T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

AĞIRLIKLI UZAYLARDA KOROVKİN TİPLİ YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DENİZ KOÇ

DENİZLİ, HAZİRAN-2014

T.C.

PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AĞIRLIKLI UZAYLARDA KOROVKİN TİPLİ YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DENİZ KOÇ

DENİZLİ, HAZİRAN-2014

YÜKSEK LİSANS TEZ ONAY FORMU

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü 111441040 nolu öğrencisi Deniz KOÇ tarafından hazırlanan "**AĞIRLIKLI UZAYLARDA KOROVKİN TİPLİ YAKLAŞIM** " başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı: **Yrd. Doç. Dr. Özlem GİRGİN ATLIHAN (PAÜ)**

Jüri Üyesi : **Doç. Dr. İsmail YASLAN (PAÜ)**

Jüri Üyesi : **Yrd. Doç. Dr. Pınar TUNAY TAŞLI (PAÜ)**

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 25/07/2014 tarih ve 31/13 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü
Prof. Dr. Orhan KARABULUT

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

İmza :

Öğrenci Adı Soyadı : DENİZ KOÇ

İÇİNDEKİLER

ÖZET

AĞIRLIKLI UZAYLARDA KOROVKİN TİPLİ YAKLAŞIM

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölüm de temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde klasik Bohman-Korovkin yaklaşım teoremleri ve ispatları verilmiştir. Ayrıca buna ilişkin bazı örnekler incelenmiştir. Dördüncü bölümde Ağırlıklı uzaylarda verilen Bohman-Korovkin Teoreminin yakınsaklığın gerçeklenmemesi durumunda matris toplanabilme metodu kullanılarak geliştirilen yaklaşım teoremleri verilmiştir. Beşinci bölümde Korovkon tipli yaklaşım teoremleri $\mathcal{A}$ -toplam süreci yardımıyla geliştirilmiştir. Son bölümde ise, verilen teoremler için yaklaşım oranı hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Korovkin Teoremi, pozitif lineer operatörler, Matris Toplanabilme Yöntemi, Ağırlıklı süreklilik modülü.

SUMMARY

KOROVKIN TYPE APPROXIMATION IN WEIGHTED SPACE

This thesis consists of six chapters. The first chapter has been devoted to the introduction. The second chapter, the basic definitions and consepts have been recalled. The third chapter, classic Bohman-Korovkin approximation theorems and proofs have been given. Moreover, examples concerning these theorems have also been analysed. The fourth chapter, the Korovkin type approximation theorems developed with use of matrix summability method has been analysed. The fifth chapter, the Korovkin type approximation theorems has been extended via $\mathcal{A}$ -summation process.

In the final chapter, the rate of convergence has been examined for theorems given in chapter four.

Keywords: Korovkin Theorem, positive linear operators, matrix summability method, modulus of continuity weighted.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmamda beni yönlendiren ve bana yardımcı olan çok değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Özlem GİRGİN ATLIHAN'a ve desteklerini benden hiç esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

Deniz KOÇ

1.GİRİŞ

Klasik Yaklaşım Teorisi, Alman matematikçi Karl Weierstrass'ın sonlu aralıkta sürekli olan her fonksiyona bu aralıkta yakınsayan bir polinom olacağını ispat etmesiyle başlamıştır. Birçok matematikçi bunun ispatını farklı şekilde ele almıştır. Örneğin Bernstein polinomlarının $C\left[0,1\right]$uzayındaki fonksiyonlara düzgün yakınsadığını ispatlamıştır. Daha sonraları lineer pozitif operatör dizilerinin yaklaşım özellikleri üzerine çalışılmıştır. Dolayısıyla $\left(L_n\right)_{n\in N}$ dizisinin sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsak olması için gerekli şartlar nelerdir sorusu akla gelmektedir. Bu sorunun cevabını iki matematikçi Bohman (1952) ve Korovkin (1953) birbirinden bağımsız olarak bulmuşlardır. Bu sonuçlar birçok matematikçinin bu yaklaşımları farklı uzaylara genişletmesine kaynak sağlamıştır. Böylelikle Yaklaşım Teorisi'nin özel bir dalı olan Korovkin Tipi Yaklaşım Teorisi ortaya çıkmıştır.

Kompakt bir aralıkta sürekli fonksiyonların yaklaşımı hakkındaki klasik Korovkin Teoremi, bir lineer pozitif operatör dizisinin birim operatöre yakınsayıp yakınsamayacağına ilişkin şartları belirler. Klasik Korovkin teoremindeki pozitif lineer operatör dizisinin birim operatöre yakınsamaması durumunda, toplanabilme metodlarını kullanmak yakınsaklık kaybını gidermekte etkilidir.

Bu tezde, Atlıhan ve Orhan (2007, 2008) tarafından verilen ve matris toplanabilme metodları kullanılarak geliştirilen Korovkin tipli yaklaşım teoremleri ve ispat teknikleri incelenmiştir.

2.TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde ihtiyaç duyacağımız temel tanım ve kavramları vereceğiz.

2.1 Lineer Pozitif Operatörler

Tanım 2.1.1 X boştan farklı bir küme, F reel veya kompleks sayıların bir cismi olsun.

$+ : X \times X \to X$
$. : F \times X \to X$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X kümesine F cismi üzerinde bir lineer uzay (vektör uzayı) denir.

$\forall x, y, z \in X$ ve $\forall a, b \in F$ için

$L_1)$ $x + y = y + x$,

$L_2)$ $(x + y) + z = x + (y + z)$,

$L_3)$ $x + \vartheta = \vartheta + x$ olacak şekilde $\vartheta \in X$ vardır,

$L_4)$ $\forall x \in X$ için $x + (-x) = (-x) + x = \vartheta$ olacak şekilde bir $-x \in X$ vardır,

$L_5)$ $1.x = x$,

$L_6)$ $a(x + y) = ax + ay$,

$L_7)$ $(a + b)x = ax + bx$,

$L_8)$ $a(bx) = (ab)x$.

Tanım 2.1.2 Lineer uzaylar üzerinde tanımlı dönüşümlere operatör denir.

Tanım 2.1.3 X ve Y aynı cisim üzerinde iki lineer uzay olmak üzere $L: X \to Y$ operatörü verilmiş olsun. Eğer, $\forall x, y \in X$ ve $\forall a, b \in F$ için

$$L(ax+by) = aL(x) + bL(y)$$

şartları sağlanıyorsa L' ye lineer operatör denir (Maddox, 1978).

Tanım 2.1.4 X ve Y reel değerli fonksiyonların uzayı olmak üzere $L: X \to Y$ lineer operatör olsun. L operatörünün x noktasındaki değeri $L(f;x) = g(x)$ şeklinde gösterilsin. X tanım uzayından alınan her $f \geq 0$ fonksiyonu için $L(f) \geq 0$ koşulu gerçekleniyor ise bu durumda L operatörüne "pozitif lineer operatör" adı verilir.

Pozitif lineer operatörler aşağıdaki özellikleri gerçekler.

1. $f \leq g \Rightarrow L(f;x) \leq L(g;x)$
2. $|L(f;x)| \leq L(|f|;x)$

Tanım 2.1.5 X boştan farklı bir küme ve d: X x X→IR fonksiyonu, aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu fonksiyona X üzerinde bir metrik ve (X,d) ikilisine de metrik uzay denir. $\forall x, y, z \in X$ olsun.

$M_1)$ $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

$M_2)$ $d(x,y) = d(y,x),$

$M_3)$ $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (Maddox, 1978).

Tanım 2.1.6 (X,d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X' in bir elemanına yakınsıyorsa (X,d) ye tam metrik uzay denir (Maddox, 1978).

Tanım 2.1.7 X kompleks veya reel lineer uzay olmak üzere $\| \; \|: X \to IR$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu fonksiyona X üzerinde bir norm ve $(X, \| \; \|)$ ikilisine de normlu uzay denir. $\forall x, y \in X$ ve $a \in F$ olsun.

$N_1)$ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

$N_2)$ $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|,$

$N_3)$ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Tanım 2.1.8 Tam ve normlu bir lineer uzaya Banach uzayı denir.

Tanım 2.1.9 (X, d_1) ve (Y, d_2) iki metrik uzay ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon $a \in X$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $d_1(x, a) < \delta$ olduğunda $d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$ olacak şekilde $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu a noktasında süreklidir denir. Eğer, f fonksiyonu $\forall x \in X$ için sürekli ise f, X uzayında süreklidir, kısaca f süreklidir denir.

Tanım 2.1.10 ρ fonksiyonu, IR reel sayılar kümesi üzerinde sürekli reel değerli ve

i) $\lim_{|x| \to \infty} \rho(x) = \infty$

ii) $\rho(x) \geq 1 \quad (\forall x \in IR)$

koşullarını sağlıyorsa IR üzerinde ″ ağırlık fonksiyonu″ olarak adlandırılır. (Gadjiev, 1976)

Tanım 2.1.11 ρ bir ağırlık fonksiyonu olsun. $\forall x \in IR$ için $|f(x)| \leq M_f . \rho(x)$ koşulunu sağlayan IR üzerinde tanımlı reel değerli f fonksiyonlarının uzayına ″ ağırlıklı uzay ″ denir ve B_ρ ile gösterilir.

C_ρ ağırlıklı uzayı ise,

$$C_\rho = \{ f \in IR : \text{ f fonksiyonu } IR\text{'de sürekli } \}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu uzaylar üzerindeki norm,

$$\| f \|_\rho = \sup_{x \in IR} \frac{|f(x)|}{\rho(x)}$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 2.1.12 $A = (a_{nk}), k, n = 1, 2, \ldots,$ sonsuz bir matris ve bir $x = (x_k)$ dizisi verilsin. Reel ya da kompleks terimli x dizisinin “ $A-$*dönüşüm* “ dizisi,

$Ax := ((Ax)_n)$ ile gösterilir ve

$$(Ax)_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

şeklinde tanımlıdır (Burada her bir n için seri yakınsak kabul edilmektedir) (Hardy 1949, Boos 2000).

Tanım 2.1.13 $\mathcal{A} := \left\{A^{(n)}\right\} = \left\{a_{kj}^{(n)}\right\},\ k, j = 1,2,3,...$ sonsuz matrislerin bir dizisi olmak üzere, verilen bir $\left(x_j\right)$ dizisi için

$$\lim_k \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} x_j = L \text{ , (n e göre düzgün)}$$

ise $\left(x_j\right)$ dizisi L değerine "$\mathcal{A}$ *–toplanabilir*" denir (Stieglitz,1973).

