

**Dörtgenleri Simetri Perspektifinden İncelemenin
Geometrik Düşünmeye Etkisi: Dikdörtgen ve Eşkenar
Dörtgen Tanımı Örnekleri* ****

**The Impact of Exploring Quadrilaterals from Symmetry
Perspective on Geometric Thinking: Cases of
Definitions of Rectangle and Rhombus**

Sibel KAZAK¹, Asuman DUATEPE-PAKSU²

¹Pamukkale Üniversitesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik
Eğitimi Anabilim Dalı. skazak@pau.edu.tr

²Pamukkale Üniversitesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik
Eğitimi Anabilim Dalı. aduatepe@pau.edu.tr

Makalenin Geliş Tarihi: 20.10.2017

Yayına Kabul Tarihi: 13.09.2019

ÖZ

Bu araştırmanın amacı dörtgenlerin kâğıt katlama kullanılarak simetri bakış açısından incelendiği 4 haftalık derse katılan 21 ilköğretim matematik öğretmenliği programı ikinci sınıf öğrencisinin geometrik düşüncelerindeki değişimi incelemektir. Bu kapsamda ders öncesi ve sonrasında katılımcıların dikdörtgen ve eşkenar dörtgeni tanımlamalarındaki ve bu şekillerin tanımlarına olan yaklaşımlarındaki değişime bakılmıştır. Araştırmada tek grup ön test - son test deseni kullanılmıştır. Araştırma verileri dörtgenleri belirleme ve tanımlama ölçeğinin ön test ve son test olarak uygulanması ve seçilen 5 katılımcıyla uygulama sonunda yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelerle toplanmıştır. Veriler dörtgen tanımlarının hariç tutan, kapsayıcı ve yeterli ve gerekli koşulu içerme durumlarına göre analiz edilmiştir. Uygulama sonunda katılımcıların dikdörtgen ve eşkenar dörtgen tanımlarında uygulama öncesine göre kapsayıcı ilişkilerin anlaşılmasına yönelik fark edilebilir bir gelişme görülmüştür. Bunun yanı sıra katılımcıların yaptıkları tanımların yeterli ve gerekli olma koşuluna göre de gelişme gösterdikleri tespit edilmiştir.

Anahtar Sözcükler: *Yeterli ve Gerekli Koşul, Hariç Tutan Tanım, Kapsayıcı Tanım, Simetri, Kâğıt Katlama, Dörtgen*

ABSTRACT

*Bu çalışma PAÜBAP 2017HZDP004 no'lu proje kapsamında desteklenmiştir.

** Kazak, S. ve Duatepe-Paksu, A. (2019). Dörtgenleri simetri perspektifinden incelemenin geometrik düşünmeye etkisi: dikdörtgen ve eşkenar dörtgen tanımı örnekleri. *Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 39(3), 1421-1451.

The aim of this study was to examine the change in students' geometric thinking through their approaches to definitions of rectangle and rhombus after an intervention. The intervention involved students' exploration of quadrilaterals from symmetry perspective using paper folding. The participants were 21 sophomore students enrolled in a Teaching Mathematics Program at a university. Single group, pre- and post-test research design was used in the study. The data were collected through a questionnaire that involves determining and defining quadrilaterals (before and after the intervention) and interviews with selected five students after the intervention. Data were analyzed in respect to such aspects of quadrilateral definitions as exclusiveness, inclusiveness and necessary and sufficient conditions. After the intervention there was a notable development in participants' understanding of inclusive relations in their definitions of rectangle and rhombus. In addition, their definitions improved with respect to the necessary and sufficient conditions of these quadrilaterals.

Keywords: *Necessary and Sufficient Conditions, Exclusive Definition, Inclusive Definition, Symmetry, Paper Folding, Quadrilateral*

GİRİŞ

Geometrik düşünme biçimlerini hiyerarşik düzeyler halinde açıklayan Van Hiele geometrik düşünme modeline göre geometri öğrenirken geçilen 5 düzeyden ikincisinde bireyler dörtgenlerin özelliklerini kavrarırken, üçüncü düzeyde dörtgen sınıfları arasında basit çıkarımlar yapmaya başlarlar (van Hiele, 1986). Bu çıkarımlar sayesinde de dörtgenlerle ilgili tanımlar, sınıf ilişkileri ve sınıflandırma öğrenciler için daha anlamlı hâle gelir. Bu çalışma ile kâğıt katlama kullanarak dörtgenleri simetri bakış açısından incelemenin ilköğretim matematik öğretmenliği programında okuyan öğrencilerin geometrik düşünme biçimlerine etkisi incelenmiştir. Çalışmada öğrencilerin geometrik düşünme biçimleri incelenirken dörtgenleri belirleyebilmelerine, dörtgenlere ilişkin yaptıkları tanımlara ve dörtgenlerin sınıf ilişkilerine yönelik anlayışlarına odaklanılmıştır.

Matematiksel Tanımlar: Dörtgen Örnekleri

Matematiksel tanımların temel unsurlarından birisi, bir tanım ifadesinin o kavrama ilişkin hem gerekli hem de yeterli koşulları belirtmesidir (Çakıroğlu, 2013). Diğer bir deyişle tanımın o kavram için gereken ve o kavramı anlayabilmeyi garantileyen minimum koşulları içermesi gerekir. Örneğin, “kenarları eş dörtgen” ifadesi kareyi tanımlamak için gerekli bir bilgiyi içerir ancak yeterli koşulu sağlayan bir tanım değildir çünkü bu ifade

karenin bir üst sınıfında yer alan eşkenar dörtgeni tanımlamaktadır. Bununla birlikte “dik açısı olan, kenarları eş dörtgen” ifadesi kare için gerekli ve yeterli koşulları içeren bir tanımdır.

Bir kavrama yönelik üretilebilecek tanımlardan bazıları o kavramı anlamak için gerekli olan koşullardan daha fazlasını içerebilir. Örneğin “kenarları eş dörtgen” ifadesi eşkenar dörtgen için gerekli ve yeterli koşulları içeren bir tanımdır. Bu dörtgen için “kenarları eş ve karşılıklı kenarları paralel dörtgen” biçiminde de bir tanım yapılabilir. Ancak ikinci tanımdaki “karşılıklı kenarları paralel” ifadesi dörtgenin kenarlarının eşliği verildikten sonra gerekli olmayan bir açıklamadır. Kenarları eş olan bir dörtgenin karşılıklı kenarlarının eş olacağı, dolayısıyla karşılıklı kenarlarının paralel de olacağı sonucu çıkarılabilir. İfadedeki koşullardan yola çıkarak elde edilebilecek özellikleri tanımda yeniden vermek mutlaka gerekli değildir. Bu şekilde gerekli olan koşullardan fazlasını veren tanımlar ekonomik olmayan tanımlardır. Ekonomik tanımlar ise kavram için verilen koşullardan çıkarım yoluyla elde edilebilecek bilgileri vermeden gerekli ve yeterli koşulları içeren tanımlardır.

Bunun yanında kavram hiyerarşisine ve aksiyomatik yapıya uygunluk da kavramlar tanımlanırken dikkat edilmesi gereken unsurlar arasındadır. Buna göre her bir kavram daha genel ve aksiyomatik olarak dayandırılabilir bir kavramı kullanarak tanımlanmalıdır ve kavrama ait alt sınıfları anlamamıza da olanak vermelidir. Örneğin, dikdörtgen “dik açılı paralelkenar” olarak tanımlanabilir. Bu tanım dikdörtgeni bir çeşit paralelkenar olarak sınıfladığı gibi kareyi de dikdörtgenin özel bir hali olarak anlamamıza olanak tanımaktadır. Diğer bir deyişle bu şekilde bir tanımlama dikdörtgeni hem üst hem de alt sınıfı olan dörtgenlerle ilişkilendirmeyi sağlamaktadır. Bu örnekte olduğu gibi bir kavramı alt sınıflarını da içine alacak biçimde anlatan tanımlara kapsayıcı tanım denir (Çakıroğlu, 2013). Diğer taraftan dikdörtgen için yapılan “karşılıklı iki uzun, iki kısa kenarı olan dik açılı dörtgen” tanımı kareyi dışlayan bir tanım olduğundan hariç tutan tanım (Öztoprakçı ve Çakıroğlu, 2013) kategorisindedir. Buradan anlaşılacağı gibi hariç tutan tanımlar kavramlar arasındaki ilişkileri dikkate almaz ve bireylerin kavram imajlarının tek tip bir örnekle sınırlı hale gelmesine sebep olabilir. Kapsayıcı tanımlar ise

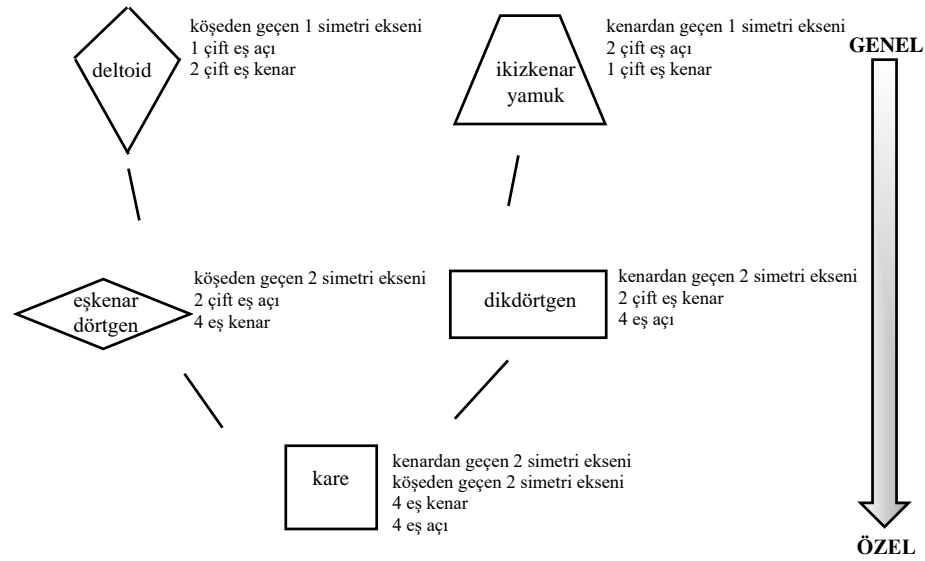
kavramlar arasındaki ilişkilerin daha iyi anlaşılmasını sağlamanın yanı sıra daha ekonomik tanımların oluşturulmasını sağlar (de Villiers, 1994). Ayrıca üst düzey düşünce becerisi kazandırması bakımından da kapsayıcı tanımlar daha çok kabul görmektedir (Çakıroğlu, 2013).

