinamik bir karakter kazanmaya başlamıştır. Konik kesitlerinden biri olan parabol eğrisi Galileo tarafından fırlatılan bir top mermisinin izi olarak tanımlanmıştır. Matematiğin doğal gelişim süreci içinde önce geometrik yapısı ile tanıştığımız parabol kavramı, matematiğin daha teorik bir görünüm kazanması ile birlikte cebirsel olarak da temsil edilmiştir. Bu açıdan bakıldığında da kavramın yapılandırma sürecinin planlanmasında geometrik temsil ihmal edilmemelidir.

Bu bağlamda, parabol kavramının geometrik temsilini ön plana çıkaran çalışmalara rastlanmaktadır. Geometer's Sketchpad adlı yazılım yardımı ile hazırlanan ve aşağıda ekran görünümü verilen uygulamada, *"sabit bir nokta ve sabit bir doğruya eşit uzaklıktaki noktaların kümesi"* şeklinde tanımlanan parabol kavramının nasıl yapılandırıldığı canlandırmalı olarak gözlemlenebilmektedir. Bahsedilen sabit noktaya parabolün odak noktası (focus), sabit doğruya ise parabolün doğrultmanı (directrix) adı verilmektedir (Şekil-1). Bu uygulamada parabolün cebirsel temsili ile geometrik temsili arasındaki ilişki öğrencilere sorulan *"bu çizimin gerçekten bir parabol olduğuna dair bir ispat üretebilir misiniz?"* sorusu ile keşfettirilmeye çalışılmıştır (Exploring the Parabola, 2010).



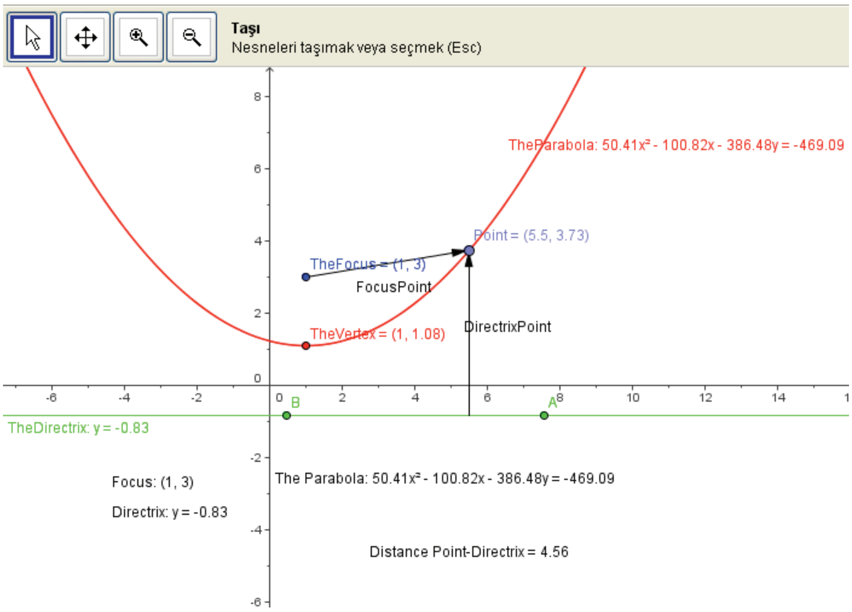
Şekil 1: GSP ile parabolün keşfi (Exploring the Parabola, 2010)

GeoGebra'dan yararlanılan başka bir çalışmada parabolün "$y = a\ (x - h)^2 + k$" şeklindeki cebirsel temsili ele alınmıştır (Şekil-2). Bu denklemdeki *a, h* ve *k* katsayıları sürgü nesneleri ile kontrol edilerek denklemin temsil ettiği geometrik nesnenin (eğri) nasıl değiştiği görselleştirilmiştir (Riehl, 2010).



Şekil 2: GeoGebra ile parabolün incelenmesi-1 (Riehl, 2010)

Yine GeoGebra'dan yararlanılan bir başka uygulamada da parabolün odak noktası ve doğrultmanı arasındaki ilişkiler görselleştirilmeye çalışılmıştır (Arnold, 2010). Bu uygulamada parabol eğrisi, bir geometrik yerin inşa edilmesi şeklinde değil, GeoGebra'nın **Parabol[nokta, doğru]** komutu yardımı ile doğrudan üretilmiştir (Şekil-3).

