

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HİLL OPERATÖRÜ İLE İLGİLİ TERS SPEKTRAL
PROBLEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MEHMET TİVER

DENİZLİ, AĞUSTOS-2022

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



HİLL OPERATÖRÜ İLE İLGİLİ TERS SPEKTRAL PROBLEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MEHMET TİVER

DENİZLİ, AĞUSTOS-2022

KABUL VE ONAY SAYFASI

MEHMET TİVER tarafından hazırlanan "**HİLL OPERATÖRÜ İLE İLGİLİ TERS SPEKTRAL PROBLEMLER**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 25.08.2022 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Danışman

Prof. Dr. Alp Arslan KIRAÇ

.....

Üye

Prof. Dr. İsmail YASLAN

Pamukkale Üniversitesi

.....

Üye

Dr. Öğr. Üyesi Mustafa Seyyit SEYYİDOĞLU

Uşak Üniversitesi

.....

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

.....

Prof. Dr. Yusuf ÖNER

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

MEHMET TİVER

ÖZET

**HİLL OPERATÖRÜ İLE İLGİLİ TERS SPEKTRAL
PROBLEMLER
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MEHMET TİVER
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. ALP ARSLAN KIRAÇ
DENİZLİ, AĞUSTOS-2022**

$L_2[0, 1]$ uzayında, keyi self adjoint sınır koşulu ile üretilen $L(q)$ Sturm-Liouville operatörü göz önüne alınmıştır. Burada $q(x) \in L_1[0, 1]$ reel değerli bir fonksiyondur. Dirichlet, quasi-periyodik, periyodik ve anti-periyodik sınır koşulları ile Sturm-Liouville operatörü için ters problem incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELELER: Ters spektral teori, Ambarzumyan teorem, Sturm-Liouville operatörü, Hill operatörü, Dirichlet, Quasi- periyodik, Periyodik, Anti-Periyodik sınır koşulları.

ABSTRACT

INVERSE SPECTRAL PROBLEMS ASSOCIATED WITH HILL OPERATOR

MSC THESIS

MEHMET TİVER

**PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS**

(SUPERVISOR: PROF. DR. ALP ARSLAN KIRAÇ)

DENİZLİ, AUGUST-2022

In the space $L_2[0, 1]$, we consider $L(q)$ Sturm-Liouville operator generated with arbitrary self-adjoint boundary conditions, where $q(x) \in L_1[0, 1]$ is a real-valued function. The inverse problem for Dirichlet, quasi-periodic, periodic and anti-periodic boundary conditions with Sturm-Liouville operator were investigated.

KEYWORDS: Inverse spectral theory, Ambarzumyan theorem, Sturm-Liouville operator, Hill operator, Dirichlet, Quasi-periodic, Periodic, Anti-Periodic boundary conditions.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
SEMBOL LİSTESİ	iv
ÖNSÖZ	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIMLAR	6
3. STURM-LIOUVILLE OPERATÖRLERİ İÇİN TERS PROBLEM . . .	10
3.1 Keyfi Self-Adjoint Sınır Koşulları için Ters Problem	11
3.2 Dirichlet Sınır Değer Problemi için Ters Problem	13
3.3 Quasi-Periyodik Sınır Değer Problemi için Ters Problem	14
3.4 Periyodik ve Anti-Periyodik Sınır Değer Problemi için Ters Problem . .	19
4. SONUÇ VE ÖNERİLER	22
5. KAYNAKLAR	23
ÖZGEÇMİŞ	25

SEMBOL LİSTESİ

λ	:	Özdeğer
ψ	:	Özfonksiyon
q	:	Potansiyel fonksiyon
$h.h.y$	:	Hemen hemen her yerde
$\uparrow$	:	kısıtlama
$q \in L^1_{\mathbb{R}}(0, 1)$	:	q reel-değerli toplanabilir bir fonksiyon

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının hazırlanmasında, yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, bilgisini, sabrını, tecrübesini, desteğini esirgemeyerek her fırsatta zaman ayırarak yardımcı olan çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Alp Arslan KIRAÇ'a ve bu süreçte beni destekleyen aileme ve arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

1. GİRİŞ

Ters problemler spektral analizdeki, spektral karakteristiklerden operatörün özelliklerinin belirlenmesi problemidir. Bu türdeki problemler, matematik, fizik, mekanik, jeofizik, elektronik, meteoroloji ve fen bilimlerinin diğer branşlarında sıkça görülmektedir. Son zamanlarda ters problemelere duyulan yoğun ilgi yeni uygulamaların ortaya atılmasına sebep olmaktadır.