Van Hiele (1986) geometrik düşünme düzeylerinin ikincisi olan betimsel düzeyde bireyler şekillerin özellikleri arasındaki ilişkiyi görememelerinden dolayı bir şekle ait gerek ve yeter şartı içeren ekonomik tanımlar yapamazlar. Şekli anlatmaları gerektiğinde tanımlamak yerine uzun bir özellik listesi verme eğiliminde olurlar. Bununla birlikte bireylere bir kavram tanımı sunulduğunda tanımdaki ifadelerden çıkarılabilecek özellikleri kavrayamazlar. Bir sonraki düzey olan basit çıkarım düzeyinde ise şekil sınıfları arasındaki hiyerarşiyi anlamlandırdıkları için sınıflar arası ilişki kurmaya başlarlar. Bu nedenle bir kavramı tanımlamak için gereken “yeterli ve gerekli” koşulları söyleyebilirler. Böylece öğrenciler bir şekli anlatmak için uzun bir özellikler listesi yapmak yerine gerek ve yeter koşulları ifade ederek kısa ve öz bir tanım yapabilirler. Aynı zamanda şeklin birden fazla tanımının yapılabileceğini anlarlar. Başka bir ifadeyle Fujita ve Jones’da (2007) görüldüğü gibi kapsayıcı sınıf ilişkilerini kavrama ve yeterli ve gerekli koşulları sağlayan tanımlar yapabilmenin geometrik düşünme düzeyini belirlemede önemli bir gösterge olduğu söylenebilir.

Dörtgenlerin Simetri Perspektifinden Sınıflandırılması

Dörtgenlerin Van Hiele geometrik düşünme modelinde bahsedilen çıkarım yoluyla sınıflandırılabilmesi dörtgen sınıfları arasındaki ilişkilerin kavramsal olarak oluşturulmasıyla yakından ilişkilidir. Dörtgenlerin sınıf ilişkileri oluşturulurken köşegen, açı vb. elemanlarının özellikleri dikkate alınarak sınıflamalar yapılabilir (Usiskin ve Griffin, 2008). Diğer yandan Whiteley (2005) dörtgenlerin sahip olduğu simetri türü, simetri eksen sayısı ve simetri eksenleri gibi özelliklerine göre sınıflandırılması fikrini savunmaktadır. Whiteley’e göre dörtgenlerin simetri bakış açısından incelenerek sınıflandırılması geleneksel yöntemlere göre daha zarif bir yöntemdir. Whiteley’in yaklaşımından yola çıkarak bu çalışmada kullanılan simetri eksenine sahip dörtgenlerin aralarındaki hiyerarşik ilişkiler göz önünde bulundurularak simetri açısından genelden

özele sınıflandırılma şeması Şekil 1’de verilmiştir. Şemanın en üst sırasında yer alan deltoidin köşesinden, ikizkenar yamuğun ise kenarından geçen birer simetri eksenleri vardır. İkinci sıradaki eşkenar dörtgenin köşelerinden ve dikdörtgenin kenarlarından geçen ikişer simetri eksenleri vardır. Bu sınıflandırmanın en altında yer alan karenin ise ikişer tane kenarlardan, ikişer tane köşelerden geçen olmak üzere dört simetri eksenini bulunmaktadır.



Şekil 1. Çalışmanın uygulamasında dörtgenlerin genelden özele sınıflandırma şeması

Dörtgenlerin hiyerarşik sırayla simetri özellikleri açısından incelenmesi bazı avantajları beraberinde getirmektedir. Örneğin dörtgenler bu sırayla incelendiğinde öğrencilerin sınıf ilişkilerini anlamaları kolaylaşabilir (Craine ve Rubenstein, 1993). Ayrıca de Villiers’in (1994) de ifade ettiği gibi sınıf ilişkilerinin öğrenciler için anlamlı hale getirilmesi onların “ekonomik” tanımları anlamalarını ve bu şekilde tanımlar yapabilmelerini kolaylaştırır. Yani tanımların anlaşılması öğrencilerin bir dörtgeni farklı biçimlerde ifade edebilmesini sağlar.

Van Hiele geometri düşünme düzeyleri modeline göre de kapsayıcı tanım yapılması ve bir kavrama ilişkin farklı tanımların anlaşılması basit çıkarım düzeyinin önemli bir

göstergesidir (van Hiele, 1986). Dörtgenlerin bu şekilde sunulması öğrencilerin üst düzey düşünme seviyesine çıkmasını da kolaylaştırır. Dörtgenlerin kapsayıcı ilişkilerinin incelenmesi dörtgen ilişkileri arasındaki çıkarımları anlamayı sağlar (Craine ve Rubenstien, 1993; Keedy, 1980). Şekil 1'deki şemanın üst sırasındaki bir şekil için ispatlanan bir ifade alt sırasında bağlı olduğu başka şekil/şekiller için de doğru olacaktır. Bunun yanı sıra bu şekilde verilen gösterim aynı sıradaki şekillerin yani deltoid ve ikizkenar yamuk ile eşkenar dörtgen ve dikdörtgenin açıları ve kenarları arasındaki dualitenin[†] de anlaşılmasına ışık tutar (Craine ve Rubenstien, 1993; Ellies-Davies, 1986).

İlgili Araştırmalar

Matematiksel tanımlar, herhangi bir kavramı derinlemesine anlamada önemli bir role sahip olduğu için matematik derslerinde kavramsal anlamayı geliştirmek için pedagojik amaçlı tanımlama etkinlikleri kullanılabilir (Edwards ve Ward, 2008). Örneğin, Zazkis ve Leikin'in (2008) çalışmasında matematik öğretmeni adaylarının kare için yapmış oldukları tanımların kavramı nasıl anladıklarına dair ışık tutabileceği gösterilmiştir. Zazkis ve Leikin'in (2008) öğretmen adaylarının yaptıkları tanımları incelerken kullandıkları ölçütler 'gerekli ve yeterli', 'gerekli ancak yeterli değil', 'yeterli ancak gerekli değil' ve 'ne gerekli ne de yeterli' koşullarını içermektedir. Ancak yapılan tanımların dörtgenlerin hiyerarşik sınıflamasını yansıtıp yansıtmaması üzerinde durulmamıştır. Konu ile ilgili alanyazındaki diğer çalışmalarda da ya yapılan dörtgen tanımlarının niteliklerine ya da tanımlarda hiyerarşik sınıflandırma ilişkilerine odaklanılmıştır.

Dörtgen tanımlamalarına ilişkin alanyazın incelendiğinde öğretmen adaylarının dikdörtgen ve eşkenar dörtgen için yeterli ve gerekli koşulları sağlayan tanımlar yapmada zorlandıkları görülmektedir. Duatepe-Paksu, Pakmak ve İymen'in (2012) çalışmasında sınıf öğretmeni adayları eşkenar dörtgene ilişkin birçok özelliği bilmelerine rağmen bu

[†] Bu makalede dualite, Şekil 1'deki şemada görülen açı ve kenarın yer değiştirmesine bağlı olarak iki dörtgenin birbiriyle ilişkili olmasını ifade etmek için kullanılmıştır. Başka bir deyişle birbirinin duali olan iki şekilden birinin kenarları için söylenebilecek bir özellik diğerinin açıları için geçerlidir.

dörtgen için gerek ve yeter koşulu sağlayan özellik listesini oluşturmada sorun yaşamıştır. Örneğin, bazı öğretmen adayları bir dörtgenin karşılıklı kenarlarının eş olduğunu bilmesinin o dörtgenin eşkenar dörtgen olduğunu anlamamıza yettiğini ifade etmişlerdir. Öğretmen adaylarının bir kısmı ise yeterli ancak çıkarımla ulaşılabilecek özelliklere de değinmiştir. Benzer şekilde Tümüklü, Alaylı ve Akkaş (2013) ilköğretim matematik öğretmen adaylarının da büyük bir çoğunluğunun dikdörtgen ve eşkenar dörtgen için gerek ve yeter koşulları sağlayan tanımlar yapamadıklarını gözlemlemişlerdir. Ayrıca öğretmen adaylarının yarıdan fazlasının eksik ya da fazla özellik sayarak tanımlama yaptığı tespit edilmiştir.

Dörtgenlerdeki sınıflar arası kapsayıcı ilişkinin anlaşılması hem geometrik düşünme hem de tümdengelimle akıl yürütme ve ispat becerilerinin gelişimi açısından önemlidir (Fujita, 2012). Bununla birlikte dörtgenler arasındaki kapsayıcı ilişkinin anlaşılmasında ve tanımlarda ifade edilmesinde karşılaşılan güçlüklerin olduğu görülmektedir. Örneğin, Fujita ve Jones'un (2007) çalışmasındaki sınıf öğretmeni adaylarının çoğu karenin bir dikdörtgen olduğunu düşünememiştir. Aynı şekilde eşkenar dörtgeni özel bir paralelkenar olarak tanımlayanların oranının da düşük olduğu görülmüştür. Sınıf öğretmeni adayları ile yapılmış bir başka çalışmada (Pickreign, 2007) katılımcıların çok az bir kısmı dikdörtgen için kareyi kapsayan yeterli tanımlama yapabilirken, eşkenar dörtgen için kareyi kapsayan yeterli tanım yazabilenlerde bu oran daha da düşmüştür. Dörtgenleri belirleme bağlamında ise Bütüner ve Filiz (2016) ilköğretim matematik öğretmenliği programı öğrencileri ile birinci sınıftaki geometri dersinin başında yaptıkları çalışmada katılımcıların dikdörtgeni ve eşkenar dörtgeni belirlerken kareyi hariç tutma eğiliminde olduklarını tespit etmişlerdir. Fakat kareyi hariç tutma eşkenar dörtgende daha az görülmüştür.