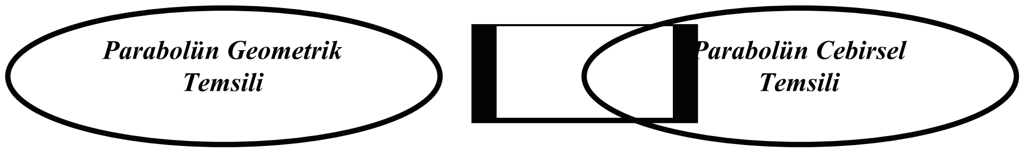


Şekil 3: GeoGebra ile parabolün incelenmesi-2 (Arnold, 2010)

Bu çalışmalarda ya sadece geometriden yola çıkılarak cebirsel yapının keşfedilmesi ya da cebirsel yapıdan yararlanılarak geometrik temsilin görselleştirilmesi durumlarının tasarlandığı göze çarpmaktadır.

Talim terbiye kurulunun öğretmen portalından elde edilen en güncel *"Matematik dersi 9-12 sınıflar"* ve *"Analitik Geometri dersi 10-11. sınıflar"* öğretim programlarına göre (MEB, 2009), Türk öğrenciler parabol kavramı ile ilk olarak, 10. sınıfta ikinci dereceden fonksiyonlar konusunda karşılaşmaktadırlar. Parabol kavramı, ikinci dereceden fonksiyon tarafından temsil edilen bir eğrinin adı olarak tanıtılmaktadır. Her ne kadar çeşitli gerçek hayat problemlerinde öğrencilere ikinci dereceden bir fonksiyonun parabol ile temsil edileceği fikri kazandırılmaya çalışılsa da öğrencilerin zihninde *"parabol adı verilen eğrinin neden ikinci dereceden bir fonksiyon ile temsil edildiği?"* sorusuna yanıt verebilecek bir öneriye rastlanmamaktadır. 11. sınıf analitik geometri dersinde ise parabol kavramı tamamen analitik ve cebirsel özellikleri ile alınmaktadır. Yani, kavramın geometrik temsili ile cebirsel temsili arasındaki ilişki ihmal edilmektedir.

Bu çalışmada, parabol kavramının geometrik ve cebirsel temsilleri arasındaki ilişkinin çift yönlü olarak incelenmesi amaçlanmıştır. Parabol kavramının geometrik temsilinin cebirsel temsilinden yola çıkılarak cebirsel temsile ulaşma ve elde edilen cebirsel temsilin geometrik temsil ile örtüştüğünü görselleştirmek çalışmanın temel amacını oluşturmaktadır (Şekil-4).



Şekil 4: Çalışmada izlenen felsefenin temsili görünümü

Yöntem

Bu çalışmada parabol kavramının yapılandırılması için geometrik temsil ile cebirsel temsil arasındaki ilişkiyi çift yönlü olarak incelemeye fırsat sağlayan bir ortam tasarlanmıştır. Tasarlanan öğrenme ortamında kavramı yapılandırma süreci bir ders süresince uygulanarak videoya kaydedilmiştir. Ders ortamı, yarı yapılandırılmış şekilde yönetilmiş ve öğrencilerin süreç üzerinde anahtar rol oynayan tepkileri rapor edilerek yorumlanmıştır.

Öğrenme ortamının yönetimi 4 aşamada planlanmıştır. Bu aşamalar aşağıdaki gibidir:

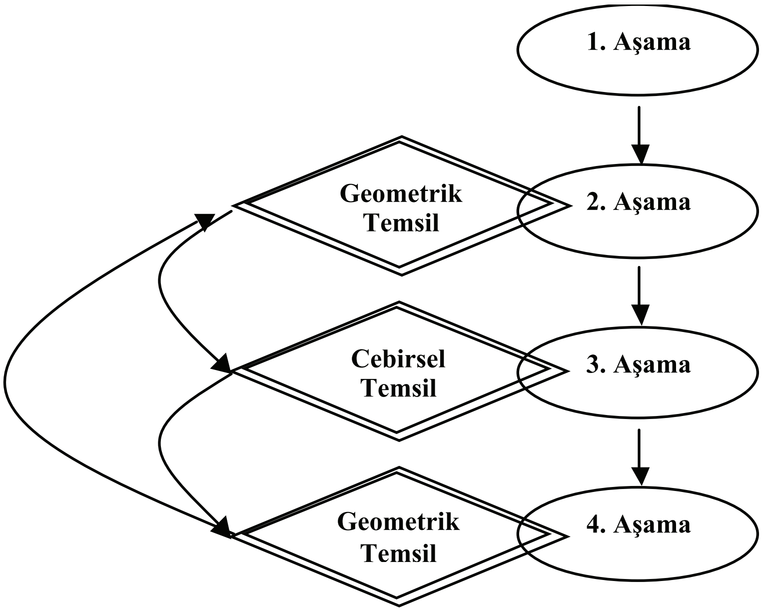
1. Aşama: Öğrencilerden *"sabit bir noktaya"* ve *"sabit bir doğruya"* eşit mesafedeki noktalar kümesi için hipotez çizimler üretmeleri istenir (kâğıt-kalem kullanarak).

