BAŞKENT UNIVERSITY
JOURNAL OF EDUCATION

2015, 2(1), 25-39 ISSN 2148-3485

Teknoloji Destekli Ölçme Deneyiminin 8. Sınıf Öğrencilerinin İrrasyonel Sayı Kavramını Algılamalarına Etkisi*

The Effect of a Technology Based Measurement Experience on the 8th Graders' Perception of the Irrationality

Tolga Kabaca[a †], Rukiye Aslan[a]

[a]*Pamukkale University, Denizli, Turkey*

Öz
"İrrasyonel sayıların bir sayı doğrusu üzerindeki yeri" ve "a/b şeklinde iki tam sayının oranı olarak yazılamaması" durumlarının birbirinden ayrı iki kavram olarak ele alındığı ve aralarındaki ilişkinin ihmal edildiği gözlemlendiğinden bu çalışmada, Pisagor ve takipçilerinin yaşadığı ölçme krizinden yola çıkılarak irrasyonellik kavramı ile öğrencilerin tekrar tanıştırılması hedeflenmiştir. Çeşitli uzunlukların ölçüm sonuçlarının temsilini içerecek biçimde tasarımı yapılan bir dinamik yazılım etkinliği ile öğrencilerin ortak ölçüsüz nicelikleri nasıl algıladıkları gözlemlenmiştir. Dinamik yazılım etkinliği, 2'şer öğrenci ile 5 ayrı oturumda bilgisayar başında mülakat eşliğinde gerçekleştirilmiştir. Yürütülen mülakatlar video çekimleri ile kayıt altına alınmıştır. Elektronik ortamda sayı doğrusu üzerinde istenilen detayda ölçme yapmaya izin veren ve öğrencilere Pisagor ve takipçilerinin yaşadığı ölçme krizinin benzerini yaşatan uygulamanın; ortak ölçüsüz niceliklere olan farkındalığı arttırmaya ve "a/b biçiminde kesir gösterimi ile yazılamaması" durumuna anlam kazandırmaya yardımcı olduğu gözlemlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: İrrasyonel sayı, rasyonel sayı, dinamik yazılım, ortak ölçüsüz nicelik

Abstract
This study aimed to reintroduce irrationality concept to the 8th graders following the crisis of Pythagoras and his followers, due to the fact that the cases "the place of irrational numbers on a number line" and "existence of a number that cannot be expressed as a ratio of two integers" are thought as two distinct ideas of irrationality and their relationship is generally neglected. In this study, a dynamic mathematics software activity was designed to make students meet the similar crisis while defining an irrational measure. The students were observed with respect to how they perceive the quantities which have no commeasures, while they were studying on the dynamic activity. The activity had variety of lengths including both rational and irrational measures. The dynamic activity was conducted through 5 seperate interviews including two participants and the interviews were video-recorded. The results revealed that the dymanic activity enabled the students to raise awareness for common unmeasured quantity and to develop an awwreness for the idea of the existence of a number that cannot be expressed as a ratio of two integers.

Keywords: Irrational number, rational number, the dynamic math software, the incommensurable quantities

---

Bu çalışmanın özeti, 20-22 Haziran 2013 tarihlerinde Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fatih Eğitim Fakültesinde düzenlenen Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Sempozyumu'nda yayınlanmıştır.

†*ADDRESS FOR CORRESPONDENCE: Tolga Kabaca, Department of Mathematics Education, Faculty of Education, Pamukkale University, Denizli, Turkey, E-mail address: tkabaca@pau.edu.tr / Tel: +90 258 296 1163*
[a]*Rukiye Arslan, Faculty of Education, Department of Mathematics Education, Faculty of Education, Pamukkale University, Denizli, Turkey, E-mail address; rukiyegokceimt@hotmail.com*

1. Giriş

Tarihsel açıdan bakıldığında sayılar kavramı, matematik müfredatlarının temel taşı (Reys&Nohda'dan akt, NCTM, 2000); düşünürlerin de ilk matematiksel uğraşlarından biri olmuştur. Örneğin Pisagor ve takipçileri, sayı teorisi üzerindeki çalışmalarından hareketle tüm sayıların 1'den elde edilebileceğini öngörmüşlerdir (Yıldırım, 2011). Bu nedenle evreni, 1 ile özdeşleştirmişlerdir. Her türlü uzunluğu 1 birim ile karşılaştırarak ölçebilmişlerdir. Örneğin 1 birimin 5 eşit parçasının 7 tanesine denk gelen bir uzunluk 7/5 olarak isimlendirilebilmiştir. Ancak 1 birim uzunluğunda ikizkenarlara sahip bir dik üçgenin hipotenüs uzunluğunun ölçüsünü bulmak problem olmuştur. Bu uzunluk, bir tam sayı ya da bir tam sayının belirli bir parçası cinsinden ifade edilememiştir (Yıldırım, 2011). Evrenin temel taşları olarak kabul edilen tam sayılar ile ifade edilemeyen bir uzunluğun varlığının hissedilmesi, Pisagor ve takipçileri için bir ölçme krizine sebep olmuştur. Pisagor ve takipçileri 1 birim ile ortak bir ölçüsü olmayan bu sayılara ölçülemez/kıyaslanamaz sayılar ya da ortak ölçüsüz sayılar ismini vermişlerdir. Oranlayamamak anlamına gelen bu tabirler yerine günümüzde "oransız" anlamında "irrasyonel" ifadesi kullanılmaktadır. "İrrasyonel" ifadesi çoğunlukla "mantık dışı" anlamında kullanılsa da, kökeninde daha önce de ifade edildiği gibi daha çok "oransız" anlamı yatmaktadır.

NCTM (2000); günümüz temel matematik eğitiminin, sayıların ve işlemlerin anlaşılması ve sayı duyusunun gelişimi etrafında şekillenmesi gerektiği üzerine vurgu yapmaktadır. Türkiye'de ise Ortaokul Matematik Dersi Öğretim Programında "Sayılar ve İşlemler" öğrenme alanının her sınıf seviyesinde büyük bir yer kapladığı ve görülmektedir. Bu açıdan bakıldığında öğrencilerin zengin bir sayı anlayışı kazanmaları önemlidir. Böyle bir sayı anlayışının oluşturulmasındaki anahtar kavramlardan biri de irrasyonel sayılardır. Shinno (2007), irrasyonel sayıların şu üç açıdan önemli olduğunu ifade etmektedir:

- Kıyaslanamaz/ölçülemez miktarların varlığı ve bunların sembol ile gösterilmesi,
- Hesaplama kurallarıyla elde etmenin mümkün olduğu sınırsız ve devirsiz ondalık gösterimlere sahip sayılara ilişkin merak,
- Yeni ve daha kapsayıcı bir sayı kümesine duyulan ihtiyaç.

Dolayısıyla irrasyonel sayı kavramının algılanması, daha büyük sayı kümeleri için kritik bir rol üstlenmektedir (Sirotic ve Zazkis, 2007). Bu kritik rolüne rağmen irrasyonel sayı kavramına ilişkin yapılan çalışmaların, matematik eğitimi alanında yapılan diğer çalışmalarla kıyaslandığında oldukça yetersiz kaldığı düşünülmektedir (Zazkis ve Sirotic, 2010). Yapılan bu kısıtlı çalışmalarda; irrasyonel sayıların oransızlığı, rasyonel ve irrasyonel sayıların ayırt edilmesi ve tanımlanması, rasyonel, irrasyonel ve gerçek sayıların sayılabilirliği ya da sayılamazlığı ile ilgili zorluklara işaret edilmektedir (Sirotic ve Zazkis, 2007; Güven, Çekmez ve Karataş, 2011;Fischbein, Jehiam ve Cohen, 1995; Adıgüzel, 2013; Voskoglou ve Kosyvas, 2012; Zazkis ve Sirotic, 2010; Peled ve Hershkovitz, 1999; Kara ve Delice, 2012; Shinno, 2007).