Özetle alanyazındaki çalışmalar öğretmen adaylarının yeterli ve gerekli koşulları sağlayan tanımlar yapmada ve dörtgen sınıfları arasındaki kapsayıcı ilişkileri kavramada zorluklar yaşadıklarını ortaya koymaktadır. Bu çalışmada ise bir önceki kısımda açıklanan dörtgenlerin simetri perspektifinden sınıflandırılmasına dayalı bir öğretimin bu zorlukları aşmada ne ölçüde etkili olabileceği araştırılmıştır.

Çalışmanın Amacı ve Araştırma Soruları

Bu makalede ilköğretim matematik öğretmenliği programında okuyan öğrencilerin kâğıt katlama kullanarak dörtgenleri simetri bakış açısından incelemelerinin geometrik düşünmelerine etkisi incelenmiştir. Alanyazında kâğıt katlama ile yapılan etkinlik örneklerinde bu yöntemin; dörtgenlerde simetri eksenlerinin bulunması, dörtgenlerin kavramsal olarak anlaşılması (Duatepe-Paksu, 2017; Kemankaşlı ve Gür, 2005), öğrencilere görsel ispat sunması (Duatepe-Paksu, 2017) ve uzamsal akıl yürütme becerilerini olumlu etkilemesi (Arıcı ve Aslan-Tutak, 2015; Çakmak, 2009) bakımından pedagojik katkılar sağladığı belirtilmiştir. Bu nedenle çalışmada dörtgenler incelenirken hem duyuşsal hem de psikomotor becerilere hitap eden kâğıt katlama yöntemi tercih edilmiştir.

Çalışmanın sınıf içi uygulama sürecinde dikdörtgen ve eşkenar dörtgene odaklanılarak öğrencilerin dörtgenleri belirlemelerine, dörtgenlere ilişkin yaptıkları tanımlara ve dörtgenlerin sınıf ilişkilerine yönelik anlayışlarına bakılmıştır. Bu dörtgenlerin seçilmesinin nedenlerinden biri, çalışılan dörtgenler arasındaki hiyerarşide (Şekil 1) hem deltoid ve ikizkenar yamuk gibi kendilerinden daha geniş sınıfların altında yer almaları hem de daha küçük bir alt sınıf olan kareyi kapsamalarıdır. Böylece örneğin eşkenar dörtgen için yapılan bir tanımın kareyi de içine alıp almamasına bakılarak hariç tutan ya da kapsayıcı olduğuna karar vermek mümkündür. Benzer şekilde bir eşkenar dörtgen tanımının üst sınıf olan deltoidden yararlanılarak yani tüm özellikleri listelemeyen gerek ve yeter koşulu içeren ekonomik bir tanım olup olmadığına karar verilebilir. Buna karşın Şekil 1'in en üst ve en alt sırasındaki dörtgenler için hem kapsayıcılık hem de gerek ve yeterliğe ilişkin bu şekilde bir gözlem yapılması mümkün değildir. Diğer taraftan belirlenmesi ve tanımlanması istenen dörtgenler okul matematiğinde sıklıkla kullanılmaktadır. Bu çalışmada hem eşkenar dörtgen hem de dikdörtgenin alınma sebebi ise birbirilerinin duali olan bu dörtgenlerin tanımlanması ve belirlenmesinde farklılık olup olmadığını gözlemlemektir.

Dörtgenlerin kâğıt katlama kullanılarak simetri bakış açısından incelendiği derse katılan ilköğretim matematik öğretmenliği programı ikinci sınıf öğrencileri ile yapılan bu çalışmada incelenen araştırma soruları şunlardır:

- 1) Yaptıkları tanımların hariç tutan ya da kapsayıcı olma durumlarına göre katılımcıların dikdörtgen ve eşkenar dörtgen tanımlarına ilişkin geometrik düşünmedeki değişimleri nasıldır?
- 2) Dörtgenleri belirlemede kullandıkları ifadelerin hariç tutan ya da kapsayıcı olma durumlarına göre katılımcıların dikdörtgen ve eşkenar dörtgen tanımlarına ilişkin geometrik düşünmedeki değişimleri nasıldır?
- 3) Yaptıkları tanımların yeterli ve gerekli koşulları içerme durumlarına göre katılımcıların dikdörtgen ve eşkenar dörtgen tanımlarına ilişkin geometrik düşünmedeki değişimleri nasıldır?

YÖNTEM

Araştırmada tek grup ön test - son test deseni kullanılmıştır. Çalışmada, öğrencilerin dörtgenleri simetri perspektifinden incelediği etkinlikler planlanıp uygulanmış ve tek bir grup üzerindeki etkisi incelenmiştir. Araştırmanın süreci Tablo 1’de verilmiştir.

Tablo 1. Araştırma Süreci

Ön test	Uygulama	Son test
- Dörtgenleri Belirleme ve Tanımlama Ölçeği	- Kâğıt katlama kullanarak dörtgenleri simetri perspektifinden inceleme etkinlikleri (4 hafta)	- Dörtgenleri Belirleme ve Tanımlama Ölçeği - Dörtgen Tanımlarını Değerlendirme Görüşmeleri

Uygulama öncesinde ve sonrasında katılımcıların bu dörtgenleri belirleme ve tanımlama durumları ölçülmüştür. Daha sonra seçilen 5 katılımcıyla birebir görüşmeler yapılarak verilen dörtgen tanımlarını değerlendirmelerine yönelik daha derin incelenme yapılmıştır.

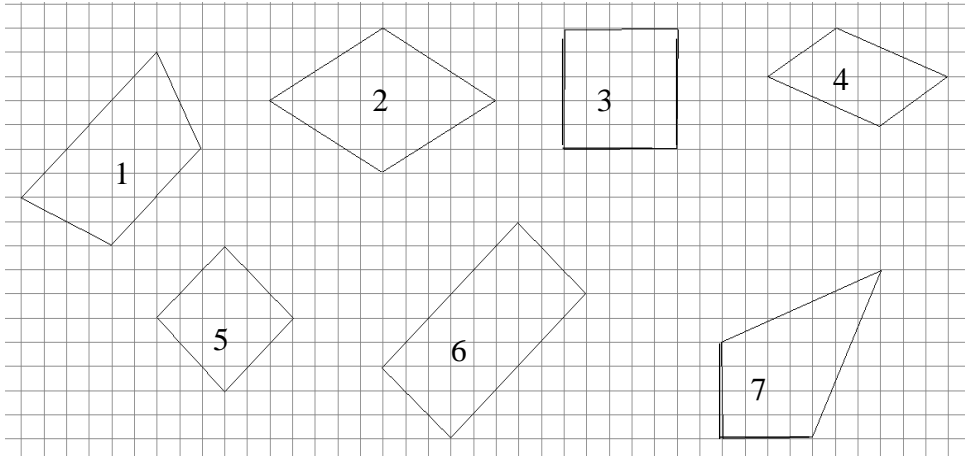
Çalışma Grubu

Çalışma 2015-2016 akademik yılında Ege Bölgesinde yer alan bir üniversitenin Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi Anabilim Dalında verilen seçmeli Origami dersine devam eden öğrencilerle yürütülmüştür. Çalışma grubunu derse kayıtlı 16'sı kadın, 5'i erkek 21 öğrenci oluşturmaktadır. Görüşmeler bu katılımcılardan 5 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Görüşmeler için sınıf içi tartışmalara etkin olarak katılan ve farklı bakış açılarını çekinmeden dile getiren katılımcılar seçilmiştir. Makalede katılımcıların gerçek isimleri kullanılmamıştır.

Veri Toplama Araçları

Dörtgenleri Belirleme ve Tanımlama Ölçeği

Fujita'dan (2012) uyarlanan bu ölçek Şekil 2'de gösterildiği gibi kareli zeminde verilen yedi dörtgen içerisinde eşkenar dörtgen ile dikdörtgen olanların tespit edilmesinin ve eşkenar dörtgen ile dikdörtgenin tanımlanmasının istendiği sorulardan oluşmaktadır.



Şekil 2. Dörtgenleri belirleme sorusunda yer alan şekiller

Dörtgen Tanımlarını Değerlendirme Görüşme Formu

Yarı yapılandırılmış görüşmelerde öğrencilere eşkenar dörtgen ve dikdörtgeni betimlemek üzere simetri doğrusu kullanılarak ifade edilmiş farklı nitelikte tanımlar teker

teker sunulmuş ve bu tanımların hangi dörtgeni anlattığı üzerinde değerlendirme yapmaları istenmiştir. Tablo 2’de dikdörtgen ve eşkenar dörtgene ilişkin verilen ifadeler ile öğrencilerin her bir dörtgen tanımının kareyi hariç tutan ve kapsayıcı olma durumlarını değerlendirmeleri beklenmiştir.

Tablo 2. Görüşmelerde Dörtgenlerle ilgili Sunulan İfadeler ve Özellikleri

Dikdörtgene ilişkin ifadeler	Eşkenar dörtgene ilişkin ifadeler	İfadelerin niteliği
Sadece kenarlarından geçen 2 simetri doğrusuna sahip dörtgen.	Sadece köşelerden geçen 2 simetri doğrusuna sahip dörtgen.	Hariç tutan tanım
Kenarlarından geçen 2 simetri doğrusuna sahip dörtgen	Köşelerden geçen 2 simetri doğrusuna sahip dörtgen.	Kapsayıcı tanım

Kâğıt Katlama ile Dörtgenleri İnceleme Etkinliği

Çalışmanın sınıf içi uygulamasında dörtgenlerin incelenmesi kâğıt katlama ile yapılmıştır. Kâğıt katlama yönteminin yukarıda bahsedilen pedagojik yararları göz önüne alınarak bu çalışmada dörtgenlerin simetri bakış açısıyla sunulduğu etkinlik dizisi kullanılmıştır (Duatepe-Paksu, 2017). Uygulamaya başlamadan önce Şekil 2’de görülen dörtgenler farklı renkli kâğıtlardan kesilerek hazırlanmış ve aşağıda açıklanan sırayla katılımcılara dağıtılmıştır.