Spektral teoride ve özellikle ters spektral problemlerde, tek boyutlu Schrödinger operatörü adıyla da bilinen Sturm-Liouville operatörü için geniş çaplı araştırmalar yapılmıştır ve hala bu araştırmalara devam edilmektedir.

Ters spektral teoremin ilk başlangıç tarihi 1929 yılında Ambarzumyan'ın aşağıdaki teoremi ile başlar.

1.1.1 Teorem (Ambarzumyan Teoremi) $\{n^2 : n = 0, 1, 2, \dots\}$ Neumann sınır koşulu ile Sturm-Liouville operatörünün spektrumu ise, bu takdirde h.h.y $q = 0$ 'dır (Ambarzumian 1929).

Borg 1946 yılında yayımladığı makalede, iki spektrumu verilen Sturm-Liouville operatörünün var olduğunu kabul etmiş ve yine aynı makalesinde genel olarak bir spektrumun denklemi belirtmediğini elde etmiştir. Bu nedenle Ambarzumyan'ın sonucu genel durum için bir istisnadır (Borg 1946).

Hochstadt 1963 yılında self-adjoint Schrödinger operatörü spektral boşluklar (gaps) veya kararsızlık bölgeleri (instability zones) dediğimiz boşlukları vardır. Bir operatörün spektral boşlukları uzunluklarının dizisi dikkate alınırsa, operatörün potansiyelinin düzgünlüğü (smoothness) ile bu dizisinin sıfıra gidiş hızı arasında yakın bir bağlantı vardır. Spektral boşlukların tespiti için ise periyodik ve anti-periyodik sınır şartlarına sahip Sturm-Liouville operatörlerinin özdeğerleri belirlenir spektral boşluklar operatörün özdeğerleri uç noktalar kabul eden sonlu açık aralıklardır

(Levitan ve Sargsian 1975, Marchenko 1986).

$L_2(-\infty, \infty)$ uzayında üretilen reel-değerli, periyodik $q(x+1) = q(x)$ ve $L_2[0, 1]$ uzayında potansiyele sahip self-adjoint Schrödinger operatörü

$$Ly = -y'' + qy \quad (1.1)$$

spektral boşluklara $(\lambda_n^-, \lambda_n^+)$ $n \in \mathbb{N}$ veya kararsızlık bölgelerine sahiptir. Burada, $\{\lambda_n^-, \lambda_n^+\}$ (1.1) operatörünün $[0, 1]$ aralığındaki n çift için periyodik sınır şartları

$$y(0) = y(1) \quad ; \quad y'(0) = y'(1) \quad (1.2)$$

ve n tek için anti-periyodik sınır şartları

$$y(0) = -y(1) \quad ; \quad y'(0) = -y'(1) \quad (1.3)$$

ile elde edilen n . periyodik özdeğerleri denir ve bu özdeğerlerin dizisi aşağıdaki gibi sıralanır:

$$\lambda_0 < \lambda_1^- \leq \lambda_1^+ < \lambda_2^- \leq \lambda_2^+ < \lambda_3^- \leq \lambda_3^+ < \lambda_4^- \leq \lambda_4^+ < \dots$$

(Eastham 1973).

Buradan λ , (λ_0, λ_1^-) , $(\lambda_{n-1}^+, \lambda_n^-)$ ($n \geq 2$), açık aralıkların birine ait ise (1.1) operatörüne karşılık gelen çözümler $(-\infty, \infty)$ 'da sınırlıdır. Bu aralıklara (1.1)'ün kararlılık (stability) aralıkları denir. λ bu aralıkların dışındaysa, aşikar olmayan (1.1)'ün bütün çözümleri $(-\infty, \infty)$ 'da sınırsızdır. O halde $(\lambda_n^-, \lambda_n^+)$ $n \in \mathbb{N}$ aralıklarına L operatörünün spektral boşlukları(gaps) denir. Dahası $(-\infty, \lambda_0)$ aralığına da sıfırıncı kararsızlık (instability) aralığı adı verilir.