Sirotic ve Zazkis (2007); 46 matematik öğretmeni adayının rasyonel ve irrasyonel sayı kümelerinin yoğunluk, zenginlik, bir araya gelme durumları ve bu sayı kümelerinin elemanları arasındaki işlemler ile ilgili bilgi boyutlarını incelemişlerdir. Belirli bir matematiksel alana ilişkin kuralları, yönergeleri içeren süreçsel bilgi boyutunun algoritmik; kavram ve yapıların tanımlarını, uygulamalarını içeren bilgi boyutunun formal; matematiksel objelere ilişkin fikirleri, inançları ve zihinsel modelleri içeren bilgi boyutunun sezgisel olarak tanımlandığı sınıflandırmadan yola çıkılmıştır. Öğretmen adaylarına, "İrrasyonel sayılar mı, rasyonel sayılar mı daha çoktur?", "[0,1] aralığından rastgele bir sayı seçildiğinde bir irrasyonel sayı olma olasılığı kaçtır?", … gibi sorular yöneltmişlerdir. Verilen yanıtlardan öğretmen adaylarının bu kavramlara ilişkin bilgi boyutlarının sezgisel olduğu, formal ve algoritmik bilgi boyutlarında ise tutarsızlıklara sahip oldukları bulunmuştur. İrrasyonel sayı anlayışı için algoritmik, sezgisel ve kavramsal bilgiler arasındaki bağlantıların önemli olduğunu ifade etmişlerdir.

Güven, Çekmez ve Karataş (2011) tarafından ilköğretim matematik öğretmenliği programında okuyan öğrencilerin irrasyonel sayılara ilişkin anlayışlarını belirlemeye yönelik bir çalışma yapılmıştır. Öğrencilerin irrasyonel sayı anlayışları şu üç boyutta incelenmiştir:

- rasyonel ve irrasyonel sayıların tanımlanması,
- rasyonel ve irrasyonel sayıların sayı doğrusundaki yerleri,
- rasyonel ve irrasyonel sayılarla işlemler.

Çalışma, ilköğretim matematik öğretmenliği programında 1. ve 4. sınıfa devam eden 80 öğrencinin katılımıyla gerçekleştirilmiştir. Katılımcılara literatür taraması ile belirlenen 10 açık uçlu soru içeren test uygulanmıştır. Araştırmadan elde edilen çarpıcı bulgulardan bazıları şöyle sıralanabilir: Rasyonel ve irrasyonel sayıları, 1. sınıf öğrencilerinin % 17'si, 4. sınıf öğrencilerinin ise % 44'ü doğru biçimde tanımlayabilmiştir. 1. sınıf öğrencilerinin yarısından fazlası (% 56), 4.sınıf öğrencilerinin ise % 26'sı, π sayısını rasyonel sayı olarak nitelendirmiş ve doğru şekilde tanımlayamamıştır. 4. sınıf öğrencilerinin yaklaşık yarısı 2,0777… sayısını irrasyonel sayı olarak nitelendirmiştir. Bulgular genel olarak değerlendirildiğinde katılımcıların irrasyonel sayıların tanımı, rasyonel ve irrasyonel sayı kümeleri arasındaki işlemler ve sayı doğrusunda aralarındaki ilişki hakkında yanlış anlamalara sahip olduğunu göstermiştir. Katılımcıların çoğunluğu, temsillere ve sezgilere dayalı açıklamalar yapmıştır. Araştırmacılara göre irrasyonel sayı kavramının oluşturulmasında, bu sayıların tarihsel gelişimlerinin dikkate alınması ve öğrenme sürecine entegre edilmesi gerektiği önerilmiştir.

Tarihsel ve psikolojik gerekçelerle irrasyonel sayıların büyüklüklerinin 1 birim kıyaslanarak ifade edilememesi ve reel sayılar kümesinin sayılamazlığı gibi iki sezgisel zorlukla karşılaşacakları varsayımından hareket eden Fischbein, Jehiam ve Cohen (1995), 9 ve 10. sınıftan 62 lise öğrencisiyle ve 29 hizmet öncesi öğretmeniyle bir çalışma gerçekleştirmişlerdir. Çalışmalarında katılımcıların rasyonel, irrasyonel ve reel sayıları doğru şekilde tanımlayamadıkları; birçok katılımcının çeşitli sayı örneklerini tam, rasyonel, irrasyonel ya da reel sayı olarak belirleyemedikleri sonucuna ulaşmışlardır. Fischbein, Jehiam ve Cohen (1995) varsayımlarındaki sezgisel zorlukları öğrenci davranışlarında gözlemleyememiş olmalarını, öğrencilerin belirli bir entelektüel olgunluğa ulaşamamış olmalarına bağlamışlardır. Çalışmanın sonucu olarak Fischbein, Jehiam ve Cohen (1995) irrasyonel sayı kavramının daha iyi anlaşılması açısından öğrencilerin dikkatinin, tarihsel ve psikolojik gerekçelerle varsayılan irrasyonel sayıların büyüklüklerinin 1 birim kıyaslanarak ifade edilememesi ve reel sayılar kümesinin sayılamazlığı gibi iki sezgisel zorluk üzerine toplanması gerektiğini belirtmişlerdir.

8. sınıf öğrencilerinin ve matematik öğretmeni adaylarının irrasyonel sayılara ilişkin bilgi eksiklerini ve kavram yanılgılarını ortaya çıkarmaya yönelik bir çalışma da Adıgüzel (2013) tarafından yapılmıştır. Tarama yöntemiyle yürütülen çalışma, 130 8. sınıf öğrencisi ve 180 ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenliği programında okuyan öğretmen adayının katılımıyla gerçekleştirilmiştir. Veriler; 8. sınıf öğrencilerine uygulanan çoktan seçmeli test, öğretmen adaylarına ise görüşmelerde yöneltilen açık uçlu sorular aracılığıyla elde edilmiştir. Araştırmanın bulguları öğrencilerin ve matematik öğretmeni adaylarının çoğunlukla irrasyonel sayılara ilişkin bilgi eksikliklerinin olduğuna işaret etmektedir. Öğrencilerin yarısı verilen sayılardan irrasyonel olanları doğru şekilde belirleyebilmiş, ancak bu sayıların aynı zamanda rasyonel olmadığını bu öğrencilerin yaklaşık yarısı ifade edememiştir. Matematik öğretmeni adaylarının ise irrasyonel ve rasyonel sayıların tanımını yaparken hatalar yaptıkları görülmüştür. 34 öğrenci ile 4 matematik öğretmeni adayı rasyonel sayıların irrasyonel sayıların alt kümesi olduğunu ifade etmiştir. "a ve b tam sayı ve a/b şeklinde aralarında asal iki sayının birbirine bölümü şeklinde ifade edilebilen sayılar rasyonel sayılardır. Bunun dışında kalanlar irrasyoneldir. Rasyonel olmayan irrasyoneldir" tanımını yapabilen 70 öğretmen adayı belirlenmiştir. Buna karşın 63 matematik öğretmeni adayı 22/7 sayısının irrasyonel sayı olduğunu belirtirken, söz konusu bu katılımcılardan 45'i "22/7, π sayısı olduğundan dolayı irrasyoneldir" şeklinde düşüncelerini ifade etmiştir. Adıgüzel'e göre söz konusu bu bilgi eksiklerinin ve yanılgıların giderilmesi için öğretimde irrasyonel sayıların farklı tanımlarına ve temsil biçimlerine yer verilmesi gerekmektedir. Öğrencilerin bu temsil biçimleri üzerine düşünmeleri sağlanmalı, irrasyonel sayıların ne anlama geldiği tartışılmalıdır. Öğrencilerin kendi anlamlarını ve çözüm yollarını oluşturabilecekleri öğrenme ortamları tasarlanmalıdır.

Reel sayı anlayışı üzerine bir çalışma gerçekleştiren Voskoglou ve Kosyvas (2012), 184 lise ve teknoloji (mühendis ve ekonomist) öğrencisiyle çalışmıştır. Katılımcılara yazılı anket uygulamış ve katılımcılarla klinik görüşmeler yapmışlardır. Öğrencilerin geometrik yapılardaki kıyaslanamaz/ölçülemez büyüklüklerle ilişkin süreçlerde tamamen başarısız olduklarını saptamışlardır. Öğrenci zorluklarını; eksik rasyonel sayı anlayışı, irrasyonel sayıların ölçülemezliği ve sayılamazlığı ve bu sayıların temsilleri şeklinde belirlemişlerdir. Bu zorluklara, öğrencilerin çoklu temsillerle karşılaşmamış olmalarının yol açabileceğini ifade etmişlerdir.