Uygulama 4 hafta ve toplamda 8 ders saati sürmüştür. Uygulama sürecinin ilk haftasında Şekil 1’deki şemanın en üst sırasındaki iki dörtgenle yani ikizkenar yamuk ve deltoidle çalışılmıştır. Öncelikle ikişerli ve üçerli gruplar halinde çalışan öğrencilere kâğıttan kesilmiş ikizkenar yamuk ve deltoidler dağıtılıp, katlama yaparak simetri eksenlerinin belirlenmesi istenmiştir. Ardından öğrenciler bu şekillerin simetri eksenlerinin özelliklerini tartışmışlar ve yalnızca simetri eksenini kullanarak iki şeklin kenar ve açılarına ilişkin çıkarabilecekleri özellikleri bir tabloda özetlemişlerdir. Daha sonra tablodan da yararlanılarak ikizkenar yamuk ve deltoidin karşılaştırılması istenmiştir. Böylece öğrenciler her iki dörtgenin de bir yansıma simetrisine sahip olduğunu ve ikizkenar yamukta simetri ekseni kenarlardan geçmekte iken deltoidin simetri ekseninin köşelerden geçtiğini katlama yoluyla görebilmişlerdir.

İkinci haftadaki derste öncelikle ilk hafta incelenen ikizkenar yamuk ve deltoidin özellikleri tekrar edilmiş, daha sonra ilk hafta yapılan çalışmalar benzer şekilde eşkenar dörtgen ve dikdörtgen için gerçekleştirilmiştir. Sınıf tartışması sonucunda grupların ulaştığı özellikler Tablo 3'te gösterilmiştir. Daha sonra tablodan da yararlanılarak dikdörtgen ve eşkenar dörtgenin karşılaştırılması istenmiştir.

Tablo 3. Dikdörtgen ve Eşkenar Dörtgen Özellikleri

	Dikdörtgen	Eşkenar dörtgen
Simetri sayısı	2	2
Simetri ekseninin yeri	Kenar	Köşe
Eş kenar sayısı	2 çift	4
Eş açı sayısı	4	2 çift

Bu kısımda beklenen matematiksel çıkarımların başında dikdörtgen ve eşkenar dörtgenin her ikisinin de ikişer simetri eksenine sahip olduğunun fark edilmesidir. Dikdörtgende simetri eksenleri kenarlardan eşkenar dörtgende ise köşelerden geçmektedir. Simetri eksenlerinin bu şekilde konumlanmış olmasından yola çıkarak dikdörtgenin 4 eş açı ve 2 çift eş kenara; eşkenar dörtgenin ise 4 eş kenar ve 2 çift eş açıya sahip olduğu gözlemlenmektedir. İkizkenar yamuk ve deltoid gibi bu iki şekil de birbirinin dualidir. Bir başka deyişle eşkenar dörtgenin kenarları (ya da köşeleri) için söylenebilecek ifadeler dikdörtgenin köşeleri (ya da kenarları) için söylenebilir.

Bir sonraki aşamada öğrencilerin simetri doğrularını da düşünerek ikizkenar yamuk ve dikdörtgeni özelliklerine göre karşılaştırmaları istenmiştir. Bu aşamada istenen ilk hafta incelenen kenarlarından geçen bir simetri doğrusuna sahip olan dörtgenle (ikizkenar yamuk) ikinci haftada incelenmekte olan kenarlarından geçen iki simetri doğrusuna sahip olan dörtgenin (dikdörtgen) karşılaştırılmasıdır.

Üçüncü haftaki çalışmada önceki haftalarda incelenen ikizkenar yamuk ve dikdörtgenin karşılaştırılması yapılmıştır. Sonra katılımcılardan eşkenar dörtgen ile deltoid özelliklerinin karşılaştırılması istenmiştir. Gruplar kendi içlerinde karşılaştırma yaptıktan sonra bu konuda sınıfça tartışma yapılmıştır. Daha sonra katılımcılara kâğıttan kesilmiş kareler dağıtılmış, katlama yaparak karenin simetri eksenlerini belirlemeleri istenmiştir.

Gruplar karenin simetri eksenlerini daha önce incelenen dörtgenlerin simetri eksenleriyle karşılaştırmışlardır. Ardından incelenmiş olan beş tür dörtgenin karşılaştırılıp sınıflandırılması istenmiştir. Karşılaştırmayı gruplar kendi içinde yapmışlardır.

Çalışmanın dördüncü haftasında tüm süreçte incelenmiş olan beş dörtgenin sınıflandırılması tüm sınıfça tartışılmıştır. Son olarak öğrencilerden dikdörtgen, eşkenar dörtgen ve karenin tanımlarını yapmaları istenmiştir. Yapılan tanımlar sınıfça tartışılmış, tahtaya yazılan tanımların daha az özellik verilerek de yapılıp yapılamayacağı üzerinde konuşulmuştur.

Verilerin Analizi

Öğrencilerin ön test ve son testteki yazılı yanıtları içerik analizi yöntemiyle analiz edilmiştir. Öncelikle iki araştırmacı tarafından bağımsız olarak yapılan kodlamalar karşılaştırılarak kodlar üzerinde ortak karara varılmıştır. Kodlamalarda %100 fikir birliğine ulaşılmıştır. Veri analizinde kullanılan kod ve temalar Tablo 4’te verilmiştir. Tanımlardaki yeterli ve gerekli koşulların kodlanması için öncelikle Zazkis ve Leikin’de (2008) kullanılan kodlar çerçevesinde taslak kodlar oluşturulmuştur. Veri analizi öncesinde belirlenen bu kodlar (özellik listeleme, yetersiz tanımlar, yeterli tanımlar) veri analiz sürecinde alt kodlarla zenginleştirilerek tablodaki son hâlini almıştır. Hariç tutan ve kapsayıcılık durumuna göre kodlar ise bu kapsamda görülebilecek kategoriler olan hariç tutan ve kapsayıcı olarak belirlenmiştir. Görüşmelerin deşifreleri analiz edilirken ise öncelikle öğrencilerin verilen her bir tanımın hangi şekli anlattığına ilişkin verdiği yanıtlar tespit edilmiştir. Tüm katılımcıların verdiği yanıtlar tablolarda özetlenip, tam ve eksik yanıtlar belirlenmiştir.

Tablo 4. Dörtgen Tanımlarının Analizinde Kullanılan Kodlar

Yeterli ve gerekli koşullar için kodlar	Hariç tutan ve kapsayıcılık durumuna göre kodlar
A: Özellik listeleme	H: Hariç tutan
B: Yanlış tanım	K: Kapsayıcı
C: Yetersiz tanımlar	
C1: Yetersiz ve özel bir örneği anlatan tanım	
C2: Yetersiz ve gerekli olmayan koşul da içeren tanım	
D: Yeterli tanımlar	
D1: Yeterli ancak özel bir örneği anlatan tanım	
D2: Yeterli ancak çıkarımla ulaşılabilecek özelliği de içeren tanım	
D3: Yeterli ve gerekli koşulları içeren tanım	

BULGULAR

Bu kısımda önce dikdörtgen tanımına sonra da eşkenar dörtgen tanımına ilişkin katılımcıların geometrik düşüncelerindeki değişime ait bulgular araştırma sorularına karşılık gelen alt başlıklarda sunulmuştur. Yukarıda bahsedilen “Dörtgenleri Belirleme ve Tanımlama Ölçeği” ve “Dörtgen Tanımlarını Değerlendirme Görüşme Formu” ile toplanan verilerden elde edilen bulgular birbirini desteklemeleri bakımından birlikte verilmiştir. Sunulan örnekler seçilirken veri çeşitliliğini yansıtacak ifadeler yer verilmesi amaçlanmıştır. Katılımcıların yaptıkları tanımlar, ilgili dörtgenlerin baş harfleri ve bulgularda verildiği sıraya göre numaralandırılarak (ör. D1, birinci dikdörtgen tanımıdır) verilmiştir.

Dikdörtgen Tanımına İlişkin Geometrik Düşünmedeki Değişim

a. Yapılan dikdörtgen tanımlarının hariç tutan ve kapsayıcı olmalarına göre değişim

Dörtgenleri belirleme ve tanımlama ölçeğinde öğrencilerin dikdörtgen için yaptıkları tanımlar incelendiğinde hariç tutan ve kapsayıcı tanım yapan öğrenci sayısının son testte arttığı görülmüştür (Tablo 5).

Tablo 5. Ön test ve Son testte Yapılan Hariç Tutan ve Kapsayıcı Dikdörtgen Tanımları Sıklığı

Tanım	Ön test	Son test
Hariç tutan	0	2
Kapsayıcı	12	19

Ön testte “yeterli tanım” olarak belirlenen 12 tanımın tamamı kapsayıcı tanım olarak değerlendirilmiştir. Bu tanımlar dörtgenler arasındaki hiyerarşik yapıyı göz önünde bulundurmakta ve tanımlardan karenin de bir dikdörtgen olduğu anlaşılabilir. Örnek olarak öğrencilerin yazdıkları şu kapsayıcı tanımlar verilebilir:

D1: “*Karşılıklı kenarları eşit dik açılı dörtgendir.*” (Gamze)

D2: “*Karşılıklı kenarları birbirine paralel ve eşit uzunlukta olan, tüm açıları 90° olan dörtgenler.*” (Gaye)

Son testte ise katılımcıların yazdıkları tanımların hepsi yeterli bulunmuş ve 19’u kapsayıcı iken ikisinin hariç tutan tanım olduğu görülmüştür (Tablo 5). Aşağıda öğrencilerin yazdıkları tanımlardan örnekler verilmiştir.