$\gamma_n = \lambda_n^- - \lambda_n^+$ spektral boşlukların uzunlukları olduğunda γ_n dizisinin limitinin sıfıra gidiş hızı ile potansiyelin düzgünlüğü (smoothness) arasında yakın bir bağlantı vardır.

"Bir reel değerli L_2 potansiyel C^∞ uzayına aittir $\Leftrightarrow \gamma_n$ dizisi $1/n$ 'nin herhangi bir kuvvetinden daha hızlı sıfıra gider", diğer bir deyişle, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$(\gamma_n) \in \ell_2^{\mathbb{N}} = \{(x_n) : \sum |x_n|^2 (1 + n^2)^N < \infty\}$$

(Hochstadt 1963).

Daha sonra Hochstadt 1965'teki çalışmasında aşağıdaki teoremleri kanıtlamıştır.

1.1.2 Teorem $q(x)$ reel ve integrallenebilir ise, ve tüm sonlu kararsızlık aralıkları kaybolursa, yani $\lambda_1^- = \lambda_1^+$, $\lambda_2^- = \lambda_2^+$ vb. bu takdirde hemen her yerde $q(x) = 0$ dır.

1.1.3 Teorem $q(x)$ reel ve integrallenebilir ise ve kesinlikle sonlu kararsız aralıkların biri kaybolmazsa, o halde $q(x)$ hemen her yerde gerekli bir eliptik fonksiyondur.

1.1.4 Teorem $q(x)$ reel ve integrallenebilir ise ve sonlu kararlı aralıkların en fazla sonlu bir sayısı yok ise, bu takdirde $q(x)$ hemen her yerde sonsuz türevlenebilirdir.

1987 yılında Pöschel ve Trubowitz tarafından yapılan çalışmada Dirichlet problemi için $\sigma = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ spektrumu sifra karşılık gelen sifra yakın çok sayıda $\mathbb{L}^2$ potansiyelinin varlığını göstermişlerdir. Dirichlet problemi için spektrum sıfır ise, potansiyel fonksiyonun sıfır olmadığını diğer bir deyişle; Ambarzumyan teoreminin sağlamadığını göstermişlerdir. Chern ve diğerleri (2001) potansiyel üzerine ek bir şart koyarak genel ayrılabilir sınır koşullarına Sturm-Liouville operatörü için klasik Ambarzumyan teoremine genişletmişlerdir.

Freiling ve Yurko (2001), her özdeğerin bilinmesinden ise, yalnız ilk özdeğerin bilinmesinin yeterli oluşunu kanıtlamışlardır, yani ilk özdeğer potansiyel fonksiyonun ortalama değeridir. Bu teorem aşağıda verilmiştir.

1.1.5 Teorem $\lambda_0 = \int_0^1 q(x) dx$ ise, bu takdirde $(0, 1)$ üzerinde hemen hemen her yerde $q = \lambda_0$ 'dır.

Yurko (2013), self-adjoint diferansiyel operatörleri ve keyfi self-adjoint sınır koşullarının geniş sınıfları üzerinde Ambarzumyan teoreminin genelleştirmelerini

ispatlamışlardır.

Kıraç (2016a), q potansiyel fonksiyon üzerine herhangi bir koşul koymadan $t \in [0, 2\pi)$ quasi-periyodik sınır koşulları ve $q \in L^1[0, 1]$ ile $L_t(q)$ Sturm-Liouville operatörleri için klasik Ambarzumyan teoremini elde etmiştir.

$L_t(q)$ 'nin spektrumu,

$$S(L_t) = \{\lambda_n(t) : n \in \mathbb{Z}\} = \{\lambda_{n,1}(t) : n = 1, 2, \dots\} \cup \{\lambda_{n,2}(t) : n = 0, 1, 2, \dots\}$$

ve $\lambda_n : [0, \pi] \longrightarrow \Gamma_n$

$$\Gamma_n =: \{\lambda_n(t) : t \in [0, \pi]\}$$

olmak üzere, $L(q)$ operatörünün $S(L(q))$ spektrumu $t \in [0, \pi]$ için $L_t(q)$ operatörlerinin $S(L_t(q))$ spektrumlarının birleşimidir; yani,

$$S(L(q)) = \cup_{n \in \mathbb{Z}} \Gamma_n$$

dir (Veliev 2013).

