

**T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**İKİ BOYUTLU YERALTISUYU AKIMININ RADYAL BAZLI
FONKSİYON KOLLOKASYON YÖNTEMİ İLE SAYISAL
ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GERALDIN EDINO BELALAHY

DENİZLİ, AĞUSTOS - 2022

**T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**



**İKİ BOYUTLU YERALTISUYU AKIMININ RADYAL BAZLI
FONKSİYON KOLLOKASYON YÖNTEMİ İLE SAYISAL
ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GERALDIN EDINO BELALAHY

DENİZLİ, AĞUSTOS - 2022

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

GERALDIN EDINO BELALAHY

ÖZET

**İKİ BOYUTLU YERALTISUYU AKIMININ RADYAL BAZLI FONKSİYON
KOLLOKASYON YÖNTEMİ İLE SAYISAL ANALİZİ**
YÜKSEK LİSANS TEZİ
GERALDİN EDİNO BELALAHY
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. GÜRHAN GÜRARSLAN)

DENİZLİ, AĞUSTOS - 2022

Yeraltısuyu, içilebilir su talebi, sulama ve endüstriyel faaliyetler için hayati bir kaynaktır. Bu nedenle yeraltısuyu akımının modellenmesinde farklı yöntemlerin kullanımı halen güncel olan bir araştırma konusudur. Bu çalışmada, bir ve iki boyutlu yeraltısuyu akımının diferansiyel denklemleri sonlu farklar ve radyal tabanlı fonksiyon kollokasyon yöntemi kullanılarak çözülmektedir. Bu yöntemlerle elde edilen sonuçlar GMS MODFLOW paket programından elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmaktadır. Bu çalışma sonucunda, radyal tabanlı fonksiyon kollokasyon yönteminin yeraltısuyu akım problemlerinin çözümünde kullanılan yöntemlere göre iyi bir alternatif olduğu görülmektedir.

ANAHTAR KELİMELER: Yeraltısuyu akımı, sonlu farklar yöntemi, radyal tabanlı fonksiyon kollokasyon yöntemi.

ABSTRACT

NUMERICAL ANALYSIS OF TWO-DIMENSIONAL GROUNDWATER FLOW BY RADIAL BASIS FUNCTION COLLOCATION METHOD

MSC THESIS

GERALDIN EDINO BELALAHY

PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE

CIVIL ENGINEERING

(SUPERVISOR:PROF. DR. GÜRHAN GÜRARSLAN)

DENİZLİ, AUGUST 2022

Groundwater is a vital resource for potable water demand, irrigation, and industrial activities. For this reason, the use of different methods in the modeling of groundwater flow is still a current research topic. In this study, differential equations of one- and two- dimensional groundwater flow are solved using finite difference and radial basis function collocation method. The results obtained by these methods are compared with the results obtained from the GMS MODFLOW package program. As a result of this study, it is seen that the radial basis function collocation method is a good alternative to the methods used in the solution of groundwater flow problems.

KEYWORDS: Groundwater flow, finite difference method, radial basis function collocation method.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	1
ABSTRACT	2
İÇİNDEKİLER	3
ŞEKİL LİSTESİ.....	5
TABLO LİSTESİ	6
SEMBOL LİSTESİ.....	7
ÖNSÖZ.....	8
1 GİRİŞ.....	9
1.1 Genel	9
1.2 Çalışmanın amacı	9
1.3 Kapsam.....	9
1.4 Literatür Özeti	10
2 YERALTISUYU AKIMI.....	13
2.1 Su Potansiyeli ve Hidrolojik Döngü.....	13
2.2 Yeraltısuyu akımının fiziği.....	15
2.3 Akifer tipleri	16
2.3.1 Serbest yüzeyli Akifer	17
2.3.2 Basıncılı Akifer.....	18
2.4 Akifer parametreleri	18
2.4.1 Hidrolik yük (h)	18
2.4.2 Hidrolik İletkenlik (K)	19
2.4.3 Transmisibilite (T)	19
2.4.4 Özgül Verim (S_y).....	20
2.4.5 Depolama katsayısı (S) ve Özgül Depolama Katsayısı (S_s).....	21
2.5 Basıncılı akiferler için temel denklemler	21
2.5.1 Homojen ve İzotrop Akifer.....	22
2.5.2 Homojen ve Anizotrop Akifer	23
2.5.3 Heterojen ve İzotrop Akifer.....	23
2.5.4 Heterojen ve Anizotrop Akifer	23
3 SONLU FARK YÖNTEMİ	24
4 RADYAL TABANLI FONKSİYON KOLLOKASYON METODU.....	31
4.1 Giriş	31
4.2 Radyal Tabanlı Fonksiyonların Ana Özellikleri	31
4.3 Kararlı Durumdaki Diferansiyel Denklemler için RBF Kollokasyon Yönteminin Uygulanması.....	33
4.4 Zamana Bağlı Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Çözümü için RBF'nin Uygulanması	37
4.4.1 Dördüncü Mertebeden Runge-Kutta Yönteminin Uygulanması	38
4.4.2 Bir Boyutlu Yeraltısuyu Akımının Diferansiyel Denklemine Uygulanması	39
4.5 RBF enterpolasyonunun güçlendirilmesi	41
4.5.1 Bir Boyutlu İnterpolasyon	43
4.5.2 İki Boyutlu İnterpolasyon	44
5 SAYISAL UYGULAMALAR	46
5.1 Sayısal Uygulama 1	46

5.2	Sayısal Uygulama-2	48
5.3	Sayısal Uygulama-3	51
5.4	Sayısal Uygulama-4	54
6	SONUÇ VE ÖNERİLER	59
	KAYNAKLAR	60
	EK-A: GMS MODFLOW modeli.....	65

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1: Hidrolojik Döngü (Keskin, 2019).....	13
Şekil 2.2: Dünya yüzünde (veya yüzeeye yakın) su dağılımı. (Keskin, 2019).	14
Şekil 2.3: Darcy Yasasını ifade Edene Deneysel Düzenek (Kresic, 2007).....	15
Şekil 2.4: Akifer tipleri (Batu, 1998)	17
Şekil 2.5: Hidrolik yük belirlenmesi için anahtar elemanların şematik sunumu.	18
Şekil 2.6: a) Basınçlı akiferde transmisibilite. b) Serbest yüzeyli akiferde transmisibilite.	20
Şekil 2.7: Kartezyen koordinatlar (x, y ve z)	22
Şekil 3.1: Denklem (3.3)'te kullanılan grid noktalarının gösterimi.....	25
Şekil 3.2: Denklem (3.6)'da kullanılan grid noktalarının gösterimi.	26
Şekil 3.3: Denklem (3.11) 'de kullanılan grid noktalarının gösterimi.....	27
Şekil 4.1: Hesap alanının iç ve sınır düğümlerinin gösterimi (Çiftçi, 2011). ...	34
Şekil 5.1: Akiferin şematik gösterimi	46
Şekil 5.2: $\Delta x=10$ m ve $\Delta t= 5$ dk düğüm aralıkları için Wang ve Anderson (1982) çözümleri ile sayısal çözümlerin karşılaştırılması.....	48
Şekil 5.3: İki boyutlu yeraltısuyu akım modelinin geometrisi ve sınırları (Wang ve Anderson, 1982)	49
Şekil 5.4: $\Delta x = \Delta y = 20$ m aralıkları için Wang ve Anderson (1982) çözümleri ile sayısal çözümlerin karşılaştırılması.	51
Şekil 5.5: $\Delta x = \Delta y = 0,1$ m için analitik ve sayısal olarak elde edilen hidrolik yük dağılımları.	53
Şekil 5.6: Varsayımsal akiferin geometrisi ve sınır koşulları.	55
Şekil 5.7: $\Delta x = \Delta y = 100$ m aralıkları için GMS MODFLOW modeli ile sayısal çözümlerin karşılaştırılması.	56
Şekil 5.8: $\Delta x = \Delta y = 50$ m aralıkları için GMS MODFLOW Modeli ile sayısal çözümlerin karşılaştırılması.	57

TABLO LİSTESİ

Sayfa

Tablo 3.1: $O(\Delta x)$ 'nin ileri fark gösterimleri. (Hoffmann ve Chiang, 2000).....	29
Tablo 3.2: $O(\Delta x)$ 'nin geriye doğru fark gösterimleri.	29
Tablo 3.3: $O(\Delta x)^2$ 'nin merkezi fark gösterimleri.	29
Tablo 3.4: $O(\Delta x)^2$ 'nin ileri fark gösterimleri.....	30
Tablo 3.5: $O(\Delta x)^2$ 'nin geriye doğru fark gösterimleri.....	30
Tablo 3.6: $O(\Delta x)^4$ 'nin merkezi fark gösterimleri.	30
Tablo 4.1: Bazı yaygın olarak kullanılan radyal tabanlı fonksiyonlar (Çiftçi, 2011).....	32
Tablo 5.1: Farklı yöntemler için h değerleri (t=100 dk).	47
Tablo 5.2: Farklı yöntemler için h değerleri (t=500 dk).	47
Tablo 5.3: $\Delta x = \Delta y = 20$ m aralıkları için Wang ve Anderson (1982) çözümleri ile sayısal çözümlerin karşılaştırılması.	50
Tablo 5.4: Üçüncü problem için kullanılan parametre değerleri	52
Tablo 5.5: Sonlu fark ve farklı RBF türleri için AE değerleri.....	53
Tablo 5.6: Pompaj kuyularının özellikleri.	55
Tablo 5.7: Sonlu farklar ve RBF yöntemleri ve GMS MODFLOW modeli ile elde edilen gözlem kuyularındaki hidrolik yük değerlerinin ile karşılaştırılması ($\Delta x = \Delta y = 100$ m).	56
Tablo 5.8: Sonlu farklar ve RBF yöntemleri ve GMS MODFLOW modeli ile elde edilen gözlem kuyularındaki hidrolik yük değerlerinin ile karşılaştırılması ($\Delta x = \Delta y = 50$ m).....	57

SEMBOL LİSTESİ

Q :	Debi (m^3/s)
A :	Akış bölümü (m^2)
Δh :	İki ölçüm noktası arasındaki hidrolik yük kaybı (m)
l :	Numune uzunluğu (m)
K :	Hidrolik iletkenlik (m/s)
ν :	Kinematik viskozite (m^2s^{-1})
k :	Özgül permeabilite (-)
b :	Akiferin kalınlığı (m)
T :	Hidrolik iletkenlik (m^2/s)
V_{wd} :	Çekilen suyun hacmi (m^3)
V_t :	Toplam akifer hacmi (m^3)
S_y :	Özgül Verim (-)
S :	Depolama katsayısı
g :	Yerçekimi ivmesi (ms^{-2})
ΔV_w :	Birim akiferden salınan su (m^3)
Δh :	Birim yük kaybı (m)
n_e :	Porosite (-)
b :	Akifer kalınlığı (m)
α :	Akiferin sıkıştırılabilirliği ($m \cdot s^2/kg$)
β :	Suyun sıkıştırılabilirliği ($m \cdot s^2/kg$)
γ :	Akiferin birim hacim ağırlığı (kg/m^2s^2)
W :	Birim hacim başına hacimsel akıdır ve su kaynaklarını veya lavaboları temsil eder (m^3)

ÖNSÖZ

Tez çalışmam boyunca her zaman yanımda olan, bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan, manevi desteğini esirgemeyen, bugünkü bilgi seviyeme ulaşmamda çok büyük payı olan danışmanım, değerli hocam Prof. Dr. Gürhan GÜRARSLAN ve Arş. Gör. Dr. Ersin BAHAR'a teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışma sırasında keyifli sohbetler sağlayan, departmandaki tüm değerli çalışma arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, hayatımın her alanında bana yol gösteren, maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen, beni yetiştirip bugünlere gelmemde en büyük paya sahip olan, karşılıksız sevgilerini her zaman hissettiğim sevgili annem Aveline RASOAMANANJARA' a, babam Gérard BELALAHY' a ve tüm kardeşlerime ne kadar teşekkür etsem azdır.

1 GİRİŞ

1.1 Genel

Yeraltısuyu, insanlığın evsel, endüstriyel ve tarımsal kullanımlar için su temini sağladığı hidrolojik döngünün bileşenlerinden biridir. Ayrıca yeraltısuyu, insanoğlunun kullanabileceği en değerli doğal kaynaklardan biri olarak kabul edilmektedir (Bhattacharya, 2011). Yeraltısuyu mevcudiyeti yüzey suyuna göre düşük olduğundan çok verimli kullanılması gerekmektedir. Dünya genelinde artan nüfus ve kontrolsüz kirlilik nedeniyle azalan yeraltısuyu kaynaklarının etkin bir şekilde yönetilmesi ihtiyacı artmıştır. Dünyanın birçok ülkesinde, yeraltısuyunun sınırlı mevcudiyeti nedeniyle, yeraltısuyu sürdürülebilir kullanımı için uygun yönetim stratejilerine ihtiyaç duyulmaktadır. Yeraltısuyu akışının karmaşık problemi, yeraltısuyu akış denklemlerinin analitik veya sayısal olarak çözülmesiyle incelenebilir.

1.2 Çalışmanın amacı

Bu tezde, bir boyutlu ve iki boyutlu yeraltısuyu akışının sayısal modeli, sonlu farklar ve radyal tabanlı fonksiyonu metodu (Radial Basis Function RBF) kullanılarak geliştirilecektir. Öncelikle analitik çözümü bilinen bir ve iki boyutlu kısmi diferansiyel denklem çözülecek ve model sonuçlarının doğruluğu ortaya konulacaktır. Daha sonra geliştirilen modelin sonuçları, GMS MODFLOW paket programından gibi mühendislik yazılımlarından elde edilen sonuçlarla karşılaştırılacaktır.

1.3 Kapsam

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde, yeraltısuyu ile ilgili genel çalışmalar detaylandırılmıştır. Darcy Yasası Prensibi, basınçlı akiferler ve serbest yüzeli akiferler gibi yeraltı ortamındaki akifer türleri tanımlanır. Üçüncü bölümde, sonlu elemanlar farkı yönteminin yeraltısuyu problemine uygulanması üzerinde durulmuştur. Dördüncü bölümde, yöntemin radyal tabanlı fonksiyon (RBF) üzerinde özellikle bu yöntemin kalıcı ve geçici akışta uygulanması üzerinde durulmuştur.

Beşinci bölümde, RBF yöntemlerinin verimliliği, sonlu elemanlarla fark yöntemi ve GMS MODLOW ile de karşılaştırılarak bir ve iki boyutludur. Boyutlu dijital numunelere uygulanarak test edilmiştir. Elde edilen sonuçlar analitiktir ve literatürdeki diğer çalışmaların sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Altıncı bölümde ise tüm çalışmada elde edilen sonuçlar değerlendirilmiş, özetlenmiş ve aktarılmıştır. İyi bir yönü netleştirmek için çeşitli öneriler veya açıklamalar yapılmıştır.

1.4 Literatür Özeti

Ayvaz ve Karahan (2008) tarafından iki boyutlu basınçlı bir akifer sistemi için bilinmeyen yeraltısuyu kuyu lokasyonlarının ve pompaj debilerinin belirlenmesi için bir simülasyon/optimizasyon (S/O) modeli önerilmiştir. Önerilen S/O modeli, simülasyon modeli olarak yeraltısuyu akış denklemini yöneten sonlu farklar çözümünü kullanmaktadır. Bu model daha sonra her bir kuyu için pompaj debilerini belirlemek için kullanılan bir genetik algoritma (GA) tabanlı optimizasyon modeli ile birleştirilmektedir. Kuyu konumlarını belirlemek için, iteratif hareketli bir alt bölge yaklaşımı önerilmiştir. Bu yaklaşımın temel avantajı, optimizasyon modelinin yalnızca pompaj debilerini belirlemesi ve karar değişkenleri olarak kuyu konumlarını gerektirmemesidir.

Wang ve Zheng (2016), iki boyutlu kararlı yeraltısuyu akımı problemlerini simüle etmek için temel çözümler yöntemini uygulamıştır. Tüm çözüm süreci boyunca süperpozisyon ilkesi kullanılmıştır. Sayısal sonuçlar, çoklu kuadratikler yöntemi ve karışık sonlu elemanlar yönteminin yanı sıra analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır. Kararlı yeraltısuyu akımı problemlerinin ele alınmasında temel çözümler yönteminin umut verici olduğu gösterilmiştir.

Shadab ve Michael (2009), kararsız yeraltısuyu akış problemlerini çözmek için farklı Kafes Boltzmann (LB) tabanlı modeller kullanmışlardır. Difüzyon denklemindeki difüzyon katsayısı ile yeraltısuyu akış denklemindeki hidrolik difüzyon arasındaki analogi, kararsız yeraltısuyu akış denklemini çözmek için LB tabanlı bir difüzyon modeli uygulamak için kullanıldı. LB tabanlı modellerden elde edilen sonuçların mevcut analitik çözümlerle iyi bir uyum içinde olduğu gösterilmiştir.

Boyras ve Alhan (2018), havza yönetiminde yeraltı suyu kaynaklarını korumak için, analitik, sayısal ve deneysel modelleme dahil olmak üzere yüzey suyu ve yeraltı suyunu entegre eden yeraltı suyu akış dinamiği çalışmaları yapılmıştır. Bu çalışmada, bir deneysel cihaz ile yüzey suyu-yeraltı suyu etkileşimlerinin fiziksel davranışını temsil eden bir akarsu-akifer sistemi düşünülmüştür. Son olarak, analitik ve deneysel sonuçları doğrulamak için Visual MODFLOW kullanılarak sayısal bir model geliştirilmiştir. Sayısal sonuçların hem analitik çözümlerle hem de deneysel gözlemlerle uyum içinde olduğu görülmüştür.