Ortaokul matematik öğretmeni adaylarıyla çalışmalarını devam ettiren başka bir araştırmalarında Zazkis ve Sirotic (2010), irrasyonelliğin farklı temsillerine ilişkin anlayışları açıklamaya odaklanmışlardır. İrrasyonel sayının, "Bölen sayı sıfırdan farklı olmak üzere iki tam sayının bölümü şeklinde yazılamayan temsiller/sayılar" ve "Tekrar etmeyen sonsuz ondalık basamaklı temsiller" tanımları çerçevesinde araştırmalarını şekillendirmişlerdir. Katılımcıların irrasyonel sayının bu iki tanımının farkında olup olmadığını, tanımlar arasındaki bağlantıyı nasıl algıladıklarını araştırmışlardır. Sonuçlar, katılımcıların %40'tan fazlasının irrasyonel sayının bir temsili olarak tekrar etmeyen ondalık basamakları fark edemediklerini ortaya koymuştur. Katılımcıların %30'u ise rasyonel sayıların yaygın kullanılan kesir temsillerini tanımada başarısız olmuşlardır. Dolayısıyla katılımcıların önemli bir kısmının, aktif bilgi repertuarlarının bir parçası olarak rasyonel ve irrasyonel sayı kavramlarının tanımlarına sahip olmadıkları belirlenmiştir. Bununla birlikte katılımcıların hesap makinesine güvenme eğiliminde oldukları, ondalık temsilleri kesir temsillere göre tercih ettikleri, sonsuz ondalık basamaklı temsillerle irrasyonel sayı arasında bir karmaşaya sahip oldukları belirlenmiştir. Temsillerle ilgili zorluğun nedeni olarak, irrasyonel sayıya ilişkin iki tanım arasındaki bağlantının anlaşılmamış olması gösterilmiştir.

Benzer bir çalışma, matematik öğretmeni adaylarının irrasyonel sayı kavramına ilişkin zorluklarına odaklanan Peled ve Herskovitz (1999) tarafından gerçekleştirilmiştir. Peled ve Herskovitz (1999), kolej matematiğinin 2. ve 3. yılındaki 70 öğretmen adayının irrasyonel sayının tanımlarını ve temel özelliklerini bilmelerine rağmen farklı temsillerini esnekçe kullanmalarını gerektiren etkinliklerde başarısız olduklarını bulmuşlardır. Zorluk ve yanılgıların kaynağı olarak, irrasyonel sayı kavramını ele almadaki sınırlı süreçlere işaret etmişlerdir. Peled ve Herskovitz'e (1999) göre farklı bilgi parçalarının birleştirilmesini kolaylaştıran etkinliklerin tasarlanması gerekmektedir.

Kara ve Delice (2012); öğretmenlerin irrasyonel sayılar için kullandıkları temsilleri, öğrencilerin zihinlerinde yapılandırdıkları temsilleri ve aralarındaki ilişkileri ele alan ve bunların öğrenci performanslarına yansımalarını inceledikleri bir araştırma yapmıştır. Çoklu yöntem kullandıkları araştırmalarının katılımcıları, 9. sınıfa giden 30 öğrenci ve ortaöğretim matematik öğretmenliği 2. sınıfta okuyan 30 öğrencidir. Açık uçlu sorularda öğrencilerin irrasyonel sayılara karşı tutumlarının, ön bilgilerinin, zihinlerinde irrasyonel sayıları nasıl şekillendirdiklerinin belirlenmesi amaçlanmıştır. Açık uçlu sorulara verilen yanıtlar arkasında yatan nedenleri derinlemesine incelemek için yarı-yapılandırılmış görüşmeler uygulanmıştır. Araştırma sonunda toplanan nitel veriler betimsel istatistik kullanılarak analiz edilmiştir. Araştırmanın bulguları, öğrencilerin irrasyonel sayıların sözcük anlamını bilmesine rağmen herhangi bir sayının irrasyonel ya da rasyonel sayı olup olmadığını belirlerken (sembol bağlamında) sorun yaşadığını göstermiştir. Bu doğrultuda irrasyonel sayıların somutlaştırılması ve bu amaçla görselleştirme tekniklerinin kullanılması önerilmekte ve bunun anlaşılabilirlik üzerinde pozitif etkisinin olabileceği ifade edilmektedir.

Farklı türdeki sayılara bir ölçüm sonucunun temsili ve bir denklem çözümü olarak iki şekilde işaret edildiğini ifade eden Shinno (2007), bu iki yol arasındaki ilişkinin hala net olmadığını ifade etmiştir. Bu durum, Shinno (2007) tarafından irrasyonel sayı anlayışında olası bir didaktik açık olarak görülmüştür. Yeni sayıların, ölçüm sonuçlarının temsil edilmesindeki ihtiyaçtan ortaya çıktığı göz önüne alınırsa, irrasyonellik bir birim ile karşılaştırılamayan parçaların uzunluğu ile ilgilidir. Shinno'ya (2007) göre bu ölçüm yaklaşımında sınırlama görülebilir ve bu tür sınırlama için bazı etkinlikler hazırlamada didaktik yönelimler gereklidir. İrrasyonel sayılar gibi yeni sayıların tanıtılmasında bazı sınırlılıkların aşılması ya da bazı ihtiyaçları karşılayan etkinliklerin olması gerektiğini savunmuştur.

İrrasyonel sayıların anlaşılmasında farklı perspektiflere sahip olan bu araştırmalar, genel olarak anlama güçlüğü çekildiğine vurgu yapmaktadır. İrrasyonel sayının en sık rastlanan formal tanımı olan "Bölen sayı sıfırdan farklı olmak üzere iki tam sayınının bölümü şeklinde yazılamayan temsiller/sayılar" tanımı ile kıyaslanmayan sayı olma özelliğinin bağdaştırılamadığı (Zazkis ve Sirotic, 2010), temel özellikleri bilinen rasyonel sayıların farklı temsillerinin esnekçe kullanılmasında güçlük çekildiği (Peled ve Herskovitz, 1999) göze çarpmaktadır. Farklı türdeki sayıların ölçüm sonucu ile temsil edilerek yapılandırılabileceği (Shinno, 2007) ve farklı bilgi parçalarını birleştiren etkinliklerin tasarlanması gerektiği (Peled ve Herskovitz, 1999; Adıgüzel, 2013), bu etkinliklerde görselleştirme tekniklerinin de dikkate alınması gerektiği (Kara ve Delice, 2012) önerilmektedir.

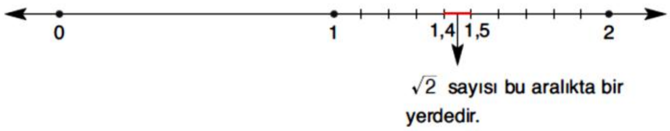
İrrasyonel sayı anlayışı üzerindeki çalışmalarda elde edilen bulguların yanında ülkemizde matematik ders kitaplarında genel olarak "irrasyonel sayıların bir sayı doğrusu üzerindeki yeri" ve "a/b şeklinde iki tam sayının oranı olarak yazılamaması" durumlarının birbirinden ayrı iki kavram olarak ele alındığı ve bu iki durum arasındaki ilişkilendirmenin de ihmal edildiği gözlemlenmektedir. Örneğin; Canpekel'in (2010) 8. Sınıf Matematik Ders Kitabında öncelikle π sayısı, devam eden düzensiz ve tekrarsız basamakları ile tanıtılmakta ve herhangi birinin doğum tarihini yan yana ggaayyyy gibi yazdığında bu dizinin π sayısının içerisinde yer alacağı belirtilmektedir. Sonrasında rasyonel sayıların yoğunluğu, herhangi iki rasyonel sayı arasında farklı rasyonel sayılar buldurmayı amaçlayan etkinliklerle ele alınmaktadır. Rasyonel sayıların devirli ondalık açılımları ve devirli ondalık açılımlara karşılık gelen rasyonel sayıları bulma biçiminde ilerleyen konu akışı, devirli olmayan ondalık açılımlarla irrasyonel sayıları ilişkilendirerek tamamlanmaktadır.

$(1{,}5)^2 = (2{,}25)$ olur. Dolayısıyla $1 < \sqrt{2} < 2$ aralığını geçer. $\sqrt{2}$ sayısı 1'den büyük 1,5'ten küçük olur.

$1 < \sqrt{2} < 1{,}5$ yazılır.

$(1{,}4)^2 = 1{,}96$ olduğundan $\sqrt{2}$ sayısının 1,4 ile 1,5 arasında olduğunu söyleyebiliriz.