Daha sonra Kıraç (2016b), $\{(n\pi)^2 : n \text{ çift ve } n > n_0\}$ Hill operatörünün periyodik spektrumunun bir alt kümesi olduğunda, potansiyel fonksiyonun hemen hemen her yerde sıfır olduğunu ispatlamıştır. Benzer durum anti-periyodik sınır şartı için de sağlandığını elde etmiştir.

2018'de Ashrafyan, Sturm-Liouville problemleri ile keyfi self-adjoint sınır koşulları için iyi bilinen Ambarzumyan teoreminin bir genelleştirmesini kanıtlamıştır.

Kıraç 2018'de bir spektrumun sadece bilinen bir kısmını kullanarak quasi-periyodik sınır değer problemi için klasik Ambarzumyan teoremine genişletmiştir. İlk özdeğer üzerinde Yurko'nun (2013) koşullarını hafifletmiştir.

Kıraç 2019, ilk özdeğer tipi Ambarzumyan teoreminin bir genişlemesi keyfi self-adjoint Sturm-Liouville diferansiyel operatörler için kanıtlamıştır. Sonuç olarak, Pöschel-Trubowitz (1987) ters spektral teorisine katkıda bulunmuştur.

Bu tez üç bölümde incelenecektir. Birinci bölümde ters spektral teoreminin başlangıcı olarak adlandırılan Ambarzumyan teoremi ve bu alanla ilgili yapılan diğer

alışmalara yer verilmiştir. Bölüm ikide tez içerisinde kullanılan temel tanımlamalar yapılmıştır. Bölüm üçte ise, Sturm-Liouville operatörleri için ters problemler incelenmiştir.

2. TEMEL TANIMLAR

2.1.1 Tanım $[0, 1]$ aralığında

$$\ell(y) = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y \quad (2.1)$$

eşitliğine lineer diferansiyel ifade ve $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$ fonksiyonlarına diferansiyel ifadenin katsayıları, buradaki n sayısına da diferansiyel ifadenin mertebesi denir.

$U(y)$, $[a, b]$ 'de a ve b sınır noktalarının

$$U(y) = \alpha_0 y_a + \alpha_1 y'_a + \dots + \alpha_{n-1} y_a^{(n-1)} + \beta_0 y_b + \beta_1 y'_b + \dots + \beta_{n-1} y_b^{(n-1)}$$

olacak şekilde $y_a, y'_a, \dots, y_a^{(n-1)}; y_b, y'_b, \dots, y_b^{(n-1)}$ değişkenlerinin bir lineer formudur.

n . mertebenin bir lineer diferansiyel ifadesi $U(y)$ formu ile verilen lineer bağımsız homojen sınır koşulları

$$U_v(y) = 0, \quad v = 1, 2, \dots, n \quad (2.2)$$

formudur.

Verilen bir $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ve (2.2) formunun koşulları ile tanımlı $\mathbb{D}$ alt uzayı olsun. Tüm $y \in \mathbb{D}$ fonksiyonu için $u = \ell(y)$ fonksiyonu karşılık gelsin. Bu bağıntı tanımdaki tanım kümesi olarak $\mathbb{D}$ ile bir lineer operatördür ve L ile ifade edilir. Bu notasyonları göz önüne alırsak

$$u = Ly$$

şeklinde ifade edilir.

L operatörü $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ve (2.2) sınır koşulları ile üretilen diferansiyel operatör olarak isimlendirilir. Diğer bir ifadeyle, $L_2[0, 1]$ uzayında L operatörü aşağıdaki eşitlik ile kısıtlanılan, $\mathbb{D}(L)$ tanım kümesi ve $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ile tanımlanır:

$\mathbb{D}(L) = \{y | y, y', y'', \dots, y^{(n-1)} \text{ vardır, } y^{(n-1)}, [0, 1] \text{ aralığında mutlak sürekli, } y, \ell(y) \in L_2[0, 1], U_v(y) = 0, v = 1, 2, \dots, n\}$ ve $y \in \mathbb{D}(L)$ için $Ly = \ell(y)$ 'dir.