2. Aşama: GeoGebra ile bahsedilen durum modellenir ve öğrencilerin hipotezlerini test etmeleri sağlanır.

3. Aşama: Öğrencilere uzaklıkların eşit olma koşulunu cebirsel olarak kontrol altına almanın bir yolunun olup olmadığı sorularak cebirsel bağıntıyı keşfetmeleri konusunda motive edilirler (kâğıt-kalem kullanarak).

4. Aşama: Öğrencilerin elde ettiği cebirsel bağıntının GeoGebra üzerinde geometrik görünümünün kontrol edilebileceği bir ortam hazırlanır ve elde edilen cebirsel bağıntının geometrik temsili gözlemlenir.

Bu aşamaların cebirsel olarak yönetiminde kolaylık sağlamak amacı ile *"sabit nokta"* ilk olarak y-ekseni üzerinde alınmıştır. Dördüncü aşamaya kadar yapılan uygulamadan sonra nokta herhangi bir şekilde seçilerek üçüncü ve dördüncü aşamalar tekrar uygulanmıştır. Açıklanan bu aşamaların çalışmanın temel amacını nasıl yansıttığı da şekil-5 yardımı ile açıklanmıştır.



Şekil 5: Öğrenme ortamının aşamaları ile çalışmanın felsefesinin ilişkisi

Çalışma grubu

Çalışmada geliştirilmesi hedeflenen öğrenme ortamı 23 kişilik sınıf mevcudu olan bir 11. sınıf üzerinde uygulanmıştır. Ortaöğretim matematik programına göre, 11. sınıflar ikinci derece denklemleri ve ikinci derece denklemlerin parabol adı verilen eğriler ile temsil edildiğini daha önce matematik dersinde öğrenmiştir. Fakat ikinci dereceden bir denklemin neden parabol eğrisi ile temsil edildiğine dair akıl yürütmeler yapmamışlardır.

Dersin uygulanması

Bir saatlik ders, tasarlanan örnek öğrenme ortamının bir denemesi olarak planlanmıştır. Derse katılan öğrenciler GeoGebra'nın kullanımı konusunda tecrübeli olmadığından sadece kalem-kâğıt uygulamalarını gerçekleştirmişler ve akıl yürütmeler yapmalarına fırsat tanınmış ancak GeoGebra'yı kendileri kullanmamışlardır. Dinamik ortam bir sunum aracı olarak kullanılmıştır.

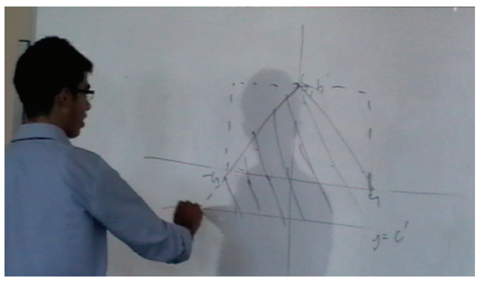
Bulgular ve Yorum

Uygulama aşamalarından elde edilen bulgular aşağıda alt başlıklar halinde rapor edilerek yorumlanmıştır.

1. Aşama

GeoGebra ortamında y-ekseni üzerinde bulunan sabit bir B(0,*b*) noktası ve $y=c$ doğrusu oluşturulmuştur. Sürgüler yardımı ile noktanın ve doğrunun konumu isteğe bağlı olarak değiştirilebilmektedir. Ekran görünümü beyaz tahta üzerine yansıtılmış ve B noktası ile $y=c$ doğrusunun verilen konumlarını model alarak her ikisine de eşit uzaklıkta olan noktaların koordinat sistemi üzerine işaretlenmesi durumunda elde edilecek şekli çizmeleri istenmiştir. Öğrenciler arasında beklenen düşünme biçimini yansıtabilen sadece bir kişi çıkmıştır. Sınıf içinde verilen cevapların genelini yansıtan bir kısmı aşağıda verilmiştir;

Ferit bir üçgen çizip içini doldurmuştur (Resim-1). Bu cevabın tutarlı bir akıl yürütme ile üretilmediği düşünülmektedir.