$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$



Şekil 1 $\sqrt{2}$ *sayısının sayı doğrusundaki yeri (Canpekel, 2010, s.23)*

Ders kitabında irrasyonel sayılara, "Kareköklü Sayılar" konusu içerisinde tekrar değinilmektedir. $\sqrt{2}$ sayısının, 1,4 ve 1,5 sayıları arasında yer aldığı Şekil 1'deki gibi gösterildikten sonra açılımı verilmektedir. Söz konusu bu açılımın iki tam sayının oranı biçiminde yazılamayacağı belirtilmektedir (Şekil 2). Ders kitabındaki bu sunum yaklaşımı, irrasyonel sayının yaklaşık bir değerinden bahsetme ve "a/b biçiminde iki tam sayının oranı olarak yazılamaması" özelliğini belirtme şeklindedir. Bu iki temsil arasındaki ilişkinin anlaşılmasına yönelik yeterli rehberlik görülememektedir.

$\sqrt{2} \cong 1{,}414213562...$ şeklinde bulunur. Buradan $\sqrt{2}$ sayısının $\frac{a}{b}$; $(b \neq 0)$ şeklinde bir rasyonel sayı olarak yazılamayacağını görürüz.

$\sqrt{2}$ sayısı da irrasyonel sayılar kümesinin bir elemanıdır.

Sayı doğrusu üzerinde görüntüsü olduğu hâlde,

$\sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{5}; \sqrt{7}; \pi; 0{,}020020002...$ **gibi rasyonel sayıya çevrilemeyen sayılar "İrrasyonel Sayılar"dır. "I" sembolü ile gösterilir.**

Sayı doğrusunda rasyonel sayılara karşılık gelmeyen noktalarda irrasyonel sayılar yer alır.

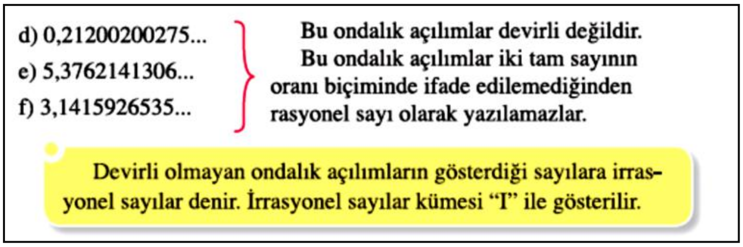
Şekil 2 *İrrasyonel sayılara yönelik bilgilerin sunumu (Canpekel, 2010, s.23)*

Güler ve Yücelyiğit'in (2012) 8. Sınıf Matematik Ders Kitabında ise öncelikle "Kareköklü Sayılar" konusu içerisinde Babillerin "$\sqrt{2}$ Tableti" tanıtılmakta ve $\sqrt{2}$'nin yaklaşık değeri 60. "Gerçek Sayılar" konusu içerisinde rasyonel sayıların devirli ondalık açılımlarını ve devirli ondalık açılımlara karşılık gelen rasyonel sayıları buldurmaya yönelik uygulamalar yer almaktadır. Uygulamanın devamında devirli olmayan ondalık açılımlar verilmekte ve bu açılımların rasyonel sayı olarak yazılıp yazılamayacağı sorulmaktadır (Şekil 3).

- **Her ondalık kesir ve devirli ondalık açılım rasyonel sayılarla gösterilebilir mi?**
- **0,32251237… Yandaki devirli olmayan ondalık açılımları rasyonel sayı biçiminde**
  1,13172438… yazmaya çalışınız. Yazamadıysanız sebebi ne olabilir? Tartışınız.
- **Rasyonel sayı olarak yazılamayan sayılar için yeni bir sayı sistemine ihtiyaç var mıdır? Neden?**

Şekil 3 *(Güler ve Yücelyiğit, 2012, s. 29)*

Ders kitabının ilerleyen bölümlerinde devirli olmayan açılımların iki tam sayının oranı biçiminde rasyonel sayı olarak yazılamadığı ifade edilmektedir (Şekil 4). Devirli olmayan bu açılımlar irrasyonel sayı olarak adlandırıldıktan sonra, $\sqrt{2}$ sayısının sayı doğrusundaki yeri ele alınmaktadır.



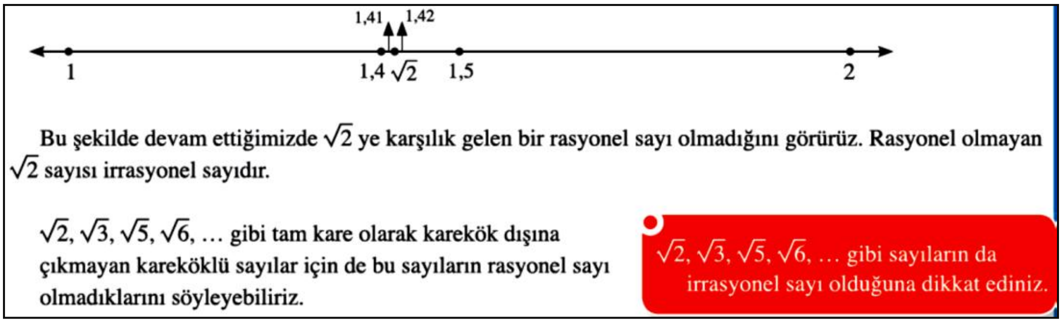
d) 0,21200200275...
e) 5,3762141306...
f) 3,1415926535...

Bu ondalık açılımlar devirli değildir. Bu ondalık açılımlar iki tam sayının oranı biçiminde ifade edilemediğinden rasyonel sayı olarak yazılamazlar.

Devirli olmayan ondalık açılımların gösterdiği sayılara irrasyonel sayılar denir. İrrasyonel sayılar kümesi "I" ile gösterilir.

Şekil 4 *(Güler ve Yücelyiğit, 2012, s. 29)*

Canpekel'in (2010) ders kitabında olduğu gibi Güler ve Yücelyiğit'in (2012) ders kitabındaki bu sunum yaklaşımı da, irrasyonel sayıların iki tam sayının oranı biçiminde yazılamaması durumuna anlam kazandırmaya yardımcı rehberliği göstermemektedir.



Bu şekilde devam ettiğimizde $\sqrt{2}$ ye karşılık gelen bir rasyonel sayı olmadığını görürüz. Rasyonel olmayan $\sqrt{2}$ sayısı irrasyonel sayıdır.

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, … gibi tam kare olarak karekök dışına çıkmayan kareköklü sayılar için de bu sayıların rasyonel sayı olmadıklarını söyleyebiliriz.

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, … gibi sayıların da irrasyonel sayı olduğuna dikkat ediniz.

Şekil 5 *(Güler ve Yücelyiğit, 2012, s. 31)*

Bir uzunluğun ölçüsü olarak gözlenen irrasyonellik kavramının Pisagor ve arkadaşlarının karşılaştığı ölçme krizi bağlamında incelenmesinin önemi düşünülerek, ölçüm sonucunu temsil eden bir sayının araştırılması bağlamında irrasyonellik kavramı ile (Shinno, 2007) öğrencilerin tekrar tanıştırılması ve bu deneyimin öğrencilerin anlayışlarında nasıl bir etki oluşturduğunu incelemek hedeflenmiştir. Bu kapsamda "Dinamik yazılım etkinliği eşliğinde gerçekleştirilen ölçme deneyimi ilköğretim 8. sınıf öğrencilerinin irrasyonel sayı anlayışını nasıl etkilemektedir?" sorusuna yanıt aranmıştır.

2. Yöntem

2.1. Araştırmanın Modeli

Araştırma, nitel bir desen olan durum çalışması ile gerçekleştirilmiştir. Doğal bir çevre içerisinde gerçekleştirilen durum çalışması, çalışmaya konu olan ortamların ve olayların bütüncül bir yorumunu hedeflemektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Pisagor ve takipçilerinin yaşadığı ölçme krizinden yola çıkarak irrasyonellik kavramı ile öğrencilerin tekrar tanıştırılmasının hedeflendiği bu araştırmada, öğrencilerin dinamik yazılım etkinliği ile ortak ölçüsüz nicelikleri nasıl anlamlandırdıkları yorumlamak istenmiştir. Araştırmanın amacı doğrultusunda, ölçme işlemi neticesinde öğrencilerin karşılaştıkları durumu nasıl algıladıkları yapılan görüşmeler ile incelenmiştir.