2.1.2 Tanım $y \in \mathbb{D}(L)$ fonksiyonunu tanımlayan,

$$\ell(y) = 0, \quad (2.3)$$

$$U_v(y) = 0, \quad v = 1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

şartlarını sağlayan probleme homojen sınır değer problemi adı verilir.

2.1.3 Tanım L operatörünün tanımındaki tanım kümesinde

$$Ly = \lambda y \quad (2.5)$$

olacak şekilde $y \neq 0$ fonksiyonu vardır öyle ki λ sayısına L operatörünün özdeğeri denir. y fonksiyonu λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon olarak isimlendirilir.

L operatörü (2.2) sınır koşulu ve $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ile üretilir.

y özfonksiyonu L operatörünün tanımındaki tanım kümesine ait olduğundan, y özfonksiyonu (2.2) şartlarını sağlar. Bununla birlikte, $Ly = \ell(y)$ ve (2.5)

$$\ell(y) = \lambda y \quad (2.6)$$

formuna eşittir.

2.1.4 Tanım $L_2[0, 1]$ 'de

$$(y, z) = \int_0^1 y(x) \overline{z(x)} dx$$

gösteriminde ile ifade edilen L^* tanımındaki tanım kümesinde her z ve L 'nin tanımındaki tanım kümesinde her y için

$$(Ly, z) = (y, L^*z)$$

eşitliği sağlanırsa L^* operatörüne L operatörünün adjoint operatörü denir. $L = L^*$ ise, o halde L operatörü self-adjointtir.

L operatörü self-adjointtir $\Leftrightarrow$ self-adjoint sınır koşulları ve self-adjoint diferansiyel ifade tarafından üretilir (Naimark 1967).

2.1.5 Tanım $L = L(q(x), h, H)$ sınır değer problemini dikkate alalım:

$$\ell y := -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < \pi,$$

$$U(y) := y'(0) - hy(0) = 0, \quad V(y) := y'(\pi) + Hy(\pi) = 0.$$

Burada λ özdeğerdir; $q(x)$, h ve H gerçeldir; $q(x) \in L_2(0, \pi)$. ℓ operatörü Sturm-Liouville operatörü olarak adlandırılır (Freiling ve Yurko 2001).

2.1.6 Tanım Aynı küme üzerinde tanımlı f ve g iki fonksiyon olsun,

$$\mu\{x : f(x) \neq g(x)\} = 0$$

ise μ ölçüsüne göre denktir denir.

Bu özellik sıfır ölçülü bir küme üzerinde bütün noktalar haricinde sağlanıyorsa, bu özelliğe hemen hemen her yerde olarak isimlendirilir (Kolmogorov ve Fomin 1975).

Bundan sonraki bölümlerde hemen hemen her yerde ifadesini kısaca h.h.y olarak ifade edeceğiz.

2.1.7 Tanım g , A üzerinde esaslı sınırlı ise, bu durumda

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in A} |q(x)| = \inf_{\substack{\mathbb{Z} \subset \mathbb{A} \\ \mu(\mathbb{Z})=0}} \left\{ \sup_{x \in A - \mathbb{Z}} |g(x)| \right\}$$

A üzerinde g 'nin esaslı supremumu denir, sonludur (Kolmogorov ve Fomin 1975).

2.1.8 Tanım g , A üzerinde esaslı sınırlı ise, bu durumda

$$\operatorname{ess\,inf}_{x \in A} |q(x)| = \sup_{\substack{\mathbb{Z} \subset \mathbb{A} \\ \mu(\mathbb{Z})=0}} \left\{ \inf_{x \in A - \mathbb{Z}} |g(x)| \right\}$$

A üzerinde g 'nin esaslı infimumu denir, sonludur.

2.1.1 Teorem (Oscillation Teoremi) L sınır değer probleminin $\psi(x, \lambda_n)$ özfonksiyonu $0 < x < \pi$ aralığında kesin olarak n sayıda sıfırlara sahiptir (Freiling ve Yurko 2001).