D3: “*Tüm açıları eş olan dörtgendir.*” (Sevil)

D4: “*2 simetri doğrusu da sadece kenarlardan geçen dörtgendir.*” (Zeki)

Bu örneklerden D3 kareyi de içine alan kapsayıcı bir tanımken D4 sadece kenarlardan geçen simetri doğrusu özelliğini içerdiği için dikdörtgenin özel bir durumu olan kareyi ayrı bir sınıf olarak ele almaktadır. Dolayısıyla, hariç tutan tanım olarak değerlendirilmiştir.

b. Dikdörtgeni belirlemedeki ifadelerin hariç tutan ve kapsayıcı olmalarına göre değişim

Öğrencilerden ölçekte verilen dörtgenlerden (Şekil 2) dikdörtgen olanları belirlemeleri istendiğinde verilen yanıtlar da uygulamanın sonunda kapsayıcılık özelliğinin daha çok dikkate alındığını göstermektedir. Örneğin ön testte öğrencilerin yalnızca 14’ü kareleri aynı zamanda bir dikdörtgen olarak nitelendirmiştir. Kenarları kâğıdın kenarına paralel olan kare örneğinde (2 numaralı şekil) ise ön testte sadece 14 öğrenci bu dörtgeni dikdörtgen olarak belirlerken son testte bu sayı 20’ye yükselmiştir. Aynı şekilde döndürülmüş kare örneğindeki dörtgeni (5 numaralı şekil) dikdörtgen olarak

belirleyenlerin sayısı ön testte 14 iken son testte 19'dur. Buna göre sınıf içinde yapılan etkinliklerin ön testte kare ile dikdörtgen arasındaki kapsayıcı ilişkiyi göremeyen öğrencileri olumlu yönde etkilediği söylenebilir.

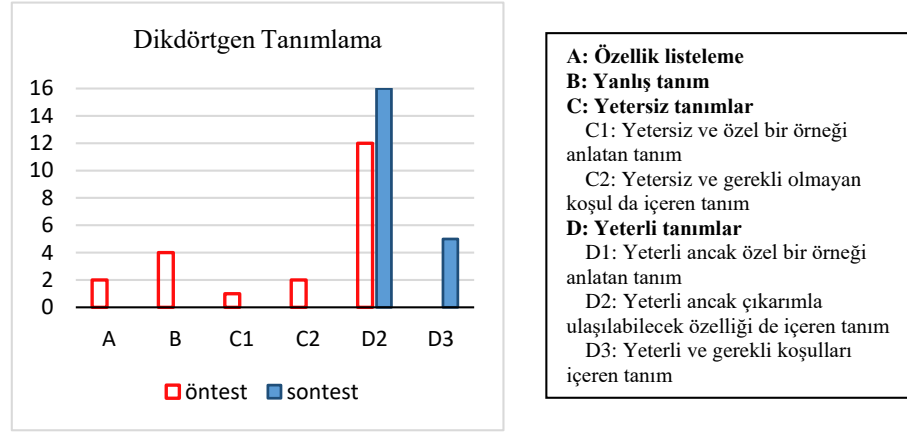
Bunlara ek olarak, yapılan görüşmelerde sırasıyla “Kenarlarından geçen 2 simetri doğrusuna sahip dörtgen” (kapsayıcı dikdörtgen tanımı) ile “Sadece kenarlarından geçen 2 simetri doğrusuna sahip dörtgen” (hariç tutan dikdörtgen tanımı) ifadeleri öğrencilere verilerek bunların hangi dörtgeni tanımladıklarını değerlendirmeleri istenmiştir. İlk tanım için öğrencilerin tümü tanımın kapsayıcı özelliğine uygun olarak hem kare hem de dikdörtgen için geçerli bir tanım olduğunu söylemişlerdir. İkinci tanım için ise her bir öğrenci bu tanımın dikdörtgen için geçerli olduğunu söylemiştir, fakat bir öğrencinin dikdörtgene ek olarak bu tanımın kareyi de anlattığına yönelik yanıtıyla hatalı düşündüğü görülmüştür.

Öğrencilerden bu kapsayıcı ve hariç tutan dikdörtgen tanımlarını karşılaştırmaları istendiğinde hepsi kapsayıcı tanımın kare için de geçerli olduğunu belirterek aradaki farkı belirtmiştir. Örneğin, aşağıdaki alıntıda öğrenci hariç tutan tanımın köşelerden geçen simetri doğrusunu içermemesi nedeniyle kareyi anlatmadığını ifade etmiştir:

Gaye: Sadece kenarlarından geçen 2 simetri doğrusuna sahip dörtgen sadece dikdörtgen oluyor. [Diğer tanımda] kenarlarından geçen 2 simetri doğrusuna sahip ama köşelerden geçemez demediği için kareyi de alıyoruz.

c. Yapılan dikdörtgen tanımlarının yeterli ve gerekli koşulları içermelerine göre değişim

Bu bölümde katılımcıların dörtgenleri belirleme ve tanımlama ölçeğindeki dikdörtgenin tanımlanması istenen soruya verdikleri yanıtlar yeterli ve gerekli olma durumlarına göre sunulmuştur. Şekil 3'teki grafik öğrencilerin ön test ve son testte dikdörtgen tanımlamalarının yeterli ve gerekli koşulları içermeye durumlarına göre dağılımını göstermektedir.



Şekil 3. Ön test ve son testte dikdörtgen tanımlamalarının yeterli ve gerekli koşul/koşulları içermeye durumunu değerlendirmede kullanılan kodlara göre dağılımları

Öğrencilerin dikdörtgenin tanımına yönelik yazdıkları ifadeler incelendiğinde ön testte 21 öğrenciden ikisinin tanım yapmadan sadece dikdörtgene ait özellikleri listelediği görülmüştür. Yapılan tanımların 4'ü ise dikdörtgen için doğru bir tanım cümlesi değildir. Örneğin aşağıda örnek olarak verilen tanımlardan ilki “düzgün çokgen” ifadesi içerdiği için ikincisi ise şeklin dörtgen olduğuna dair herhangi bir ifade içermediği için ve “dik kenarları” ifadesinin dörtgen için anlamlı olmaması nedeniyle doğru bulunmamıştır:

D5: “Karşılıklı kenarları birbirine eşit 4 parçadan oluşan, iç açıları 90° olan ve 2 simetri ekseni bulunan düzgün çokgenlere dikdörtgen denir.” (Batu)

D6: “Karşılıklı dik kenarları birbirine eşit, tüm açıları 90° olan dış bükey bir çokgendir.” (Melis)

Ön testte bir tanım ifadesi yazan 19 katılımcıdan üçünün yaptığı tanım ise dikdörtgeni anlatmak için yetersiz bulunmuştur. Dikdörtgeni anlatmak için gerekli koşulları belirtmeyen bu tanımlar aşağıdaki gibidir:

D7: “Kısa kenarı ile uzun kenarı birbirine dik olan ama uzunlukları farklı olan dörtgenlere dikdörtgen denir.” (Meltem)

D8: “Karşılıklı kenarları birbirine eşit olan ve tüm iç ve dış açıları 90° olan geometrik şekildir.” (Melis)

D9: “Bir kısa kenarı ve bir uzun kenarı olan dörtgendir.” (Rüya)

Yukarıdaki D7 örneği yetersiz olmanın yanı sıra birbirine dik olan kenarların uzunluklarının farklılığı ile ilgili ifade içerdiği için de özel bir durumu belirten bir tanımdır. Hâlbuki dik kenarların uzunluklarının birbirinden farklı olması dikdörtgen olabilmenin gerek koşulu değildir. Diğer iki öğrencinin tanımları (D8 ve D9) ise hem yetersiz hem de gerekli olmayan koşul da içeren tanımlar olarak değerlendirilebilir. Örneğin, D8’de tüm iç açıları 90° olan bir dörtgenin otomatik olarak dış açıları da 90° olacaktır. Bu nedenle öğrencinin yaptığı tanımda dörtgenin her bir iç açısının 90° olduğunu belirttikten sonra her bir dış açısının da 90° olduğunu söylemesine gerek yoktur.

Ön testte 9 öğrenci ise dikdörtgen için yeterli fakat çıkarımla ulaşılabilecek bir özelliğine ilişkin koşul/koşullar da içeren tanımlar yazmıştır. Bu tanımlara bazı örnekler şu şekildedir:

D10: “*Karşılıklı kenarları eşit ve tüm açıları dik olan dörtgenlerdir.*” (Ela)

D11: “*Karşılıklı kenarları birbirine paralel ve eşit uzunlukta olan, tüm açıları 90° olan dörtgendir.*” (Gaye)

D12: “*Bir iç açısı 90° olan, karşılıklı kenarları eşit olan, 2 simetri eksenine bulunan dörtgendir.*” (Fatih)

Yukarıdaki örneklerin her birinde gerek duyulandan fazla bilgi mevcuttur. Örneğin, D10 ve D11’de “tüm açıları dik/ 90° olan dörtgen” ifadesi zaten dikdörtgeni anlatmaktadır. Bunun dışında verilen özellikler çıkarımla da ulaşılabilir. Bir dörtgenin karşılıklı kenarlarının eş olması aynı zamanda bu kenarların paralel olmasını gerektirir. Böylelikle bir iç açının 90° olması diğer üç açının da 90° olacağını gösterir. D12’de ise “2 simetri eksenine bulunan” ifadesine gerek olmadan “Dik açısı olan karşılıklı kenarları eşit dörtgen” ifadesi yeterli olacaktır. Aynı şekilde tanımdan “karşılıklı kenarları eşit olan” ifadesi çıkarılarak “Dik açısı olan, 2 simetri eksenine bulunan dörtgendir” biçiminde de yeterli ve gerekli koşulu içeren bir tanım yapılabilir.

Son testte ise tüm katılımcılar dikdörtgen için yeterli koşulu içeren bir tanım cümlesi yazabilmişlerdir. Bununla birlikte son testte yazılan tanım cümlelerinden 16’sı aşağıdaki örneklerde görüldüğü gibi dikdörtgen için yeterli ancak mutlaka gerekli olmayan bir özelliğine ilişkin koşul/koşullar da içeren tanımlardır.

D13: “Bütün açıları 90° olan paralelkenar” (Aslı)

D14: “Karşılıklı kenarları birbirine eşit, paralel ve ardışık ikişer kenar birbirine dik olan dörtgendir.” (Levent)

D15: “Karşılıklı kenarları paralel ve açıları 90° olan paralelkenara dikdörtgen denir.” (Arzu)

Son testte 5 öğrenci ise yeterli ve gerekli koşulları içeren tanım yazabilmiştir. Aşağıdaki örnek tanımların ikisi açı ve kenar uzunlukları özelliklerini kapsayan tanımlarken sonuncusu sınıf içi uygulamalarda tartışılan simetri doğrusu özelliğini içermektedir.