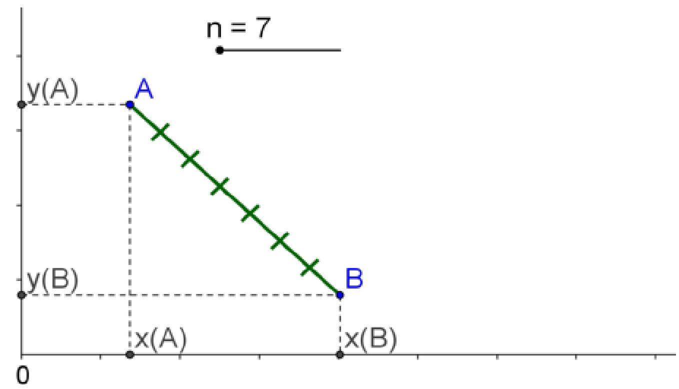
2.2. Çalışma grubu

Araştırma, 8. sınıfta okuyan ve çalışmaya katılmaya gönüllü 10 kişilik bir öğrenci grubunun katılımıyla gerçekleştirilmiştir. Bu öğrenciler teorik olarak irrasyonel sayı kavramı ile daha önce tanışmış öğrencilerdir. Öğrencilerin seçiminde bu kriterin göz önünde bulundurulmasının nedeni; irrasyonel sayının "a/b biçiminde yazılamayan sayılar" ile "ortak ölçüsüz sayılar" olması durumları arasındaki bağlantının farkında olup olmadıklarını gözlemlemektir. Bu doğrultuda söz konusu bağlantıyı fark etmede dinamik yazılım etkinliği ile gerçekleştirilen ölçme deneyiminin nasıl bir etkisinin olabileceği araştırılmıştır. Verilerin sunumunda öğrencilerin gerçek isimleri yerine kod isimler kullanılmıştır.

2.3. İşlem

Dinamik yazılım etkinliği, 2'şer öğrenci ile 5 ayrı oturumda bilgisayar başında mülakat eşliğinde gerçekleştirilmiştir. Mülakatlar, ortalama 60 dakika sürecek şekilde uygulanmıştır. Yürütülen mülakatlar video çekimleri ile kayıt altına alınmıştır. Video kayıtları içerik analizi ile çözümlenmiştir. İçerik analizinde temel amaç, birbirine benzeyen verileri belirli kavramlar ve temalar çerçevesinde bir araya getirerek verileri açıklayabilecek kavramlara ve ilişkilere ulaşmak, bunları okuyucunun anlayabileceği bir biçimde düzenleyerek yorumlamaktır (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Bu amaçla bir metinin bazı sözcükleri belirli kurallara dayalı kodlamalarla, daha küçük içerik kategorileri ile sistematik olarak ve yinelenebilir şekilde özetlenir (Büyüköztürk, Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2009).

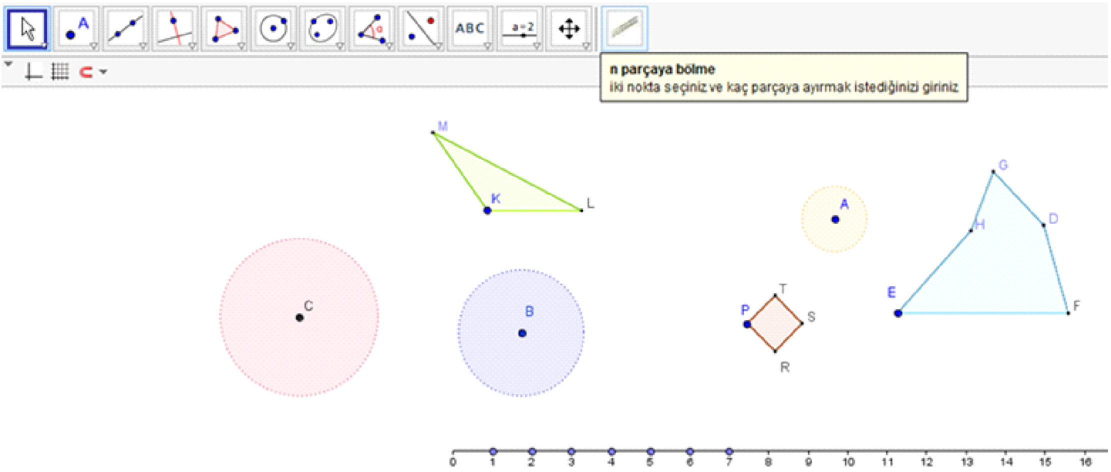
Araştırmanın amacı doğrultusunda çeşitli uzunlukların 1 birimlik uzunluk ile kıyaslanarak ölçülebilmesine imkân veren bir dinamik yazılım uygulaması hazırlanmıştır. Herhangi bir dinamik yazılımda sayı doğrusu hassasiyeti ayarlanarak ölçüm yapılabilse de, yazılımların sayı doğruları istenilen her eş parçalamayı içermemektedir. Örneğin, 3/7 gibi bir rasyonel ölçünün tam karşılığı bu yolla bulunamamaktadır. Ayrıca, yazılımlar iki nokta arasını ölçebilen bir kısayola sahip olsa da, bu ölçüm sonucu sadece ondalık gösterim olarak sunulduğundan zengin bir temsil elde edilememektedir. Bir Dinamik Matematik Yazılımı olan GeoGebra ortamında hazırlanan uygulama, seçilen herhangi iki nokta arasının istenen miktarda eş parçaya bölünebilmesine imkân tanıyacak şekilde tasarlanmıştır. Bu sayede aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi iki nokta arası 7 eş parçaya da bölünebilmekte ve bu sayede her rasyonel ölçünün karşılığı tam olarak bulunabilmektedir.



$$\underbrace{\text{Dizi[(x(A) + i (x(B) - x(A)) / n, y(A) + i (y(B) - y(A)) / n), i, 1, n - 1]}}_{\text{A ve B noktaları arasını n eşit parça ayıran noktalar kümesini üreten komut.}}$$

Şekil 6 *[AB] aralığının n eş parçaya bölünmesi*

Hazırlanan uygulamanın hızlı bir şekilde kullanılabilmesi için GeoGebra ortamında "n parçaya bölme" isimli bir hazır araç oluşturulmuş ve bu araç yardımı ile 6 geometrik şeklin çeşitli uzunluklarının ölçülmesinin istendiği bir etkinlik tasarlanmıştır. Şekil 7'de ekran görünümü verilen elektronik uygulama yanında etkinlik sırasında öğrencileri yönlendirmede kullanmak amacıyla işlem adımlarının bulunduğu bir çalışma yaprağı hazırlanmıştır.



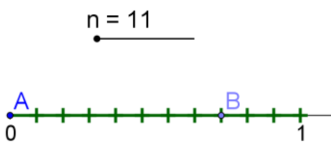
Şekil 7 *GeoGebra ortamında hazırlanan uygulamanın ekran görünümü*

Hazırlanan etkinlikte öğrencilerden;
- Çemberlerin yarıçap uzunluklarını,
- KLM üçgeninin KL kenarının uzunluğunu,
- PRST karesinin PS köşegeninin uzunluğunu,
- EFDGH beşgeninin EF kenarının uzunluğunu,

geliştirilen araç yardımı ile ölçmeleri istenmektedir. Bu uzunluklardan beşi rasyonel değerlerdir. Dolayısı ile 1 birimin eş parçaları cinsinden ifade edilebilmektedirler. Karenin PS köşegeni ise 1 birimin herhangi büyüklükteki eş parçaları cinsinden ifade edilmesi mümkün değildir.

2.3.1. 1 birim ile kıyaslayarak ölçmek

Pisagor ve takipçileri, çevrelerindeki ölçüleri 1 birim ile kıyaslayarak ölçmenin mümkün olduğunu düşünmüşlerdir. Onlara göre ölçüleri temsil eden sayıların tümü 1'den elde edilebilir. Örneğin; 2,3,4,…gibi tam sayılar 1'in 2 katı, 1'in 3 katı, 1'in 4 katı, … biçiminde ifade edilebilir. Bununla birlikte bir tam sayı olmayan temsiller için de aynı şey düşünülmektedir. Örneğin; Şekil 8'de görüldüğü gibi [AB] uzunluğu 1 birimin eş parçaları cinsinden ifade edilebilir. [AB] uzunluğu, 1 birimin 11 eş parçasından 8 tanesine karşılık gelmektedir. Başka bir deyişle 8 tane 1/11 birimlik uzunluğa eşit olduğundan 8/11 birim ($0,\overline{72}$ birim) olarak ifade edilir.