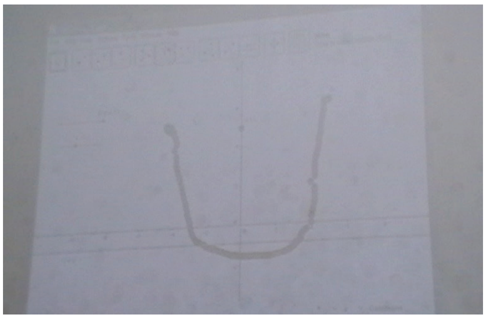
Resim-1: Ferit'in çizimi

"Tek iki nokta olur yani, noktalar kümesi olmaz. Biri x eksenine göre simetrisi olur, biri bu tarafta biri de ikinci bölgede olur iki tane olur" şeklinde cevap veren Yeşim'in problem durumunu

kısmen anladığı söylenebilir. İstenen noktaların her birinin verilen sabit nokta ile sabit doğruya eşit uzaklıkta olması gerektiğini anlamanın yanında bu uzaklığın sabit olması gerektiği gibi hatalı bir algıya düştüğü görülmektedir.

Can'ın cevabı da, Yeşim örneğinde olduğu gibi problem durumunu kısmen anladığını göstermektedir. Can'ın *"Tam ortadan geçen bir doğrudur"* cevabıyla y-ekseni üzerinde, doğru ve noktaya eşit uzaklıkta bir nokta belirlediği ve bu noktadan geçen yatay bir doğru çizmeyi düşündüğü çıkarılabilir.

Parabole benzeyen bir şekil çizebilen Ahmet'in çiziminde de bütün noktaların B noktası ile *y=c* doğrusuna eşit uzaklıkta olmadığı görülmektedir (Resim-2). Buna rağmen Ahmet'in problem durumunu doğru olarak algıladığı söylenebilir.

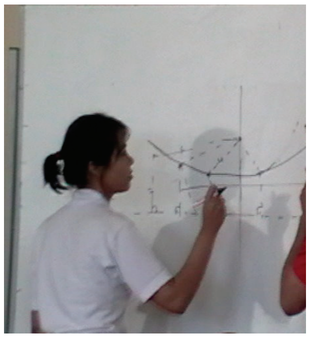


Resim 2: Ahmet'in çizimi

2. Aşama

İlk aşamada sadece problem durumunu sunmak için geliştirilen ve kullanılan GeoGebra ortamı ikinci aşamada öğrencilere geri bildirim verebilir hale dönüştürülmüştür. Sabit B noktasına ve *y=c* doğrusuna eşit uzaklıkta olması istenen noktaları temsil eden A(*x,y*) noktası olarak serbest bir nokta oluşturulmuş ve hareket ettirildiğinde ekrana iz bırakacak şekilde ayarlanmıştır. Bunun yanında A(*x,y*) noktasının B noktası ile *y=c* doğrusuna uzaklığı dinamik bir şekilde ekranda görüntülenmiştir.

GeoGebra'nın dinamik özelliklerinden yararlanarak öğrencilerin hipotezlerini kontrol etmelerine fırsat sağladığında, daha fazla öğrenci parabol eğrisini çizebilmiştir. En başarılı çizimlerden birini yapan Petek'in çiziminde GeoGebra'daki uzunluklardan yararlandığı görülmektedir (Resim-3).



Resim 3: Petek'in çizimi

3. Aşama

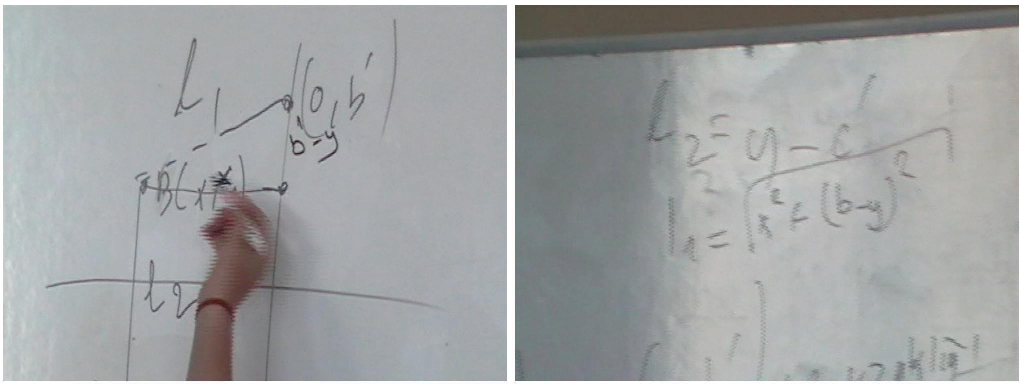
İkinci aşamada geometrik yapıyı fark eden öğrencilere yönelik *"Geometrik olarak nasıl bir resim oluşacağını fark ettiniz. Elle yaptığınız çizimin her zaman mükemmel olması beklenmez. Size yardımcı olacak cebirsel bir kural bulabilir misiniz?"* sorusuna net bir cevap alınamamıştır. Bunun üzerine soru *"Bu A(x,y) noktasının (0,b) noktasına uzaklığı ile A(x,y) noktasının y=c doğrusuna uzaklığı eşit olacak şekilde matematiksel bir ilişki bulabilir misiniz?"* şeklinde soru yeniden ifade edilmiştir. Pınar isimli öğrenci serbest A(*x,y*) noktasının *y=c* doğrusuna olan uzaklığı için *"y+c"* cevabını vermiştir. Pınar'ın *y=c* doğrusunun *x*-ekseninin altındaki konumu için cevap ürettiği ve *c*'yi uzaklık ifade eden pozitif bir değer olarak kabul etme algısı ile hareket ettiği düşünülerek *"c değerinin negatif olduğunu unutuyorsun herhalde!"* geri bildirimi ile yeniden düşünmesi sağlanmıştır. Son olarak Pınar *"0 zaman y-c olmalı"* doğru cevabını üretebilmiştir.