Eğer $\forall n \in IN$ için $A^{(n)} = A$ ise $\mathcal{A}$ *–toplanabilme* klasik matris toplanabilmeyi verir.

I birim matris olmak üzere, $\forall n \in IN$ için $A^{(n)} = I$ ise $\mathcal{A}$ *–toplanabilme* klasik yakınsaklığa indirgenir.

Tanım 2.1.14 $\mathcal{A} := \left\{A^{(n)}\right\} = \left\{a_{kj}^{(n)}\right\}$ reel terimli sonsuz matris dizisi olsun. $\forall j$ için $L_j : C_{\rho_1} \to B_{\rho_2}$ lineer pozitif operatör olsun. Eğer $\forall f \in C_{\rho_1}$ için $\left\{L_j\left(f\right)\right\}$ dizisi f fonksiyonuna $\mathcal{A}-$ Toplanabilir ise yani $\forall f \in C_{\rho_1}$ için,

$$\lim_k \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} L_j f - f \right\|_{\rho_2} = 0 \text{ , (n' e göre düzgün)} \tag{2.1.1}$$

koşulu gerçekleniyorsa $\left\{L_j\right\}$ dizisine C_{ρ_1} üzerinde "$\mathcal{A}$ *–toplam süreci*" adı verilir (Nishishiraho, 1983).

Burada her k, n ve f için (2.1.1) içindeki seri yakınsak kabul edilecektir. $\left\{L_j\right\}$, C_{ρ_1} uzayını B_{ρ_2} uzayına dönüştüren ve her bir $n, k \in IN$ için

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \left\| L_j \rho_1 \right\|_{\rho_2} < \infty \tag{2.1.2}$$

koşulunu sağlayan pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Bu durumda her bir $n, k \in IN$ ve $f \in C_{\rho_1}$ için

$$B_k^{(n)}\left(f; x\right) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} L_j\left(f(t); x\right)$$

ile tanımlı operatörü alalım. O halde

$$\sup_{x \in IR} \frac{\left|B_k^{(n)}\left(f; x\right)\right|}{\rho_2(x)} = \sup_{x \in IR} \frac{1}{\rho_2(x)} \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} L_j\left(\frac{f}{\rho_1}.\rho_1; x\right) \right|$$

$$\leq \|f\|_{\rho_1} \sup_{x\in IR} \frac{1}{\rho_2(x)} \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \left|L_j\left(\rho_1;x\right)\right|$$

$$= \|f\|_{\rho_1} \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \left\|L_j\left(\rho_1\right)\right\|_{\rho_2}$$

elde edilir. Şimdi (2.1.2) göz önüne alınırsa $B_k^{(n)}$ operatörü her bir $n,k\in IN$ için anlamlı olup B_{ρ_2} uzayına aittir. Dolayısıyla

$$\left\|B_k^{(n)}\right\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_2}} = \left\|B_k^{(n)}\left(\rho_1\right)\right\|_{\rho_2} = \sup_{x\in IR} \frac{\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} L_j\left(\rho_1;x\right)\right|}{\rho_2(x)}$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 2.1.15 $f\in C\left[a,b\right]$ olsun. f fonksiyonunun süreklilik modülü $w\left(f,\delta\right)$ olup

$$w\left(f,\delta\right) = \sup_{|t-x|\leq\delta} \left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|$$

şeklinde tanımlıdır (Altomare and Campiti, 1994).

Süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri sağlar.

(i) $w\left(f,\delta\right)\geq 0$

(ii) $\delta_1\leq\delta_2 \Rightarrow w\left(f,\delta_1\right)\leq w\left(f,\delta_2\right)$

(iii) $w\left(f+g,\delta\right)\leq w\left(f,\delta\right)+w\left(g,\delta\right)$

(iv) $w\left(f,m\delta\right)=m.w\left(f,\delta\right)$

(v) $\lambda\in R^+$ için $w\left(f,\lambda\delta\right)\leq\left(\lambda+1\right).w\left(f,\delta\right)$

(vi) $w\left(f,|t-x|\right)\geq\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|$

(vii) $\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|\leq\left(\frac{|t-x|}{\delta}+1\right).w\left(f,\delta\right)$

Tanım 2.1.16 ρ_1, IR üzerinde bir ağırlık fonksiyonu ve $f\in C_{\rho_1}$ olsun. f fonksiyonunun $f\in C_{\rho_1}$ "ağırlıklı süreklilik modülü", $\omega_{\rho_1}\left(f;\delta\right)$ ile gösterilir ve

$$\omega_{\rho_1}\left(f,\delta\right)=\sup_{|x-t|\leq\delta}\left\{\frac{|f(t)-f(x)|}{\rho_1(x)}\right\}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada δ pozitif bir sabittir.

Ağırlıklı süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri gerçekler.

i) $x,t\in IR$ olmak üzere her $f\in C_{\rho_1}$ için

$$|f(t)-f(x)|\leq\rho_1(x)\omega_{\rho_1}\left(f,|t-x|\right) \tag{2.1.3}$$

ii) $\left[|c|\right]$, c' nin tam değerini göstermek üzere herhangi bir $c>0$ sayısı her $f\in C_{\rho_1}$ için

$$\omega_{\rho_1}\left(f,c\delta\right)\leq\left(1+\left[|c|\right]\right)\omega_{\rho_1}\left(f,\delta\right) \tag{2.1.4}$$

3. KOROVKİN TEOREMLERİ

Şimdi yaklaşımlar teorisinde önemli bir yeri olan literatürde "Bohman - Korovkin Teoremi " olarak bilinen aşağıdaki sonucu hatırlatalım.

3.1 Bohman – Korovkin Teoremi

Teorem 3.1.1 $L_n : C[a,b] \to C[a,b]$ lineer pozitif operatörler olsun.

$$\lim_n \|L_n f_i - f_i\| = 0, \quad f_i = t^i, (i = 0,1,2) \quad \Leftrightarrow \quad \forall f \in C[a,b] \text{ için } \quad \lim_n \|L_n f - f\| = 0$$

(Bohman 1952, Korovkin 1953).

Şimdi Korovkin teoreminin şartlarını sağlayan bir örnek verelim.

Örnek 3.1.2 $C[0,r]$ uzayında verilen Szasz Operatörünün Korovkin Teoreminin şartlarını sağladığını gösteriniz.

Çözüm. $C[0,r]$**'** de verilen Szasz Operatörü

$$S_n(f;x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!}$$

şeklinde tanımlı olup

$$S_n(1;x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} = e^{-nx} e^{nx} = 1$$

bulunur. O halde $\lim_n \|S_n 1 - 1\| = 0$ olduğu açıktır.

$$S_n(t;x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} \frac{(nx)^k}{k!}$$

$$= e^{-nx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^{k-1} x^k}{(k-1)!}$$

$$= e^{-nx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^k x^{k+1}}{k!}$$

$$= x.e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}$$

$$= x$$

olduğundan $\lim_{n}\underset{0\le x\le r}{maks}\left|S_n(t;x)-x\right|=0$ elde edilir.

$$S_n\left(t^2;x\right)=e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{(nx)^k}{k!}$$

$$=e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{n^{k-2}x^k}{(k-1)!}$$

$$=e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{n^{k-2}x^k}{(k-1)!}+e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n^{k-2}x^k}{(k-1)!}$$

$$=e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k x^{k+2}}{k!}+e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^{k-1}x^{k+1}}{k!}$$

$$=x^2e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k x^k}{k!}+\frac{x}{n}e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k x^k}{k!}$$

$$=x^2+\frac{x}{n}$$

eşitliği gerçeklenir. O halde, $\lim_{n}\underset{0\le x\le r}{maks}\left|S_n\left(t^2;x\right)-x^2\right|=0$ elde edilir.

3.2 $\rho-$ Normunda Korovkin Teoreminin Varlığı

Teorem 3.2.1 Keyfi $m\ge 1$ için $L_n : C_\rho(IR^m)\to B_\rho(IR^m)$ lineer pozitif operatör dizisi verilsin. $\rho(x)=1+|x|^2$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n(1;x)-1\right\|_\rho=0 \tag{3.2.1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n\left(t_j;x\right)-x_j\right\|_\rho=0 \qquad j=1,2,3,...,m \tag{3.2.2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n\left(|t|^2;x\right)-|x|^2\right\|_\rho=0 \tag{3.2.3}$$

şeklindeki (m+2) şartı sağlasınlar. Bu durumda $C_\rho\left(IR^m\right)$ uzayında öyle bir f^* fonksiyonu bulabiliriz ki $n\to\infty$ için,

$$\left\|L_n\left(f^*;x\right)-f^*(x)\right\|_\rho\ge 1$$

elde edilir.

İspat. L_n operatörler dizisini şu şekilde tanımlayalım,

$$L_n\left(f;x\right)=\begin{cases} f(x)+\dfrac{1+|x|^2}{1+2n^2}\left[f(x^*)-f(x)\right], & |x|\le n \\ f(x), & |x|>n \end{cases}$$

Burada, $x^*=\left(\dfrac{|x|+1}{\sqrt{m}},...,\dfrac{|x|+1}{\sqrt{m}}\right)$ olsun.

L_n ler lineer pozitif operatörler olduğu açıktır. Diğer taraftan $\rho(x)=1+|x|^2$ ve $|x|\le n$ için

$$\begin{aligned} L_n\left(\rho;x\right) &= \rho(x)+\frac{1+|x|^2}{1+2n^2}\left[\rho(x^*)-\rho(x)\right] \\ &= \rho(x)+\frac{1+|x|^2}{1+2n^2}\left[\left|x^*\right|^2-|x|^2\right] \\ &= \rho(x)+\frac{1+|x|^2}{1+2n^2}\left[1+2|x|\right] \\ &\le 1+|x|^2+2+|x|^2 \\ &\le 3\left(1+|x|^2\right) \\ &= 3\rho(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece L_n, her bir n için C_ρ' dan B_ρ ya tanımlıdır. Şimdi (3.2.1), (3.2.2) ve (3.2.3) şartlarına bakalım.