Bhattacharya (2011), yeraltı suyu akımının sayısal simülasyonunu gömülü bir optimizasyon yaklaşımı ve elektronik tablo çözücü kullanarak gerçekleştirmiştir. Elektronik tablo simülasyonunun sonucunun GMS MODFLOW simülasyonunun sonucuna benzer olduğu gösterilmiştir. Metodoloji kavram olarak basit olduğu için yeraltı suyu modellemesi ile ilgili derslerde ve küçük ölçekli yeraltı suyu problemlerinin çözümünde rahatlıkla kullanılabilir.

Hassan ve diğ. (2015), Tebriz 2. hat metro tüneline kararlı durumdaki yeraltı suyu akımının girişi sayısal sonlu eleman modelleri aracılığıyla değerlendirmiştir. Bu modeller, kaya kütlelerini bir EPM olarak ele alarak inşa edilmiştir. Tünele su girişinde etkili parametreler üzerinde bir duyarlılık analizi sağlanmıştır. Daha sonra, TML2 rotası boyunca yeraltı suyu giriş debisi tahmin edilmiştir. Son olarak, FEM yoluyla elde edilen sonuçlar, Raymer çözümü tarafından verilen giriş debisi ile karşılaştırılmış ve doğrulanmıştır.

Eldho ve Mategaonkar (2011), iki boyutlu yeraltı suyu akımının simülasyonu için radyal tabanlı fonksiyon (RBF) kollokasyon yöntemini kullanan bir model önermiştir. Geliştirilen modelin doğruluğu literatürde mevcut analitik çözümlerle doğrulanmıştır. Geliştirilen model, ilk olarak varsayımsal bir problem üzerinde ve daha sonra bir alan problemi üzerinde hidrolik yük dağılımını hesaplamak için kullanılmıştır. Varsayımsal problem için RBF model sonuçları sonlu elemanlar model sonuçlarıyla, saha problemi için ise sınır elemanlar model sonuçları ile karşılaştırılmıştır. RBF model sonuçlarının tatmin edici olduğu gösterilmiştir.

Eldho ve Boddula (2014), serbest yüzeyli akiferlerde yeraltı suyu akımının simülasyonu için Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) metodolojisini

geliştirmiştir. Geliştirilen iki boyutlu model, mevcut analitik ve sayısal çözümler ile doğrulanmıştır ve bunlarla iyi bir uyum içinde olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, iki boyutlu model geniş bir alan problemine de uygulanmış ve elde edilen sonuçlar BEM ve RBF çözümleriyle karşılaştırılmıştır. Bu vaka çalışmaları, serbest akifer sistemlerinde yeraltısuyu akım simülasyonu için MLPG tabanlı modellerin uygulanabilirliğini göstermiştir.

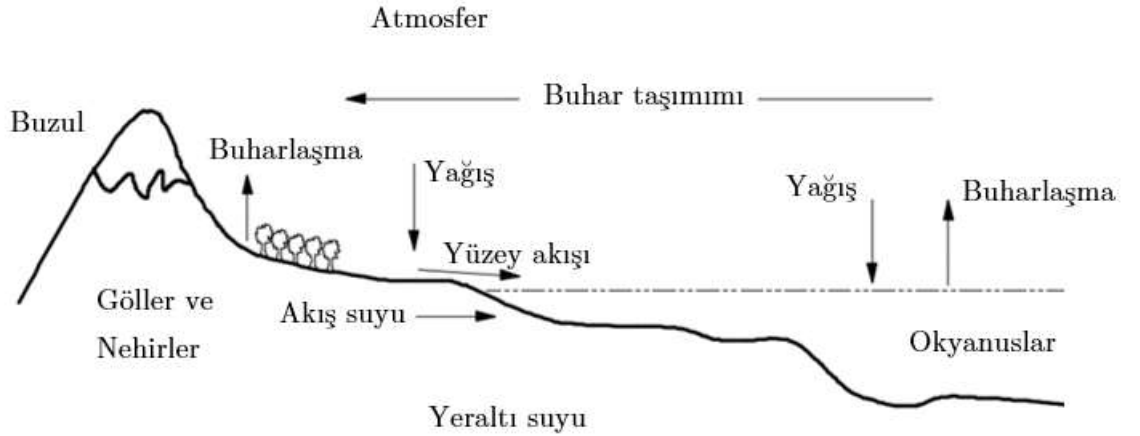
Thomas ve diğ. (2013), yeraltısuyu akım problemleri için kollokasyon tabanlı bir RBF yöntemi önermiştir. RBF modeli varsayımsal yeraltısuyu akım problemlerine uygulanmış ve sonuçlar analitik çözümler ve FEM model sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Analitik çözümlerle karşılaştırıldığında RBF modelinin FEM sonuçlarından daha doğru olduğu bulunmuştur. Bu çalışma, yeraltısuyu akım simülasyonu için RBF tabanlı modellerin etkinliğini göstermektedir.

2 YERALTISUYU AKIMI

Bu bölümde su potansiyeli ve hidrolojik döngü, yeraltısuyu akımının fiziği, akifer tipleri, akifer parametreleri ve yeraltısuyu akımının temel denklemleri hakkında bilgiler verilmektedir.

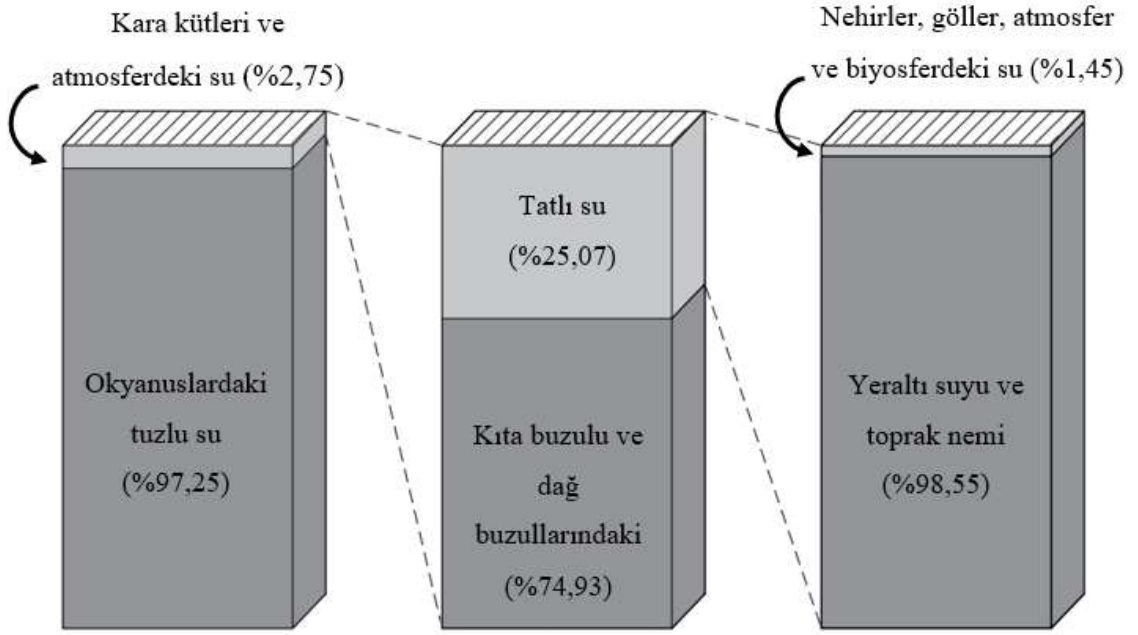
2.1 Su Potansiyeli ve Hidrolojik Döngü

Yeraltı ve yüzey sularını birbiri ile ilişkilendirmek ve yeraltı sularının sistem içindeki rolünü kavramak için ilk adım, hidrolojik döngüyü temel bir çerçeve olarak benimsemektir (Keskin, 2019). Şekil (2.1)'de hidrolojik döngü, yeryüzüne yakın suların okyanustan atmosfere akan ve ardından yağış ve akış yoluyla okyanusa dönen yeraltısuyunun sürekli döngüsü olarak bilinmektedir.



Şekil 2.1: Hidrolojik Döngü (Keskin, 2019)

Okyanusun güneş ışıması ile ısınması suyun, atmosfere buharlaşmasına ve rüzgârlar tarafından buharın yoğunlaştığı ve yağış olarak düştüğü kara kütlelerine taşınmasına neden olur. Yağış ya doğrudan okyanusa geri döndürülür, bitki örtülü yüzeyler tarafından tutularak buharlaşma ile atmosfere geri döndürülür, birikerek yüzey akışı oluşturur ya da toprağa ve altında yatan kayalara sızarak yeraltısuyunu oluşturur. Yüzeysel akış ve yeraltısuyu akışı okyanusa akan akarsu ve nehirlerle katkıda bulunurken, göller ve göletler geçici depolama sağlar (Keskin, 2019).



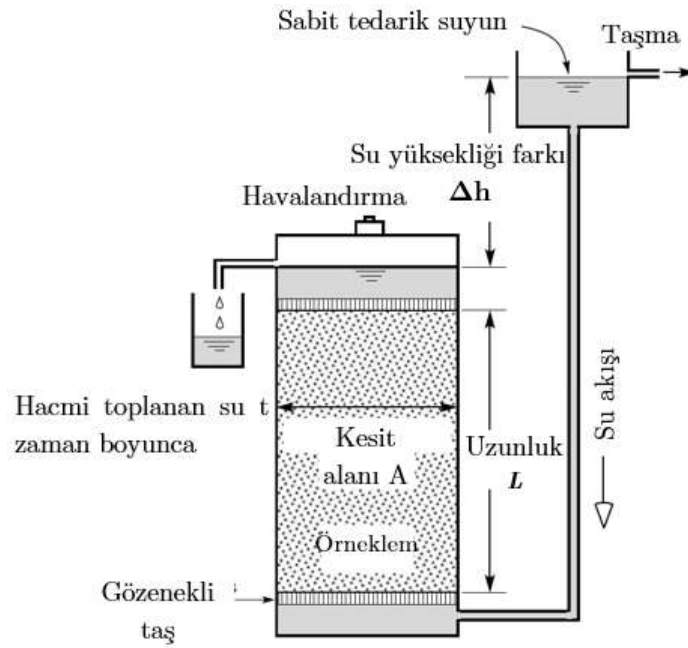
Şekil 2.2: Dünya yüzeyinde (veya yüzeye yakın) su dağılımı. (Keskin, 2019)

Şekil (2.2)'de görüldüğü gibi, okyanusların tuzlu suyu, küresel döngüdeki toplam suyun %97,25'sine tekabül etmektedir. Toplamda, kara kütleleri ve atmosfer suyun %3'ünü içerir. Kıtasal buzullar ve dağ buzulları %2,05 , 4 km derinliğe kadar olan yeraltısuyu %0,68 , tatlı su gölleri %0,01 , toprak nemi %0,005 ve nehirler %0,0001'dir. Dünyadaki içme suyunun yaklaşık %68,7'si buzullarda hapsolmuştur. Yeryüzündeki içme suyunun %30,1'inin yeraltında depolandığı düşünülürse yeraltı sularının önemi anlaşılır (Keskin, 2019).

Türkiye'de teknik ve ekonomik şartlar dahilinde çeşitli amaçlarla tüketilebilecek yüzey suyu potansiyeli, yurt içi akarsulardan $95 \times 10^9 \text{ m}^3$, komşu ülkelerden gelen akarsulardaki $3 \times 10^9 \text{ m}^3$ su ile yıllık ortalama $98 \times 10^9 \text{ m}^3$ 'tür. Teknik ve ekonomik olarak çekilebilir yeraltısuyu potansiyeli de Teknik ve ekonomik olarak kullanılabilir yeraltısuyu potansiyeli $14 \times 10^9 \text{ m}^3$ (toplamın %34'ü) olarak hesaplanmıştır. Dolayısıyla Türkiye'de mevcut durumda kullanılabilir yerüstü ve yeraltısuyu potansiyeli yüzey ve yeraltısuyu potansiyeli $112 \times 10^9 \text{ m}^3$ (toplamın %58'i) alınabilir. Hâlihazırda toplam kullanılabilir su potansiyelinin $40 \times 10^9 \text{ m}^3$ 'ü (toplamın %36'sı) kullanılmaktadır (Tübitak MAM Çevre Enstitüsü, 2012).

2.2 Yeraltısu akımının fiziği

Fransız hidrolik mühendisi Henry Darcy, 1856 yılında Fransa'nın Dijon kentinin bilançosunu yayınlamıştır ve şehrindeki su filtreleri tasarımının bir parçası olarak kumların içinden su akışını nicel olarak analiz etmiştir (Gürarlan, 2004). 1856'da yayınlanan çalışması, sıvıların gözenekli ortamlardan akışına ilişkin tüm modern çalışmaların temelini oluşturmaktadır. Darcy'nin kullandığına benzer bir deney cihazının şematik sunumu Şekil (2.3)'te gösterilmektedir.



Şekil 2.3: Darcy Yasasını ifade Edene Deneysel Düzenek (Kresic, 2007)

Böyle bir cihaz, çeşitli modifikasyonları ile hala modern hidrojeoloji laboratuvarlarının ana ekipmanlarından biridir. Darcy, değişen hidrolik koşullarla silis kumu üzerinde gerçekleştirdiği çok sayıda teste dayanarak, şu anda Darcy Yasası olarak bilinen aşağıdaki nicel ilişkiyi kurmaktadır (Kresic, 2006):

$$Q = -K \cdot A \cdot \frac{\Delta h}{l} \quad (2.1)$$

Q : Debi (m^3/s)

A : Akış enkesit alanı (m^2)

Δh : İki ölçüm noktası arasındaki hidrolik yük kaybı (m)

l : Numune uzunluğu (m)

K : Hidrolik iletkenlik (m/s)

Darcy, bir dizi deneyle belirli bir kum türü için hacim akışının, $h_2 - h_1$ düşüş yüksekliği ve A enkesit alanı ile doğru orantılı olduğunu, ancak uzunluk $l_2 - l_1$ farkıyla ters orantılı olduğunu tespit etmiştir. Kütlelenin korunumu ilkesi gereğince süreklilik denklemi Denklem (2.2)'de verilmektedir.

$$Q = v_1 A_1 = v_2 A_2 \quad (2.2)$$

Yukarıdaki denklemden akım hızı aşağıdaki gibi elde edilmektedir:

$$v = \frac{Q}{A} \quad (2.3)$$

Denklem (2.1) ve (2.2)'de birleştirildiğinde akım hızı şöyle olur :

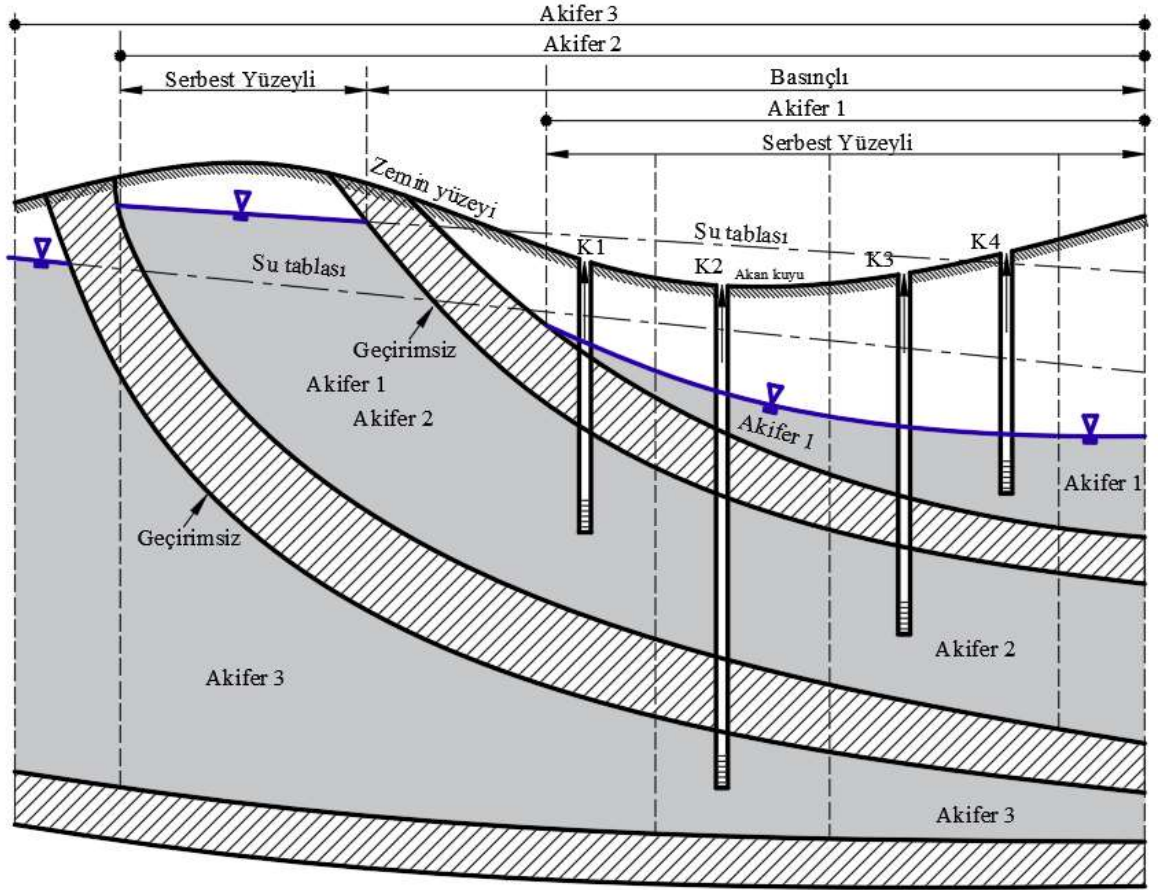
$$v = -K \frac{\Delta h}{l} \quad (2.4)$$

$$v = -K \times i \quad (2.5)$$

Burada K orantı sabiti olarak adlandırılmaktadır. Denklem (2.5)'te görüldüğü gibi akım hızı hidrolik gradyan (i) ile doğru orantılıdır.