Şekil 8 *[AB] uzunluğunun 1 birimin parçaları cinsinden ölçülmesi*

Benzer şekilde Şekil 9'da gösterilen [CD] uzunluğu ise, 1 birimin 5 eş parçasından 9 tanesine karşılık gelmektedir. Bu durumda [CD] uzunluğu, 9 tane 1/5 birimlik uzunluğa eşit olduğundan 9/5 birim (1,8 birim) olarak ifade edilir.

Şekil 9 *[CD] uzunluğunun 1 birimin parçaları cinsinden ölçülmesi*

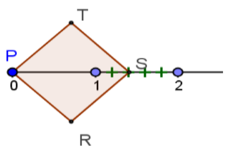
3. Bulgular

Çeşitli uzunlukların ölçüm sonuçlarının temsilini içerecek biçimde tasarımı yapılan dinamik yazılım etkinliğinin öğrencilerde hayal kırıklığı, şaşkınlık, yılgınlık gibi Pisagor ve takipçilerinin yaşadığı kriz benzeri durumlar oluşturmaya yardımcı olduğu ve dinamik yazılımın yakınlaştırma/uzaklaştırma özelliği ile öğrencilerin daha doğru gözlem yapmalarına fırsat tanıdığı belirlenmiştir. Dinamik yazılım etkinliğinin, 8 öğrencinin karenin köşegen uzunluğunu temsil eden sayının a/b kesir gösterimi ile yazılamayacağı anlayışını geliştirmelerine yardımcı olduğu gözlemlenmiştir.

Öğrenciler, bir rasyonel sayıyla temsil edilebilen üç çemberin yarıçap uzunluğunu, üçgenin ve beşgenin birer kenar uzunluklarını birkaç denemeden sonra bulmuşlardır. Buna karşın karenin bir köşegen uzunluğu için öğrenciler çok sayıda parçalama işlemi gerçekleştirmişlerdir (80, 105, 130, …). Parçalama sayısı arttıkça öğrencilerde Pisagor'un ve takipçilerinin yaşadığı kriz benzeri durumlar oluşmuştur. Aşağıda dinamik yazılım etkinliğinde birlikte çalışan Hale ve Esra kod isimli öğrencilerin aralarında geçen konuşmalar ayrıntılı olarak ele alınmıştır:

Hale ve Esra, öncelikle sayı doğrusundaki 1-2 aralığını sırasıyla 3, 2 ve 4 eş parçaya bölmüşlerdir. 5 eş parçaya böldüklerinde karenin köşegen uzunluğunu bulduklarını düşünmüşlerdir.

Hale : *5'e bölelim.*
Esra : *İşte 2.*
Hale : *O zaman 1 tam 2/5 oluyor (Şekil 7'ye bakarak).*
Araştırmacı : *Biraz daha yaklaştırın bakalım.*
Esra : *Aaaaaaa… (şaşkınlık)*



Şekil 10 *Hale ve Esra'nın ölçümü*

Hale ve Esra 1-2 aralığını 7 eş parçaya böldüklerinde, karenin köşegen uzunluğunun 1 tam 3/7 br olduğunu düşünseler de daha temkinli davranmışlar ve dinamik yazılımın yakınlaştırma/uzaklaştırma özelliğini kullanmışlardır. Böylece ölçümlerinin doğru olmadığını gözlemleyebilmişlerdir.

(8 eş parçaya bölme)
Hale : *Bu da değil.*
Esra : *Niye çıkmıyor bu?*

(9 eş parçaya bölme)
Hale : *Bu da değil.*

(10 eş parçaya bölme)
Hale : *Tamam, bulduk! (1 tam 4/10 için)*

(Dinamik yazılımın, yakınlaştırma/uzaklaştırma özelliğini kullanarak ölçümlerine yakından bakıyorlar)
Hale : *Ya, hayır!*

(12 eş parçaya bölme)
Hale : *Evet, yaşasın! (1 tam 5/12 için)*
Esra : *Eveeeeet…*
Hale : *Biraz daha yaklaşalım.*
Esra : *Aaaaaa, hayır! (hayal kırıklığı)*
……………………….

(17 eş parçaya bölme)
**Hale : ** *Çok yakın!*

Hale ve Esra, parçalama işlemine devam ettikçe karenin köşegen uzunluğunun 1 tam 9/22, 1 tam 10/24 ve 1 tam 12/29 değerlerine çok yakın olduğunu belirtmişlerdir. 30 eş parçaya bölme işleminden sonra Hale, "1000'e kadar yolu var!" diyerek hemen sonuca ulaşamayacaklarına ilişkin bir karamsarlığa düşmüştür.

(41 eş parçaya bölme)
Hale: *Sanırım, bu kez bulduk! Yaklaştıralım. (1 tam 17/41 için)*
Esra: *Olamaz!*
Hale: *Olamaz!*

43. denemeleri başarısız olduktan sonra Hale, sonucun çok da yakın olmayacağını "Bence 1000'e bölelim" düşüncesiyle ifade etmiştir.

(44 eş parçaya bölme)
Hale: *Olmuyor hocam.*
Esra: *Bunun çözümü yok mu?*
…………………………….

(46 eş parçaya bölme)
Hale: *Esra, bak! (Sevinç içerisinde karenin köşegen uzunluğunu 1 tam 19/46 br olarak bulduklarını düşünüyorlar)*

Esra: *Yaklaştıralım… Hadi… Yine gitti!*

…………………………….

(53 eş parçaya bölme)
Esra: *Bulacağız mı acaba biz bunu? Çok merak ediyorum!*

(54 eş parçaya bölme)
Esra: *Bunun bildiğimiz bir sonucu var mı?*

Yukarıda dinamik yazılım etkinliğini gerçekleştiren Esra ve Hale gibi denemeleri başarısız olan öğrenciler, uygulama sırasında aşağıdaki benzer tepkileri vermişlerdir:

- "Niye çıkmıyor bu?"
- "Kaça varacağız acaba?"
- "Olmayacak herhalde"
- "Bence denk gelmeyecek"
- "Bunun sonucu var mı?"

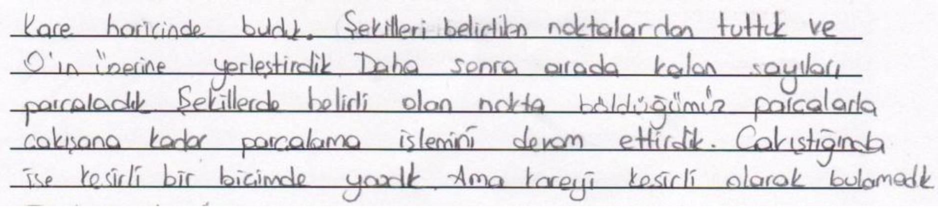
Bu noktada dinamik yazılım ile tasarlanan ölçme deneyinin, Pisagor ve takipçilerinin yaşadığı hayal kırıklığı, yılgınlık, umutsuzluk, şaşkınlık, gibi… kriz benzeri durumları oluşturmada etkili olduğu söylenebilir.

Bununla birlikte dinamik yazılımın yakınlaştırma/uzaklaştırma özelliği ile öğrenciler, ölçümlerinin hassasiyetini arttırarak denemelerini daha doğru gözlemleme şansı yakalamışlardır. Söz konusu duruma örnek olması açısından Hale ve Esra arasındaki konuşmalara, aşağıda yer verilmiştir:

(58 eş parçaya bölme)
Hale: *Çok heyecanlandık!*
Esra: *Hadi…(1 tam 24/58 için dinamik yazılımın yakınlaştırma/uzaklaştırma özelliğini kullanıyorlar)*
Hale: *Ooofffff…*
Esra: *Oooofff…*

Benzer şekilde Mine ve Feyza kod isimli öğrenciler, kendilerinden oldukça emin şekilde karenin köşegen uzunluğunu 1 tam 7/17br olarak ifade etmiştir. Öğrencilerden ölçümlerini biraz daha yakınlaştırmaları istendiğinde öğrenciler, hayal kırıklığı ve şaşkınlık içerisinde ölçümlerini temsil eden sayıyı bulamadıklarını görmüşlerdir. Bu ve bundan sonraki denemeleri için "Yakınlaşınca tam olmuyor" şeklinde fikir belirtmişlerdir. Yalnızca 1 öğrenci, artan parçalama sayısı ile birlikte bunun bir irrasyonel sayıya karşılık gelebileceğini düşünmüştür.