$L_n\left(1;x\right)=1$ olduğundan (3.2.1) gerçeklenir.

$$\begin{aligned} L_n\left(t_j;x\right) &= x_j+\frac{1+|x|^2}{1+2n^2}\left[x_j^*-x_j\right] \\ &= x_j+\frac{1+|x|^2}{1+2n^2}\left[\frac{1+|x|-\sqrt{m}x_j}{\sqrt{m}}\right] \\ &\le x_j+\frac{1+|x|^2}{1+2n^2}2\left(1+|x|\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\sup_{|x|\le n}\frac{\left|L_n\left(t_j;x\right)-x_j\right|}{1+|x|^2}\le\frac{2(1+n)}{1+2n^2}$$

olup (3.2.2) şartı sağlanır. Son olarak (3.2.3) koşulunun sağlandığını görelim.

$$L_n\left(|t|^2;x\right)=|x|^2+\frac{1+|x|^2}{1+2n^2}\left[\left|x^*\right|^2-|x|^2\right]$$

$$=|x|^2+\frac{1+|x|^2}{1+2n^2}\left[\left(1+|x|\right)^2-|x|^2\right]$$

$$=|x|^2+\frac{1+|x|^2}{1+2n^2}\left(1+2|x|\right)$$

gerçeklenir. Bu durumda

$$\sup_{|x|\le n}\frac{\left|L_n\left(|t|^2;x\right)-|x|^2\right|}{1+|x|^2}\le\frac{1+2n}{1+2n^2}$$

elde edilir. Buradan (3.2.3)' ün gerçeklendiği görülür.

Şimdi, $f^*(x)=|x|^2\cos\pi|x|$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $f^*\in C_\rho$ dur ve $|x|\le n$ için,

$$L_n\left(f^*;x\right)=f^*(x)+\frac{1+|x|^2}{1+2n^2}\left[\left|x^*\right|^2\cos\pi\left(1+|x|\right)-|x|^2\cos\pi|x|\right]$$

$$=f^*(x)-\frac{1+|x|^2}{1+2n^2}\left(\left|x^*\right|^2+|x|^2\right)\cos\pi|x|$$

olur. Dolayısıyla

$$\sup_{x\in R}\frac{\left|L_n\left(f^*;x\right)-f^*(x)\right|}{1+|x|^2}=\sup_{|x|\le n}\frac{1+2|x|+2|x|^2}{1+2n^2}\left|\cos\pi|x|\right|=\frac{1+2n+2n^2}{1+2n^2}$$

sağlanır. Böylece

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_nf^*-f^*\right\|_\rho=1$$

gerçeklenir. Bu ise ispatı tamamlar.

3.3 $C_{\rho}(IR)$ Uzayında Yakınsaklık Teoremi

Şimdi Gadjiev (1976) tarafından, ağırlıklı uzaylar üzerinde verilen Korovkin tipli yaklaşım teoremini ifade edelim.

Teorem 3.3.1 $L_n : C_{\rho_1} \to B_{\rho_2}$ tanımlı ve $L_n : C_{\rho_1} \to B_{\rho_1}$ için düzgün sınırlı olmak üzere $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)} = 0$ olsun. Eğer bir s_0 için $|x| \le s_0$ olmak üzere

$$\lim_n \sup_{|x|\le s_0} \left| L_n(f;x) - f(x) \right| = 0$$

koşulu sağlanıyor ise $\forall f \in C_{\rho_1}$ için

$$\lim_n \left\| L_n f - f \right\|_{\rho_2} = 0$$

gerçeklenir.

Teorem 3.3.2 Kabul edelim ki $\rho(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)} = 0$ şartını sağlayan keyfi bir fonksiyon, $L_n : C_{\rho_1}(IR) \to B_{\rho_2}(IR)$ lineer pozitif operatör dizisi olsun. Bu taktirde $\forall F_j \in C_{\rho_1}$ için ,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| L_n F_j - F_j \right\|_{\rho_1} = 0 \qquad (j = 0,1,2)$$

koşulunu sağlayan $\forall f \in C_{\rho_1}$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| L_n f - f \right\|_{\rho_2} = 0$$

olmasıdır.

Buradan $\forall x \in IR$ için,

$$F_o(x) = \frac{1}{1+|x|^2}.\rho(x) \tag{3.3.1}$$

$$F_1(x) = \frac{x}{1+|x|^2}.\rho(x) \tag{3.3.2}$$

$$F_2(x) = \frac{|x|^2}{1+|x|^2}.\rho(x) \tag{3.3.3}$$

eşitlikleri ile alınacaktır.

4. AĞIRLIKLI UZAYLARDA YAKLAŞIM TEOREMLERİ

4.1 Tek Değişkenli Yaklaşım Teoremi

Gadjiev (1976) tarafından Ağırlıklı uzaylarda verilen Korovkin Teoreminin yakınsaklığın gerçeklenmemesi durumunda ne yapılabilir sorusu akla gelir. Bu durumda Atlıhan ve Orhan (2007)' de matris toplanabilme metodunu kullanarak bu yaklaşım teoremini geliştirmişlerdir. Bu bölümde biz bu çalışmadaki teoremleri ve ispatları inceleyeceğiz.

Lemma 4.1.1 $A=\left\{A^{(n)}\right\}$ negatif olmayan reel terimli sonsuz matrislerin bir dizisi olsun. $\left\{L_j\right\}$, C_{ρ_1} uzayını B_{ρ_2} uzayına dönüştüren pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. ρ_1 ve ρ_2 ağırlık fonksiyonları da $\lim\limits_{|x|\to\infty}\dfrac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)}=0$ (4.1.1) koşulunu gerçeklesin. Ayrıca

$$M=\sup_{n,k}\sum_{j=1}^{\infty}a_{kj}^{(n)}\left\|L_j\right\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}}<\infty \tag{4.1.2}$$

gerçeklensin. Eğer herhangi bir $s>0$ reel sayısı için

$$\lim_k\sum_{j=1}^{\infty}a_{kj}^{(n)}\sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\sup_{|x|\le s}\frac{\left|L_j\left(f;x\right)\right|}{\rho_1(x)}=0,\ \text{(n' e göre düzgün)} \tag{4.1.3}$$

ise bu durumda

$$\lim_k\sup_n\sum_{j=1}^{\infty}a_{kj}^{(n)}\left\|L_j\right\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_2}}=0$$

gerçeklenir.

İspat. (4.1.1) koşulu nedeniyle her $\varepsilon>0$ için $|x|>s_0$ olduğunda $\rho_1(x)\le\varepsilon\rho_2(x)$ olacak şekilde bir $s_0>0$ sayısı vardır. ρ_1 ve ρ_2 fonksiyonlarının sürekli olması nedeniyle $|x| \le s_0$ için $\rho_1(x) \le H\rho_2(x)$ olacak şekilde bir $H > 0$ sayısı vardır. Ayrıca

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \left\| L_j \right\|_{C_{\rho_1} \to B_{\rho_2}} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{x \in IR} \frac{\left| L_j(f;x) \right|}{\rho_2(x)}$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \left\{ \sup_{|x|>s_0} \frac{\left| L_j(f;x) \right|}{\rho_2(x)} + \sup_{|x| \le s_0} \frac{\left| L_j(f;x) \right|}{\rho_2(x)} \right\}$$

$$\le \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{|x|>s_0} \frac{\left| L_j(f;x) \right|}{\rho_1(x)}$$

$$+ H \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{|x| \le s_0} \frac{\left| L_j(f;x) \right|}{\rho_1(x)}$$

$$= \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \left\| L_j \right\|_{C_{\rho_1} \to B_{\rho_1}} + H \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{|x| \le s_0} \frac{\left| L_j(f;x) \right|}{\rho_1(x)}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Buradan (4.1.2) nedeniyle

$$\sup_n \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \left\| L_j \right\|_{C_{\rho_1} \to B_{\rho_2}} \le \varepsilon \sup_{n,k} \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \left\| L_j \right\|_{C_{\rho_1} \to B_{\rho_1}} + H \sup_n \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{|x| \le s_0} \frac{\left| L_j(f;x) \right|}{\rho_1(x)}$$

$$= \varepsilon M + H \sup_n \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{|x| \le s_0} \frac{\left| L_j(f;x) \right|}{\rho_1(x)}$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafının $k \to \infty$ için limitini alırsak (4.1.3) bağıntısından ve de $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan sonuç elde edilir.

Lemma 4.1.2 $A = \left\{ A^{(n)} \right\}$ negatif olmayan reel terimli sonsuz matrislerin bir dizisi ve

$$H = \sup_{n,k} \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} < \infty \tag{4.1.4}$$

koşulu gerçeklensin. $L_j : C_{\rho_1} \to B_{\rho_2}$ lineer pozitif operatörlerin dizisi olsun. Ayrıca (4.1.1) ve (4.1.2) sağlansın. Eğer herhangi bir $s > 0$ reel sayısı için

$$\lim_k \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{|x|\le s} \left| L_j\left(f;x\right) - f(x) \right| = 0 \text{, (n' e göre düzgün)} \quad (4.1.5)$$

ise her $f \in C_{\rho_1}$ için

$$\lim_k \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \left\| L_j f - f \right\|_{\rho_2} = 0 \text{, (n' e göre düzgün)}$$

gerçeklenir.

Teorem 4.1.3 $A = \left\{A^{(n)}\right\}$, (4.1.4) koşulunu sağlayan negatif olmayan reel terimli sonsuz matrislerin bir dizisi olsun. $\left\{L_j\right\}$, C_{ρ_1} uzayını B_{ρ_2} uzayına dönüştüren pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Ayrıca ρ_1 ve ρ_2 ağırlık fonksiyonları (4.1.1) koşulunu gerçeklesin. Eğer her bir v=0, 1, 2 için $F_v\left(x\right) = \dfrac{x^v \rho_1\left(x\right)}{1+x^2}$ olmak üzere,

$$\lim_k \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \left\| L_j F_v - F_v \right\|_{\rho_1} = 0 \text{, (n' e göre düzgün)} \quad (4.1.6)$$

ise her $f \in C_{\rho_1}$ için

$$\lim_k \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \left\| L_j f - f \right\|_{\rho_2} = 0 \text{, (n' e göre düzgün)} \quad (4.1.7)$$

gerçeklenir.

İspat. Önce (4.1.6) koşulunun sağlandığını kabul edelim. Bu durumda her bir j için

$$\begin{aligned}
\left\| L_j \right\|_{C_{\rho_1} \to B_{\rho_1}} &= \left\| L_j \rho_1 - \rho_1 + \rho_1 \right\|_{\rho_1} \le \left\| L_j \rho_1 \frac{1+t^2}{1+t^2} - \rho_1 \frac{1+t^2}{1+t^2} \right\|_{\rho_1} + \left\| \rho_1 \right\|_{\rho_1} \\
&= \left\| L_j \left(\frac{\rho_1}{1+t^2} + \frac{t^2 \rho_1}{1+t^2} \right) - \left(\frac{\rho_1}{1+t^2} + \frac{t^2 \rho_1}{1+t^2} \right) \right\|_{\rho_1} + 1 \\
&\le \left\| L_j F_2 - F_2 \right\|_{\rho_1} + \left\| L_j F_0 - F_0 \right\|_{\rho_1} + 1
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.1.6) nedeniyle

$$\sup_{n,k}\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)}\left\|L_j\right\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}} \le \sup_{n,k}\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)}\left\|L_jF_2-F_2\right\|_{\rho_1} + \sup_{n,k}\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)}\left\|L_jF_0-F_0\right\|_{\rho_1} + \sup_{n,k}\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} < \infty$$

olduğundan (4.1.6) nedeniyle (4.1.2) koşulu gerçeklenir.