2.3 Akifer tipleri

Yer yüzeyinin altındaki su kütesine yeraltısuyu denir. Yeraltısuyu sistemi doymamış ve doymuş bölgelerden oluşmaktadır. Akifer terimi doymuş oluşumlar için kullanılmaktadır. Etimolojik olarak akifer, “akifer oluşumu” anlamına gelir. Akifer kelimesi iki Latince kelimeden türetilmiştir: aqua (su) ve ferre (taşımak). Yeraltı hidrolojisinde, bir akifer önemli miktarda su ileten ve veren tek bir jeolojik oluşum veya bir grup oluşum olarak tanımlanmaktadır.



Şekil 2.4: Akifer tipleri (Batu, 1998)

Şekil (2.4)'te doymamış bölgenin yanı sıra farklı akifer türlerini de içeren bir yeraltısuyu akım sisteminin genelleştirilmiş bir kesiti sunulmuştur.

2.3.1 Serbest yüzeyle Akifer

Serbest yüzeyle akiferlerde üst sınır serbest bir yüzeyle sınırlanmaktadır. Bu nedenle, serbest yüzeyle bir akiferin serbest yüzeyi atmosfer basıncı altındadır. Yeraltısuyu akiferleri terimi, serbest akiferler için de yaygın olarak kullanılmaktadır. Şekil (2.4)'te verilen Akifer 1, alttan geçirimsiz bir tabaka ile üstten ise serbest bir yüzeyle sınırlandığı için serbest yüzeyle bir akiferdir (Batu, 1998).

Akifer 2 ve Akifer 3'ün en soldaki kısımları da üstten serbest bir yüzeyle sınırlandığı için serbest yüzeyle akifer koşullarının altındadır. Serbest yüzeyle akiferin tipik bir göstergesi, akifere giren bir kuyudaki su seviyesinin akiferin aynı yerindeki su tablasının yüksekliğine eşit olmasıdır (Batu, 1998).

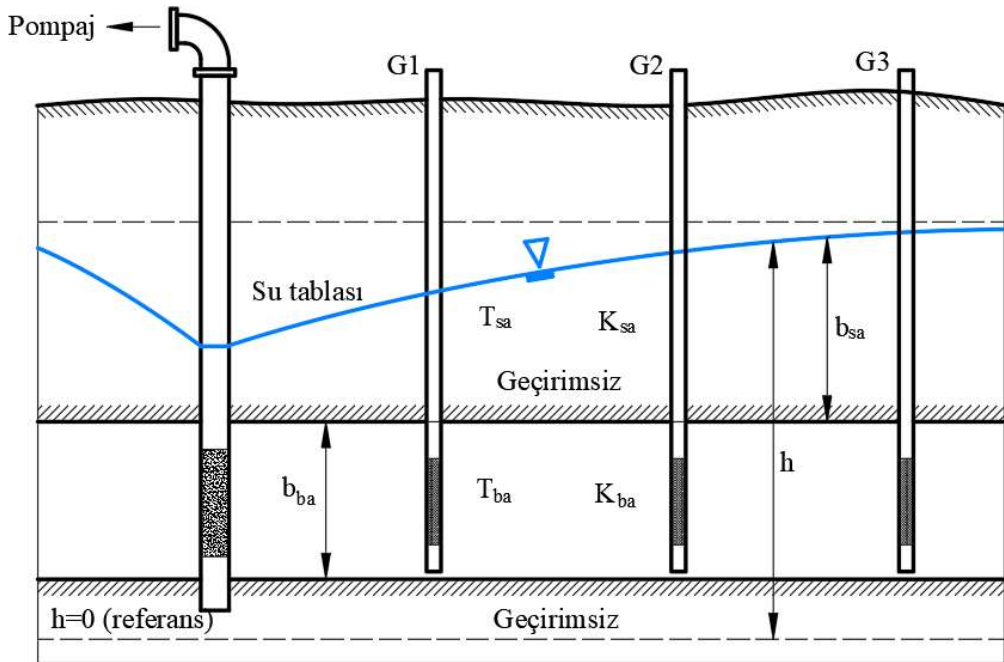
2.3.2 Basıncılı Akifer

Artezyen akiferleri veya basıncılı akiferler olarak da adlandırılan akiferler, alttan ve üstten geçirimsiz veya yarı geçirgen tabakalarla sınırlıdır. Şekil (2.4)'te Akifer 2 ve Akifer 3, en soldaki kısımları hariç, basıncılı akifer koşulları altındadır. Kapalı bir akifere nüfuz eden bir kuyudaki su seviyesi akiferin üst sınırının üzerinde olacaktır (Akifer 2'de K3 ve Akifer 3'te K2). Piezometrik yüzey, sıkı muhafazalı kuyulardaki su seviyesinin kapalı bir akiferdeki bir noktadan ulaşacağı hayali bir yüzeydir. Piezometrik yüzey terimi yerine genellikle potansiyometrik yüzey terimi kullanılır (Batu, 1998).

2.4 Akifer parametreleri

2.4.1 Hidrolik yük (h)

Akiferlerde akım hızları düşük olduğu için, hidrolik yük basınç yükü ve yerçekimi yükünün toplamından meydana gelir.



Şekil 2.5: Hidrolik yük belirlenmesi için anahtar elemanların şematik sunumu.

$$h = \frac{P}{\gamma} + z \quad (2.6)$$

Burada h hidrolik yükü, $\frac{P}{\gamma}$ basınç yükünü ve z ise yerçekimi yükünü temsil etmektedir (Erguvanlı ve Yüzer, 1993).

2.4.2 Hidrolik İletkenlik (K)

Özgül permeabilite, bir sıvının gözenekli bir ortamdan akabilme kolaylığı olarak tanımlanır ve yalnızca gözenekli ortamın fiziksel özelliklerine bağlıdır: parçacık boyutu, tanelerin şekli ve düzeni veya gözeneklerin boyutu ve ara bağlantılar. Öte yandan hidrolik iletkenlik hem gözenekli ortamın hem de akışkanın fiziksel özelliklerine bağlıdır. Özgül permeabilite (k) ve hidrolik iletkenlik (K) arasındaki ilişki aşağıdaki formülle ifade edilir.

$$K = k \frac{v}{g} \quad (2.7)$$

v : Kinematik viskozite (m^2s^{-1})

k : Özgül permeabilite (-)

g : Yerçekimi ivmesi (ms^{-2})

2.4.3 Transmisibilite (T)

Serbest yüzeyli veya basınçlı bir akiferin suyu iletme kabiliyetine transmisibilite denir. Transmisibilite (T), akiferin hidrolik iletkenliği (K) ve doymuş kalınlığının (b) bir fonksiyonudur. Serbest yüzeyli bir akiferin doymuş kalınlığı, su tablası akış yönünde eğildiği için boşlukla değişir, bu nedenle Şekil (2.6b)'de olduğu gibi belirli bir konumdan uzaklıkla T değerleri değişir. Düzgün jeolojik kalınlığa sahip basınçlı bir akiferde, doymuş kalınlık hidrolik yük farklı olsa bile sabittir ($b_1 = b_2$). Serbest bir akiferde, doymuş kalınlık hidrolik yüke bağlı olduğundan transmisibilitenin belirli bir yerde tanımlanması gerekir. Serbest bir akiferin yüksekliği aşağı yönlü akış

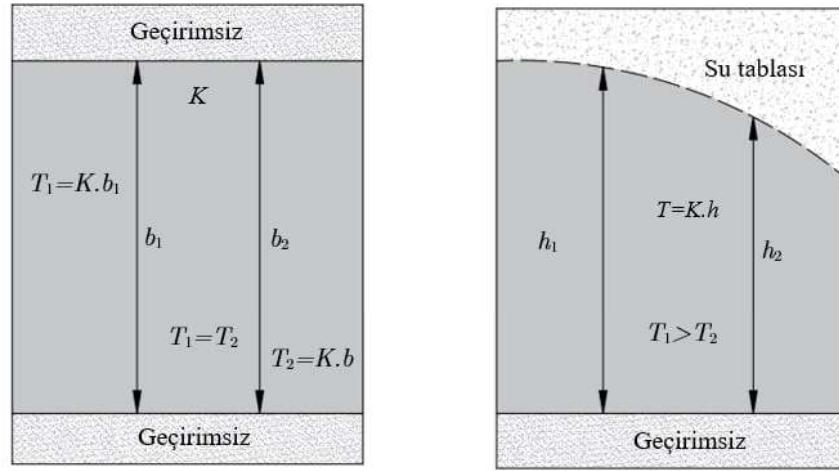
yönünde azalır, dolayısıyla doymun kalınlık azalır ($b_1 > b_2$) ve transmisibilite de ($T_1 > T_2$) azalır. Serbest yüzeyli akifer için Denklem (2.8)'de verilen formülde b yerine h alınmalıdır.

$$T = Kb \quad (2.8)$$

K : Hidrolik iletkenlik ($m s^{-1}$)

b : Akiferin kalınlığı (m)

T : Hidrolik iletkenlik ($m^2 s^{-1}$)



Şekil 2.6: a) Basınçlı akiferde transmisibilite. b) Serbest yüzeyli akiferde transmisibilite.

2.4.4 Özgül Verim (S_y)

Bir akiferde yerçekimi etkisi altında alınabilen su hacminin akiferin toplam hacmine oranıdır.

$$S_y = \frac{V_{wd}}{V_T} \quad (2.9)$$

V_{wd} : Çekilen suyun hacmi (m^3)

V_T : Toplam akifer hacmi (m^3)

S_y : Özgül Verim (-)

2.4.5 Depolama katsayısı (S) ve Özgül Depolama Katsayısı (S_s)

Depolama katsayısı (S), bir birim hidrolik yük azalması için basınçlı akiferin birim alanından çekilecek su hacmidir. Serbest bir akiferin depolama katsayısı (S), Denklem (2.10)'da gösterildiği gibi, özgül verime (S_y) eşittir.

$$S = \frac{\Delta V_w}{A\Delta h} = S_y \quad (2.10)$$

ΔV_w : Birim akiferden salınan su (m^3)

A : Akiferin birim alanı (m^2)

Δh : Birim yük kaybı (m)

$$S_s = \gamma(\alpha + \beta n_e) \quad (2.11)$$

$$S = S_s b \quad (2.12)$$

n_e : Efektif porosite (-)

b : Akifer kalınlığı (L)

α : Akiferin sıkıştırılabilirliği ($L \cdot T^2 M^{-1}$)

β : Suyun sıkıştırılabilirliği (LT^2M^{-1})

γ : Akiferin birim hacim ağırlığı (M/L^2T^2)

2.5 Basınçlı akiferler için temel denklemler

Bir akiferin ana yönlerinin bir kartezyen koordinat sisteminde x , y ve z koordinat yönlerinde olduğunu düşünelim. Bu durumda basınçlı bir akiferde yeraltısuyu akım denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir (Kresic, 2007).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{zz} \frac{\partial h}{\partial z} \right) - W = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.13)$$

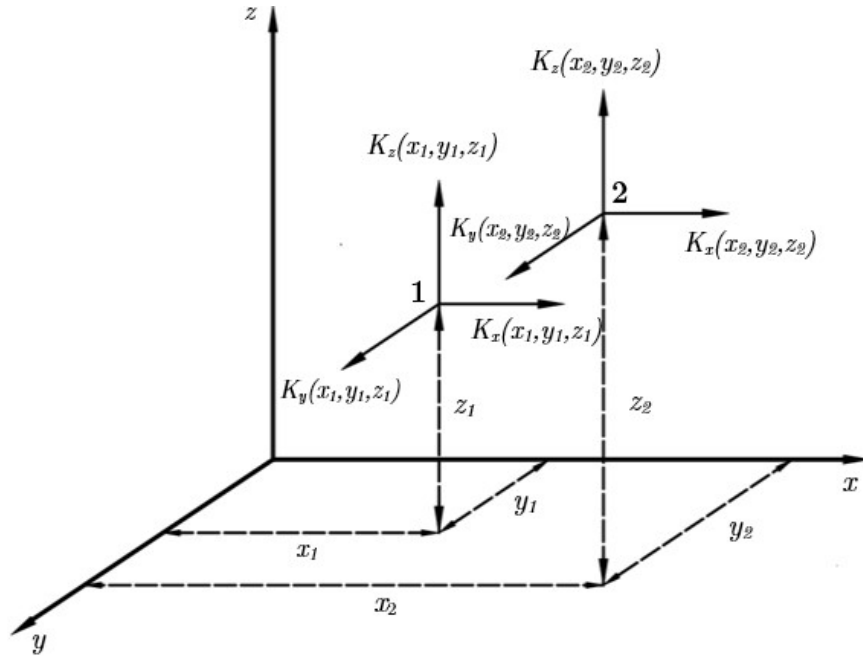
ya da

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(T_{zz} \frac{\partial h}{\partial z} \right) - W = S \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.14)$$

Burada, K_{xx} , K_{yy} ve K_{zz} , x , y ve z eksen koordinatları boyunca hidrolik iletkenlik değerlerini, W , Birim hacim başına hacimsel akıyı (kaynak ya da yitik) ve S_s , özgül depolamayı göstermektedir.

2.5.1 Homojen ve İzotrop Akifer

Homojen ve izotrop bir akifer Denklem (2.15)'te şematik olarak tanımlanmıştır. Akifer homojen ve izotrop ise hidrolik iletkenlik noktadan noktaya ve yöne göre değişmez.



Şekil 2.7: Kartezyen koordinatlar (x , y ve z)

$$\begin{aligned} K_{xx}(x_1, y_1, z_1) &= K_{yy}(x_1, y_1, z_1) = K_{zz}(x_1, y_1, z_1) = K_{xx}(x_2, y_2, z_2) \\ &= K_{yy}(x_2, y_2, z_2) = K_{zz}(x_2, y_2, z_2) = K \end{aligned} \quad (2.15)$$

Denklem (2.13)'te verilen basınçlı bir akiferdeki akım denklemi aşağıdaki gibi sadeleşir.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - W = \frac{S_s}{K} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.16)$$

2.5.2 Homojen ve Anizotrop Akifer

Hidrolik iletkenlikler, 1 ve 2 noktaları için aşağıdaki koşulları doğrularsa, akiferin homojen ve anizotrop olduğu varsayılır.

$$\begin{aligned}K_{xx}(x_1, y_1, z_1) &= K_{xx}(x_2, y_2, z_2) = K_{xx} \\K_{yy}(x_1, y_1, z_1) &= K_{yy}(x_2, y_2, z_2) = K_{yy}\end{aligned}\quad (2.17)$$

$$K_{zz}(x_1, y_1, z_1) = K_{zz}(x_2, y_2, z_2) = K_{zz}$$

$$K_{xx} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + K_{zz} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - W = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.18)$$

2.5.3 Heterojen ve İzotrop Akifer

Hidrolik iletkenlikler, 1 ve 2 noktaları için Denklem (2.19)'u sağlıyorsa, akiferin heterojen ve izotrop olduğu düşünülür.

$$K_{xx}(x_1, y_1, z_1) = K_{yy}(x_1, y_1, z_1) = K_{zz}(x_1, y_1, z_1) = K_1 \quad (2.19)$$

$$K_{xx}(x_2, y_2, z_2) = K_{yy}(x_2, y_2, z_2) = K_{zz}(x_2, y_2, z_2) = K_2$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K(x, y, z) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K(x, y, z) \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K(x, y, z) \frac{\partial h}{\partial z} \right) - W = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.20)$$

2.5.4 Heterojen ve Anizotrop Akifer

Hidrolik iletkenlikler, 1 ve 2 noktaları için Denklem (2.21)'i sağlıyorsa, akiferin heterojen ve anizotrop olduğu söylenebilir.

$$K_{xx}(x_1, y_1, z_1) \neq K_{yy}(x_1, y_1, z_1) \neq K_{zz}(x_1, y_1, z_1) \quad (2.21)$$

$$K_{xx}(x_2, y_2, z_2) \neq K_{yy}(x_2, y_2, z_2) \neq K_{zz}(x_2, y_2, z_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_{xx}(x, y, z) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{yy}(x, y, z) \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{zz}(x, y, z) \frac{\partial h}{\partial z} \right) - W = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.22)$$

3 SONLU FARK YÖNTEMİ

3.1 Giriş

Kısmi diferansiyel denklemlerde yer alan bağımlı değişkenlerin diferansiyelleri, yaklaşık ifadeler olarak ifade edilmelidir. Böylece bir dijital bilgisayar yardımıyla (yalnızca standart aritmetik ve mantıksal işlemleri gerçekleştirebilen) bir yaklaşık çözüm elde edilebilir. Bu bölümde, bir f fonksiyonunun diferansiyellerini yaklaşık olarak tahmin etmenin iki yöntemi incelenmiştir. Sık kullanılan bir yaklaşım yöntemi, f fonksiyonunun Taylor serisi açılımıdır. İkinci bir yöntem, n . dereceden bir polinom uydurmaktır. Bu bölümde, önce Taylor serisi açılımı ele alınacak, ardından f fonksiyonunun polinom gösterimini kullanan bazı örnekler verilecektir (Hoffmann ve Chiang, 2000).