A(*x,y*) noktasının B noktasına uzaklığının nasıl hesaplanacağı sorulduğunda, Ayşe isimli öğrenci *"Şuraya düz çizip pisagordan"* cevabını vermiştir (Resim-4). Dik üçgen oluşturup Pisagor teoremini kullanarak A noktasının sabit (0,*b*) noktasına olan uzaklığını elde etmiştir.

Sınıfın tamamına yakınının elde edilen bağıntılar üzerinde hem fikir olması beklendikten sonra, öğrenciler uzunluğu belirten iki ifadeyi birbirine eşitleyip düzenleyerek $y=\dfrac{x^2+b^2-c^2}{2b-2c}$ denklemini elde etmişlerdir.

4. Aşama

Son aşamada, öğrencilerinin kendi çalışmaları ile elde ettikleri bağıntıyı sağlayan noktalar kümesinin, yazılımın da desteği yardımıyla ulaşılan ve elle çizilen eğri ile aynı eğri olması gerektiğine dair bir tartışma yönetilmiştir.



Resim 4: Ayşe'nin hesaplama ve çizimleri

Bu cebirsel sonucun geometrik yansımasını gözlemlemek üzere araştırmacı tarafından GeoGebra ortamında bir *t* sürgüsü inşa edilmiş ve istenen şartı beklenen A(*x,y*) noktası $\left(t, \dfrac{t^2+b^2-c^2}{2b-2c}\right)$ şeklinde yeniden tanımlanmıştır. *t* sürgüsü canlandırılarak öğrencilerin A(*x,y*) noktasının izinin mükemmel bir şekilde eğriyi oluşturulduğu gözlemlenebilmiştir.

Daha önce serbest bir şekilde sürüklenerek hareket ettirilebilen A(*x,y*) noktası bu aşamada sonra tekrar sürüklenerek hareket ettirilmeye çalışılmış ve niçin hareket etmediği sorulduğunda, Fatma *"A noktası artık t'ye bağlı"* cevabı ile *t*-sürgüsünün cebirsel olarak noktayı kontrol ettiğini anladığını yansıtmıştır.

Son aşamada ayrıca, $y=\dfrac{x^2+b^2-c^2}{2b-2c}$ denklemi doğrudan GeoGebra'nın cebirsel veri girişi satırına yazıldığında bağıntının ürettiği eğri gözlemlenmiştir. Bu sayede eğri ile A noktasının bıraktığı izin çakıştığı görülerek cebirsel temsilden geometrik temsile geri dönüş sağlanmıştır.

Yukarıda tanımlanan 4 aşamanın uygulanmasında öğrenciler için hesaplama kolaylığı olması açısından sabit B noktasının koordinatları (0,*b*) şeklinde verilerek *y*-ekseni üzerinde elde edilmiştir. Tabii bu durum her parabolü temsil etmeyecektir. Yeni bir *a* sürgüsü tanımlanarak B noktasının koordinatları (*a,b*) şeklinde yeniden tanımlanmıştır. B noktasının konumu *a* sürgüsü yardımı ile *y*-ekseni üzerinden ayrıldığında A(*x,y*) noktasının sabit B noktasına ve *y=c* doğrusuna uzaklıkları arasındaki eşitliğin bozulduğu gözlemlenmiştir. Bu noktada öğrenciler ile aşağıda temsil edilen tartışma yönetilmiştir;

Araştırmacı: *Neden bozuldu uzunluklar? Bu uzunlukları tekrar düzenlemek için ne yapmalı?*