Şimdi (4.1.5) ifadesinin sağlandığını gösterelim. (Gadjiev, 1976)

$$\left|L_j\left(f(t);x\right)-f(x)\right| \le L_j\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)+\left|f(x)\right|\left|L_j(1;x)-1\right| \qquad (4.1.8)$$

eşitsizliği gerçeklenir.

$f\in C_{\rho_1}$ ve $|x|<s$ olsun. f fonksiyonu R üzerinde sürekli olduğundan $\forall\varepsilon>0$ için $|t-x|<\delta$ koşulunu sağlayan $\forall t,x$ için $\left|f(t)-f(x)\right|<\varepsilon$ olacak şekilde $\delta>0$ sayısı vardır.

$|t-x|\ge\delta \Rightarrow \dfrac{|t-x|}{\delta}\ge 1 \Rightarrow \dfrac{|t-x|^2}{\delta}\ge 1$ olmak üzere,

$$\left|f(t)-f(x)\right| \le \left|f(t)\right|+\left|f(x)\right| = M_f\rho_1(t)+M_f\rho_1(x) = M_f\left(\rho_1(t)+\rho_1(x)\right)$$

$$\le 2M_f\rho_1(x)\rho_1(t)\frac{1+t^2}{1+t^2} = 2M_f\rho_1(x)F_0(t)\left(1+t^2\right)$$

$$\le K_{\rho_1}(x)(t-x)^2F_0(t)$$

Burada $K_{\rho_1}(x)=4M_f\rho_1(x)\left(\dfrac{1+t^2}{\delta^2}+1\right)$ dir.

$\forall t\in R$ ve $|x|<s$ için

$$\left|f(t)-f(x)\right| < \varepsilon + K_{\rho_1}(x)(t-x)^2F_0(t) \qquad (4.1.9)$$

Herhangi bir $s>0$ için $H_1=H_1(s)=\sup_{|x|\le s}\rho_1(x)$, $H_2=H_2(s)=\sup_{|x|\le s}K_{\rho_1}(x)$, $H_3=H_3(s)=\sup_{|x|\le s}\left|f(x)\right|$ olmak üzere Gadjiev (1976) ' in düşüncelerini kullanarak,

$$v_j=\sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\sup_{|x|\le s}\left|L_j(f(t);x)-f(x)\right| \le H_1\varepsilon\left\|L_j.1\right\|_{\rho_1} + H_2\sup_{|x|\le s}L_j\left((t-x)^2F_0(t);x\right)$$

$$+H_3\sup_{|x|\le s}\left|L_j(1;x)-1\right| \qquad (4.1.10)$$

gerçeklenir. Diğer yandan

$$L_j\left((t-x)^2 F_0(t);x\right)=L_j\left(t^2F_0(t);\right)-2xL_j\left(tF_0(t);x\right)+x^2L_j\left(F_0(t);x\right)$$

$$\le\left|L_j\left(F_2(t);x\right)\right|+2|x|\left|L_j\left(F_1(t);x\right)\right|+x^2\left|L_j\left(F_0(t);x\right)\right|$$

$$\le\left|L_j\left(F_2(t);x\right)-F_2(x)\right|+2|x|\left|L_j\left(F_1(t);x\right)-F_1(x)\right|$$

$$+x^2\left|L_j\left(F_0(t);x\right)-F_0(x)\right|$$

elde edilir. $B=B(s)=maks\left\{\sup\limits_{|x|\le s}\rho_1(x),2\sup\limits_{|x|\le s}|x|\rho_1(x),\sup\limits_{|x|\le s}x^2\rho_1(x)\right\}$ olmak üzere

$$u_j=\sup_{|x|\le s}L_j\left((t-x)^2F_0(t);x\right)\le\sup_{|x|\le s}\frac{\left|L_j\left(F_2(t);x\right)-F_2(x)\right|}{\rho_1(x)}\rho_1(x)$$

$$+\sup_{|x|\le s}\frac{2|x|\left|L_j\left(F_1(t);x\right)-F_1(x)\right|}{\rho_1(x)}\rho_1(x)$$

$$+\sup_{|x|\le s}\frac{|x|^2\left|L_j\left(F_0(t);x\right)-F_0(x)\right|}{\rho_1(x)}\rho_1(x)$$

$$\le B\left\{\left\|L_jF_2-F_2\right\|_{\rho_1}+\left\|L_jF_1-F_1\right\|_{\rho_1}+\left\|L_jF_0-F_0\right\|_{\rho_1}\right\} \quad (4.1.11)$$

eşitsizliği sağlanır. Diğer yandan,

$$\left\|L_j\right\|_{\rho_1}\le\left\|L_j\rho_1\right\|_{\rho_1}=\left\|L_j\right\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}} \quad (4.1.12)$$

olup (4.1.10), (4.1.11) ve (4.1.12) den $\forall j$ için

$$v_j\le H_1\varepsilon\left\|L_j\right\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}}+H_2u_j+H_3\sup_{|x|\le s}\left|L_j(1;x)-1\right| \quad (4.1.13)$$

elde ederiz.

$$F_0(x)\left|L_j(1;x)-1\right|\le\left|L_j\left(F_0(t)-F_0(x);x\right)\right|+\left|L_j\left(F_0(t);x\right)-F_0(x)\right|$$

yazabiliriz. $F_0\in C_{\rho_1}$ ve (4.1.9) göz önünde bulundurulursa

$$\left|L_j(1;x)-1\right| < \frac{1}{F_0(x)}\left\{\begin{array}{l}\left|L_j\left(F_0(t);x\right)-F_0(x)\right|+\varepsilon L_j(1;x) \\ +K_{\rho_1}(x)L_j\left((t-x)^2 F_0(t);x\right)\end{array}\right\} \tag{4.1.14}$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi (3.1.14) den herhangi bir $s>0$ ve $\forall j \in IN$ için

$$\sup_{|x|\le s}\left|L_j(1;x)-1\right| \le H_4\left\{\left\|L_jF_0-F_0\right\|_{\rho_1}+\varepsilon\left\|L_j\right\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}}\right\}+H_5u_j \tag{4.1.15}$$

gerçeklenir. Burada $H_4=H_4(s)=\sup\limits_{|x|\le s}\dfrac{\rho_1(x)}{F_0(x)}$ ve $H_5=H_5(s)=\sup\limits_{|x|\le s}\dfrac{K_{\rho_1}(x)}{F_0(x)}$ olmak üzere (4.1.13) eşitsizliğinde (4.1.15) ve (4.1.11) göz önüne alınırsa

$K=maks\left\{H_1+H_3H_4, B\left(H_2+H_3H_5\right)+H_3H_4\right\}$ olmak üzere

$$\sum_{j=1}^{\infty}a_{kj}^{(n)}v_j \le \varepsilon K\sum_{j=1}^{\infty}a_{kj}^{(n)}\left\|L_j\right\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}}+K\sum_{j=1}^{\infty}a_{kj}^{(n)}\left\|L_jF_0-F_0\right\|_{\rho_1}$$

$$+K\sum_{j=1}^{\infty}a_{kj}^{(n)}\left\|L_jF_1-F_1\right\|_{\rho_1}+K\sum_{j=1}^{\infty}a_{kj}^{(n)}\left\|L_jF_2-F_2\right\|_{\rho_1}$$

bulunur. $k\to\infty$ için limit alırsak (4.1.2) ve (4.1.6) bağıntıları nedeniyle,

$$\lim_k\sum_{j=1}^{\infty}a_{kj}^{(n)}\sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\sup_{|x|\le s}\left|L_j\left(f(t);x\right)-f(x)\right|=0\ ,\ \text{(n' e göre düzgün)}$$

elde edilir. O halde Lemma 4.1.2 den $\forall f\in C_{\rho_1}$ için

$$\lim_k\sum_{j=1}^{\infty}a_{kj}^{(n)}\left\|L_jf-f\right\|_{\rho_2}=0\ ,\ \text{(n' e göre düzgün)}$$

elde edilir.

4.2 Çift Değişkenli Yaklaşım Teoremi

Bölüm 4.1' de verilen yaklaşım teoremleri Liu ve Cao (2011) tarafından çift değişkenli lineer pozitif operatör dizileri için verilmiş olup bu bölümde söz konusu yaklaşım teoremleri ve ispat teknikleri incelenmiştir.

$\left\{L_j\right\}$, C_{ρ_1} den B_{ρ_2} lineer pozitif operatörlerin dizisi olsun. $B_k^{(n)}\left(f;x,y\right)$ ile çift dizileri gösterelim.

$$B_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} L_j\left(f; x, y\right) \quad \text{n=1, 2, ...}$$

Teoremin ispatı için öncelikle aşağıdaki iki lemmaya ihtiyacımız olacak.

Lemma 4.2.1 $A = \left\{A^{(n)}\right\}$ negatif olmayan sonsuz matrislerin dizisi ve $\left\{L_j\right\}$, C_{ρ_1} uzayından B_{ρ_2} lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. ρ_1 ve ρ_2 fonksiyonları $\lim\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty} \dfrac{\rho_1(x,y)}{\rho_2(x,y)} = 0$ (4.2.1) koşulunu gerçeklesin. Kabul edelim ki,

$$\sup_{n,k} \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \left\| L_j \right\|_{C_{\rho_1} \to B_{\rho_1}} < \infty \tag{4.2.2}$$

Eğer herhangi bir $s \in IR$ için,

$$\lim_k \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \left(\sup_{\sqrt{x^2+y^2} \le s} \frac{\left|L_j\left(f; x, y\right)\right|}{\rho_1\left(x, y\right)} \right) = 0 \tag{4.2.3}$$

ise bu durumda,

$$\lim_k \sum_{j}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \left\| L_j \right\|_{C_{\rho_1} \to B_{\rho_2}} = 0$$

gerçeklenir.

İspat. $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\sqrt{x^2 + y^2} > s_0$ için $\rho_1\left(x, y\right) \le \varepsilon \rho_2\left(x, y\right)$ olacak şekilde bir s_0 sayısı vardır. $\dfrac{\rho_1}{\rho_2}$ sürekli olduğundan $\sqrt{x^2 + y^2} \le s_0$ için $\rho_1\left(x, y\right) \le M \rho_2\left(x, y\right)$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır.