3.2 Taylor Serisi Açılımı

Analitik olan bir $f(x)$ fonksiyonu verildiğinde, $f(x + \Delta x)$ bir Taylor serisi x 'e şu şekilde genişletilebilir.

$$f(x + \Delta x) = f(x) + (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \quad (3.1)$$

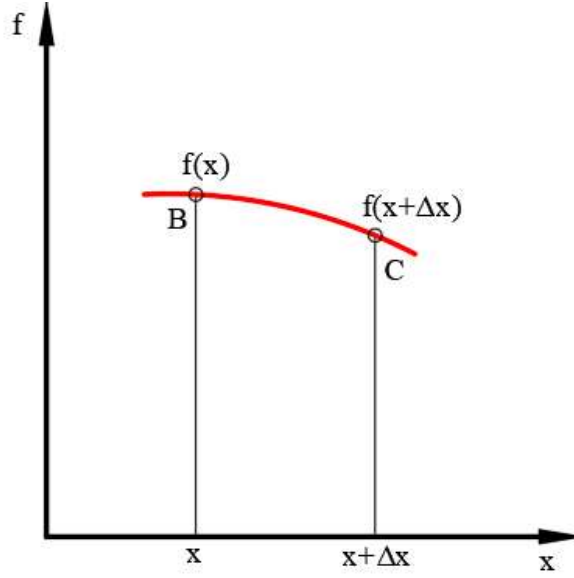
Denklem (3.1)'den $\partial f / \partial x$ çekilirse aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \quad (3.2)$$

Yukarıda verilen eşitlikte, $\partial f / \partial x$ 'in değeri yaklaşık olarak hesaplandığında hata mertebesi $O(\Delta x)$ olur ve $\partial f / \partial x$ aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.3)$$

Yukarıda verilen eşitliğin grafiksel gösterimi Şekil (3.1)'de sunulmaktadır. f Fonksiyonun B ve C noktalarındaki değerleri kullanılarak, B noktasındaki eğimin $\partial f/\partial x$ 'in yaklaşık değeri olduğu söylenebilir ve herhangi bir x_i noktasında bu türev Denklem (3.4)'te verildiği gibi yazılabilir. Bu denklemde, türev değeri Δx ile doğru orantılıdır. Yani, adım boyutu küçültüldüğünde hata miktarının azalması ve dolayısıyla yaklaşımın doğruluğunun artması beklenmektedir. Denklem (3.4)'te verilen eşitlik ileri fark formülü olarak bilinir.



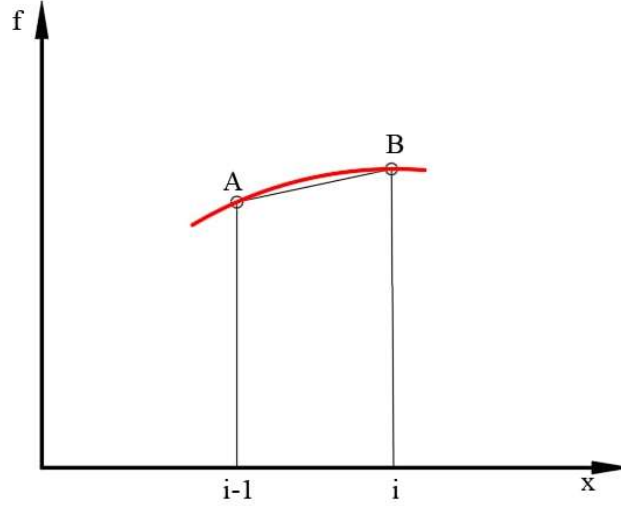
Şekil 3.1: Denklem (3.3)'te kullanılan grid noktalarının gösterimi.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.4)$$

Şimdi de $f(x - \Delta x)$ 'nin x etrafında Taylor serisi açılımını elde ederek geri fark formülünü elde edelim.

$$f(x - \Delta x) = f(x) - \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \quad (3.5)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.6)$$



Şekil 3.2: Denklem (3.6)'da kullanılan grid noktalarının gösterimi.

Yukarıda verilen eşitliğin grafiksel gösterimi Şekil (3.2)'de sunulmaktadır. f Fonksiyonun A ve B noktalarındaki değerleri kullanılarak, B noktasındaki eğimin $\partial f/\partial x$ 'in yaklaşık değeri olduğu söylenebilir ve herhangi bir x_i noktasında bu türev Denklem (3.6)'da verildiği gibi yazılabilir. Bu denklemde, türev değeri Δx ile doğru orantılıdır. Yani, adım boyutu küçültüldüğünde hata miktarının azalması ve dolayısıyla yaklaşımın doğruluğunun artması beklenmektedir. Denklem (3.6)'da verilen eşitlik geri fark formülü olarak bilinir.

Şimdi de Denklem (3.1) ve Denklem (3.5)'te verilen Taylor serilerini tekrar yazalım.

$$f(x + \Delta x) = f(x) + (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \quad (3.7)$$

$$f(x - \Delta x) = f(x) - (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \quad (3.8)$$

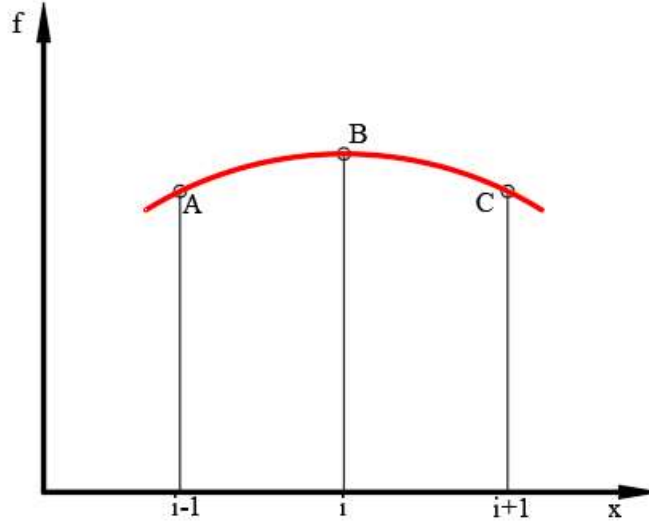
Yukarıda verilen denklemlerin farkı alınırsa Denklem (3.9)'da verilen eşitlik elde edilir.

$$f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) = 2\Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + 2 \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \quad (3.9)$$

Denklem (3.9)'dan $\partial f/\partial x$ çekilirse Denklem (3.10) ve Denklem (3.11)'de verilen merkezi fark formülü elde edilir.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (3.10)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (3.11)$$



Şekil 3.3: Denklem (3.11) 'de kullanılan grid noktalarının gösterimi.

Yukarıda verilen eşitliğin grafiksel gösterimi Şekil (3.3)'te sunulmaktadır. f Fonksiyonun A ve C noktalarındaki değerleri kullanılarak, B noktasındaki eğimin $\partial f/\partial x$ 'in yaklaşık değeri olduğu söylenebilir ve herhangi bir x_i noktasında bu türev Denklem (3.11)'de verildiği gibi yazılabilir. Bu denklemde, türev değeri Δx^2 ile doğru orantılıdır. Yani, adım boyutu küçültüldüğünde hata miktarının azalması ve dolayısıyla yaklaşımın doğruluğunun parabolik olarak artması beklenmektedir.

Şimdiye kadar, birinci türev formülleri Taylor serisi yaklaşımıyla elde edildi. İkinci mertebeden türevler için de geri, ileri ve merkezi farklar formülleri benzer şekilde elde edilebilir. İlk olarak, ikinci mertebeden türevin ileri fark formülünü elde etmeye çalışalım. İleri fark formülünü elde etmek için $f(x + \Delta x)$ ve $f(x + 2\Delta x)$

fonksiyonun Taylor serisi açılımından faydalanırız. $f(x + \Delta x)$ Fonksiyonun Taylor serisi açılımı Denklem (3.7)'de verilmişti. Şimdi de $f(x + 2\Delta x)$ fonksiyonunun Taylor serisi açılımını yazalım.

$$f(x + 2\Delta x) = f(x) + (2\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \quad (3.12)$$

Denklem (3.7)'yi (-2) ile çarpıp Denklem (3.12) ile topladığımızda aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$-2f(x + \Delta x) + f(x + 2\Delta x) = -f(x) + (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (\Delta x)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \quad (3.13)$$

Yukarıda verilen denklem düzenlenirse Denklem (3.13)'te verilen ileri fark formülü $O(\Delta x)$ hata mertebesiyle birlikte elde edilir.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x) \quad (3.14)$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x) \quad (3.15)$$

Geri ve merkezi farklar formülleri de benzer şekilde Taylor serileri yardımıyla elde edilebilir. Bu formüllerin elde edilmesi alıştırmaya bırakılmıştır. Geri ve merkezi fark formülleri ispatsız olarak sırasıyla Denklem (3.16)'da ve Denklem (3.17)'de verilmektedir.

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x) \quad (3.16)$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \quad (3.17)$$

Tablo (3.1), Tablo (3.2) ve Tablo (3.3)'te dördüncü mertebeye kadar olan türevlerin ileri, geri ve merkezi farklar formülleri verilmiştir.

Tablo 3.1: $O(\Delta x)$ 'nin ileri fark gösterimleri. (Hoffmann ve Chiang, 2000)

	f_i	f_{i+1}	f_{i+2}	f_{i+3}	f_{i+4}
$(\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x}$	-1	1			
$(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	1	-2	1		
$(\Delta x)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$	-1	3	-3	1	
$(\Delta x)^4 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$	1	-4	6	-4	1

Tablo 3.2: $O(\Delta x)$ 'nin geriye doğru fark gösterimleri.

	f_{i-4}	f_{i-3}	f_{i-2}	f_{i-1}	f_i
$(\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x}$				-1	1
$(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$			1	-2	1
$(\Delta x)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$		-1	3	-3	1
$(\Delta x)^4 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$	1	-4	6	-4	1

Tablo 3.3: $O(\Delta x)^2$ 'nin merkezi fark gösterimleri.

	f_{i-2}	f_{i-1}	f_i	f_{i+1}	f_{i+2}
$2(\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x}$		-1	0	1	
$(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$		1	-2	1	
$2(\Delta x)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$	-1	2	0	-2	1
$(\Delta x)^4 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$	1	-4	6	-4	1

Tablo 3.4: $O(\Delta x)^2$ 'nin ileri fark gösterimleri.

	f_i	f_{i+1}	f_{i+2}	f_{i+3}	f_{i+4}	f_{i+5}
$2(\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x}$	-3	4	-1			
$(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	2	-5	4	-1		
$2(\Delta x)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$	-5	18	-24	14	-3	
$(\Delta x)^4 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$	3	-14	26	-24	11	-2

Tablo 3.5: $O(\Delta x)^2$ 'nin geriye doğru fark gösterimleri.

	f_{i-5}	f_{i-4}	f_{i-3}	f_{i-2}	f_{i-1}	f_i
$2(\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x}$				1	-4	3
$(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$			-1	4	-5	2
$2(\Delta x)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$		3	-14	24	-18	5
$(\Delta x)^4 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$	-2	11	-24	26	-14	3

Tablo 3.6: $O(\Delta x)^4$ 'nin merkezi fark gösterimleri.

	f_{i-3}	f_{i-2}	f_{i-1}	f_i	f_{i+1}	f_{i+2}	f_{i+3}
$12(\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x}$		1	-8	0	8	-1	
$12(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$		-1	16	-30	16	-1	
$8(\Delta x)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$	1	-8	13	0	-13	8	-1
$6(\Delta x)^4 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$	-1	12	-39	56	-39	12	-1

4 RADYAL TABANLI FONKSİYON KOLLOKASYON METODU

4.1 Giriş

Yeraltısuyu problemleri, yeraltısuyu akım denklemlerinin analitik veya sayısal olarak çözülmesiyle incelenebilmektedir. Çoğu arazi problemi için sonlu fark yöntemi (FDM) ve sonlu elemanlar yöntemi (FEM) gibi sayısal tekniklere dayalı sayısal modeller kullanılmaktadır (Swathi ve Eldho, 2014). Ancak FDM veya FEM kullanıldığında, alan üzerinde bir ızgara veya ağ oluşturulmaz ve sıkıcı ön işlemler yapılmalıdır (Eldho ve Meenal, 2011).

Radyal tabanlı fonksiyon (RBF) kollokasyon yöntemi, karmaşık mühendislik problemlerini basit ve kesin bir şekilde çözmek için alternatif bir sayısal yaklaşımdır. Bu yöntem, yönetici kısmi diferansiyel denklemlerini, önceden tanımlanmış ağ parametreleri kullanmadan tüm problem alanı için bir cebirsel denklem sistemine dönüştürmek için kullanılmaktadır (Eldho ve Meenal, 2011).

4.2 Radyal Tabanlı Fonksiyonların Ana Özellikleri

$h(x, t)$ Zaman ve mekânın bir fonksiyonu olmak üzere radyal bazlı fonksiyonlar olarak adlandırılan mesafeye bağlı gerçek değerli fonksiyonların lineer bir kombinasyonu olarak ifade edilebilir.

Denklem (4.1)'de f uzaysal koordinatların bir fonksiyonu olarak kabul edilirken, λ ise zamana bağlıdır.

$$h(x_i, t) = \sum_{j=1}^N f(r_{ij}) \lambda_j(t) \quad (4.1)$$

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (4.2)$$

Burada, N : düğüm sayısını, t : zamanı, f : radyal tabanlı fonksiyonu, λ : her bir zaman adımında değişen katsayı vektörünü, r : Öklidian uzaklığı temsil etmektedir.

Tablo 4.1: Bazı yaygın olarak kullanılan radyal tabanlı fonksiyonlar (Çiftçi, 2011)

RBF	$f(r)$
Çoklu Kuadratikler (MQ)	$\beta > 0, (r^2 + \sigma^2)^{\beta/2} \beta \in 2N+1$
Ters Çoklu Kuadratikler (IMQ)	$(r^2 + \sigma^2)^{-\beta/2} \beta > 0, \beta \in 2N+1$
Spline (S)	$r^\beta \beta > 0, \beta \in 2N+1$
İnce Plaka Spline (TPS)	$r^\beta \ln r \beta > 0, \beta \in 2N$
Gaussian (GA)	$e^{-\sigma^2 r^2}$
Ters Kuadratikler (IQ)	$(r^2 + \sigma^2)^{-1}$

Franke (1982), 30 farklı iki boyutlu interpolasyon şemasının performansını değerlendirdikten sonra en doğru RBF seçenekleri olarak çoklu kuadratikleri ve ince plaka spline fonksiyonları işaret etmiştir.

Tablo (4.1)'de'de verilen σ parametresi, çözümün doğruluğunu iyileştirmek için ayarlanması gereken şekil parametresi olarak bilinmektedir. Çoklu kuadratikler için Şekil $\beta/2$ parametresi 0,5 , 0,98 veya 1,03 olabilir (Alice ve diğ. 2014). Carlson ve Foley (1991) σ parametresi seçiminin probleme bağlı olduğunu iddia etmiştir. Şekil parametresinin seçimi halen güncel bir araştırma konusudur.

$h(x, t)$ fonksiyonun m . mertebeden uzaysal türevleri Denklem (4.3)'te verildiği gibi hesaplanır. Bunun için $f(r_{ij})$ fonksiyonun m . mertebeden uzaysal türevlerinin hesabına ihtiyaç vardır. $f(r_{ij})$ Fonksiyonun birinci ve ikinci mertebeden türevleri Denklem (4.4), Denklem (4.5) ve Denklem (4.6)'da verilmektedir.

$$\frac{\partial^m h(x_i)}{\partial x^m} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^m f_{ij}(r_{ij})}{\partial x_i^m} \lambda_j \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial f(r_{ij})}{\partial x} = \frac{(x_i - x_j)}{f(r_{ij})} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial f(r_{ij})}{\partial y} = \frac{(y_i - y_j)}{f(r_{ij})} \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial^2 f(r_{ij})}{\partial x^2} = -\frac{(x_i - x_j)^2}{(f(r_{ij}))^3} + \frac{1}{f(r_{ij})} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial^2 f(r_{ij})}{\partial y^2} = -\frac{(y_i - y_j)^2}{(f(r_{ij}))^3} + \frac{1}{f(r_{ij})} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial^2 f(r_{ij})}{\partial x \partial y} = -\frac{(x_i - x_j)(y_i - y_j)}{(f(r_{ij}))^3} \quad (4.6)$$

4.3 Kararlı Durumdaki Diferansiyel Denklemler için RBF Kollokasyon Yönteminin Uygulanması

Denklem (4.7)'de kararlı durumdaki bir diferansiyel denklem operatör formunda verilmektedir. $h(x)$ 'in yaklaşık ifadesi, Denklem (4.1)'de gösterildiği gibi RBF'nin doğrusal bir kombinasyonu olarak yazılabilir. Şekil (4.1)'de gösterilen N_d ve N_b sırasıyla hesap alanı içindeki ve sınırdaki düğüm noktalarının sayısını göstermektedir ve bu durumda $N = N_d + N_b$ olmaktadır.