2.1.2 Teorem (Rayleigh-Ritz) H yarı sınırlı self-adjoint operatör olsun. V , n -boyutlu altuzay $V \subset D(H)$ olsun ve P , V üzerine ortogonal izdüşümdür. $H_v = PHP$ olsun. $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_n$, $\hat{\lambda}_1 \leq \hat{\lambda}_2 \leq \dots \leq \hat{\lambda}_n$ ile sıralanan $H_v \upharpoonright V$ 'nin özdeğerleri olsun. Bu takdirde

$$\lambda_m(H) \leq \hat{\lambda}_m, \quad m = 1, \dots, n.$$

Özellikle H , $E_1 \leq \dots \leq E_k$ ile spektrumun altında $E_1, \dots, E_k$ özdeğerlerine (katlılığı sayılabilen) sahipse, bu takdirde

$$E_m \leq \hat{\lambda}_m, \quad m = 1, \dots, \min(k, n)$$

(Reed ve Simon 1978).

İspat Min-max prensibi ile, $H_v \upharpoonright V$

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_n &= \sup_{\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1} \in V} \inf_{\substack{\Psi \in V: \|\Psi\|=1 \\ \Psi \in [\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}]^\perp}} (\Psi, H\Psi) \\ &= \sup_{\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1} \in H} \inf_{\substack{\Psi \in V: \|\Psi\|=1 \\ \Psi \in [P\varphi_1, \dots, P\varphi_{m-1}]^\perp}} (\Psi, H\Psi) \\ &= \sup_{\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1} \in H} \inf_{\substack{\Psi \in V: \|\Psi\|=1 \\ \Psi \in [\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}]^\perp}} (\Psi, H\Psi) \\ &\geq \sup_{\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1} \in H} \inf_{\substack{\Psi \in D(H): \|\Psi\|=1 \\ \Psi \in [\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}]^\perp}} (\Psi, H\Psi) \\ &= \lambda_m(H) \end{aligned}$$

ile verilen özdeğerlere sahiptir. Üçüncü adımda $\Psi \in V$ için $(\Psi, P\varphi) = (\Psi, \varphi)$ kullanılmıştır.

3. STURM-LIOUVILLE OPERATÖRLERİ İÇİN TERS PROBLEM

Bu bölümde, $L_2[0, 1]$ uzayında

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \quad (3.1)$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y(1) = y(0) = 0, \quad (3.2)$$

$$y(1) = e^{it}y(0) \quad , y'(1) = e^{it}y'(0), \quad (3.3)$$

$$y(1) = y(0) \quad , y'(1) = y'(0), \quad (3.4)$$

$$y(1) = -y(0) \quad , y'(1) = -y'(0) \quad (3.5)$$

sırasıyla Dirichlet, quasi-periyodik, periyodik ve anti-periyodik sınır koşulları tarafından üretilen $L(q)$ operatörünü göz önünde bulunduracağız. Burada $q(x) \in L_1[0, 1]$ reel değerli bir fonksiyondur.

İlk olarak Teorem 1.1.1 ile ifade edilen Ambarzumyan teoreminin ispatını verelim.

İspat $-y'' + q(x)y = \lambda y, y'(0) = y'(\pi) = 0$ sınır değer probleminin özdeğerleri $\lambda_n = n^2$ ise bu takdirde $\int_0^\pi q(t) dt = 0$ olduğu

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \dots + \frac{a_{[\frac{m}{2}]}}{n^{2[\frac{m}{2}]+1}} + \frac{\gamma_n}{n^{2[\frac{m}{2}]+1}} \quad (3.6)$$

asimptotik formülünden elde edilir, burada

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt \right],$$

$a_1, \dots, a_{[\frac{m}{2}]}$ sabitlerdir ve $[a]$ sembolü a 'nın integral kısmını gösterir.

Diğer taraftan özdeğerler için Rayleigh-Ritz bağıntısından $\lambda_0 = 0$ sınır değer probleminin ilk özdeğeri $y'(0) = y'(\pi) = 0$ ve $\int_0^\pi y^2 dx$ olan fonksiyonların sınıfında

$$(Ly, y) = \int_0^\pi (y'^2 + q(x)y^2) dx$$

fonksiyonelinin mutlak minimumuyla çakıştığı görülür.

$y_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ koyarak ve $\int_0^\pi q(t) dt = 0$ koşulu kullanılarak $(Ly_0, y_0) = 0$ olduğu bulunur.

Sonuç olarak $y_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $\lambda = 0$ için $-y'' + q(x)y = \lambda y$ 'nin bir çözümüdür. Bu nedenle hemen hemen her yerde $q(x) = 0$ 'dır (Levitan ve Gasymov 1964).