D16: “Tüm açıları dik olan dörtgendir.” (Batu)

D17: “Karşılıklı kenarları eşit uzunlukta, 90° açısı olan dörtgen.” (Gaye)

D18: “Sadece kenardan geçen 2 simetri doğrusuna sahip olan dörtgendir.” (Mesture)

Ön testte özellik listeleyen 2 öğrencinin ikisi de son testte yeterli ancak çıkarımla ulaşılabilecek bir özelliği de içeren birer tanım yazmıştır. Ön testte yanlış ve yetersiz tanım yapan öğrencilerin (n=7) hepsi son testte yeterli tanım yapmışlardır.

Eşkenar Dörtgen Tanımına İlişkin Geometrik Düşünmedeki Değişim

a. Yapılan eşkenar dörtgen tanımlarının hariç tutan ve kapsayıcı olmalarına göre değişim

Öğrencilerin eşkenar dörtgen için yaptıkları tanımlar incelendiğinde kapsayıcı tanım yapan öğrenci sayısının son testte arttığı görülmüştür (Tablo 6).

Tablo 6. Ön test ve Son testte Yapılan Hariç Tutan ve Kapsayıcı Eşkenar Dörtgen Tanımları Sıklığı

Tanım	Ön test	Son test
Hariç tutan	1	2
Kapsayıcı	10	18

Ön testte yer alan eşkenar dörtgeninin tanımlanmasının istendiği soruya yönelik yazılan ve bu dörtgen için yeterli koşulları taşıyan 11 tanımın 10'u kapsayıcı biri ise hariç tutan tanımdır. Aşağıdaki örneklerden E1 ve E2 tanımları eşkenar dörtgenin alt sınıfı olan kareyi de betimlediğinden dolayı kapsayıcı tanım olarak sınıflandırılmıştır. E3 tanımı ise içerdiği “köşeleri 90 derece olmayan” ifadesiyle eşkenar dörtgen sınıfının bir alt sınıfı

olan kareleri hariç tutmakta, sadece kare olmayan eşkenar dörtgenleri tanımlamaktadır. Bu sebeple hariç tutan tanım olarak değerlendirilmiştir.

E1: “*Tüm kenarları eşit olan dörtgendir.*” (Ela)

E2: “*Karşılıklı kenarları paralel olan, karşılıklı açıları eşit ve köşegenlerin kesişim açısı 90 derece olan özel bir dörtgendir.*” (Fatih)

E3: “*Kenarları birbirine eşit ancak köşeleri 90 derece olmayan dörtgen.*” (Füsün)

Son testte ise eşkenar dörtgen için yeterli koşulu içermekte olan 20 tanımın 18’i kapsayıcı ikisi ise hariç tutan tanım olarak değerlendirilmiştir. Kapsayıcı tanım yapan öğrencilerin yaptıkları tanımlara örnekler aşağıda sunulmuştur.

E4: “*Köşelerinden geçen 2 simetri doğrusu olan, 4 kenarı birbirine eş, karşılıklı kenarları birbirine paralel, karşılıklı açıları birbirine eşit olan dörtgendir.*” (Nilüfer)

E5: “*Bütün kenarları eş ve karşılıklı kenarları paralel olan, 2 çift açıcı eş olan dörtgendir.*” (Meltem)

Hariç tutan tanım yazan her iki öğrenci de eşkenar dörtgeni simetri eksenlerini kullanarak tanımlamayı tercih etmişlerdir. Bu öğrencilerin yazdığı tanımlara örnek olarak aşağıdaki ifade verilebilir:

E6: “*2 simetri doğrusu da sadece köşelerinden geçen dörtgendir.*” (Zeki)

b. Eşkenar dörtgeni belirlemedeki ifadelerin hariç tutan ve kapsayıcı olmalarına göre değişim

Öğrencilerden Şekil 3’te verilen dörtgenlerden eşkenar dörtgen olanların belirlenmesinin istendiği sorudaki yanıtlardan da uygulamanın sonunda kapsayıcılık özelliğinin daha çok dikkate alındığı görülmüştür. Öğrencilere kenarları kâğıdın kenarlarına paralel olan kare ve döndürülmüş kare dışında 2 numaralı şekil olan kare olmayan eşkenar dörtgen verilmiştir. Öğrencilerin tamamı ön testte ve son testte kare olmayan eşkenar dörtgeni (Şekil 3’teki 2 numaralı şekil) eşkenar dörtgen olarak nitelendirmişlerdir. Bununla birlikte katılımcıların yalnızca 17’si ön testte kareyi eşkenar dörtgen olarak nitelendirmiştir. Son testte ise katılımcıların tamamı kareleri de eşkenar dörtgen olarak değerlendirebilmiştir. Buradan yola çıkarak sınıfta yapılan eşkenar dörtgeni simetri bakış

açısıyla inceleme etkinliğinin bu dört öğrencinin de kare ile eşkenar dörtgen arasındaki kapsayıcı ilişkiyi görmelerini sağladığı söylenebilir.

Görüşmelerde ise ilk verilen yeterli ancak alt sınıf dörtgen olan kareyi hariç tutan ifade içeren (“Sadece köşelerden geçen 2 simetri doğrusuna sahip dörtgen”) tanımla ilgili olarak yalnızca iki öğrenci (Nilüfer, Rüya) bu şeklin eşkenar dörtgen olduğunu ifade etmiştir. Buna karşın diğer katılımcılar eşkenar dörtgene ek olarak bu tanımın kareyi de (Batu, Zeki) ya da paralelkenarı da (Gamze) anlattığını düşünmüşlerdir. Bu öğrenciler karenin kenarlardan da geçen simetri doğruları olduğunu ve paralelkenarın simetri doğrusunun olmadığını göz ardı etmişlerdir.

İkinci olarak verilen kapsayıcı nitelikteki tanım (“Köşelerden geçen 2 simetri doğrusuna sahip dörtgen”) için ise tüm öğrenciler bu ifadenin kare ve eşkenar dörtgeni tanımladığını söylemişlerdir. Önceki tanımda da olduğu gibi paralelkenarın simetri doğrusu olduğunu düşünen öğrenci (Gamze) bu dörtgenlere ek olarak tanımın yine paralelkenarı da betimlediğini söylemiştir.

Bu iki tanımları karşılaştırırken öğretmen adaylarının tümü iki tanımın birbirinden farklı olduğunu ifade etmişlerdir. Bu tanımların niteliği dörtgenleri doğru olarak söyleyemeyen öğrenci (Batu) dışındaki 4 öğrenci (Rüya, Gaye, Nilüfer, Zeki) farkı açıklarken simetri eksenlerinin “sadece köşelerden geçmesi” ve “köşelerden geçmesi” ifadelerinin farklılık yarattığını belirtmişlerdir. Örneğin, bu öğrencilerden biri düşüncelerini şu şekilde ifade etmiştir:

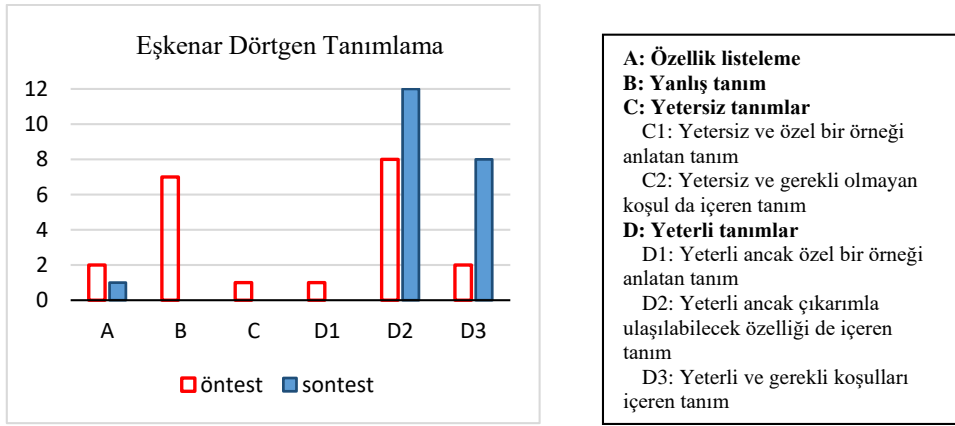
Nilüfer: ‘Sadece’ kelimesi işleri şartlıya bağlıyor. Sadece iki simetri doğrusu olmalı, onun dışındakiler kabul edilemez yani. Fazla olsa da eksik olsa da kabul edilemez. Ama ikincide köşelerden iki simetri doğrusuna sahip diyor. Yani ucu açık, fazla da olabilir demek istiyor yani. Karede normalde 4 simetri doğrumuz var. Eşkenar dörtgende de 2 tane ve ikisi de köşelerden geçiyor. Karede ikisi köşeden ikisi kenardan. Sadece köşelerden dediğinde, sadece köşelerden Birinci neden kareye uymuyor? ‘Sadece’ kelimesi olduğu için uymuyor. Sadece dedi mi sadece iki simetri doğrusuna sahip olmalı diye düşünüyorum ben. Fazlası olmamalı.

Diğer bir öğrenci ise iki tanım arasındaki farklılığı açıklarken eşkenar dörtgeni hariç tutan tanımla anlatmanın daha uygun olacağını belirtmiştir.

Zeki: İkisi de anlatır ama eşkenar dörtgeni tanımlayacak olursak birinci tanımı kullanmak daha uygundur. Köşelerden geçen ama ikinci durumda köşelerden geçen iki simetri doğrusu demiş. Yani bu kareyi gene anlatır ama karenin şeylerden kenarlardan geçen simetri doğruları da vardır. O yüzden tamamen aynıdır diyemeyiz.

c. Yapılan eşkenar dörtgen tanımlarının yeterli ve gerekli koşulları içermelerine göre değişim

Öğrencilerin dörtgenleri belirleme ve tanımlama ölçeğinin ön test ve son test uygulamalarında yaptıkları eşkenar dörtgen tanımlamalarının yeterli ve gerekli koşulları içirme durumlarına göre dağılımı Şekil 4'te gösterilmiştir.