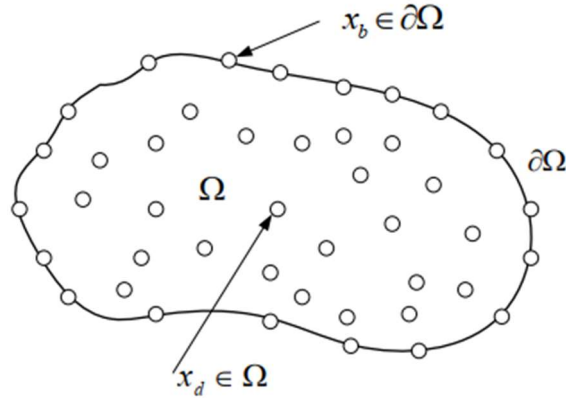
$$\mathcal{L}h(x) = q(x) \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, \quad d=1,2,3 \quad (4.7)$$

$$Bh(x) = g(x) \quad x \in \partial\Omega \subset \mathbb{R}^d$$

Burada, B : Dirichlet veya Neumann tipi olabilen bir sınır operatörünü, \mathcal{L} : bir diferansiyel operatörü, h : çözüm fonksiyonunu temsil etmektedir.

$$\mathcal{L}h(x_i) = \sum_{j=1}^N \mathcal{L}\{f(r_{ij})\}\lambda_j = q(x_i) \quad i = 1,2 \dots N_d \quad (4.8)$$

$$Bh(x_i) = \sum_{j=1}^N B\{f(r_{ij})\}\lambda_j = g(x_i) \quad i = N_d + 1, \dots N \quad (4.9)$$



Şekil 4.1: Hesap alanının iç ve sınır düğümlerinin gösterimi (Çiftçi, 2011).

Denklem (4.8) ve Denklem (4.9)'da aşağıdaki lineer sistemi oluşturmaktadır.

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}f(r_{11}) & \dots & \mathcal{L}f(r_{1N}) \\ \dots & \ddots & \ddots \\ \mathcal{L}f(r_{Nd1}) & \dots & \mathcal{L}f(r_{NdN}) \\ Bf(r_{Nd+11}) & \dots & Bf(r_{Nd+1N}) \\ \dots & \ddots & \dots \\ Bf(r_{N1}) & \dots & Bf(r_{NN}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{Nd} \\ \lambda_{Nd+1} \\ \vdots \\ \lambda_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q(x_1) \\ \vdots \\ q(x_{Nd}) \\ q(x_{Nd+1}) \\ \vdots \\ q(x_N) \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

λ Katsayıları Denklem (4.10)'dan hesaplandıktan sonra, Denklem (4.1) kullanılarak kararlı hal çözümü elde edilebilmektedir.

Kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için RBF'lerin kullanımını göstermek amacıyla basit tek boyutlu bir heterojen sistem Denklem (4.11)'de sunulmuştur. Bu denklem daha basit bir formda Denklem (4.12)'de verilmektedir.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K(x) \frac{\partial h}{\partial x} \right) = g(x) \quad 0 \leq x \leq l \quad (4.11)$$

$$h(0) = h_0 \quad , \quad \frac{\partial h(l)}{\partial x} = 0$$

Burada h : çözülecek dinamik değişkeni, K : yeraltısuyu akım denklemindeki hidrolik iletkenlik parametresini temsil etmektedir.

$$K \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} = g(x) \quad (4.12)$$

h ve K değişkenleri, RBF'nin doğrusal bir kombinasyonu olarak tanımlanırsa aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$h = f \lambda^h \quad \text{ve} \quad K = f \lambda^K \quad (4.13)$$

Denklem (4.13)'te verilen değişkenler matris ve vektör formunda aşağıda sırasıyla verilmektedir.

$$h = [h(x_1) \quad h(x_2) \quad \dots \quad h(x_N)]^T \quad (4.14)$$

$$K = [K(x_1) \quad K(x_2) \quad \dots \quad K(x_N)]^T \quad (4.15)$$

$$\lambda^h = [\lambda_1^h \quad \lambda_2^h \quad \dots \quad \lambda_N^h]^T \quad (4.16)$$

$$\lambda^K = [\lambda_1^K \quad \lambda_2^K \quad \dots \quad \lambda_N^K]^T \quad (4.17)$$

$$f = \begin{bmatrix} f(r_{11}) & \dots & f(r_{1N}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(r_{1N}) & \dots & f(r_{NN}) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Yukarıdaki özdeşliklerde görüldüğü gibi, iki değişken için, RBF matrisi, f yalnızca uzaya bağımlı olduğundan ve bu değişkenleri farklılaştıran katsayıların vektörü, λ olduğundan ortaktır. $K(x)$ 'in dağılımının ilgilenilen alanda bilindiğini varsayarsak, türevi aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\lambda^K = f^{-1}K \quad (4.19)$$

$$K^x = f^x f^{-1}K \quad (4.20)$$

$$K^x = \left[\frac{\partial K(x_1)}{\partial x} \quad \frac{\partial K(x_2)}{\partial x} \quad \dots \quad \frac{\partial K(x_N)}{\partial x} \right] \quad (4.21)$$

$$f^x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(r_{11})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f(r_{1N})}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f(r_{N1})}{\partial x_N} & \dots & \frac{\partial f(r_{NN})}{\partial x_N} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Denklem (4.11)'de verilen diferansiyel sistemin ayrıklaştırılmasıyla, ilk ($i = 1$) ve son ($i = N$) düğümlerde sınır şartları, diğer düğümlerde de ($i = 2, 3, \dots, N - 1$) diferansiyel denklemin ayrıklaştırılmış hali uygulanabilir. Böylece aşağıdaki lineer sistem denklemini elde edilir.

$$\begin{pmatrix} B^- f(r_{11}) & \dots & B^- f(r_{1N}) \\ \mathcal{L}f(r_{21}) & \ddots & \mathcal{L}f(r_{2N}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{L}f(r_{N-1,1}) & \dots & \mathcal{L}f(r_{N-1,N}) \\ B^+ f(r_{N1}) & \dots & B^+ f(r_{NN}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{N-1} \\ \lambda_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_0 \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_{N-1}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

$$B^- f(r_{1j}) = f(r_{1j}) \quad (4.24)$$

$$\mathcal{L}f(r_{ij}) = K(x_i) \frac{\partial^2 f(r_{ij})}{\partial x_i^2} + \frac{\partial K(x_i)}{\partial x} \frac{\partial f(r_{ij})}{\partial x_i} \quad (4.25)$$

$$B^+ f(r_{Nj}) = \frac{\partial f(r_{Nj})}{\partial x_N} \quad (4.26)$$

Denklem (4.23)'te verilen denklem sistemi çözülerek λ vektörü elde edilir. Daha sonra λ 'ya bağlı olarak h fonksiyonun yaklaşık değeri istenen noktalarda hesaplanır.

4.4 Zamana Bağlı Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Çözümü için RBF'nin Uygulanması

Zamana bağlı bir kısmi diferansiyel denklem operatör formatında aşağıda verilmektedir.

$$\mathcal{L}h(x, t) = \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d \quad (d = 1, 2, 3) \quad t > 0 \quad (4.27)$$

$$Bh(x, t) = g(x, t) \quad x \in \partial\Omega \subset \mathbb{R}^d$$

$h(x, t)$ 'in yaklaşımı, RBF'lerin doğrusal bir kombinasyonu olarak yazılabilir. λ Vektörü zamana bağlıdır ve her zaman seviyesi için değişmektedir.

$$h(x_i, t) = \sum_{j=1}^N f_{ij}(r_{ij}) \lambda_j(t), \quad r_{ij} = \|x_i - x_j\| \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.28)$$

Denklem (4.28) matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$h = f \lambda \quad (4.29)$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda(x_1, t) \\ \vdots \\ \lambda(x_N, t) \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

$$h = \begin{pmatrix} h(x_1, t) \\ \vdots \\ h(x_N, t) \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

İç düğümlerde yaklaşıklık fonksiyonu ve kalan sınır düğümlerinde sınır koşullarını kullandığında aşağıda verilen lineer denklem sistemi elde edilir.

$$H\lambda=\eta \quad (4.32)$$

$$H = \begin{pmatrix} f(r_{11}) & \dots & f(r_{1N}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(r_{Nd1}) & \dots & f(r_{NdN}) \\ Bf(r_{Nd+11}) & \dots & Bf(r_{Nd+1N}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Bf(r_{N1}) & \dots & Bf(r_{NN}) \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

$$\eta = \begin{pmatrix} h(x_1, t) \\ \vdots \\ h(x_{N_d}, t) \\ g(x_{N_d+1}, t) \\ \vdots \\ g(x_N, t) \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

4.4.1 Dördüncü Mertebeden Runge-Kutta Yönteminin Uygulanması

Denklem (4.27) yeniden düzenlenirse aşağıda verilen zamana bağlı bir adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir.

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = \mathcal{L}\{f\}H^{-1}\eta \quad (4.35)$$

Yukarıda verilen zamana bağlı adi diferansiyel denklem sistemi dördüncü mertebeden Runge-Kutta integrasyon şeması ile kolayca çözülebilir (Burden ve Faires, 2011).

$$k_1 = \Delta t \mathcal{L}\{f\}H^{-1}\eta^n \quad (4.36)$$

$$k_2 = \Delta t \mathcal{L}\{f\}H^{-1}\left(\eta^n + \frac{k_1}{2}\right) \quad (4.37)$$

$$k_3 = \Delta t \mathcal{L}\{f\} H^{-1} \left(\eta^n + \frac{k_2}{2} \right) \quad (4.38)$$

$$k_4 = \Delta t \mathcal{L}\{f\} H^{-1} (\eta^n + k_3) \quad (4.39)$$

$$h(x, t^{n+1}) = h(x, t^n) + \frac{k_1 + 2k_2 + k_3 + k_4}{6} \quad (4.40)$$

$\mathcal{L}\{f\} H^{-1}$ Zamana bağılı olmadığından, Denklem (4.40) her zaman adımında h vektörünü hesaplamak için verimli bir yol sağlar.

4.4.2 Bir Boyutlu Yeraltısuyu Akımının Diferansiyel Denklemine Uygulanması

RBF'nin zamana bağılı bir problem için uygulanması, verilen sınır ve başlangıç koşulları ile aşağıdaki diferansiyel denklemle gösterilebilir.

$$T(x) \frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial T(x)}{\partial x} \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} = S \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} \quad 0 \leq x \leq l \quad (4.41)$$

$$h(0,t) = h_0, \quad \frac{\partial h(l,t)}{\partial x}, \quad h(x,0) = 0 \quad t > 0$$

Yukarıdaki denklemde $h(x,t)$ çözümlenmesi gereken dinamik değişken, $T(x)$ ve $\frac{\partial T(x)}{\partial x}$ ise uzaysal değişkenliği gösteren parametrelerdir. $N - 2$ Adet iç düğüm noktası ve iki adet sınır düğüm noktası seçilerek, denklem (4.33)'te tanımlanan H matrisi şu şekilde yazılabilmektedir.

$$H = \begin{pmatrix} B^-f(r_{11}) & \dots & B^-f(r_{1N}) \\ f(r_{21}) & \ddots & f(r_{2N}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(r_{N-1,1}) & \dots & f(r_{N-1,N}) \\ B^+f(r_{N1}) & \dots & B^+f(r_{NN}) \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

$$B^-f(r_{1j}) = f(r_{1j}) \quad (4.43)$$

$$B^-f(r_{Nj}) = \frac{f(r_{Nj})}{\partial x} \quad (4.44)$$

ve $t = 0$ 'da η vektörü

$$\eta^0 = \begin{pmatrix} h_0 \\ h(x_2, 0) \\ \vdots \\ h(x_{N-1}, 0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

Bu özel örnek problem için, $\mathcal{L}\{f\}$ ifadesi şu şekilde tanımlanır.

$$\mathcal{L}\{f\} = \frac{1}{s} \left(\left(\text{diag} \left[\frac{\partial T(x)}{\partial x} \right] \right) f^{xx} + \left(\text{diag}[T(x)] \right) f^x \right) \quad (4.46)$$

$$\text{diag} \left[\frac{\partial T(x)}{\partial x} \right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial T(x_1)}{\partial x} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{\partial T(x_N)}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (4.47a)$$

$$\text{diag}[T(x)] = \begin{pmatrix} T(x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & T(x_N) \end{pmatrix} \quad (4.47b)$$

$$f^x = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(r_{11})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f(r_{1N})}{\partial x_1} \\ \dots & \ddots & \dots \\ \frac{\partial f(r_{N1})}{\partial x_N} & \dots & \frac{\partial f(r_{NN})}{\partial x_1} \end{pmatrix} \quad (4.48a)$$

$$f^{xx} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(r_{11})}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(r_{1N})}{\partial x_1^2} \\ \dots & \ddots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(r_{N1})}{\partial x_N^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(r_{NN})}{\partial x_N^2} \end{pmatrix} \quad (4.48b)$$

$\frac{\partial T(x)}{\partial x}$ ve $T(x)$ parametrelerinin değerleri zamanla değişmiyorsa, Denklem (4.46)'daki işlem sadece bir kez yapılır, ancak bu parametreler zamansal değişkenlik gösteriyorsa, bu da çok fazla hesaplama yüküne neden olur. Öte yandan, Runge-Kutta yöntemi kullanıldığında, Denklem (4.39) için Denklem (4.36)'da görüldüğü gibi tersi alınması gereken matris H 'dir ve parametrelerin zaman içindeki davranışından bağımsız olarak H simülasyon boyunca bir kez hesaplanır. Bu nedenle, model parametrelerinin zamana bağlı olması durumunda Runge Kutta yönteminin kullanılması pratiktir.

4.5 RBF enterpolasyonunun güçlendirilmesi

RBF enterpolasyonunun doğruluğunu iyileştirmek ve RBF yaklaşımının tekil olmama durumunu sağlamak için enterpolasyon matrisinin pozitif tanımlığını garanti etmek için, sisteme sonlu sayıda polinom eklenebilir (Çiftçi, 2011).

$D \subset \mathbb{R}^d$ Üzerinde tanımlanan $h(X)$ fonksiyonunun polinomla artırılmış RBF yaklaşımı, radyal tabanlı $\{f_j(X)\}_{j=1}^N$ fonksiyonları ile $\{p_k(X)\}_{k=1}^q$ polinomlarının lineer bir kombinasyonu olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Zhu ve diğ. 2022).

$$h(X) \approx \tilde{h}(X) = \sum_{j=1}^N \lambda_j f(r_{ij}) + \sum_{k=1}^q \beta_k p_k(X) \quad X \subset D \quad (4.49)$$

Burada $\{p_k\}_{k=1}^q$ polinomları, p_k 'nin tek terimlerinin temel fonksiyonlarıdır.