Ayşe: *t'yi… t'yi değil………*

Araştırmacı: *t' yi değil neyi?*

Ayşe: *A' yi değiştireceğiz*

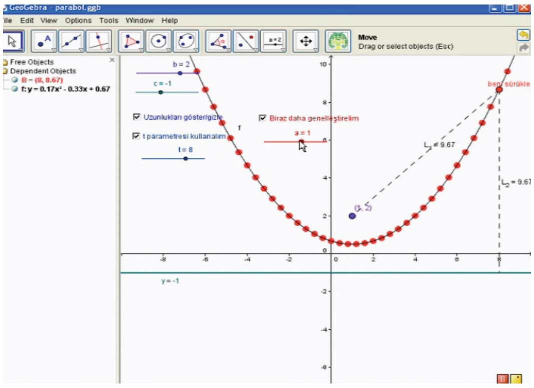
Araştırmacı: *A' nin nesini?*

Araştırmacı: *y' sini …*

Araştırmacı: *y'sini, sağ tarafını*

Can: *Ordinatını*

Cevaplardan da anlaşıldığı gibi öğrenciler B noktası herhangi bir (*a,b*) değerini aldığında da gerekli olan uzaklık koşulunu sağlamak için A noktasının sabit noktaya ve sabit doğruya uzaklıklarını ifade eden bağıntıların yeniden düzenlenmesi gerektiğini anlamışlardır. Öğrencilerin 3. ve 4. aşamaları yeniden uygulamaları istenmiştir. Son olarak yine öğrencilerin kendi kâğıt kalem çalışmaları ile elde ettikleri $y=\dfrac{x^2-2xa+a^2+b^2-c^2}{2b-2c}$ denklemi 4. aşamada açıklandığı gibi kullanılarak herhangi parabolün en genel durumunun hem cebirsel hem de geometrik olarak elde edilmesi görselleştirilmesi sağlanmıştır (Resim-5).



Resim 5: Cebirsel ve geometrik yolla elde edilen paraboller

Her ne kadar ders sürecinde öğrenciler yazılımı kullanmamış da olsalar, dinamik ortamın tamamen öğrenciler ile birlikte ders sırasında aşamalar halinde olgunlaştırılmasına dikkat edilmiştir. Elde edilen son tasarımda sürgüler yardımı ile farklı parabollerin hem cebirsel hem de geometrik olarak gözlemlenmesi sağlanmıştır. Bu aşamaya kadar *"parabol"* ismi kullanılmamıştır. Buna rağmen bazı öğrenciler önceki derslerde öğrendikleri parabol eğrisi olduğunu fark etmişlerdir. Son olarak, elde edilen ilişkinin ikinci dereceden bir fonksiyon olduğuna vurgu yapılarak parabol eğrisi olarak isimlendirilen bu eğrinin cebirsel temsilinin ne tür bir fonksiyon olduğu fark ettirilmiştir. Doğrultmanın farklı konumları için elde edilen eğri bir fonksiyon grafiği olmadığından, *y=c* doğrusunun farklı konumları uygulamaya dâhil edilmemiştir.

Tartışma ve Sonuç

Ulusal matematik programımız 2005 yılından beri yapılandırmacı bir öğrenme felsefesi ışığında düzenlenme yoluna girmiş de olsa hala eski öğrenme alışkanlıklarımızın etkisi altında bir matematik öğretimi sürdürüldüğü düşünülmektedir. Revize edilmiş de olsa programın, matematik öğretiminin uygulayıcısı olan öğretmenleri yönlendirebilecek yeni düzenlemelere ihtiyacı vardır. Özellikle cebirsel ve geometrik temsillerin birbirinden kopuk olarak öğretilmeye çalışılan pek çok örnek bulunabilir. Hâlbuki matematik kavramlarının doğal gelişim sürecinde görsel yapılar üzerinde çalışmak ve deneme yanılma çalışmalarının ön planda olduğu görülmektedir. Matematik kavramlarının bu gelişim felsefesi yapılandırmacı öğrenme ortamlarının tasarımında da önemli rehberlerden biri olarak değerlendirilmelidir. Bu araştırmada seçilen öğrenciler seviyeleri itibariyle ikinci dereceden fonksiyonların grafiğinin bir parabol olduğunu bilmektedirler. Ancak yapılandırmacı felsefenin önemli ölçütlerinden biri olan *"Niçin? Nasıl?"* sorularına cevap verebilecek donanımda değillerdir. Bunun yanında daha üst sınıflarda analitik özelliklerini inceledikleri parabol eğrisi bir süre boyunca anlamlandırılamayan bir kavram olarak kalmaktadır. Daha üst sınıflardaki analitik geometri dersinde de yine kavramın yapılandırılması felsefesine ters bir şekilde bilinen denklemden yola çıkılarak odak noktası, doğrultman gibi analitik özellikler ele alınmaktadır.