Öğrencilerden yaptıkları bu ölçme işlemlerindeki uzunlukların sayısal değerlerini nasıl belirlediklerini açıklamaları istenmiştir. Uzunlukları belirlemede yaptıkları işlem adımlarını ayrıntılı olarak açıklayan öğrencilerin tamamı, karenin köşegen uzunluğunu temsil eden sayıyı a/b biçiminde kesir gösterimi ile yazamadıklarını fark etmişlerdir. Buna ilişkin örnek bir öğrenci yanıtı Şekil 11'de gösterilmiştir.


Kare haricinde buldk. Şekilleri belirtilen noktalardan tuttuk ve
O'ın üzerine yerleştirdik. Daha sonra arada kalan sayıları
parçaladık. Şekillerde belirli olan nokta böldüğümüz parçalarla
çakışana kadar parçalama işlemini devam ettirdik. Çakıştığında
ise kesirli bir biçimde yazdık. Ama kareyi kesirli olarak bulamadık

Şekil 11 *Yaptıkları ölçme işlemini açıklayan örnek bir öğrenci yanıtı*

Öğrencilerin yapmış oldukları açıklamalara örnek olması açısından araştırmacı ile Mine ve Feyza kod adlı öğrenciler arasında geçen konuşmalara aşağıda yer verilmiştir:

Araştırmacı : *Size verilen sorularda bulduğunuz uzunlukların ölçülerini ne ile ifade ettiniz?*
Mine : *Kesir olarak.*
Feyza : *Kesir gibi.*
Araştırmacı : *Kesir biçiminde yazılabilen sayıları nasıl adlandırıyorduk?*
Feyza : *Rasyonel sayılar.*
Mine : *Rasyonel sayı.*
Araştırmacı : *Size verilen bazı uzunlukları rasyonel sayılarla, yani kesir biçiminde yazılabilen sayılarla gösterebildiniz. Karenin köşegen uzunluğunu kesir biçiminde ifade edebildiniz mi?*
Mine : *Hayır.*
Feyza : *Hayır.*
Araştırmacı : *Sebebi neydi?*
Feyza : *Parçalara ayırdığımızda tam denk gelmedi.*

Öğrencilere parçalama işlemini devam ettirdiklerinde karenin köşegen uzunluğuna ilişkin bir sonuç elde edip edemeyecekleri sorulduğunda; öğrencilerin 8'i bir sonuca ulaşamayacaklarını, 2'si ise büyük sayıdaki parçalama işlemlerinde belki bir sonuç elde etme ihtimalleri olduğunu belirtmişlerdir. Dolayısıyla dinamik yazılım etkinliği, öğrencilerde 1 birim ile kıyaslanamayan bir uzunluğun var olduğu düşüncesini geliştirmeye yardımcı olmuştur. Örneğin; 59. denemeden sonra Hale, karenin köşegen uzunluğunu a/b kesir gösterimi biçiminde yazamayacaklarına ilişkin düşüncesini "Muhtemelen olmayacak" sözleriyle ifade etmiştir. 63. denemeden sonra ise karenin bir köşegen uzunluğunun ölçüsünü, bir rasyonel sayıyla temsil edemeyeceklerine karar vermişlerdir.

(*63 eş parçaya bölme)*
Hale : *Hocam, bence devam etmemize gerek yok. Bence bulamayacağız.*
Araştırmacı : *Bulamayacağınızı mı düşünüyorsunuz?*
Hale : *Evet.*
Esra : *Evet.*
Araştırmacı : *Peki neyi bulamayacağız?*
Hale : *Kesir olarak bulamayacağız.*

4. Sonuç, Tartışma ve Öneriler

8. sınıfta okuyan ve formal olarak irrasyonel sayı kavramı ile daha önce tanışmış olan 10 öğrencinin görsel olarak bir ölçüm sonucunu temsil etme bağlamında irrasyonellik kavramı ile tekrar tanıştırıldığı bu çalışmada öğrencilerin

yaşadıkları ölçüm deneyimi ile teorik bilgilerini ilişkilendiremedikleri tespit edilmiştir. Örneğin 8 öğrenci karenin köşegen uzunluğunu temsil eden sayıyı a/b kesir gösterimi biçiminde yazamayacaklarını fark etmelerine rağmen, bu sayının bir irrasyonel sayı olacağını yalnızca 1 öğrenci ifade edebilmiştir. Literatürde bu konuda yapılmış çalışmaların da ortak bulgusu öğrencilerin irrasyonellik kavramı ile ilgili farklı temsiller arasında geçiş yapmakta zorlandıklarıdır (Peled ve Hershkovitz, 1999; Zazkis ve Sirotic, 2010; Kara ve Delice, 2012).

Öğrencilerin 2'sinin, çok fazla sayıda parçalama yapılırsa köşegen uzunluğunun rasyonel sayı ile temsil edilebilecek şekilde ölçülebileceğini düşünmesi, irrasyonel sayı ile ilgili teorik bilgilerinin içselleştirilmediğine işaret etmektedir (Sirotic ve Zazkis, 2007; Zazkis ve Sirotic, 2010). Öğrencilerin teorik bilgilerinden çok sezgilerine göre karar verdikleri göze çarpmıştır (Güven, Çekmez ve Karataş, 2011). Bu bulgu, Voskoglou ve Kosyvas (2012), geometriyle ilişkilendirilen kıyaslanamaz/ölçülemez büyüklüklere ilişkin süreçlerde öğrencilerin başarısız oldukları ve irrasyonel sayıların ölçülemezliğine ilişkin sahip oldukları zorluklarla tutarlık göstermektedir.

Peled ve Hershkovitz'in (1999) değindiği gibi sınırlı süreçler, öğrencilerin zorluk kaynağı olabilir. İlköğretim 8. Sınıf Matematik Ders Kitaplarında (Canpekel, 2010; Güler ve Yücelyiğit, 2012) yer alan sınırlı uygulamalar, irrasyonel sayıların a/b kesir gösterimi biçiminde yazılamaması durumuna anlam kazandırmaya ve bu durumun devirli olmayan ondalık açılımlar ile ilişkilendirilmesine yardımcı olacak yeterli rehberliği gösterememektedir. Bu açıdan görsel teknikler eşliğinde farklı temsillere yer verilmesi önerilebilir. Benzer öneri Kara ve Delice (2012), Adıgüzel (2013), Voskoglou ve Kosyvas (2012) ve Shinno (2007) tarafından da dile getirilmiştir.

Bu araştırma bir kez daha göstermektedir ki teorik bilgiler irrasyonellik kavramını tam olarak desteklememektedir. Yapılan dinamik yazılım etkinliği, 1 birim ile kıyaslanamayan nicelikleri incelemede kolaylık sağlamaktadır. Yazılım desteği olmadan yapılacak benzer bir inceleme farklı hassasiyetlerdeki ölçüm araçlarının kullanılmasını gerektirir. Bu durum, maliyetli ve zaman alıcı olabilir. Bu çalışmada önerilen kurgu ile irrasyonellik kavramının öğrencilerle tanıştırılması, ülkemizdeki ders kitaplarında genelde birbiri ile ilişkisi yeterli derecede incelenmeden verilen irrasyonel bir sayının "sayı doğrusu üzerindeki yeri" ve "a/b biçiminde iki tam sayının oranı olarak yazılamaması" durumları arasındaki ilişkiyi daha açık hale getirebilir. Bunun yanında söz konusu dinamik yazılım etkinliği kapsamında uygulanan ölçme deneyi, irrasyonel sayıların kesir olarak gösterilememesine anlam kazandırma potansiyeline sahip olduğundan rasyonel sayı algısını daha güçlü olarak kazandırmada kullanılabileceği söylenebilir.