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \left\| L_j \right\|_{C_{\rho_1} \to B_{\rho_2}} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \left(\sup_{(x,y)\in IR^2} \frac{\left|L_j\left(f; x, y\right)\right|}{\rho_2\left(x, y\right)} \right)$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \left(\sup_{\sqrt{x^2+y^2} > s_0} \frac{\left|L_j\left(f; x, y\right)\right|}{\rho_2\left(x, y\right)} \right)$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\left(\sup_{\sqrt{x^2+y^2}\leq s_0} \frac{\left|L_j\left(f;x,y\right)\right|}{\rho_2\left(x,y\right)}\right)$$

$$\leq \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\left(\sup_{(x,y)\in IR^2} \frac{\left|L_j\left(f;x,y\right)\right|}{\rho_1\left(x,y\right)}\right)$$

$$+M\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\left(\sup_{\sqrt{x^2+y^2}\leq s_0} \frac{\left|L_j\left(f;x,y\right)\right|}{\rho_1\left(x,y\right)}\right)$$

$$=\varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \left\|L_j\right\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}} + M\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\left(\sup_{\sqrt{x^2+y^2}\leq s_0} \frac{\left|L_j\left(f;x,y\right)\right|}{\rho_1\left(x,y\right)}\right)$$

$$\leq \varepsilon \sup_{n,k} \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \left\|L_j\right\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}} + M\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\left(\sup_{\sqrt{x^2+y^2}\leq s_0} \frac{\left|L_j\left(f;x,y\right)\right|}{\rho_1\left(x,y\right)}\right)$$

$k\to\infty$ için limit alınırsa (4.2.2) ve (4.2.3) den istenen elde edilir.

Lemma 4.2.2 $A=\left\{A^{(n)}\right\}$ negatif olmayan sonsuz matrislerin dizisi olsun. Kabul edelim ki

$$\sup_{n,k} \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} < \infty \tag{4.2.4}$$

olsun. $\left\{L_j\right\}$, C_{ρ_1} ’ den B_{ρ_2} ’ ye tanımlı pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. (4.2.1) ve (4.2.2) koşullarını gerçeklesin. Eğer herhangi bir $s\in IR$ için

$$\lim_k \sum_j a_{kj}^{(n)} \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\left(\sup_{\sqrt{x^2+y^2}\leq s} \left|L_j\left(f;x,y\right)-f\left(x,y\right)\right|\right)=0 \text{, (n' e göre düzgün)} \tag{4.2.5}$$

ise $\forall f\in C_{\rho_1}$ için

$$\lim_k \sum_j a_{kj}^{(n)} \left\|L_j f - f\right\|_{\rho_2} = 0 \text{, (n' e göre düzgün)}$$

gerçeklenir.

İspat. Önceki lemma da $T_j = L_j - E$ alalım. E birim operatör,

$$\sup_{n,k}\sum_j^{\infty} a_{kj}^{(n)} \left\| T_j \right\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}} \le \sup_{n,k}\sum_j^{\infty} a_{kj}^{(n)} \left\| L_j \right\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}} + \sup_{n,k}\sum_j^{\infty} a_{kj}^{(n)} < \infty$$

$\rho_1 \ge 1$ iken, herhangi bir $s \in R$ için aşağıdaki sonuca varabiliriz.

$$\sum_j^{\infty} a_{kj}^{(n)} \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\left(\sup_{\sqrt{x^2+y^2}\le s} \frac{\left|T_j\left(f;x,y\right)\right|}{\rho_1\left(x,y\right)} \right) \le \sum_j^{\infty} a_{kj}^{(n)} \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\left(\sup_{\sqrt{x^2+y^2}\le s} \left|T_j\left(f;x,y\right)\right| \right)$$

$$= \sum_j^{\infty} a_{kj}^{(n)} \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\left(\sup_{\sqrt{x^2+y^2}\le s} \left|L_j\left(f;x,y\right) - f\left(x,y\right)\right| \right)$$

(4.2.5) den,

$$\lim_k \sum_j^{\infty} a_{kj}^{(n)} \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\left(\sup_{\sqrt{x^2+y^2}\le s} \frac{\left|T_j\left(f;x,y\right)\right|}{\rho_1\left(x,y\right)} \right) = 0$$

olur. $\left\{T_j\right\}$, Lemma 4.2.1 in koşullarını sağlar. Buradan,

$$\lim_k \sum_j^{\infty} a_{kj}^{(n)} \left\| T_j \right\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_2}} = 0$$

olur. $\forall f \in C_{\rho_1}$ için

$$\sum_j^{\infty} a_{kj}^{(n)} \left\| L_j f - f \right\|_{\rho_2} \le \sum_j^{\infty} a_{kj}^{(n)} \left\| T_j \right\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_2}} \left\| f \right\|_{\rho_1}$$

Buradan da Lemma 4.2.2 nin ispatı tamamlanır.

Teorem 4.2.1 $A=\left\{A^{(n)}\right\}$ (4.2.4) koşulunu sağlayan negatif olmayan reel terimli sonsuz matrislerin bir dizisi olsun. $\left\{L_j\right\}$, C_{ρ_1} den B_{ρ_2} ' ye lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. ρ_1 ve ρ_2 (4.2.1) koşulunu gerçeklesin.

F_i ' nin tanımı, $F_0(x,y) = \dfrac{\rho_1(x,y)}{1+x^2+y^2}$, $F_1(x,y) = \dfrac{x\rho_1(x,y)}{1+x^2+y^2}$, $F_2(x,y) = \dfrac{y\rho_1(x,y)}{1+x^2+y^2}$

$F_3(x,y) = \dfrac{(x^2+y^2)\rho_1(x,y)}{1+x^2+y^2}$ şeklinde olmak üzere

$$\lim_k \sum_j^{\infty} a_{kj}^{(n)} \left\| L_j F_i - F_i \right\|_{\rho_1} = 0 \qquad \text{(i=0, 1, 2, 3)} \qquad (4.2.6)$$

koşulu gerçeklenirse bu takdirde $\forall f \in C_{\rho_1}$ için,

$$\lim_k \sum_j^{\infty} a_{kj}^{(n)} \left\| L_j f - f \right\|_{\rho_2} = 0 \qquad (4.2.7)$$

gerçeklenir.

İspat. (4.2.6) koşulunun gerçeklendiğini kabul edelim.

$$\left\| L_j \right\|_{C_{\rho_1} \to B_{\rho_1}} = \left\| L_j \rho_1 \right\|_{\rho_1} \le \left\| L_j \rho_1 - \rho_1 \right\|_{\rho_1} + 1 \le \left\| L_j F_3 - F_3 \right\|_{\rho_1} + \left\| L_j F_0 - F_0 \right\|_{\rho_1} + 1$$

(4.2.6) koşulu nedeniyle,

$$\sup_{n,k} \sum_j^{\infty} a_{kj}^{(n)} \left\| L_j \right\|_{C_{\rho_1} \to B_{\rho_1}} \le \sup_{n,k} \sum_j^{\infty} a_{kj}^{(n)} \left\| L_j F_3 - F_3 \right\|_{\rho_1} + \sup_{n,k} \sum_j^{\infty} a_{kj}^{(n)} \left\| L_j F_0 - F_0 \right\|_{\rho_1} + \sup_{n,k} \sum_j^{\infty} a_{kj}^{(n)} < \infty$$

(4.2.2) yı elde ederiz. Şimdi (4.2.5) koşulunun sağlandığını gösterelim.

$$\left| L_j(f;x,y) - f(x,y) \right| \le L_j\left(\left| f(u,v) - f(x,y) \right|; x,y \right) + \left| f(x,y) \right| \left| L_j(1;x,y) - 1 \right| \qquad (4.2.8)$$

$f \in C_{\omega_1}$ ve $\sqrt{x^2+y^2} \le s$ olsun. f sürekli olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ $\ni |u-x| < \delta$ ve $|v-y| < \delta$ koşulunu sağlayan $\forall (u,v) \in IR^2$ için

$$\left| f(u,v) - f(x,y) \right| < \varepsilon$$

gerçeklenir.

$|u-x| \ge \delta$ ya da $|v-y| \ge \delta$ olduğunda,

$$\left| f(u,v) - f(x,y) \right| \le 2M_f \rho_1(x,y) \rho_1(u,v) = 2M_f \rho_1(x,y) F_0(u,v) \left(1 + x^2 + y^2 \right)$$

$$\le 4M_f \rho_1(x,y) F_0(u,v) \left[1 + x^2 + y^2 + (u-x)^2 + (v-y)^2 \right]$$

$$= 4M_f \rho_1(x,y) F_0(u,v) \left[(u-x)^2 + (v-y)^2 \right] \left(\frac{1+x^2+y^2}{(u-x)^2 + (v-y)^2} + 1 \right)$$

$$\le K_{\rho_1}(x,y) \left[(u-x)^2 + (v-y)^2 \right] F_0(u,v)$$

Buradan,

$$K_{\rho_1}(x,y)=4M_f\rho_1(x,y)\left(\frac{1+x^2+y^2}{\delta^2}+1\right)$$

şeklindedir. Böylece $\forall(u,v)\in IR^2$ ve $\sqrt{x^2+y^2}\le s$ için,

$$\left|f(u,v)-f(x,y)\right|<\varepsilon+K_{\rho_1}(x,y)\left[(u-x)^2+(v-y)^2\right]F_0(u,v) \tag{4.2.9}$$

olduğu görülür.

$$L_j\left(\left|f(u,v)-f(x,y)\right|;x,y\right)<\varepsilon L_j(1;x,y)$$

$$+K_{\rho_1}(x,y)L_j\left(\left((u-x)^2+(v-y)^2\right)F_0(u,v);x,y\right)$$

$$-2xL_j\left(uF_0(u,v);x,y\right)+\left(x^2+y^2\right)L_j\left(F_0(u,v);x,y\right)$$

$$=L_j\left(F_3(u,v);x,y\right)-2yL_j\left(F_2(u,v);x,y\right)$$

$$-2xL_j\left(F_1(u,v);x,y\right)+\left(x^2+y^2\right)L_j\left(F_0(u,v);x,y\right)$$

$$\le\left|L_j(F_3;x,y)-F_3(x,y)\right|+2|y|\left|L_j(F_2;x,y)-F_2(x,y)\right|$$

$$+2|x|\left|L_j(F_1;x,y)-F_1(x,y)\right|$$

$$+\left(x^2+y^2\right)\left|L_j(F_0;x,y)-F_0(x,y)\right|$$

Burada,

$$B=\max\left\{\begin{array}{l}\sup\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le s}\rho_1(x,y),\ \sup\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le s}2|x|\rho_1(x,y),\\ \sup\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le s}2|y|\rho_1(x,y),\ \sup\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le s}\left(x^2+y^2\right)\rho_1(x,y)\end{array}\right\}$$

olmak üzere herhangi bir $s\in IR$ için,

$$v_j=\sup_{\sqrt{x^2+y^2}\le s}L_j\left(\left((u-x)^2+(v-y)^2\right)F_0(u,v);x,y\right)$$

$$\le B\left\{\left\|L_jF_3-F_3\right\|_{\rho_1}+\left\|L_jF_2-F_2\right\|_{\rho_1}+\left\|L_jF_1-F_1\right\|_{\rho_1}+\left\|L_jF_0-F_0\right\|_{\rho_1}\right\} \tag{4.2.10}$$

yazılabilir.