Bu çalışmada önerilen öğrenme ortamı ile doğrultman ve odak noktası kavramlarının ismi kullanılmadan daha erken sınıflarda öğrenciler ikinci dereceden fonksiyon ile parabol eğrisi arasındaki çift yönlü ilişki ile tanıştırılabilirler. Bu ilişki ile tanışmış olan öğrenciler için daha üst sınıflarda gerekli isimlendirme ve tanımlamaların yapılmasının ardından daha anlamlı bir analitik inceleme mümkün olabilir.

Çalışmada ayrıntıları ile tanımlanan öğrenme ortamı içinde öğrencilerin bulduğu cebirsel ilişki GeoGebra'ya bir fonksiyon olarak girildiğinde hem temsil ettiği eğri elde edilmekte hem de biçimsel açıdan çok açık olmayan ilişkinin formatı öğrencilerin alışık olduğu bir ikinci dereceden denklem şeklinde görüntülenebilmektedir. Son elde edilen bağıntının cebirsel olarak düzenlenmesi ile $y=\frac{1}{2b-2c}x^2+\frac{-2a}{2b-2c}x+\frac{a^2+b^2-c^2}{2b-2c}$ şeklinde düzenlenebilen denklem yapısı GeoGebra cebir penceresinde spesifik a, b ve c değerleri için otomatik olarak düzenlenerek $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ formatında görüntülenmektedir. Parabolün analitik incelemesinin yapılacağı derste bu etkinlik hatırlatılarak

$$\alpha=\frac{1}{2b-2c},\ \beta=\frac{-2a}{2b-2c}\ \text{ve}\ \gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2b-2c}$$

olduğu belirtilebilir. Burada, analitik geometri derslerinde hazır olarak verilen ikinci derecen fonksiyonun katsayılarından yola çıkılarak doğrultman ve odak noktasının bulunmasının aksine doğrultman ve odak noktasının parametrelerinden yola çıkılarak denklemin katsayıları elde edilmiştir. Bu bağıntılardan yola çıkılarak öğrencilerin doğrultman ve odak noktasının parametrelerini araştırma çalışması da yine cebirsel bir keşfetme etkinliği olacaktır.

Çalışmada dinamik matematik yazılımı desteğinde tasarlanan öğrenme ortamının, öğrencilerin bilgisayar ile grup ya da bireysel olarak çalışma yapmamalarına rağmen geometrik ilişkileri fark etmelerine yardımcı olabildiği görülmüştür. Bunda, GeoGebra ortamındaki dinamik ortamın ders sürecinde öğrenciler ile birlikte tasarlanmasının etkisi olduğu düşünülmektedir. Öğrencilerin geometrik olarak gözlemledikleri durumu, kâğıt kalem yardımı ile cebirsel olarak araştırması sağlandıktan sonra bulunan cebirsel sonucun geometrik temsilinin başta tanımlanan geometrik yapı ile aynı olduğu görselleştirilmiştir. Bu yolla matematik önemli bileşenlerinden biri olarak görülen farklı temsiller arasındaki ilişkilerin (Duval, 1999) öğrenciler tarafından gözlemlenmesi sağlanmıştır (Hohenwarter ve Preiner, 2007; Hohenwarter, Jarvis ve Lavicza, 2009; Carter ve Ferruci, 2009).

Öğrencilerin parabol kavramının geometrik temsili ile cebirsel temsili arasındaki çift yönlü ilişkiyi fark edebilmeleri için parabolün cebirsel yapısından yola çıkarak grafiğindeki değişimin görselleştirilmesi (Riehl, 2010) ve doğrultman ve odak noktalarının parabolü doğrudan bir komut yardımı ile üretmesi sayesinde elde edilen yapının özelliklerinin incelenmesi (Arnold, 2010) çalışmalarından farklı olarak bu çalışmada, parabol eğrisinin geometrik tanımından yola çıkarak hazır komut kullanılmadan elde edilmesine dikkat edilmiştir.

Bu çalışmada öğrenciler bireysel ya da grup halinde yazılımı kullanmamışlardır. GeoGebra'nın sadece etkili bir sunum aracı olarak kullanıldığı öğrenme ortamının yerine öğrencilerin erken sınıflardan itibaren yazılımı kullanma konusunda eğitilmesi ve bireysel araştırmalarında çalışma sayfaları eşliğinde kullanmaya motive edilmeleri önerilebilir. Ücretsiz, Türkçe olarak kullanılabilen kullanıcı dostu bir ara yüze sahip ve kullanımı kolay bir yazılım olan GeoGebra'nın (Edwards ve Jones, 2006; Kabaca ve ark., 2010) sınıf ortamlarına daha etkili bir şekilde entegrasyonu sağlanmalıdır.