"Sayılar ve İşlemler" öğrenme alanı, ortaokul matematik öğretiminin müfredatının temel taşlarından sayılabilir. Bu amaçla sayıların, sayı temsillerinin ve aralarındaki ilişkinin, sayı kümelerinin ve özelliklerinin anlaşılmasına yardımcı olacak çalışmalar yapılabilir. Dinamik yazılımların kullanıldığı sınıf içi uygulamaların tasarımlarına ve tasarım ilkelerine yönelik yapılacak çalışmaların da hem ilgili alanyazına hem de matematik derslerinin verimliliğini artırmaya katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Kaynakça

Adıgüzel, N. (2013). *İlköğretim matematik öğretmen adayları ve 8. sınıf öğrencilerinin irrasyonel sayılar ile ilgili bilgileri ve bu konudaki kavram yanılgıları*. Yüksek Lisans Tezi. Necmettin Erbakan Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Konya.

Büyüköztürk, Ş., Çakmak, E. K., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş. & Demirel, F. (2009). *Bilimsel araştırma yöntemleri* (5. baskı). Ankara: PegemA Yayıncılık.

Canpekel, M. (2009). İlköğretim *8. sınıf matematik ders kitabı*. Ankara: Dikey Yayıncılık.

Fischbein, E., Jehiam, R. & Cohen, C. (1995). The concept of irrational number in high school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 29: 29–44.

Güler, S. ve Yücelyiğit, S. (2012). *İlköğretim 8. sınıf matematik ders kitabı*. Ankara: Ada Yayıncılık.

Güven, B., Çekmez, E. & Karataş, İ. (2011). Examining Preservice Elementary Mathematics Teachers' Understandings about Irrational Numbers. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 21*(5), 401-416

Kara, F.ve Delice, A. (2012). Kavram tanımı mı? Yoksa kavram imgeleri mi? İrrasyonel sayıların temsilleri. X. *Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*, Niğde, Türkiye.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston; Va. NCTM.

Peled, I. & Hershkovitz, S. (1999). Difficulties in knowledge integration: Revisiting Zeno's paradox with irrational numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *30*(1), 39–46

Shinno,Y (2007). On the teaching situation of conceptual change: epistemological considerations of irrational numbers. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Vol. 4: 185-192. Seoul: PME.

Sirotic, N. & Zazkis, R. (2007). Irrational numbers: the gap between formal and intuitive knowledge. *Educational Studies in Mathematics,* 65: 49–76 DOI: 10.1007/s10649-006-9041-5

Voskoglou, M.G. & Kosyvas, G.D. (2012). Analyzing students' difficulties in understanding real numbers. *REDIMAT- Journal of Research in Mathematics Education*, *1*(3), 301-336.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2008). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (7. baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yıldırım, C. (2011). *Bilim tarihi* (14. Basım). İstanbul: Remzi Kitabevi

Zazkis, R. & Sirotic, N. (2010). Representing and Defining Irrational Numbers: Exposing the Missing Link. *CBMS Issues in Mathematics Education,* 16: 1-27.

EXTENDED ABSTRACT

1. Purpose

In our country, in general, the Math textbooks mentions the ideas "the location of irrational numbers on a number line" and "'cannot be written as the ratio of two whole numbers" for the irrationality concept as two separate states and discussing the relationship of two ideas is often neglected. The irrationality concept has been introduced to the mathematics world by a crisis coming from the effort of measuring the lengths. This effort made the Pythagoras and his followers to introduce some incommensurable quantities. Making the learners facing a similar crisis to understand the irrationality concept has been seen important by Shinno (2007). In this study a virtual measurement experiment was designed by a dynamic math software and it is tried to answer the question “Does the virtual measurement experience have a positive impact on understanding the irrationality concept for 8th graders?”

2. Method

For the purpose of the research, a dynamic application, which provides measuring a variety of length in terms of 1 unit, was designed. Most of the dynamic math software does not need to be programmed to monitor the quantity of rational measures on their number line. When the number line is focused on, the line is divided automatically. But this division does not contain every case. For example, a rational measure as 3/7 cannot be found exactly. Because, any software does not divide the 1 unit interval into 7 equal parts automatically. By this reason, a dynamic application was constructed that allowing dividing any interval into desired number of parts by using GeoGebra the dynamic math software.

In order to use the application fluently, a ready tool was created named "dividing into n piece" and with the help of this tool an activity was designed. In the activity students were asked to find the length of six geometric shapes' various lengths. A worksheet also was given to the students to guide in the activity. Following measures were asked to find:

- The lengths of radii of variety of circles
- The length of the KL side of the triangle KLM
- The length of PS diagonal of PRST square
- The length of EF side of EFDGH pentagon

Five of these lengths are rational values. Therefore, they can be expressed in terms of a unit equivalent part. PS diagonal of the square of the first unit of any size cannot be expressed in terms of equivalent parts.

2.1. The research group

The research conducted by 10 students from 8th grade. These students were introduced by the concept of irrational number earlier. So, the opportunity of observing if the students were aware of the relationship between the ideas "the location of irrational numbers on a number line" and "'cannot be written as the ratio of two whole numbers" was assessed. In this respect, the impact of measuring experience by the dynamic activity might be investigated.

2.2. Model of Research

Research has a qualitative pattern. For the purpose of the study, how the students perceive the situation they faced was observed by interviews. Interviews took 60 minutes averagely and conducted by the researcher.

3. Findings

Students found the length of the radius of 3 circles, the length of one side of the triangle, and pentagon which can be represented by a rational number, without difficulty. On the other hand, students could not find the diagonal length of the square even if they carried out lots of dividing operation (80, 105, 130 ...). At the end of the process, students lived a crisis similar to Pythagoras and his followers lived. Students, who have failed trials, gave responses similar to the following during the activity.

- “Why does not it?’’
- "I wonder which number we will find/reach to?"
- “I suppose/guess it won’t happen’’
- “I think it does not overlap"
- “Is there a result of this?’’

At this point, we can say that the measurement experiment designed with the dynamic software was effective in creating depressive emotions experienced by Pythagoras and his followers such as disappointment, intimidation, despair, confusion etc.

However, students also had the opportunity of observing their experiment more correctly by increasing the precision of their measurement thanks to the zooming in/out feature of the dynamic software. For example, 2 students stated that the diagonal length of the square was 24/17 units in a very confident way. When the students were asked to zoom in to their measurement a little more, they have seen that they cannot find the number representing their measurement in disappointment and confusion. They have stated their opinion as “It does not work correctly when zoomed in” for this experiment and subsequent experiments. Only 1 student thought that this measurement may correspond to an irrational number with the increasing number of division.

Students were asked to describe how they determined the numerical values of the lengths in these measurements they have performed. All of the students who have described the steps of the procedure they have performed to determine the lengths in detail have realized that they cannot write the number representing the diagonal length of the square as a fraction with the notation a/b.

When the students were asked whether they could reach a result on the diagonal length of the square if they had continued the division procedure, 8 students stated that they could not reach a result and 2 students stated that they may a possibility of reaching a result on a very high number of fragmentation procedures. Therefore, dynamic software event helped to develop the thought that a length which cannot be compared with 1 unit exists in minds of the students.

4. Conclusion, Discussion and Suggestions

All students have experienced a similar crisis as experienced by Pythagoras and his followers with this dynamic software activity. Although they have learned the irrational numbers concept theoretically, only 1 student had realized the relation with the definition by stating that this may be an irrational number. In parallel to the findings of the work by Peled and Hershkovitz (1999), students had difficulty in combining different parts of knowledge despite they have known the concept and properties of irrational numbers before. The fact that 2 students have thought that it may be possible to measure the diagonal length so that it may be represented by a rational number if number of fragmentations would be very high indicates that the theoretical knowledge on irrational numbers is not digested (Sirotic and Zazkis, 2007; Zazkis and Sirotic, 2010). This finding is consistent with the findings stated in Voskoglou and Kosyvas (2012), describing that students fail in procedures on incomparable/immeasurable magnitudes related with geometry and have difficulty in understanding the immeasurability of irrational numbers. As stated by Peled and Hershkovitz (1999), limited processes may cause a difficulty for the students. Therefore, 2 students mentioned before may develop their sense on the incomparability/immeasurability of the irrational number concept when more time is allowed for these students. Besides that, 8 students have started to develop the thought that no result would be possible even if the number of fragmentations is increased.

In general, we have seen that students had difficulty in assessing why they cannot get a rational number representing the diagonal length of the square despite being acquainted to concepts of rational, irrational and real numbers and they could not recognize why this measurement is different than other measurements (Fischbein, Jehiam and Cohen, 1995; Peled and Hershkovitz, 1999; Sirotic and Zazkis, 2007; Zazkis and Sirotic, 2010; Voskoglou and Kosyvas, 2012).