$\left\|L_j(1;x,y)\right\|_{\rho_1} \le \left\|L_j(\rho_1;x,y)\right\|_{\rho_1} = \left\|L_j\right\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}}$ ve $F_0 \in C_{\rho_1}$ olduğundan,

$$F_0(x,y)\left|L_j(1;x,y)-1\right| \le \left|L_j(F_0;x,y)-F_0(x,y)\right| + \left|L_j\left(F_0(u,v)-F_0(x,y);x,y\right)\right|$$

(4.2.9) dan ,

$$\left|L_j(1;x,y)-1\right| < \frac{1}{F_0(x,y)}\left\{\begin{array}{l}\left|L_j(F_0;x,y)-F_0(x,y)\right| + \varepsilon L_j(1;x,y) + \\ K_{\rho_1}(x,y)L_j\left(\left((u-x)^2+(v-y)^2\right)F_0(u,v);x,y\right)\end{array}\right\}$$

Buradan herhangi bir $s \in IR$ ve $\forall j \in IN$ için, $C_1 = \sup\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le s} \dfrac{\rho_1(x,y)}{F_0(x,y)}$,

$C_2 = \sup\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le s} K_{\rho_1}$ olmak üzere,

$$\sup_{\sqrt{x^2+y^2}\le s}\left|L_j(1;x,y)-1\right| \le C_1\left\{\left\|L_jF_0-F_0\right\|_{\rho_1} + \varepsilon\left\|L_j\right\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}} + C_2 v_j\right\} \qquad (4.2.11)$$

elde edilir. Buradan (4.2.8)' e geçersek,

$C_3 = \sup\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le s} \rho_1(x,y)$, $C_4 = \sup\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le s} \left|f(x,y)\right|$ olmak üzere,

$$u_j = \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\left(\sup_{\sqrt{x^2+y^2}\le s}\left|L_j(f;x,y)-f(x,y)\right|\right)$$

$$< \varepsilon C_3\left\|L_j(1;x,y)\right\|_{\rho_1} + C_2 \sup_{\sqrt{x^2+y^2}\le s} L_j\left(\left((u-x)^2+(v-y)^2\right)F_0(u,v);x,y\right)$$

$$+C_4 \sup_{\sqrt{x^2+y^2}\le s}\left|L_j(1;x,y)-1\right|$$

$$\le C_3\varepsilon\left\|L_j\right\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}} + C_2 v_j + C_4 \sup_{\sqrt{x^2+y^2}\le s}\left|L_j(1;x,y)-1\right|$$

sağlanır. (4.2.9), (4.2.10) ve (4.2.11) den,

$C = \max\left\{M\left(C_3+C_1C_4\right), BC_2 + C_1C_4 + BC_1C_2C_4\right\}$ olmak üzere ,

$$u_j \le C\varepsilon \left\| L_j \right\|_{C_{\rho_1} \to B_{\rho_1}} + C\left\{ \left\| L_j F_3 - F_3 \right\|_{\rho_1} + \left\| L_j F_2 - F_2 \right\|_{\rho_1} + \left\| L_j F_1 - F_1 \right\|_{\rho_1} + \left\| L_j F_0 - F_0 \right\|_{\rho_1} \right\}$$

(4.2.12)

Bu son eşitsizlikte her iki tarafın $\sum_j$ toplamını alırsak,

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} u_j \le \varepsilon C \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \left\| L_j \right\|_{C_{\rho_1} \to B_{\rho_1}} + C \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \left\| L_j F_0 - F_0 \right\|_{\rho_1} + C \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \left\| L_j F_1 - F_1 \right\|_{\rho_1}$$

$$+ C \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \left\| L_j F_2 - F_2 \right\|_{\rho_1} + C \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \left\| L_j F_3 - F_3 \right\|_{\rho_1}$$

olduğu görülür. Buradan $k \to \infty$ için limit alınırsa (4.2.5) elde edilmiş olur.

Lemma 4.2.2 den $\forall f \in C_{\rho_1}$ için,

$$\lim_k \sum_j^{\infty} a_{kj}^{(n)} \left\| L_j f - f \right\|_{\rho_2} = 0$$

gerçeklenir

5. AĞIRLIKLI UZAYLARDA A- TOPLAM SÜRECİ

Bu bölümde Atlıhan ve Orhan (2008) tarafından A- toplam sürecini kullanılarak geliştirilen Korovkin tipi yaklaşım teoremlerini inceleyeceğiz.

Lemma 5.1 $A=\left\{A^{(n)}\right\}$ negatif olmayan sonsuz matrislerin bir dizisi olsun. $\left\{L_j\right\}$, C_{ρ_1} uzayını B_{ρ_2} uzayına dönüştüren (2.1.2) koşulunu sağlayan lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. ρ_1 ve ρ_2 ağırlık fonksiyonları da (4.1.1) koşulunu sağlasın. Ayrıca

$$\sup_{n,k}\left\|B_k^{(n)}\right\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}}<\infty \tag{5.2}$$

gerçeklendiğini kabul edelim. Eğer herhangi bir $s>0$ reel sayısı için

$$\lim_k \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\sup_{|x|\le s}\frac{\left|B_k^{(n)}(f;x)\right|}{\rho_1(x)}=0, \text{ (n' e göre düzgün)} \tag{5.3}$$

ise bu durumda

$$\lim_k\left\|B_k^{(n)}\right\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_2}}=0, \text{ (n' e göre düzgün)}$$

gerçeklenir.

İspat. (4.1.1) koşulu nedeniyle her $\varepsilon>0$ için $|x|>s_0$ olduğunda $\rho_1(x)\le\varepsilon\rho_2(x)$ olacak şekilde bir $s_0>0$ sayısı vardır. Diğer taraftan ρ_1 ve ρ_2 ağırlık fonksiyonları sürekli olduğundan $|x|\le s_0$ için $\rho_1(x)\le H\rho_2(x)$ olacak şekilde bir $H>0$ sayısı vardır. Böylece

$$\left\|B_k^{(n)}\right\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_2}}=\sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\left\|B_k^{(n)}f\right\|_{\rho_2}=\sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\sup_{x\in IR}\frac{\left|B_k^{(n)}(f;x)\right|}{\rho_2(x)}=\sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\sup_{x\in IR}\frac{\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_{kj}^{(n)}L_j(f;x)\right|}{\rho_2(x)}$$

$$\leq \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\sup_{|x|<s_0}\frac{\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_{kj}^{(n)}L_j\left(f;x\right)\right|}{\rho_2(x)}+\sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\sup_{|x|\geq s_0}\frac{\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_{kj}^{(n)}L_j\left(f;x\right)\right|}{\rho_2(x)}$$

$$\leq H\sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\sup_{|x|<s_0}\frac{\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_{kj}^{(n)}L_j\left(f;x\right)\right|}{\rho\ (x)}+\varepsilon\left\|B_k^{(n)}\right\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Burada önce n üzerinden supremum daha sonra da $k\to\infty$ için limit alınırsa (5.2) ve (5.3) nedeniyle ispat tamamlanır.

Lemma 5.2 $A=\left\{A^{(n)}\right\}$ negatif olmayan reel terimli sonsuz matrislerin bir dizisi olmak üzere

$$\lim_k\sum_{j=1}^{\infty}a_{kj}^{(n)}=1,\ \text{(n' e göre düzgün)} \tag{5.4}$$

koşulu gerçeklesin. $\left\{L_j\right\}$, C_{ρ_1} uzayını B_{ρ_2} uzayına dönüştüren (2.1.2) koşulunu sağlayan lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. Ayrıca (4.1.1) ve (5.2) gerçeklesin. Eğer herhangi bir $s\in IR$ için

$$\lim_k\sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\sup_{|x|\leq s}\left|B_k^{(n)}\left(f;x\right)-f(x)\right|=0,\ \text{(n' e göre düzgün)} \tag{5.5}$$

ise bu durumda her $f\in C_{\rho_1}$ için

$$\lim_k\left\|B_k^{(n)}f-f\right\|_{\rho_2}=0,\ \text{(n' e göre düzgün)}$$

gerçeklenir.

İspat. E, C_{ρ_1} uzayı üzerinde tanımlı birim operatör olsun. $T_j:=L_j-E$ alalım.

$$P_k^{(n)}\left(f;x\right)=\sum_{j=1}^{\infty}a_{kj}^{(n)}T_j\left(f(t);x\right)$$