1 boyutlu problemlerde $q = s + 1$

(4.50)

2 boyutlu problemlerde $q = \frac{(s+1)(s+2)}{2}$

Bir ve iki boyutlu durumda $\{p_k\}_{k=1}^q$ polinomları sırasıyla aşağıda verildiği gibi yazılabilir.

$$\{p_k\}_{k=1}^q = \{1, x, x^2, \dots, x^s\}$$

$$\{p_k\}_{k=1}^q = \{1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots, x^s, x^{s-1}y, x^{s-2}y^2, \dots, xy^{s-1}, y^s\}$$

p 'nin q dereceli polinomu gösterdiği yerde, β 'ler belirlenecek polinomun katsayılarıdır. Denklem (4.49)'da verilen yaklaşımın tekliği, sisteme aşağıdaki kısıtlamalar uygulanırsa sağlanır (Zhu ve diğ. 2022).

$$\sum_{k=1}^q \alpha_k p_k(X) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, q \quad (4.51)$$

$$f_{aug} \lambda_{aug} = \begin{Bmatrix} h \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.52)$$

$$f_{aug} = \begin{pmatrix} f & P \\ P^T & 0 \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

$$\lambda_{aug} = [\lambda_1 \quad \cdots \quad \lambda_N \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_N]^T \quad (4.54)$$

$$P = \begin{pmatrix} p_1(x_1) & \cdots & p_q(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(x_N) & \cdots & p_q(x_N) \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

4.5.1 Bir Boyutlu İnterpolasyon

Polinom eklemeyi basit bir örnekle göstermek için, bir boyutlu interpolasyon dikkate alınır ve eklenen polinomun derecesi $s = 2$ seçilirse polinom aşağıdaki formu alır.

$$\sum_{k=1}^3 \beta_k p_k(x_i) = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 x_i^2 \quad (4.56)$$

Daha sonra, genişletilmiş RBF matrisi N adet kollokasyon noktası için belirlenirse katsayı vektörü aşağıdaki gibi olur.

$$f_{aug} = \begin{pmatrix} f(r_{11}) & \cdots & f(r_{1N}) & 1 & x_1 & x_1^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f(r_{N1}) & \cdots & f(r_{NN}) & 1 & x_N & x_N^2 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & \cdots & x_N & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2 & \cdots & x_N^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

$$\lambda_{aug} = [\lambda_1 \quad \cdots \quad \lambda_N \quad \beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2]^T \quad (4.58)$$

Genişletilmiş matris aşağıdaki gibi kolaylıkla ayırt edilebilir.

$$f_{aug}^x = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(r_{11})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f(r_{1N})}{\partial x_1} & 0 & 1 & 2x_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f(r_{N1})}{\partial x_N} & \cdots & \frac{\partial f(r_{NN})}{\partial x_N} & 0 & 1 & 2x_N \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2x_1 & \cdots & 2x_N & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.59a)$$

$$f_{aug}^{xx} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(r_{11})}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(r_{1N})}{\partial x_1^2} & 0 & 0 & 2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(r_{N1})}{\partial x_N^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(r_{NN})}{\partial x_N^2} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \cdots & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.59b)$$

4.5.2 İki Boyutlu İnterpolasyon

s=1, q=3 seçildiğinde interpolasyon ve türev matrisi aşağıdaki formu alır (Dehghan, 2007).

$$f_{aug} = \begin{pmatrix} f(r_{11}) & \cdots & f(r_{1N}) & 1 & x_1 & y_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f(r_{N1}) & \cdots & f(r_{NN}) & 1 & x_N & y_N \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & \cdots & x_N & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & \cdots & y_N & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

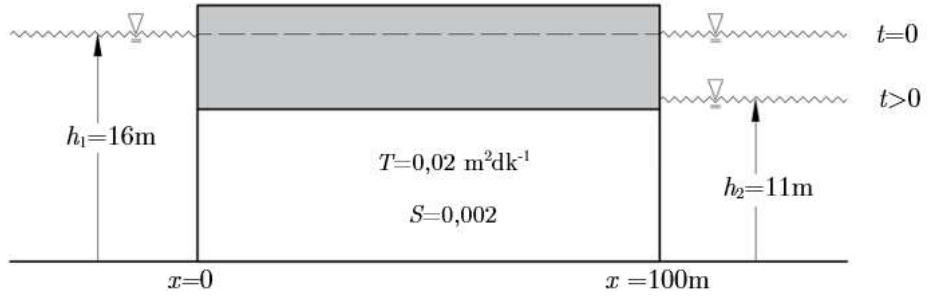
$$f_{aug}^x = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(r_{11})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f(r_{1N})}{\partial x_1} & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f(r_{N1})}{\partial x_N} & \dots & \frac{\partial f(r_{NN})}{\partial x_N} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.61a)$$

$$f_{aug}^y = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(r_{11})}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f(r_{1N})}{\partial y_1} & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f(r_{N1})}{\partial y_N} & \dots & \frac{\partial f(r_{NN})}{\partial y_N} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.61b)$$

5 SAYISAL UYGULAMALAR

5.1 Sayısal Uygulama 1

Wang ve Anderson (1982), bir akiferin, sınır koşullarından birisindeki ani değişikliğe tepki verdiği bir yeraltısuyu akışı problemi incelemiştir. Akiferin bir boyutlu olduğu kabul edilmektedir. Şekil (5.1)'de gösterildiği gibi üstte ve altta geçirimsiz katmanlardan dolayı akifer basınçlıdır.



Şekil 5.1: Akiferin şematik gösterimi

Akifer, $x = 0$ ve $x = 100$ m'deki rezervuarlarla bağlanmıştır. Başlangıç yüksekliği akiferin her yerinde $h_1 = 16$ m'ye eşittir. $t=0$ 'da $x = 100$ m'deki rezervuarda su seviyesi $h_1 = 16$ m'den $h_2 = 11$ m'ye aniden düşürüldüğü durumda hidrolik yüklerin zamana bağlı değişimleri simüle edilmektedir. Akifer parametreleri $T = 0,02$ m²/dk ve $S = 0,002$ 'dir.

Bir boyutlu basınçlı akiferdeki yeraltısuyu akım denklemi aşağıda verilmektedir (Mategaonkar, 2021).

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5.1)$$

Sınırlarda aşağıdaki sınır koşulları kullanılmıştır:

$$h(0, t) = h_1 \text{ ve } h(100, t) = h_2 \quad t > 0$$

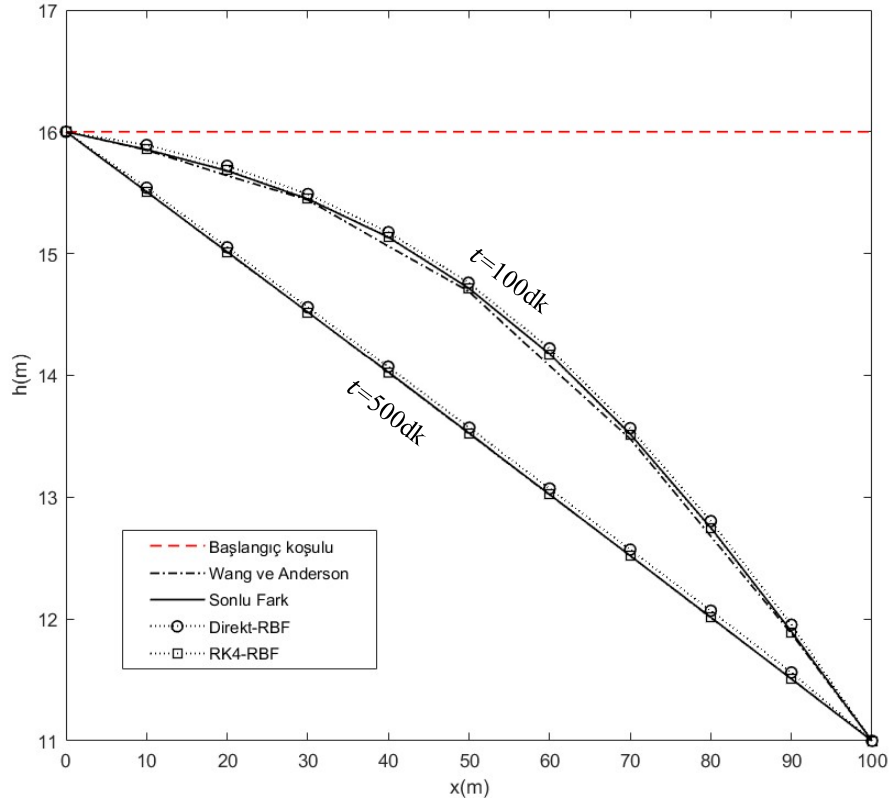
$$h(x, 0) = h_1 \quad 0 \leq x \leq 100$$

Tablo 5.1: Farklı yöntemler için h değerleri ($t=100$ dk).

$dt=5$ dk, $dx=10$ m	$t=100$ dk			
	Wang ve Anderson (1982)	Sonlu Fark	Direkt RBF	RBF-RK4 ($\sigma = 50$)
0	16,00	16,00	16,00	16,00
10	15,85	15,85	15,89	15,86
20	15,64	15,68	15,72	15,68
30	15,44	15,45	15,49	15,45
40	15,06	15,13	15,18	15,14
50	14,69	14,72	14,76	14,72
60	14,08	14,18	14,22	14,18
70	13,48	13,52	13,57	13,51
80	12,68	12,75	12,80	12,74
90	11,88	11,90	11,95	11,89
100	11,00	11,00	11,00	11,00

Tablo 5.2: Farklı yöntemler için h değerleri ($t=500$ dk).

$dt=5$ dk, $dx=10$	$t=500$ dk			
	Wang ve Anderson (1982)	Sonlu Fark	Direkt RBF	RBF-RK4 ($\sigma = 50$)
0	16,00	16,00	16,00	16,00
10	15,51	15,51	15,54	15,51
20	15,01	15,01	15,05	15,01
30	14,52	14,52	14,56	14,52
40	14,02	14,02	14,07	14,02
50	13,52	13,52	13,57	13,52
60	13,02	13,02	13,07	13,02
70	12,52	12,52	12,57	12,52
80	12,01	12,01	12,07	12,01
90	11,51	11,51	11,56	11,51
100	11,00	11,00	11,00	11,0

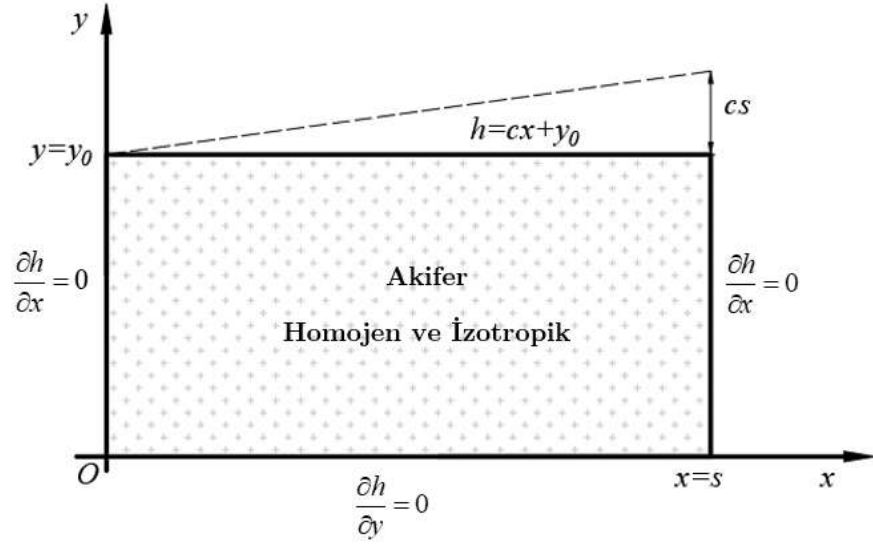


Şekil 5.2: $\Delta x=10$ m ve $\Delta t=5$ dk dğđm aralıkları için Wang ve Anderson (1982) özömleri ile sayısal özömlerin karşılaştırılması.

Dğđm aralıkları konumda $\Delta x = 10$ m, zamanda ise $\Delta t = 5$ dk olarak seçilmiştir. Tđm zaman adımları için Matlab programı aracılığıyla elde edilen sonuçlar Şekil (5.2)'de sunulmaktadır. Elde edilen piyezometre yđzeyinin profili ile diğer sonuçların karşılaştırılması Şekil (5.2)'de yapılmaktadır. Bu Şekilde $t = 100$ dk için sayısal özömler bir parabolik yapıdadır. $t = 500$ dk için tđm özömler esasen Wang ve Anderson'ın (1982) özömlüne eşittir ve doğrusal olarak gđrönr. Sonuçlar, sonlu fark ve RBF yđntemlerinin 1 boyutlu yeraltısuyu akım problemlerine uygulanabileceğini gđstermektedir.

5.2 Sayısal Uygulama-2

Bu örnekte, yine Wang ve Anderson (1982) tarafından verilen iki boyutlu bir yeraltısuyu problemini incelenmektedir. Şekil (5.3)'te örneğin geometrik yapısı ve dikkate alınan sınır koşulları sunulmaktadır. Akiferin homojen ve izotropik özellikte bir malzemeden oluştuğu varsayılmaktadır. Burada $s = 200$ m, $y_0 = 100$ m ve $c = 0,002$ 'dir.



Şekil 5.3: İki boyutlu yeraltısuyu akım modelinin geometrisi ve sınırları (Wang ve Anderson, 1982)

Kararlı iki boyutlu basınçlı ve izotropik yeraltısuyu akım denklemi aşağıda verilmektedir (Batu, 1998).

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (5.2)$$

Akiferin üst sınırında Dirichlet sınır koşulu geçerli olup burada hidrolik değerleri sabittir. Akifer diğer üç sınır boyunca geçirimsiz tabakalarla çevrilidir. Bu sınırlar Neumann sınır koşulu olarak dikkate alınmakta olup akış gerçekleşmemektedir. Sınır koşullarının matematiksel gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$h(x, y_0) = cx + y_0 \quad 0 \leq x \leq s$$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad 0 \leq x \leq s$$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad 0 \leq y \leq y_0$$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=s} = 0 \quad 0 \leq y \leq y_0$$

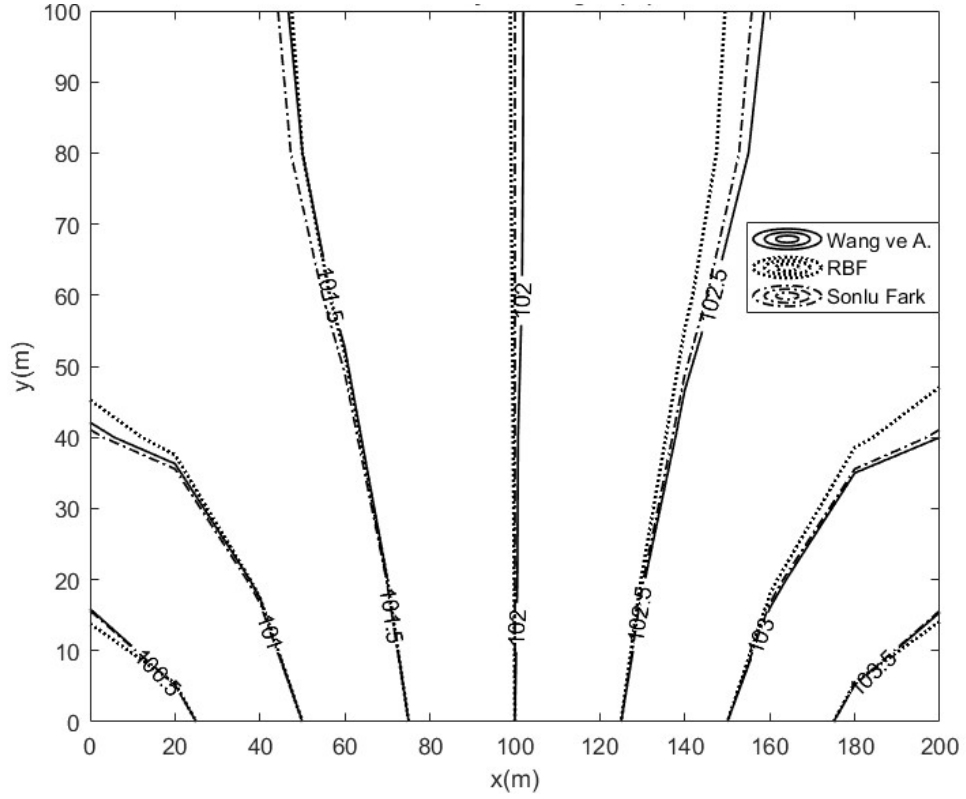
(5.3)

Tablo 5.3: $\Delta x = \Delta y = 20$ m aralıkları için Wang ve Anderson (1982) çözümleri ile sayısal çözümlerin karşılaştırılması.

	x (m)	Wang ve Anderson (1982)	Sonlu Fark	RBF ($\beta=1,03, \sigma=125$)
y=0	0	100	100,000	100,179
	20	100,4	100,400	100,400
	40	100,8	100,800	100,800
	60	101,2	101,200	101,200
	80	101,6	101,600	101,600
	100	102	102,000	102,000
	120	102,4	102,400	102,400
	140	102,8	102,800	102,800
	160	103,2	103,200	103,200
	180	103,6	103,600	103,600
	200	104	104,000	103,821

	x (m)	Wang ve Anderson (1982)	Sonlu Fark	RBF ($\beta=1,03, \sigma=125$)
y=40m	0	100,98	100,989	100,950
	20	101,05	101,061	101,032
	40	101,22	101,232	101,213
	60	101,45	101,461	101,451
	80	101,71	101,723	101,721
	100	101,99	102,000	102,006
	120	102,26	102,277	102,290
	140	102,53	102,539	102,561
	160	102,76	102,768	102,800
	180	102,93	102,939	102,982
	200	103	103,011	103,066

	x (m)	Wang ve Anderson (1982)	Sonlu Fark	RBF ($\beta=1,03, \sigma=125$)
y=100m	0	101,31	101,270	101,336
	20	101,32	101,320	101,370
	40	101,45	101,439	101,468
	60	101,6	101,603	101,617
	80	101,78	101,799	101,800
	100	101,98	102,012	102,000
	120	102,18	102,225	102,200
	140	102,36	102,422	102,383
	160	102,51	102,587	102,531
	180	102,61	102,708	102,630
	200	102,64	102,761	102,664



Şekil 5.4: $\Delta x = \Delta y = 20$ m aralıkları için Wang ve Anderson (1982) çözümleri ile sayısal çözümlerin karşılaştırılması.

Şekil (5.4)'te sonlu farklar ve RBF yöntemleriyle elde edilen sonuçlar, Wang ve Anderson'ın (1982) referans çözüm olarak kabul edilen çözümüyle karşılaştırılmaktadır.

5.3 Sayısal Uygulama-3

Önerilen sayısal yeraltısuyu akış modelini doğrulamak için incelenen üçüncü problem, Camas'ın (2007) çalışmasından alınan kararlı iki boyutlu yeraltısuyu akım problemidir. Dikdörtgen alanın boyutları $0 \leq x \leq 2$ ve $0 \leq y \leq 1$ 'dir.