KAYNAKÇA

Arnold, S. (2010), http://www.compasstech.com.au/ARNOLD/geogebra/parabola.html,erişim tarihi: 26.08.2010

Carter, J., & Ferrucci, B. (2009). Using GeoGebra to Enhance Prospective Elementary School Teachers' Understanding of Geometry. *The Electronic Journal of Mathematics and Technology, 3(2), 149-165.*

Duval, R. (1999), Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning, *Proceedings of the twenty-first annual meeting of the North American Chapter of the International group for the Psychology of Mathematics Education*. PME21-Mexico, p. 3 – 26

Edwards, J.A. & Jones, K. (2006). Linking Geometry and Algebra with Geogebra. *Mathematics Teaching,* 194, 28-30.

Exploring the Parabola (2010), http://mste.illinois.edu/dildine/sketches/parabolas.htm erişim tarihi: 26.08.2010.

Goldin, G.A ve Kaput, J. (1996), A Joint Perspective on the Idea of Representation in Learning and Doing Mathematics, *Theories of Mathematical Learning*, Steffe, L. & Nesher, P. (Eds.) Mahwah (New Jersey): LEA.

MEB, (2009) http://ttkb.meb.gov.tr/ogretmen adresindeki MEB öğretmen portalı, erişim tarihi: 27.08.2010.

Hohenwarter, M. ve Preiner, J. (2007). Dynamic mathematics with GeoGebra. *The Journal of Online Mathematics and its Applications*, Volume 7. Article ID 1448.

Hohenwarter, M., Jarvis, D:, & Lavicza, Z. (2009). Linking Geometry, Algebra, and Mathematics Teachers: GeoGebra Software and the Establishment of the International GeoGebra Institute. *The International Journal for Technology in Mathematics Education, 16(2), 83-86.*

Kabaca, T., Aktümen, M., Aksoy, Y., Bulut, M. (2010) Matematik öğretmenlerinin Avrasya GeoGebra toplantısı kapsamında dinamik matematik yazılımı GeoGebra ile tanıştırılması ve GeoGebra hakkındaki görüşleri. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, Vol.1 No.2, 148-165

Riehl (2010), http://skyviewmath.pbworks.com/Algebra-2-Parabolas erişim tarihi: 26.08.2010

Sertöz, A.S. (1996), Matematiğin Aydınlık Dünyası, *Tübitak yayınları- Popüler Bilim Kitapları Serisi*, ISBN: 9789754030587.

Summary

Introduction

Mathematical concepts can be represented by different ways. Geometric and algebraic representations are the most well-known and formal versions. The algebraic representation is the abstract view of the concept, while the geometric representation is rather visual. Teaching a concept by relationships between its different representations is one of the important components of mathematics teaching. This study aims to construct the concept of parabola with the relationship between its geometric and algebraic representations. Free dynamic mathematics software GeoGebra provides innovative opportunities to observe algebraic and geometric representations at the same time. When a modification is done on algebra window, GeoGebra allows observing the dependent changes on its geometry window. In this study, we aimed to construct a learning environment that shows how to reach algebraic representation from geometric representation of the concept of parabola. This study also aimed to show that the obtained algebraic representation produces the same geometric representation.

Methodology

Since curve of the parabola started to appear with its geometric views in mathematics history, geometric representation was chosen as starting point of the construction. A learning environment was designed in 4 phases by the help of facilities provided by the GeoGebra Dynamic Mathematics Software. This learning environment was applied in a sample course in which 23 students the 11th graders of an Anatolian High school participated.

Findings

The learning environment is found as practical from the reactions of students. The understanding was facilitated by the visualization capacity of GeoGebra. Besides, the dynamic activity, designed to manage the learning environment provided opportunity for the students to examine some advanced properties of the parabola.

Discussion

Although the latest Turkish mathematics curriculum emphasizes exploring the concept and more meaningful understanding, the curriculum guide is not sufficient to support mathematics teachers. The curriculum still advises that the concept of parabola be taught as a graph of quadratic functions directly. This approach cannot constitute an understanding to give the answers to the questions "why…? and how…?" which are emphasized by constructivist philosophy. By the learning environment design proposed in this study, it is possible to construct meaningful relationship between graphical representation and algebraic representation. Some extra concepts like directrix and focus of the parabola are used in the exploration of parabola. These concepts rather advanced for the beginning. However, a deep analytical analysis is not suggested at the beginning. This can be regarded as an opportunity to use the algebraic relations in analytical geometry course in upper grades. This study is also an example of how to create a learning environment emphasizing the multiple representations by dynamic mathematics software.