3.1 Keyfi Self-Adjoint Sınır Koşulları için Ters Problem

Yurko (2013), Ashrafyan (2018) ve Kıraç (2019) makalelerinde keyfi self-adjoint sınır koşulları ile Sturm-Liouville operatörleri için Ambarzumyan teoreminin genelleştirmelerini kanıtladılar.

L ile birlikte aynı formun $\tilde{L} := L(\tilde{q})$ problemini düşünelim fakat farklı $\tilde{q}$ potansiyeli ile birlikte göz önüne alalım. Belirli bir a sembolü L ile ilgili bir nesneyi gösterir ise, bu takdirde $\tilde{a}$, $\tilde{L}$ ile ilgili benzer bir nesneyi gösterecek ve $\hat{a} := a - \tilde{a}$ olduğunu kabul edelim.

$\tilde{q}(x)$ bilinen ve sabit olsun. Örnek için $\tilde{q}(x) \equiv 0$ alınabilir. $\{\tilde{\lambda}_n\}_{n \geq 0}$ ve $\{\tilde{y}_n(x)\}_{n \geq 0}$ ile sırasıyla $\tilde{L} = L(\tilde{q})$ 'nın özdeğerleri ve özfonksiyonları gösterilir.

3.1.1 Teorem

$$\lambda_0 = \tilde{\lambda}_0 + \frac{(\hat{q}\tilde{y}_0, \tilde{y}_0)}{(\tilde{y}_0, \tilde{y}_0)}$$

olsun, burada $\tilde{y}_0(x)$, $\tilde{\lambda}_0$ ile ilgili $\tilde{L}$ 'nin bir özfonksiyonudur. Bu durumda $(0, 1)$ üzerinde h.h.y

$$q(x) = \tilde{q}(x) + \lambda_0 - \tilde{\lambda}_0 \quad (3.7)$$

dır (Yurko 2013).

İspat Rayleigh-Ritz bağıntısından

$$\begin{aligned} \frac{(\ell\tilde{y}_0, \tilde{y}_0)}{(\tilde{y}_0, \tilde{y}_0)} &= \frac{(\tilde{\ell}\tilde{y}_0, \tilde{y}_0)}{(\tilde{y}_0, \tilde{y}_0)} + \frac{((\ell - \tilde{\ell})\tilde{y}_0, \tilde{y}_0)}{(\tilde{y}_0, \tilde{y}_0)} \\ &= \tilde{\lambda}_0 + \frac{(\hat{q}\tilde{y}_0, \tilde{y}_0)}{(\tilde{y}_0, \tilde{y}_0)} = \lambda_0 \end{aligned}$$

olduğundan $\tilde{y}_0$, λ_0 özdeğeri ile ilgili L 'nin bir özfonksiyonu olduğu görülür. Özellikle bu,

$$-\tilde{y}_0''(x) + q(x)\tilde{y}_0(x) = \lambda_0\tilde{y}_0(x)$$

verir ve (3.7)'ya ulaşılır.

$$-\tilde{y}_0''(x) + q(x)\tilde{y}_0(x) = \left(\tilde{\lambda}_0 + \frac{(\hat{q}\tilde{y}_0, \tilde{y}_0)}{(\tilde{y}_0, \tilde{y}_0)} \right) \tilde{y}_0(x)$$

$$q(x)\tilde{y}_0(x) = \tilde{y}_0''(x) + \left(\tilde{\lambda}_0 + \frac{(\hat{q}\tilde{y}_0, \tilde{y}_0)}{(\tilde{y}_0, \tilde{y}_0)} \right) \tilde{y}_0(x)$$

$$q(x) = \frac{\tilde{y}_0''(x)}{\tilde{y}_0(x)} + \tilde{\lambda}_0 + \frac{(\hat{q}\tilde{y}_0, \tilde{y}_0)}{(\tilde{y}_0, \tilde{y}_0)}$$

$$q(x) = \frac{\tilde{y}_0''(x)}{\tilde{y}_0(x)} + \tilde{\lambda}_0 + \frac{(q(x)\tilde{y}_0, \tilde{y}_0)}{(\tilde{y}_0, \tilde{y}_0)} - \frac{(\tilde{q}\tilde{y}_0, \tilde{y}_0)}{(\tilde{y}_0, \tilde{y}_0)}$$

$$q(x) = q(x) - \lambda_0 + \tilde{\lambda}_0 + q(x) - \tilde{q}(x)$$

$$q(x) = 2q(x) + \tilde{\lambda}_0 - \tilde{q}(x) - \lambda_0$$

$$q(x) = \tilde{q}(x) + \lambda_0 - \tilde{\lambda}_0$$

$\tilde{\lambda}_0$ tek veya çift olabilir. Teoremin ispatı ve formülasyonu katlılığa bağlı değildir.