Şeklinde tanımlı operatör her k ve n için (2.1.2) ve (5. 4) nedeniyle anlamlı olup B_{ρ_2} uzayına aittir. O halde

$$\left\|P_k^{(n)}\right\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}}=\sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\left\|P_k^{(n)}f\right\|_{\rho_1}=\sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\sup_{x\in IR}\frac{\left|P_k^{(n)}\left(f;x\right)\right|}{\rho_1(x)}$$

$$\leq \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{x\in IR} \frac{\left|B_k^{(n)}(f;x)\right|}{\rho_1(x)} + \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{x\in IR} \frac{\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} f(x)\right|}{\rho_1(x)}$$

$$= \left\|B_k^{(n)}\right\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}} + \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \|f\|_{\rho_1} \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)}$$

yazabiliriz. Buradan (5. 2) ve (5. 4) koşulları nedeniyle

$$\sup_{n,k} \left\|P_k^{(n)}\right\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}} < \infty$$

olduğu görülür. O halde $P_k^{(n)}$ için (5. 2) gerçeklenir. Şimdi (5. 3) ifadesinin gerçeklendiğini gösterelim. IR üzerinde $\rho_1 \geq 1$ olduğundan herhangi bir $s > 0$ için

$$\sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{|x|\leq s} \frac{\left|P_k^{(n)}(f;x)\right|}{\rho_1(x)} \leq \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{|x|\leq s} \left\{ \frac{\left|B_k^{(n)}(f;x) - f(x)\right|}{\rho_1(x)} + \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{|x|\leq s} \frac{\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} f(x) - f(x)\right|}{\rho_1(x)} \right\}$$

$$\leq \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{|x|\leq s} \left|B_k^{(n)}(f;x) - f(x)\right| + \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \|f\|_{\rho_1} \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} - 1\right|$$

elde ederiz. $k \to \infty$ için limit alırsak (5. 4) ve (5. 5) koşulları nedeniyle

$$\lim_{k} \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1} \sup_{|x|\leq s} \frac{\left|P_k^{(n)}(f;x)\right|}{\rho_1(x)} = 0, \text{ (n' göre düzgün)}$$

gerçeklenir. O halde $P_k^{(n)}$ operatörleri Lemma 5. 1 in koşullarını gerçekler. Böylece

$$\lim_{k} \left\|P_k^{(n)}\right\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_2}} = 0, \text{ (n' göre düzgün)} \tag{5. 6}$$

elde ederiz. ρ_1 ve ρ_2 ağırlık fonksiyonları sürekli olduğundan ve (4.1.1) koşulu gerçeklendiğinden $\sup_{x\in IR}\left\{\frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)}\right\} \leq M$ olacak biçimde bir $M > 0$ sayısı vardır. O halde

$$\left\|B_k^{(n)} f - f\right\|_{\rho_2} = \left\|\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} L_j f - f\right\|_{\rho_2}$$

$$\leq \left\|\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \left(L_j f - f\right)\right\|_{\rho_2} + \|f\|_{\rho_2} \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} - 1\right|$$

$$= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \left(L_j f - f \right) \right\|_{\rho_2} + M \| f \|_1 \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} - 1 \right|$$

$$\leq \left\| P_k^{(n)} \right\|_{C_{\rho_1} \to B_{\rho_2}} + M \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} - 1 \right|$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan (5. 4) ve (5. 6) koşulları nedeniyle her $f \in C_{\rho_1}$ için

$$\lim_k \left\| B_k^{(n)} f - f \right\|_{\rho_2} = 0 \text{, (n' e göre düzgün)}$$

gerçeklenir. Şimdi bu bölümün temel teoremini verebiliriz.

Teorem 5.3 $A = \left\{ A^{(n)} \right\}$**,** (5.4) koşulunu sağlayan negatif olmayan reel terimli sonsuz matrislerin bir dizisi olsun. $\left\{ L_j \right\}$, C_{ρ_1} uzayını B_{ρ_2} uzayına dönüştüren ve (2.1.2) koşulunu sağlayan pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Ayrıca ρ_1 ve ρ_2 ağırlık fonksiyonları (4.1.1) koşulunu gerçeklesin. Eğer her bir $\nu = 0,1,2$ için $F_\nu(x) = \dfrac{x^\nu \rho_1(x)}{1+x^2}$ olmak üzere

$$\lim_k \left\| B_k^{(n)} F_\nu - F_\nu \right\|_{\rho_1} = 0 \text{, (n' e göre düzgün)} \tag{5.7}$$

ise her $f \in C_{\rho_1}$

$$\lim_k \left\| B_k^{(n)} f - f \right\|_{\rho_2} = 0 \text{, (n' e göre düzgün)} \tag{5.8}$$

gerçeklenir.

İspat. Lemma 5. 2' nin koşullarının sağlandığını göstereceğiz. Önce (5.7) koşullarının sağlandığını kabul edelim. Bu durumda

$$\left\| B_k^{(n)} \right\|_{C_{\rho_1} \to B_{\rho_1}} = \left\| B_k^{(n)} \rho_1 + \rho_1 - \rho_1 \right\|_{\rho_1}$$

$$\leq \left\| B_k^{(n)} \rho_1 \frac{1+t^2}{1+t^2} - \rho_1 \frac{1+t^2}{1+t^2} \right\|_{\rho_1} + \left\| \rho_1 \right\|_{\rho_1}$$

$$\leq \left\| B_k^{(n)} F_2 - F_2 \right\|_{\rho_1} + \left\| B_k^{(n)} F_0 - F_0 \right\|_{\rho_1} + 1$$

elde ederiz. (5.7) koşulu nedeniyle

$$\sup_{n,k}\left\|B_k^{(n)}\right\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}} \le \sup_{n,k}\left\|B_k^{(n)}F_2 - F_2\right\|_{\rho_1} + \sup_{n,k}\left\|B_k^{(n)}F_0 - F_0\right\|_{\rho_1} < \infty$$

gerçeklenir. Böylece (5. 2) koşulunu elde ederiz. Şimdi ise (5. 5) koşulunun sağlandığını göstereceğiz. Şimdi $f \in C_{\rho_1}$ ve $s > 0$ olmak üzere $|x| \le s$ olsun. f fonksiyonu IR üzerinde sürekli olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $|t-x| < \delta$ koşulunu sağlayan her t,x için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı vardır. $|t-x| \ge \delta$ olduğunda da

$$\begin{aligned} |f(t) - f(x)| &\le 2M_f\,\rho_1(x)\rho_1(t) \\ &= 2M_f\,\rho_1(x)F_0(t)\left(1+t^2\right) \\ &= K_{\rho_1}(x)\left(t-x\right)^2 F_0(t) \end{aligned}$$

gerçeklenir; burada $K_{\rho_1}(x) = 4M_f\,\rho_1(x)\left(\dfrac{1+x^2}{\delta^2}+1\right)$ şeklinde tanımlıdır. O halde her

$t \in IR$ ve $|x| \le s$ için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + K_{\rho_1}(x)\left(t-x\right)^2 F_0(t) \tag{5.9}$$

yazabiliriz. Diğer yandan

$$\left|B_k^{(n)}(f;x) - f(x)\right| \le B_k^{(n)}\left(|f(t)-f(x)|;x\right) + |f(x)|\left|B_k^{(n)}(1;x)-1\right|$$

eşitsizliği gerçeklenir. Buradan (5.9) nedeniyle herhangi bir $s > 0$ için

$$H_1 = H_1(s) = \sup_{|x|\le s}\rho_1(x)\ ,\quad H_2 = H_2(s) = \sup_{|x|\le s}K_{\rho_1}(x)\,,\quad H_3 = H_3(s) = \sup_{|x|\le s}|f(x)|$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\sup_{|x|\le s}\left|B_k^{(n)}(f;x) - f(x)\right| &\le \varepsilon H_1\left\|B_k^{(n)}(1)\right\|_{\rho_1} + H_2\sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\sup_{|x|\le s}\left|B_k^{(n)}\left(F_0(t)\left(t-x\right)^2;x\right)\right| \\ &\quad + H_3\sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\sup_{|x|\le s}\left|B_k^{(n)}(1;x)-1\right| \end{aligned} \tag{5.10}$$

elde edilir. Diğer taraftan herhangi bir $s>0$ için

$B=B(s)=maks\left\{\sup\limits_{|x|\le s}\rho_1(x), 2\sup\limits_{|x|\le s}|x|\rho_1(x), \sup\limits_{|x|\le s}x^2\rho_1(x)\right\}$ ile verilmek üzere

$$u_k^{(n)}=\sup_{|x|\le s}B_k^{(n)}\left(F_0(t)(t-x)^2;x\right) \tag{5.11}$$

$$\le\sup_{|x|\le s}\left\{B_k^{(n)}\left(t^2F_0(t);x\right)-2xB_k^{(n)}\left(tF_0(t);x\right)+x^2B_k^{(n)}\left(F_0(t);x\right)\right\}$$

$$\le\sup_{|x|\le s}\left\{\left|B_k^{(n)}\left(F_2;x\right)-F_2(x)\right|+|2x|\left|B_k^{(n)}\left(F_1;x\right)-F_1(x)\right|+x^2\left|B_k^{(n)}\left(F_0;x\right)-F_0(x)\right|\right\}$$

$$\sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\sup_{|x|\le s}\left|B_k^{(n)}\left(f;x\right)-f(x)\right|\le H\left\{\begin{array}{l}\left\|B_k^{(n)}F_2-F_2\right\|_{\rho_1}+\left\|B_k^{(n)}F_1-F_1\right\|_{\rho_1}\\+\left\|B_k^{(n)}F_0-F_0\right\|_{\rho_1}+\varepsilon\left\|B_k^{(n)}\right\|_{\rho_1}\end{array}\right\}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Yine

$$F_0(x)\left|B_k^{(n)}(1;x)-1\right|\le\left|B_k^{(n)}\left(F_0(t);x\right)-F_0(x)\right|+B_k^{(n)}\left(\left|F_0(t)-F(x)\right|;x\right)$$

yazabiliriz. $F_0\in C_{\rho_1}$ olduğu ve (5.9) göz önünde bulundurulursa

$$\left|B_k^{(n)}(1;x)-1\right|\le\frac{1}{F_0(x)}\left\{\begin{array}{l}\left|B_k^{(n)}\left(F_0(t);x\right)-F_0(x)\right|+\varepsilon B_k^{(n)}(1;x)\\+K_{\rho_1}(x)B_k^{(n)}\left((t-x)^2F_0(t);x\right)\end{array}\right\}$$

elde ederiz. Herhangi bir $s>0$ ve her $k,n\in N$ için $H_4=H_4(s)=\sup\limits_{|x|\le s}\dfrac{\rho_1(x)}{F_0(x)}$ ve

$H_5=H_5(s)=\sup\limits_{|x|\le s}\dfrac{K_{\rho_1}(x)}{F_0(x)}$ olmak üzere

$$\sup_{|x|\le s}\left|B_k^{(n)}(1;x)-1\right|\le H_4\left\{\left\|B_k^{(n)}F_0-F_0\right\|_{\rho_1}+\varepsilon\left\|B_k^{(n)}(1)\right\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}}\right\}+H_5u_k^{(n)} \tag{5.12}$$

gerçeklenir. Diğer taraftan

$$\left\|B_k^{(n)}\right\|_{\rho_1}\le\left\|B_k^{(n)}(\rho_1)\right\|_{\rho_1}=\left\|B_k^{(n)}\right\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}} \tag{5.13}$$

olup (5.10) eşitsizliğinde (5.11), (5.12) ve (5.13) göz önüne alınırsa

$$\sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\sup_{|x|\le s}\left|B_k^{(n)}(f;x)-f(x)\right|\le H\left\{\begin{array}{l}\varepsilon\left\|B_k^{(n)}\right\|_{\rho_1}+\left\|B_k^{(n)}F_2-F_2\right\|_{\rho_1}\\+\left\|B_k^{(n)}F_1-F_1\right\|_{\rho_1}+\left\|B_k^{(n)}F_0-F_0\right\|_{\rho_1}\end{array}\right\}$$

elde edilir. Burada $H=maks\left\{H_1+H_3H_4, B\left(H_2+H_3H_5\right)+H_3H_4\right\}$ olup (5.2) ve (5.7) nedeniyle

$$\lim_k \sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\sup_{|x|\le s}\left|B_k^{(n)}(f;x)-f(x)\right|=0, \text{ (n' e göre düzgün)}$$

elde edilir. Böylece Lemma 5.2' den $\{L_j\}$, C_{ρ_1} üzerinde bir toplam süreci olur. Yani her $f\in C_{\rho_1}$ için

$$\lim_k\left\|B_k^{(n)}f-f\right\|_{\rho_2}=0, \text{ (n' e göre düzgün)}$$

gerçeklenir.