Şekil 4. Ön test ve son test uygulamalarında eşkenar dörtgen tanımlamalarının yeterli ve gerekli koşul/koşulları içirme durumunu değerlendirmede kullanılan kodlara göre dağılımları

Dörtgenleri belirleme ve tanımlama ölçeği ön test uygulamasında 21 öğrenciden 19'u bir eşkenar dörtgen için tanımlama yaparken 2 öğrenci tanım yapmadan eşkenar dörtgene ait özellikleri listelemiştir. Ön testte yapılan tanımların 7'si eşkenar dörtgen için doğru bir tanım cümlesi değildir.

E7: "Tüm kenarları birbirine eşit olan düzgün dörtgendir." (Rana)

E8: "Tüm kenarları birbirine eşit olan geometrik şekildir." (Melis)

Bir öğrencinin aşağıda verildiği biçimiyle yaptığı tanım (E9) eşkenar dörtgeni anlatmak için yetersiz olarak nitelenmiştir. Bu tanımda yer alan “karşılıklı kenarlarının eş” olması durumu tanımlanan dörtgenin bir paralelkenar olması için yeterli koşuldur, fakat paralelkenarın bir alt sınıfı olan eşkenar dörtgeni anlamamız için yeterli değildir. Başka bir öğrencinin yaptığı tanım (E10) ise eşkenar dörtgeni anlatmak için yeterli ancak hariç tutan bir tanım olmasından dolayı özel bir örneği anlatan tanım olarak değerlendirilmiştir.

E9: “*Karşılıklı kenarları eşit olan dörtgendir.*” (Renan)

E10: “*Kenarları birbirine eşit ancak köşeleri 90 derece olmayan dörtgen.*” (Fusun)

Ön testte 8 öğrenci yeterli ancak çıkarımla ulaşılabilecek özelliği de içeren tanım yazmıştır. Aşağıdaki tanımlardan ilkinde (E11) yer alan karşılıklı açılarının eşit olması ifadesi cümlede verilen dört kenarı eş dörtgen ifadesinden çıkarılabilecek bir özelliktir. Benzer şekilde ikinci tanımda (E12) şeklin paralelkenar olduğunun söylenmesinin yanı sıra verilen “karşılıklı ikişer kenarı paralel” ve “kapalı” ifadelerine gerek yoktur.

E11: “*Dört kenarı eşit ve karşılıklı açıları eşit olan bir dörtgendir.*” (Rüya)

E12: “*4 eş kenara sahip karşılıklı ikişer kenarı paralel olan düzgün kapalı bir paralelkenardır.*” (Levent)

Ön testte yalnızca 2 öğrenci eşkenar dörtgen için yeterli ve gerekli koşulu taşıyan bir tanım yazabilmiştir. Bu öğrenciler aşağıdaki örnekte verildiği gibi kenarların eş olması üzerine odaklanmışlardır.

E13: “*Tüm kenarları eşit olan dörtgendir.*” (Ela)

Son testte de öğrencilerden 20’si bir tanımlama yaparken 1 öğrenci tanım yapmadan eşkenar dörtgene ait özellikleri listelemiştir. Yeterli tanım yapan 20 katılımcıdan 12’si eşkenar dörtgen için yeterli ancak çıkarımla ulaşılabilecek özelliği de içeren tanım yaparken bir öğrenci yeterli ancak gerekli olmayan bir özelliğine ilişkin bilgi de içeren tanım yapmıştır. 8 öğrenci ise yeterli ve gerekli koşulu taşıyan içeren tanım yazabilmiştir.

Son testte yeterli ancak çıkarımla ulaşılabilecek özellikleri de içeren 12 tanımdan iki tanesi eşkenar dörtgenin simetri doğrusunun özelliğini de düşünülerek yapılmış tanımlardır. Bu tanımlar aşağıda verilmiştir:

E14: “*Açılardan geçen 2 simetri doğrusu olduğu için 2 çift açısı eş ve tüm kenarları eş olan dörtgen.*” (Fusun)

E15: “*Köşelerinden geçen 2 simetri doğrusu olan, 4 kenarı birbirine eş, karşılıklı kenarları birbirine paralel, karşılıklı açıları birbirine eşit olan dörtgendir.*” (Nilüfer)

Son testte yeterli ve gerekli koşulları içeren tanım yazan 8 öğrenciden altısı tanımda yalnızca “kenarların eş olması” koşulunu ifade etmişlerdir. Diğer ikisi ise tanımlarında simetri doğrusuna yer vermiştir. Aşağıda görüldüğü gibi bu iki tanım eşkenar dörtgeni yalnızca simetri doğrusunun özelliklerini kullanarak tanımlamakla birlikte her ikisi de kareyi hariç tutan tanımlardır.

E16: “*İki simetri doğrusu da sadece köşelerden geçen dörtgendir.*” (Zeki)

E17: “*Sadece köşelerden geçen 2 simetri doğrusu olan dörtgendir.*” (Mesture)

Ön testte tanım yapılması istendiğinde özellik listeleyen 2 kişiden biri son testte yine özellik listelerken diğeri yeterli ancak çıkarımla ulaşılabilecek bir özelliği de içeren bir tanım yazmıştır. Ön testte yanlış ve yetersiz tanım yapan öğrencilerin hepsinin son testte yaptıkları tanımlar yeterli tanım olarak değerlendirilmiştir.

TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu makalede dörtgenlerin kâğıt katlama kullanılarak simetri bakış açısından ele alındığı 4 haftalık (toplam 8 saat) uygulamaya katılan ilköğretim matematik öğretmenliği programı ikinci sınıf öğrencilerinin dikdörtgen ve eşkenar dörtgen tanımlarına olan yaklaşımlarından yola çıkarak geometrik düşüncelerindeki değişimin incelenmesi amaçlanmıştır.

Uygulama öncesinde katılımcıların ön testteki eşkenar dörtgen ve dikdörtgene ilişkin yanıtları alanyazındaki çalışmalarla benzer şekilde yeterli ve gerekli koşulu sağlayan tanımlar yapma (Duatepe-Paksu, vd., 2012; Türnüklü, vd., 2013) ve dörtgen sınıfları arasındaki kapsayıcı ilişkileri ifade etmede (Bütüner ve Filiz, 2016; Fujita ve Jones, 2007; Pickreign, 2007) zorluklar yaşadıklarını göstermiştir. Uygulama öncesi ortaya çıkan bu

durum katılımcıların dörtgenleri ayrık sınıflar olarak öğrenmelerine yol açan bir öğretim sürecinden geldikleri biçiminde yorumlanabilir.

Uygulama sonunda çalışma grubunun dikdörtgen ve eşkenar dörtgene yönelik yaptıkları tanımlarda kapsayıcı ilişkilerin anlaşılmasına yönelik fark edilebilir bir gelişme görülmüştür. Bunun önemli nedenlerinden biri simetriyle zenginleştirilen uygulamanın Whiteley'in (2005) de ifade ettiği gibi görsel ve kinestetik bir deneyim sağlaması olabilir. Etkinliklerin bu şekilde çoklu gösterimler içermesi çeşitli öğrenme stillerine sahip öğrencilere de hitap etme potansiyelini artırmıştır. Geleneksel yaklaşıma göre daha informal, deneyimsel ve uygulamalı kâğıt katlama etkinlikleri sayesinde incelenen dörtgenler katılımcılar için daha tanıdık hale gelmiştir. Katılımcıların yaptıkları tanımların yeterli ve gerekli olma koşuluna göre de gelişme gösterdikleri tespit edilmiştir. Ayrıca uygulama sonrasında yeterli ve gerekli koşulları içeren tanımlar yazan bazı öğrencilerin dikdörtgen ve eşkenar dörtgendeki simetri doğrusu özelliklerini kullandıkları görülmüştür. Araştırmanın bu bulguları Craine ve Rubenstein'in (1993) dörtgenlerin hiyerarşik sırayla simetri özellikleri açısından incelenmesinin öğrencilerin sınıf ilişkilerini anlamalarını kolaylaştırdığı fikrini desteklemektedir.

Van Hiele (1986) modeli açısından bakıldığında yeterli ve gerekli koşulları sağlayan tanımlar yapabilmek geometrik düşünme düzeyini belirlemede önemli bir göstergedir. Bireyler betimsel düzeyden basit çıkarım düzeyine çıktıklarında bir kavramı tanımlamak için gereken "yeterli ve gerekli" koşulları söyleyebilirler. Bu nedenle yapılan uygulamanın öğrencilerin dörtgenlere ilişkin hem kapsayıcı ilişkileri daha iyi anlamalarını sağlaması hem de tanımda yer alan yeterli ve gerekli koşullara ilişkin daha başarılı olmalarını sağlamaları bakımından öğrencilerin bu konuda basit çıkarım düzeyine çıkmalarını sağladığı söylenebilir.

Etkinlik dizisinin hiyerarşinin en üstünde bulunan tek simetri eksenli olan dörtgenlerle başlayıp ardından bu dörtgenlerde bir simetri eksenli daha olduğunda nasıl bir dörtgen elde edileceğinin tartışılması şeklinde ilerlenmesi dörtgen sınıfları arasındaki bağların anlaşılmasına katkıda bulunmuştur. Uygulama sürecinde dörtgenlerin teker teker kâğıt katlama ile incelenmesinin ardından birbirleriyle sınıf ilişkileri olan dörtgenlerin de

karşılaştırılması istenmiştir. Örneğin ikizkenar yamuk ve dikdörtgenin karşılaştırılarak benzer ve farklı yönlerinin belirlenmesi istenmiştir. Aynı şekilde deltoid ve eşkenar dörtgen için de karşılaştırılma yapılmıştır. Böylece katılımcılar köşelerden geçen tek simetri doğrusuna sahip dörtgen sınıfının köşelerden geçen 2 simetri doğrusuna sahip olan dörtgen sınıfı tarafından kapsandığını fark edebilmişlerdir. Dörtgenler arasındaki sınıf ilişkisinin bu yolla anlaşılmasının uygulama sonunda katılımcıların kapsayıcı tanımlar yapabilmesinde etkili olduğu düşünülmektedir.