Dikkate alınan hidrolik iletkenlik dağılımı aşağıdaki bağıntıdan hesaplanmaktadır.

$$k = k_0 e^{ax+by} \quad (5.4)$$

Problemde kullanılan sınır koşulları aşağıdaki verilmektedir.

$$h(0, y) = Me^{-by} + N \quad (5.5)$$

$$h(2, y) = Me^{-2a-by} + N \quad (5.6)$$

$$h(x, 0) = Me^{-ax} + N \quad (5.7)$$

$$h(x, 1) = Me^{-ax-b} + N \quad (5.8)$$

Burada M ve N sabittir. Bu varsayımsal sistemin analitik çözümünün aşağıdaki gibi olduğu bilinmektedir (Camas, 2007).

$$h(x, y) = M \cdot e^{-ax-by} + N \quad (5.9)$$

Test senaryosu için kullanılan parametre değerleri Tablo (5.4)'te verilmektedir.

Tablo 5.4: Üçüncü problem için kullanılan parametre değerleri

Parametreler	Değer
k_0 (ms^{-1})	10^{-4}
a (-)	$\ln(4)/2$
b (-)	$\ln(25)$
M (m)	10
N (m)	1

Problem sonuçlarının değerlendirilmesinde, Denklem (5.10) ve (5.11)'de verildiği şekilde hesaplanan mutlak hata dağılımları dikkate alınmaktadır.

$$AE_1 = |h_a - h_{SF}| \quad (5.10)$$

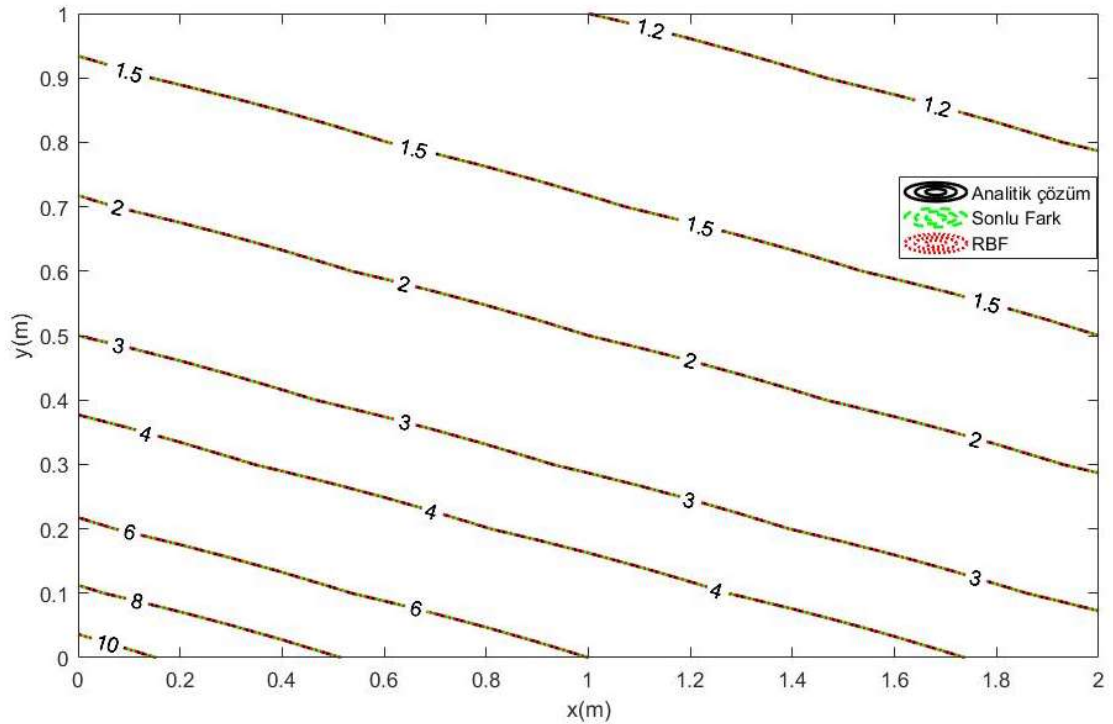
$$AE_2 = |h_a - h_{RBF}| \quad (5.11)$$

h_a , h_{SF} ve h_{RBF} sırasıyla analitik, sonlu fark ve RBF yöntemleri aracılığıyla elde edilen hidrolik yük değerlerini temsil etmektedir.

Sayısal model, 0,05 ve 0,1 olarak alınan, birbirine eşit Δx ve Δy düğüm aralıkları kullanılarak oluşturulmaktadır. Enterpolasyon fonksiyonu olarak, 7'nci dereceden spline RBF (r^7), 9'uncu dereceden spline RBF (r^9) ve birinci dereceden bir polinom ($q = 3$) ile büyütülmüş çoklu kuadratikler ($\sigma = 1$) kullanılmaktadır.

Tablo 5.5: Sonlu fark ve farklı RBF türleri için AE değerleri

AE	AE_1	AE_2				
$\Delta x = \Delta y$	Sonlu Fark	Spline 7. ($\beta=7/2$)	Spline 9. ($\beta=9/2$)	Çoklu Kuadratikler		
				($\beta=0,5$; $\sigma=1$)	($\beta=0,98$; $\sigma=1$)	($\beta=1,03$; $\sigma=1$)
0,1	$2,47 \cdot 10^{-5}$	$1,9 \cdot 10^{-3}$	$1,59 \cdot 10^{-4}$	$4,69 \cdot 10^{-4}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$9,64 \cdot 10^{-4}$
0,05	$1,05 \cdot 10^{-4}$	$3,87 \cdot 10^{-4}$	$3,49 \cdot 10^{-4}$	$1,02 \cdot 10^{-4}$	$7,4775 \cdot 10^{-4}$	$6,41 \cdot 10^{-4}$



Şekil 5.5: $\Delta x = \Delta y = 0,1$ m için analitik ve sayısal olarak elde edilen hidrolik yük dağılımları.

Tablo (5.5)'te farklı yöntemlerle elde edilen AE_1 ve AE_2 hata değerleri sunulmaktadır. Bu tablo incelendiğinde, Sonlu Fark yönteminin hata değerlerinin RBF yöntemine göre oldukça küçük olduğunu görülmektedir. Ayrıca Şekil (5.5)'ten görüldüğü üzere, analitik ve sayısal yöntemlerle elde edilen h hidrolik yük değerlerinin birbiriyle iyi bir uyum içinde olduğu açıktır.

5.4 Sayısal Uygulama-4

Son olarak yeraltısuyu akım simülasyon modelinin performansı $1000m \times 1000m$ 'lik varsayımsal basınçlı bir akifer üzerinde test edilmektedir (Şekil 5.6). Akifer homojen ve izotropiktir. Akiferin iletim kapasitesi $T = T_x = T_y = 300 \text{ m}^2/\text{gün}$ 'dür.

Basınçlı akiferler için kararlı durum koşulunda iki boyutlu yeraltısuyu akım denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[T_x \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[T_y \frac{\partial h}{\partial y} \right] = W \quad (5.12)$$

Sınırlarda aşağıdaki sınır koşulları kullanılmıştır.

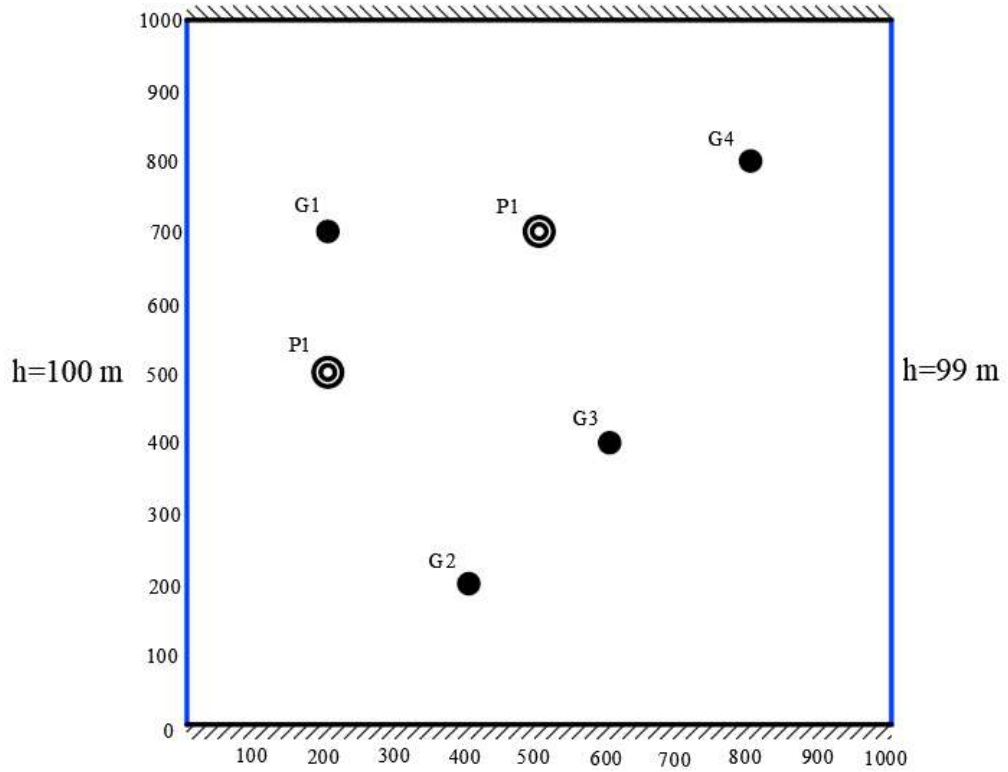
$$h(0, y) = 100\text{m} \quad 0 \leq y \leq 1000$$

$$h(1000, y) = 99\text{m} \quad 0 \leq y \leq 1000$$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad 0 \leq x \leq 1000 \quad (5.13)$$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_{y=1000} = 0 \quad 0 \leq x \leq 1000$$

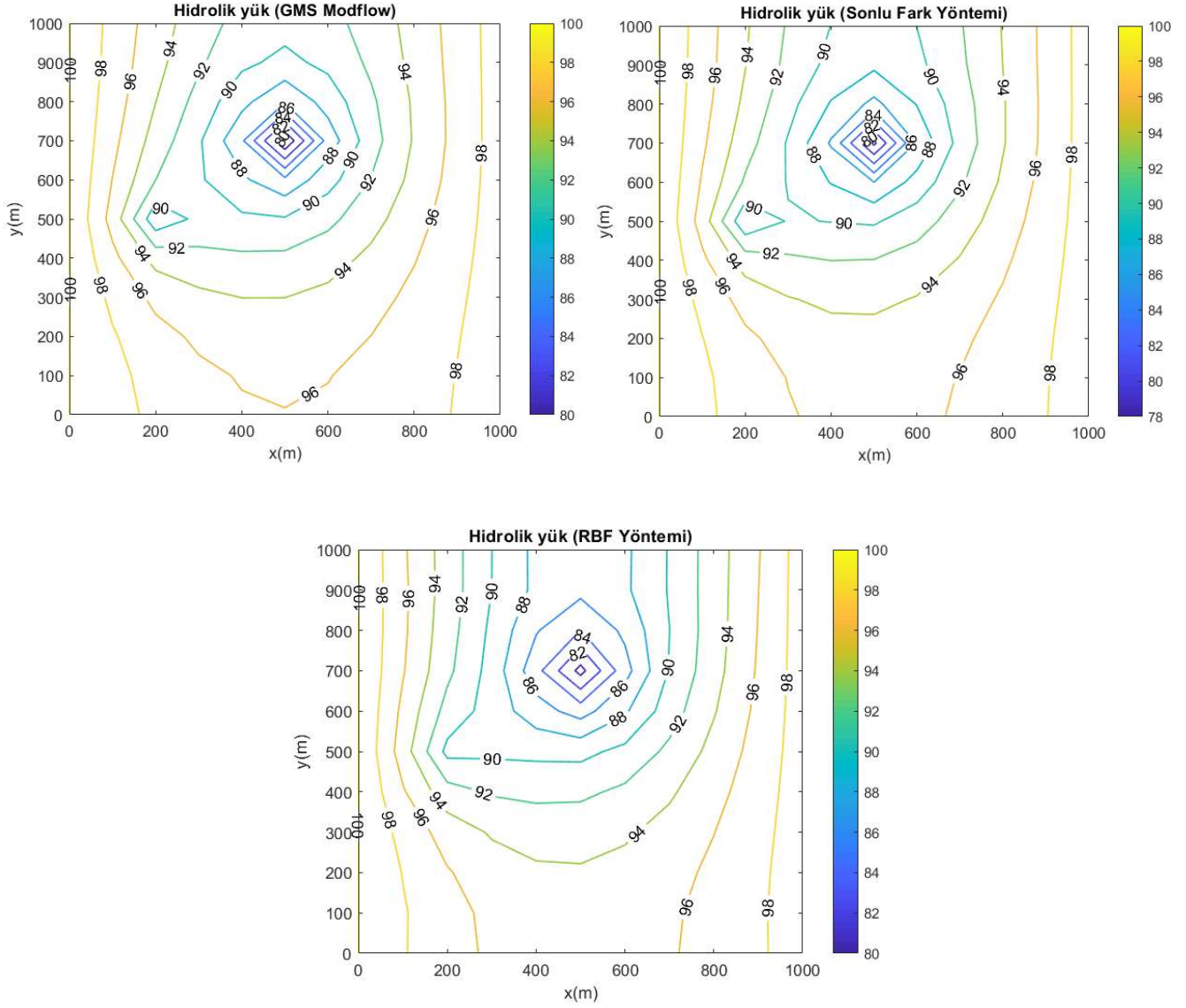
Akifer, 100 m×100 m veya 50 m×50 m düğüm aralıkları dikkate alınarak ayrıştırılmıştır. Tüm hücrelerdeki başlangıç hidrolik yük değerleri 99 ile 100 m arasında olmak koşulu ile rastgele oluşturulmuştur. Akiferde 5000 m³/gün ve 1000 m³/gün debilerinde su çeken iki adet pompaj kuyusu bulunmaktadır. Bu kuyular sırasıyla **P1** ve **P2** noktalarında yer almakta olup değerleri Tablo (5.6)'da verilmektedir. Ayrıca akiferde su seviyelerini izlemek için sırasıyla **G1**, **G2**, **G3** ve **G4** düğümlerinde yer alan dört gözlem kuyusu vardır.



Şekil 5.6: Varsayımsal akiferin geometrisi ve sınır koşulları.

Tablo 5.6: Pompaj kuyularının özellikleri.

Pompaj kuyusu	x (m)	y (m)	Pompaj debisi ($\frac{m^3}{gün}$)
P1	200	500	5000
P2	500	700	10000

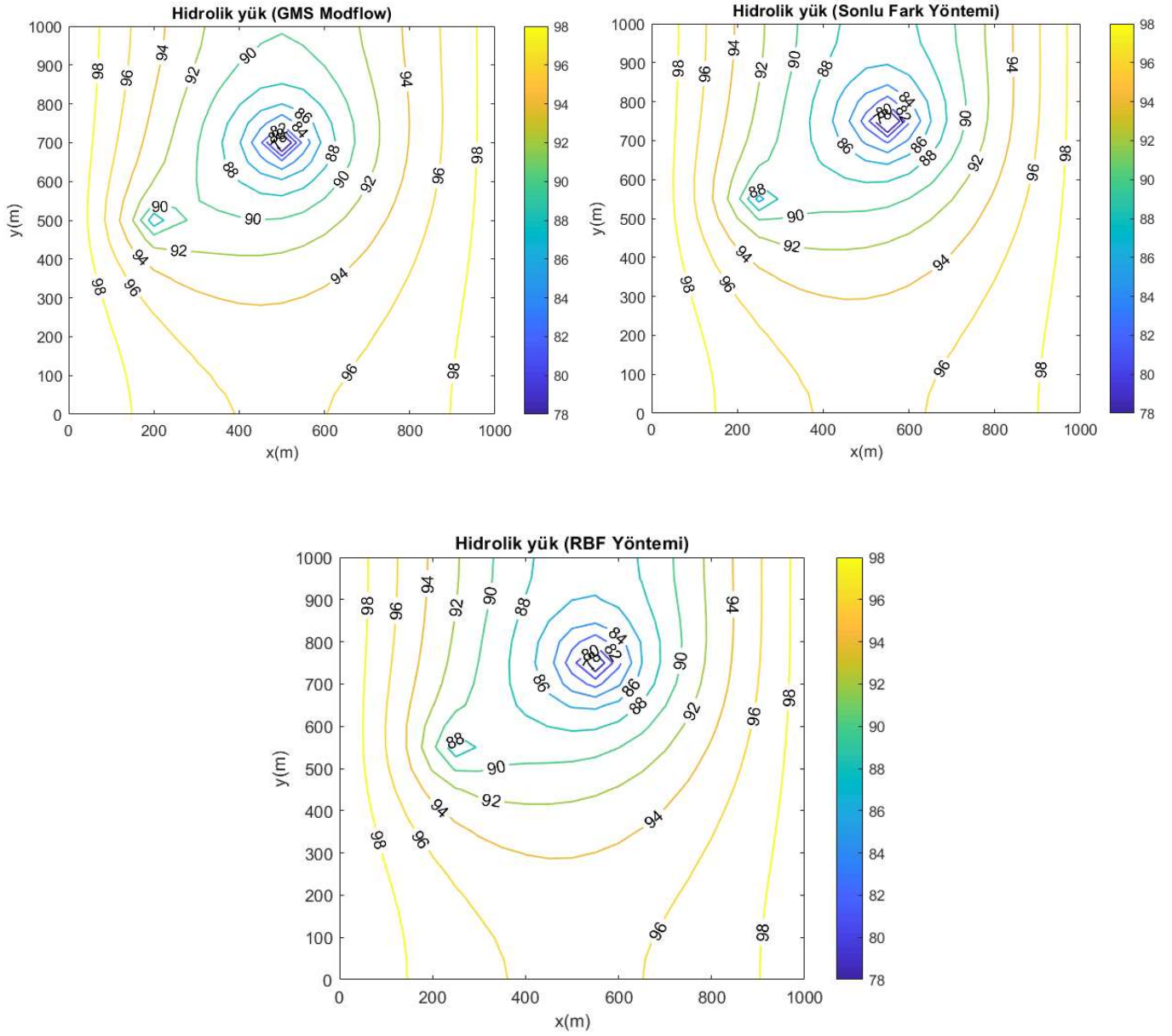


Şekil 5.7: $\Delta x = \Delta y = 100$ m aralıkları için GMS MODFLOW modeli ile sayısal çözümlerin karşılaştırılması.