6. YAKINSAKLIK ORANI

Bu bölümde Teorem 5.3 de verilen yakınsamanın ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla oranı incelenmiştir.

Burada ρ_1 ağırlık fonksiyonu IR üzerinde $\rho_1(x)=1+x^2$ olarak kabul edeceğiz.

Aşağıdaki Lemma 6.1, Teorem 5.3 de verilen lineer pozitif operatörlerin dizisi için yakınsaklık oranını verir.

Lemma 6.1 $A=\left\{A^{(n)}\right\}$ negatif olmayan sonsuz matrislerin bir dizisi olsun ve $\left\{L_j\right\}$, C_{ρ_1} uzayını B_{ρ_2} uzayına dönüştüren ve (2.1.2) koşulunu sağlayan lineer pozitif operatörlerin dizisi olsun. Ayrıca (4.1.1) ve (5.2) koşulunu sağlasın. $\varphi_x(t)=(t-x)^2$ ve $F_o(t)=1$ olmak üzere her bir j için $L_j\varphi_x\in C_{\rho_1}$ ve $L_jF_o\in C_{\rho_1}$ olsun. Bu durumda $\alpha_k^{(n)}=\sqrt{\left\|B_k^{(n)}(\varphi_x)\right\|_{\rho_1}}$ ve H, s ye bağlı sabit olmak üzere herhangi bir $s>0$ ve $\forall k,n\in N$ için,

$$\sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\sup_{|x|\le s}\left|B_k^{(n)}(f;x)-f(x)\right|\le H\left\{\sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\omega_{\rho_1}\left(f;\alpha_k^{(n)}\right)+\left\|B_k^{(n)}F_o-F_o\right\|_{\rho_1}\right\} \tag{6.1}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat. $\forall k,n\in N$ için $B_k^{(n)}$ operatörleri pozitif ve lineer olduğundan herhangi bir $\delta>0$ için,

$$\begin{aligned}\left|B_k^{(n)}(f;x)-f(x)\right| &\le B_k^{(n)}\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)+\left|f(x)\right|\left|B_k^{(n)}(1;x)-1\right| \qquad (6.2)\\ &=B_k^{(n)}\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)+\left|f(x)\right|\left|B_k^{(n)}(F_o;x)-F_o(x)\right|\\ &\le B_k^{(n)}\left(\rho_1(x)\omega_{\rho_1}\left(f,\frac{\delta|t-x|}{\delta}\right);x\right)+\left|f(x)\right|\left|B_k^{(n)}(F_o;x)-F_o(x)\right|\end{aligned}$$

$$\leq \rho_1(x)\omega_{\rho_1}\left(f,\delta\right)B_k^{(n)}\left(1+\left[\frac{|t-x|}{\delta}\right];x\right)+\left|f(x)\right|\left|B_k^{(n)}\left(F_o;x\right)-F_o\left(x\right)\right|$$

$$\leq \rho_1(x)\omega_{\rho_1}\left(f,\delta\right)B_k^{(n)}\left(1+\frac{\left(t-x\right)^2}{\delta^2};x\right)+\left|f(x)\right|\left|B_k^{(n)}\left(F_o;x\right)-F_o\left(x\right)\right|$$

$$\leq \rho_1(x)\omega_{\rho_1}\left(f,\delta\right)\left\{B_k^{(n)}\left(\rho_1;x\right)+\frac{1}{\delta^2}B_k^{(n)}\left(\varphi_x;x\right)\right\}$$
$$+\left|f(x)\right|\left|B_k^{(n)}\left(F_o;x\right)-F_o\left(x\right)\right|$$

(6.2) eşitsizliğinden herhangi bir $s>0$ ve $\forall k,n\in N$ için

$H_1=H_1(s)=\sup\limits_{|x|\leq s}\rho_1(x)=1+s^2$ ve $H_2=H_2(s)=\sup\limits_{|x|\leq s}\dfrac{|f(x)|}{\rho_1(x)}$ olmak üzere,

$$\sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\sup_{|x|\leq s}\left|B_k^{(n)}\left(f;x\right)-f(x)\right|\leq H_1^2\sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\omega_{\rho_1}\left(f,x\right)\left\|B_k^{(n)}\right\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}}$$

$$+H_1^2\sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\omega_{\rho_1}\left(f,\delta\right)\frac{1}{\delta^2}\left\|B_k^{(n)}\left(\varphi_x\right)\right\|_{\rho_1}$$

$$+H_2\left\|B_k^{(n)}F_o-F_o\right\|_{\rho_1} \qquad (6.3)$$

gerçeklenir. Hipotezden $\forall k,n\in N$ için $\left\|B_k^{(n)}\right\|_{C_{\rho_1}\to B_{\rho_1}}\leq M$ olup son eşitlikte

$\delta=\alpha_k^{(n)}=\sqrt{\left\|B_k^{(n)}\left(\varphi_x\right)\right\|_{\rho_1}}$ alınırsa $H=maks\left\{\left(1+M\right)H_1^2,H_2\right\}$ olmak üzere

$$\sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\sup_{|x|\leq s}\left|B_k^{(n)}\left(f;x\right)-f(x)\right|\leq H\left\{\sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\omega_{\rho_1}\left(f,\alpha_k^{(n)}\right)+\left\|B_k^{(n)}F_o-F_o\right\|_{\rho_1}\right\}$$

gerçeklenir. Artık aşağıdaki yaklaşım teoremini verebiliriz.

Teorem 6.2 $A=\left\{A^{(n)}\right\}$ ve $\left\{L_j\right\}$ Lemma 5.2 deki gibi tanımlansın. ρ_1 ve ρ_2 ağırlık fonksiyonları da (4.1.1) koşulunu gerçeklesin. $\varphi_x(t)=\left(t-x\right)^2$ ve $F_o(t)=1$ olmak üzere her j için $L_j\varphi_x\in C_{\rho_1}$ ve $L_jF_o\in C_{\rho_1}$ olsun. Eğer,

i) $\lim\limits_k\left\|B_k^{(n)}F_0-F_0\right\|_{\rho_0}=0$, (n' e göre düzgün) ii) $\lim_{k}\left(\sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\omega_{\rho_1}\left(f,\alpha_k^{(n)}\right)\right)=0$, (n' e göre düzgün)

ise $\forall f\in C_{\rho_1}$ için,

$$\lim_{k}\left\|B_k^{(n)}f-f\right\|_{\rho_2}=0\text{, (n' e göre düzgün)}$$

gerçeklenir.

İspat. (6.1) eşitsizliği, i ve ii hipotezleri nedeniyle

$$\lim_{k}\sup_{\|f\|_{\rho_1}=1}\sup_{|x|\leq s}\left|B_k^{(n)}(f;x)-f(x)\right|=0\text{, (n' e göre düzgün)}$$

sağlanır. Lemma 5.2 nedeniyle $\{L_j\}$, C_{ρ_1} üzerinde bir $\mathcal{A}$- Toplam süreci olup ispat tamamlanır.

7. KAYNAKLAR

Altomare, F. and Campiti, M. 1994. *Korovkin type Approximation Theory and its Application*, Walter de Gruyter Publ. , Berlin, Germany.

Atlıhan, Ö. G. and Orhan, C. 2007. Matrix Summability and Positive Linear Operators. *Positivity*. 11; 387-398.

Atlıhan, Ö. G. and Orhan, C. 2008. Summation Process of and Positive Linear Operators. *Computers and Math with Appl.* 56;1188-1195

Bohman, H. 1952. On approximation of continuous and analytic functions. *Ark. Mat.* , 2; 43-56.

Boos, J., 2000. *Classical and Modern Methods in Summability*. Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publ., London.

Gadjiev A.D, 1976. Theorems of the type of P.P. Korovkin's theorems. *Mat. Zametki*, 20; 781-786.

Gadjiev, A. D. and Orhan, C. 2002. Some approximation theorems via statistical convergence. *Rocky Mountain J. Math.* , 32 (1); 129- 137.

Hacıyev, A. ve Hacısalihoğlu, H. H., 1995. *Lineer Pozitif Operator Dizilerinin Yakınsaklığı*. Ankara Üniversitesi Yayınları.

Hardy, G. H. 1949. *Divergent Series*. Oxford Univ. Press, London.

King, J. P. and Swetits, J. J., 1970. Positive linear operators and summability. J. Austral. Math. *Soc.*, 11; 281-290.

Korovkin, P. P., 1953. On convergence of linear positive operators in the space of continuos functions. *Doklady Akad. Nauk SSSR*. 90; 961-964.

Korovkin, P. P., 1960. *Linear Operators and Theory of Approximation*. Hindustan publ. Co., Delhi.

Liu Y. and Cao F. 2011. Approximation Theorems by Positive Linear Operators in Weigghted Spaces. *Positivity* 15, no:1,87-103.

Lorentz, G. G., 1948. A contribution to the theory of divergent sequences. *Acta Math.*, 80; 167-190.

Maddox, I. J., 1978. A new type of convergence. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 83; 61-64.

Mohapatra, R. N., 1977. Quantitative results on almost convergence of a sequence of positive linear operators. *J. Approx. Theory*. 20; 239-250.

Nishishiraho, T., 1981. Quantitative theorems on linear approximation processes of convolution operators in Banach spaces. *Tohoku Math. J.,* 33; 109-126.

Nishishiraho, T., 1983. Convergence of positive linear approximation process. *Tohoku Math. J.,* 35; 441-458.

Stieglitz, M., 1973: Eine verallgenmeinerung des begriftts festkonver-genz. *Math. Japonica,* 18; 53-70

8. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : DENİZ KOÇ

Doğum Yeri ve Tarihi : ŞİŞLİ / 12.06.1989

Lisans Üniversite : PAMUKKALE

Elektronik posta : denizkocozturk@gmail.com

İletişim Adresi : Gazi Mah.Toki Konutları Kat:3 No:13

Kepez/ ANTALYA