Bu araştırma ile kâğıt katlama kullanarak dörtgenleri simetri bakış açısından incelemenin ilköğretim matematik öğretmenliği programı ikinci sınıf öğrencilerinin geometrik düşünme biçimlerindeki gelişime destek olduğu ortaya konmuştur. Buradan yola çıkarak ilerideki uygulamalar ve araştırmalar için katkı sağlayacağı düşünülen bazı öneriler sunulabilir. Örnek vermek gerekirse, bu çalışmanın uygulama sürecinde Şekil 1’de bulunan simetri eksenine sahip beş özel dörtgen incelenmiştir. Yarım dönme simetrisine sahip olup yansıma simetrisine sahip olmayan paralelkenara ise etkinlik dizisinde yer verilmemiştir. Bu durumun katılımcıların ön test ve son testteki yanıtlarına yansıdığı görülebilir. Son testte bazı katılımcılar paralelkenarın köşegenlerinin simetri eksenini olduğunu sanıp paralelkenarın köşelerden geçen simetri doğrusuna sahip bir dörtgen olduğunu düşünmüşlerdir. Her ne kadar simetri eksenine sahip olmasa da diğer dörtgenlerle farklılık ve benzerliğini tartışmak ve başka sınıf ilişkilerini incelemek için paralelkenar da etkinlik dizisine dâhil edilebilir. Böylece Whiteley’in (2005) önerdiği gibi paralelkenar ve alt sınıf dörtgenlerde bulunan yarım dönme simetrisine de değinilebilir.

Bu çalışma sınırlı sayıda ilköğretim matematik öğretmenliği programı öğrencileri ile yapılmış olsa da gerçekleştirilen uygulamanın katılımcıların van Hiele geometrik düşünme modeline göre üçüncü düzeye çıkmalarını desteklemedeki rolü hakkında fikir vermektedir. Üniversite düzeyindeki öğrencilerin uygulama öncesi dörtgen sınıfları arasındaki kapsayıcı ilişkileri ifade etmede yaşadıkları zorluklar düşünüldüğünde dörtgenlerdeki sınıf ilişkilerinin öğretiminde bu çalışmadaki yaklaşımın daha erken yaşlardan itibaren kullanılması önerilebilir. Bu yaklaşım, hâlihazırda kullanılan dörtgen inceleme yaklaşımları ile birlikte uygulandığında öğrencilerin dörtgenler arasındaki


hiyerarşik sınıflamayı farklı yönlerden anlamalarını sağlayabilir. Ayrıca dörtgenlere ilişkin bu simetri bakış açısıyla öğrencilerin ortaöğretimde karşılaşacakları geometrik dönüşümlerdeki simetri kavramı için de gerekli zemin hazırlanabilir. Üstelik etkinliklerin değişik öğrenme ortamlarında kolayca ve masrafsız uygulanabilmesi öğretmenler açısından da motive edici olabilir. Bu çalışmada yalnızca kâğıt katlama etkinliklerinin yer aldığı tek grup ön test son test deseni kullanılmıştır. Bu çalışmadaki yaklaşımın dinamik geometri yazılımlarıyla dörtgenlerin simetri bakış açısından inşa edilmesiyle desteklenerek uygulanması alana önemli katkılar getirebilir.

KAYNAKLAR

- Arıcı, S., & Aslan-Tutak, F. (2015). The effect of origami-based instruction on spatial visualization, geometry achievement, and geometric reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(1), 179-200.
- Bütüner, S. Ö. ve Filiz, M. (2016). Matematik öğretmeni adaylarının dörtgenleri sınıflandırma becerilerinin incelenmesi. *Alan Eğitimi Araştırmaları Dergisi*, 2(2), 43-56.
- Craine, T. V., & Rubenstein, R. N. (1993). A quadrilateral hierarchy to facilitate learning in geometry. *The Mathematics Teacher*, 86(1), 30-36.
- Çakıroğlu, E. (2013). *Matematik kavramlarının tanımlanması*. Zembat, İ. Ö., Özmantar, M. F., Bingölbali, E., Şandır, H. ve Delice, A. (Ed.), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* (2. Baskı) (s. 1-13) içinde. Ankara: Pegem Akademi.
- Çakmak, S. (2009). An investigation of the effect of origami-based instruction on elementary students' spatial ability in mathematics. *Unpublished master's thesis*. Middle East Technical University, Ankara.
- de Villiers, M. (1994). The role and function of hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11-18.
- Duatepe-Paksu, A., Pakmak, G. S. & İymen, E. (2012). Preservice elementary teachers' identification of necessary and sufficient conditions for a rhombus. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 46, 3249-3253.
- Duatepe-Paksu, A. (2017). Kâğıt Katlama Yöntemiyle Dörtgenlerin İncelenmesi. *Journal of Inquiry Based Activities*, 6(2), 80-88.
- Ellis-Davies, A. (1986). Symmetry in the mathematics curriculum. *Mathematics in School*, 15(3), 27-30.
- Edwards, B. & Ward, M. B. (2008) *The role of mathematical definitions in mathematics and in undergraduate mathematics courses*. In Carlson, M. & Rasmussen, C. (Ed.) *Making the Connection: Research and Teaching in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 223-232). Washington, DC: Mathematics Association of America.
- Fujita, T. (2012). Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *Journal of Mathematical Behavior*, 31, 60-72.
- Fujita, T. & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: Towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education*, 9(1 & 2), 3-20.
- Keedy, M. L. (1980). The fuss about trapezoids. *Mathematics Teacher*, 73, 488-489.

- Kemankaşlı, N. ve Gür, H. (2005). Geometri öğretiminde kâğıt katlama ve kesme tekniklerine ait örnekler. *Eğitimde Yeni Yönelimler-II, Eğitimde Oyun Sempozyumu*, Özel Tevfik Fikret Okulları, Ankara.
- MEB (2018). *Matematik Öğretim Programı (İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar)*. Ankara: TTKB.
- Öztoprakçı, S. ve Çakıroğlu, E. (2013). *Dörtgenler*. Zembat, İ. Ö., Özmantar, M. F., Bingölbali, E., Şandır, H. ve Delice, A. (Ed.), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* (2. Baskı) (s. 249-272) içinde. Ankara: Pegem Akademi.
- Pickreing, J. (2007). Rectangles and rhombi: how well do preservice teachers know them? *IUMPST: The Journal*, 1, 1-7.
- Türnüklü, E., Alaylı, F. G. ve Akkaş, E. N. (2013). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının dörtgenler e ilişkin algıları ve imgelerinin incelenmesi. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*, 13 (2), 1213-1232.
- Usiskin, Z. & Griffin, J. (2008). *The classification of quadrilaterals: A study of definition*. Information Age Publishing, Charlotte, NC.
- Whiteley, W. (2005). *Exploring the parallelogram through symmetry*, Unpublished manuscript <http://www.math.yorku.ca/~whiteley/Visualization.pdf>. adresinden erişilmiştir.
- Zazkis, R. & Leikin, R. (2008) Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 131-148. DOI: 10.1007/s10649-008-9131-7

ORCID

Sibel KAZAK  <http://orcid.org/0000-0003-1710-8272>

Asuman DUATEPE-PAKSU  <http://orcid.org/0000-0003-2504-6294>

SUMMARY

Previous research shows that pre-service teachers have difficulties in conceptualizing the inclusive relations among the quadrilaterals (Bütüner & Filiz, 2016; Fujita & Jones, 2007; Pickreign, 2007). Moreover, definitions generated by pre-service teachers seemed to lack necessary and sufficient conditions of specific quadrilaterals (Duatpe-Paksu, et al., 2012; Türnüklü, et al., 2013). To address these difficulties, this study suggests a teaching intervention in which quadrilaterals were explored from the symmetry perspective using paper folding during the Origami class offered for sophomore students enrolled in a Teaching Mathematics Program. The aim of the study is to investigate the change in students' geometric thinking through their approaches to definitions of rectangle and rhombus after the 4-week intervention. The research questions are as follows: How is the change in students' geometric thinking in relation to definitions of rectangle and rhombus with respect to (a) whether their definitions are exclusive or inclusive; (b) whether their expressions in determining these quadrilaterals are exclusive or inclusive; and (c) whether their definitions constitute necessary and sufficient conditions?

The study using a single group, pre- and post-test research design was conducted during the 2015-2016 academic year fall semester. The participants were 21 students (16 females and 5 males) enrolled in a Teaching Mathematics Program at a university in the Aegean region. The intervention lasted 4 weeks over 8 class periods in total. During the intervention, isosceles trapezoid, deltoid, rhombus, rectangle and square were studied. The implementation began with determining symmetry axes of these quadrilaterals by paper folding and discussing the properties related to the sides and angles of these quadrilaterals based on using only the symmetry axes. Afterwards, the quadrilaterals were compared and their classifications were discussed. Lastly, preservice teachers were asked to generate definitions of rectangle, rhombus and square and discussed them as a class. Before and after the intervention, a questionnaire that involved determining and defining quadrilaterals was administered. Following the intervention, five preservice teachers, who actively participated in class discussions and expressed different point of views, were selected for interviews. The interviews were conducted using a semi-structured interview protocol of evaluating quadrilateral definitions. The written responses of preservice teachers on pre- and post-tests were analyzed using content analysis. Both researchers initially coded the data independently and then compared them. Next, emerging themes were mutually decided.

Findings showed that the students had difficulties with generating definitions that constitute necessary and sufficient conditions and expressing the inclusive relations between quadrilaterals on the pre-test. After the intervention, there was a notable improvement in participants' understanding of inclusive relations in the definitions of rectangle and rhombus. In addition, their definitions improved with respect to the necessary and sufficient conditions of these quadrilaterals. These findings suggest that studying quadrilaterals hierarchically with respect to symmetrical properties has a potential to facilitate learners' understanding of class relations, which is important for the development of geometric thinking.

As a result, the study reveals that the intervention supports the shift in participants' geometric thinking to the third level in van Hiele's model. Therefore, this teaching approach could be used also with students at middle school and high school levels. As this teaching approach can be

implemented in various learning settings easily and without any cost, it could be motivating for teachers to adopt it. For future research, conducting experimental studies including control group or other experimental groups using different teaching approaches, such as using dynamic geometry software, could be suggested in order to compare with the teaching method of studying quadrilaterals from symmetry perspective.