Elde edilen sonuçlar, referans çözüm olarak kabul edilen GMS-MDOFLOW model çıktılarını Şekil (5.7)'de sunularak birbirleriyle karşılaştırılmaktadır.

Tablo 5.7: Sonlu farklar ve RBF yöntemleri ve GMS MODFLOW modeli ile elde edilen gözlem kuyularındaki hidrolik yük değerlerinin ile karşılaştırılması ($\Delta x = \Delta y = 100$ m).

Gözlem kuyusu	GMS-MODFLOW	Sonlu Fark	RBF ($\beta=5/2$)	GMS-SF (%)	GMS-RBF (%)
G1	93,21	92,87	92,47	0,37	0,79
G2	95,14	94,73	94,32	0,44	0,86
G3	93,20	92,85	92,38	0,38	0,88
G4	94,26	93,85	93,08	0,44	1,25



Şekil 5.8: $\Delta x = \Delta y = 50$ m aralıkları için GMS MODFLOW Modeli ile sayısal çözümlerin karşılaştırılması.

Tablo 5.8: Sonlu farklar ve RBF yöntemleri ve GMS MODFLOW modeli ile elde edilen gözlem kuyularındaki hidrolik yük değerlerinin ile karşılaştırılması ($\Delta x = \Delta y = 50$ m).

Gözlemler kuyusu	GMS-MODFLOW	Sonlu Fark	RBF ($\beta=5/2$)	GMS-SF (%)	GMS-RBF (%)
G1	93,16	92,98	93,02	0,20	0,16
G2	94,97	94,75	94,73	0,24	0,26
G3	93,06	92,87	92,87	0,20	0,21
G4	94,07	93,84	93,85	0,24	0,22

Tablo (5.8)'de sunulan sonuçlar incelendiğinde, RBF yönteminin GMS-MODFLOW sonucu ile aynı hidrolik değerlerine ulaşamadı görülmüştür. En büyük hata yüzdesi G4 gözlem kuyusunda %1,25 olarak tespit edilmiştir. Bu sonuç, σ ve β parametre değerlerinin optimize edilmesi gerektiğini göstermektedir.

Tablo (5.8)'deki sonuçlar elde edilirken düğüm aralığı $\Delta x = \Delta y = 50$ m olarak seçilmiştir. Bir önceki sonuçlara benzer şekilde sonlu fark ve RBF yöntemlerinin sonuçları GMS MODFLOW model çıktılarıyla karşılaştırılmaktadır. $\Delta x = \Delta y = 50$ m için hata değerleri $\Delta x = \Delta y = 100$ m'ye göre daha küçüktür. Bu durum, sonlu fark ve RBF yöntemlerinin sonuçlarının GMS MODFLOW sonuçlarına yaklaştığını göstermektedir. Bu durumda, iyi sonuçlar elde etmek için düğüm aralıklarının mümkün olduğunca küçük seçilmesi önemlidir.

6 SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışması kapsamında, bir 1 (boyutlu) veya iki (2) yeraltısu akım denkleminin sayısal çözümü RBF kollokasyon yöntemi ile gerçekleştirilmiştir. Tezde kullanılan problemler MATLAB programında kodlanmış ve analizleri yapılmıştır. Bu çalışmanın sonuçları aşağıda özetlenmiştir.

1. RBF yöntemi ve sonlu farklar yöntemi, tek boyutlu veya iki boyutlu yeraltısu akım problemlerini çözmek için uygulanabilmektedir. Wang ve Anderson (1982) çözümleri, analitik çözümler veya GMS-MODFLOW sonuçları referans çözüm olarak kabul edilmektedir.
2. RBF kollokasyon yönteminin iki parametresi (σ ve β) vardır. Bu iki parametre uygun bir şekilde seçilmediğinde yöntem kararsız hale gelir.
3. Sonlu farklar yönteminde dikkat edilmesi gereken en önemli nokta, Δx ve Δy düğümlerinin aralıklarının çok büyük seçilmemesidir. Sonuçların iyi belirlenebilmesi için Δx ve Δy aralığının aynı değerde seçilmesi de tercih edilmektedir. Bu sayede geniş bir düğüm aralığı seçilerek çözümün kalitesi iyileştirilmektedir. Öte yandan, RBF kollokasyon yönteminde Δx veya Δy aralığının çok fazla olması gerekmez.
4. Tek boyutlu problem sonuçları incelendiğinde, genel olarak yöntemlerin çözüm üzerindeki etkileri arasında anlamlı bir fark bulunmamıştır. Ancak RBF yöntemi için σ parametresinin değerini optimize etmek gereklidir.
5. Dirichlet sınır koşullarına sahip iki boyutlu problemler için sonlu farklar ve RBF kollokasyon yöntemiyle elde edilen çözümler arasında çok fazla bir fark bulunmamaktadır. Fakat Neumann sınır koşullarında problemin çözümü özellikle RBF yönteminde giderek zorlaşmaktadır.

KAYNAKLAR

- Aatish Anshumana, T. L. (2019). Simulation of reactive transport in porous media using radial point collocation method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 8-25.
- Anonim. (2012). *Havza Koruma Eylem Planlarının Hazırlanması-Susurluk Havzası*. TÜBİTAK MAM ÇEVRE ENSTİTÜSÜ (ÇE).
- Arash Nikvar Hassani, H. K. (2016). Numerical analysis of steady-state groundwater inflow into Tabriz line 2 metro tunnel, northwestern Iran, with special consideration of model dimensions. *Bulletin of Engineering Geology and the Environment*, 1617-1627.
- Batu, V. (1998). *Aquifer Hydraulics a comprehensive guide to Hydrogeologic data analysis*. Canada: A Wiley-Interscience Publication.
- Bhattacharjya, R. K. (2011). Solving Groundwater Flow Inverse Problem Using Spreadsheet Solver. *Journal of Hydrologic Engineering*, 472-477.
- Boddula Swathi, T. E. (2014). Groundwater flow simulation in unconfined aquifers using meshless local Petrov-Galerkin method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 43-52.
- Camas, B. S. (2007). *Saltwater intrusion simulation in heterogeneous aquifer using lattice Boltzmann method*. Louisiana State University: LSU Digital Commons.
- Cao Dingding, Li Xinxiang, Zhu Huiqing. (2022). A polynomial-augmented RBF collocation method using fictitious centres for solving the Cahn–Hilliard equation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 41-55.
- Çiftçi, E. (2011). *Application of radial basis function collocation method in groundwater flow and solute transport problems*. Boğaziçi University: Graduate Program in Civil Engineering.

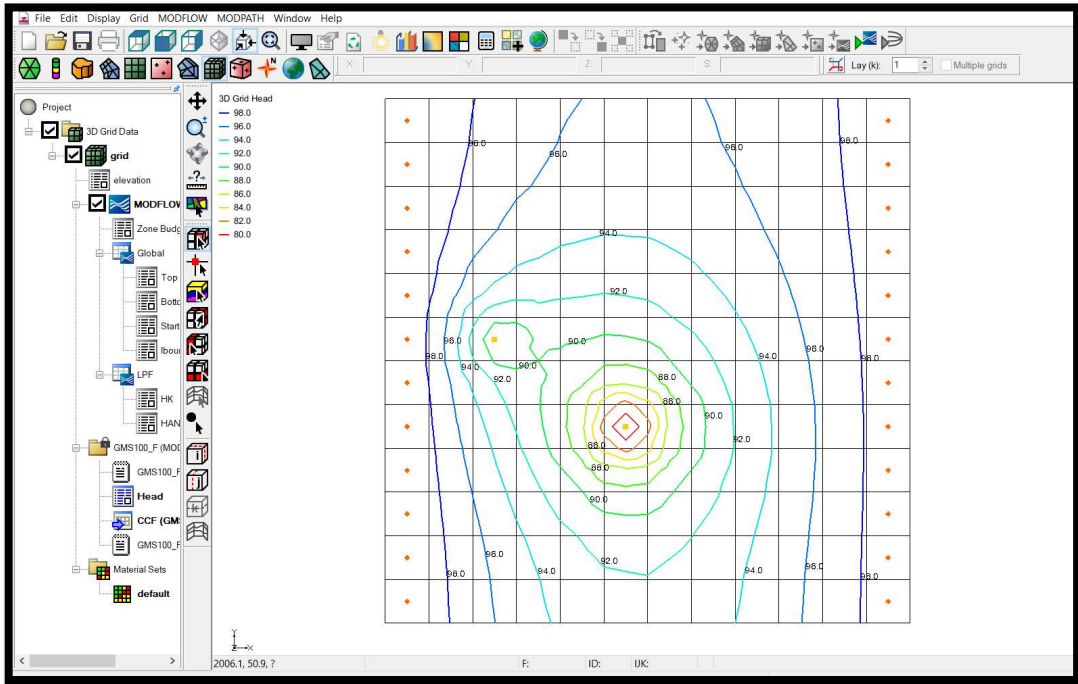
- Dehghan, M. (2007). A numerical method for two-dimensional Schrodinger equation using collocation and radial basis functions. *Computers and Mathematics with Applications*, 136-146.
- Dingding Cao, X. L. (2022). A polynomial-augmented RBF collocation method using fictitious centres for solving the Cahn–Hilliard equation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 41-55.
- Eldho, Meenal. (2011). Simulation of groundwater flow in unconfined aquifer using meshfree point collocation method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 700-707.
- GreenFacts. (2005). [https://www.greenfacts.org/fr/ressources-eau /figtable boxes /aquastat111](https://www.greenfacts.org/fr/ressources-eau/figtable%20boxes/aquastat111).
- GÜRARSLAN, G. (2004). *Düzensiz sonlu fark hesap şeması kullanılarak iki boyutlu yeraltısuyu akımının modellenmesi*. Denizli: PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ.
- Herbert F. Wang, Mary P. Anderson. (1900). *Introduction Groundwater Modeling Finite Difference and Finite Element Methods*. California: Academic Press.
- J. Li, Y. Chen, D. Peppe. (2003). Radial basis function method for 1-D and 2-D groundwater contaminant transport modeling. *Computational Mechanics*, 10-15.
- Kemal Erguvanlı, Erdoğan Yüzer. (1993). *Yeraltı suları Jeolojisi*. İstanbul Teknik Üniversitesi Tatbiki Jeoloji Kürsüsü.
- KESKİN, M. Z. (2019). *Yeraltı suyu akımının modflow kullanılarak sayısal modellenmesi: Bursa ili Karacabey ve Mustafakemalpaşa ovası uygulaması*. Bursa.
- Klaus A. Hoffmann, S. T. (2000). *computational Fluid Dynamics Volume I*. USA: A Publication of Engineering system Education System.
- Kresic, N. (2006). *Hydrogeology and Groundwater modeling second edition*. United States of America: CRC Press.

- Li, J. L. (2003). Radial basis function method for 1-D and 2-D groundwater contaminant transport modeling. *Computational Mechanics*, 10-15.
- Lingyu Li¹, Z. J. (2020). Compact finite-difference method for 2D time-fractional convection–diffusion equation of groundwater pollution problems. *Computational and Applied Mathematics*.
- M. Mategaonkar, T. E. (2012). Groundwater remediation optimization using a point collocation method and particle swarm optimization. *Environmental Modelling and Software*, 37-48.
- M. Tamer Ayvaz , Halil Karahan. (2008). A simulation/optimization model for the identification of unknown groundwater well locations and pumping rates. *Journal of Hydrology*, 76-92.
- Mategaonkar, M. (2021). Simulation of groundwater flow using meshfree collocation method with Cubic Spline function. *Groundwater for Sustainable Development*.
- Meenal Mategaonkar, T. E. (2018). In-situ bioremediation of groundwater using a meshfree model and particle swarm optimization. *Journal of Hydroinformatics*, 886-897.
- Mehdi Dehghan, M. A. (2018). The space-splitting idea combined with local radial basis function meshless approach to simulate conservation laws equations. *Alexandria Engineering Journal*, 1137-1156.
- Oruç, Ö. (2021). A local radial basis function-finite difference (RBF-FD) method for solving 1D and 2D coupled Schrödinger-Boussinesq (SBq) equations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 55-66.
- Qianqian Liu, G. H. (2019). Simulation of Groundwater Level in Ephemeral Streams with an Improved Groundwater Hydraulics Model. *Groundwater*, 969-979.
- Richard L. Burden , J. Douglas Faires. (2011). *Numerical Analysis*. Boston, USA: Brooks/Cole, Cengage Learning.
- Richard, F. (1982). Scattered Data Interpolation: Tests of Some Methods. *Mathematics of Computation*.

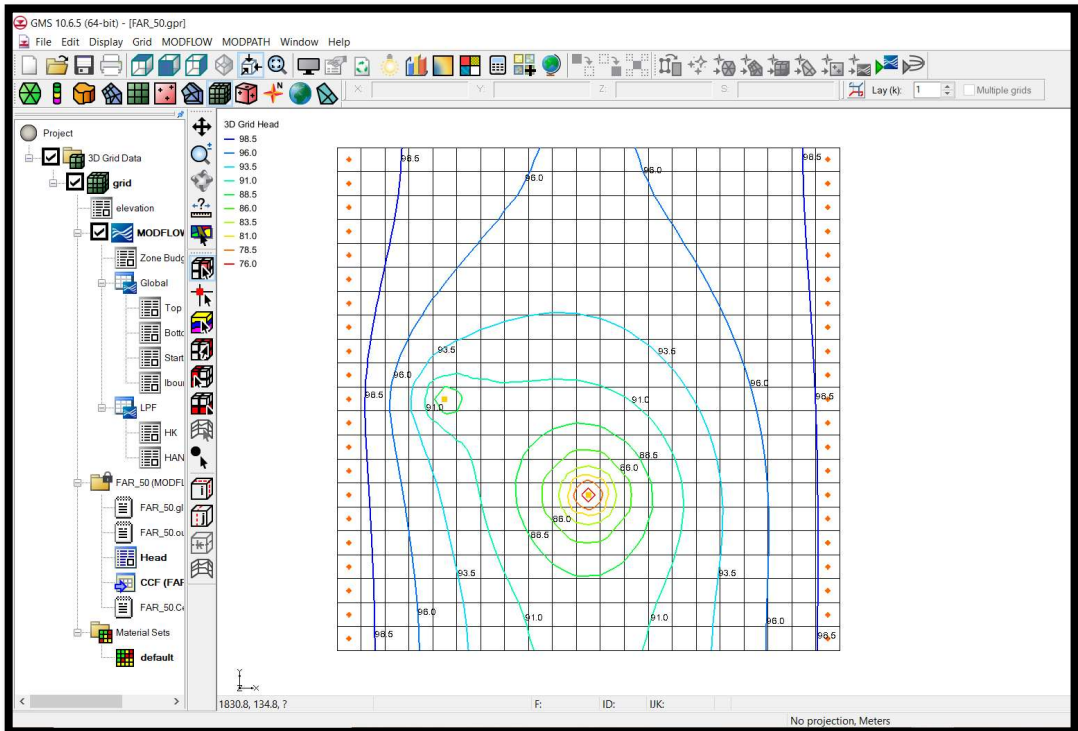
- Shadab Anwar, M. (2009). Regional scale transient groundwater flow modeling using Lattice Boltzmann methods. *Computers and Mathematics with Applications*, 1015-1023.
- Tarun Gupta, A. K. (2018). *Environmental Contaminants: Measurement, Modelling and Control*. Energy, Environment, and Sustainability.
- Thomas Alice, Eldho T. I., Rastogi A. K. (2014). A comparative study of point collocation based MeshFree and finite element methods for groundwater flow . *ISH Journal of Hydraulic Engineering*, 65-71.
- Xin, L. (2006). Radial point collocation method (RPCM) for solving convection-diffusion problems. *Journal of Zhejiang University: Science*, 1061-1067.
- Xu-Guang Hu, Tak-San Ho, Herschel Rabitz. (1998). *The collocation method based on a generalised inverse multiquadric basis for bound-state problems*. USA: ELSEVIER.
- Zheng, F. W. (2016). The method of fundamental solutions for steady-state groundwater flow problems. *Journal of the Chinese Institute of Engineers, Transactions of the Chinese Institute of Engineers, Series A*, 236-242.

EKLER

EK-A: GMS MODFLOW modeli



Şekil A.1: $\Delta x = \Delta y = 100\text{m}$ için GMS Modflow Modeli



Şekil A.2: $\Delta x = \Delta y = 50\text{m}$ için GMS Modflow Modeli