3.1.2 Teorem $q, \tilde{q} \in L^1_{\mathbb{R}}(0, 1)$ olsun. Eğer

$$\lambda_0 - \tilde{\lambda}_0 = \text{ess inf } \hat{q} \quad \text{veya} \quad \lambda_0 - \tilde{\lambda}_0 = \text{ess sup } \hat{q},$$

ise, bu takdirde $(0, 1)$ aralığında h.h.y $q(x) = \tilde{q}(x) + \lambda_0 - \tilde{\lambda}_0$ dır (Ashrafyan 2018).

İspat $L_2(0, 1)$ uzayındaki iç çarpımı kullanarak (3.1) ifadesinin her iki tarafını $\tilde{y}_0$ ile çarparak

$$(\ell y_0, \tilde{y}_0) = \lambda_0(y_0, \tilde{y}_0)$$

elde edilir. Buradan

$$(\tilde{\ell} y_0, \tilde{y}_0) = (y_0, \tilde{\ell} \tilde{y}_0) = \tilde{\lambda}_0(y_0, \tilde{y}_0)$$

$$((\hat{q} + \tilde{\lambda}_0 - \lambda_0)y_0, \tilde{y}_0) = 0$$

elde edilir. Sturm osilasyon teoremi ile $y_0\tilde{y}_0$ çarpımı $(0, 1)$ aralığında sıfırlara sahip değildir. Dolayısıyla $(0, 1)$ üzerinde h.h.y $\hat{q} + \tilde{\lambda}_0 - \lambda_0 = 0$ dır.

3.1.3 Teorem Bazı n için

$$\lambda_n - \tilde{\lambda}_n = (\hat{q}\tilde{y}_n, \tilde{y}_n)$$

ve

$$\lambda_n - \tilde{\lambda}_n = \text{ess inf } \hat{q} \quad \text{veya} \quad \lambda_n - \tilde{\lambda}_n = \text{ess sup } \hat{q}$$

olsun, burada $\tilde{y}_n, \tilde{\lambda}_n$ özdeğeri ile ilgili $\tilde{L}$ 'nin normalleştirilmiş bir özfonksiyonudur. Bu takdirde $(0, 1)$ aralığında h.h.y $q(x) = \tilde{q}(x) + \lambda_n - \tilde{\lambda}_n$ dir (Kıraç 2019).

İspat İlk varsayımdan

$$\begin{aligned} ((\hat{q} + \tilde{\lambda}_n - \lambda_n)\tilde{y}_n, \tilde{y}_n) &= (\hat{q}\tilde{y}_n + (\tilde{\lambda}_n - \lambda_n)\tilde{y}_n, \tilde{y}_n) \\ &= (\hat{q}\tilde{y}_n, \tilde{y}_n) + ((\tilde{\lambda}_n - \lambda_n), \tilde{y}_n) \\ &= (\hat{q}\tilde{y}_n, \tilde{y}_n) - (\lambda_n - \tilde{\lambda}_n, \tilde{y}_n) \\ &= \lambda_n - \tilde{\lambda}_n - (\lambda_n - \tilde{\lambda}_n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $\tilde{y}_n, \tilde{\lambda}_n$ özdeğerine karşılık gelen $\tilde{L}$ operatörünün normalleştirilmiş özfonksiyonu olduğundan, $\tilde{y}_n, (0, 1)$ aralığında en çok sonlu sayıda izole edilmiş sıfır noktalarına sahip olduğu elde edilir. Bu nedenle sıfır noktalarının kümesinin ölçüsü 0 'dır. Dolayısıyla bunu kullanarak, ikinci varsayım ve $(\hat{q} + \tilde{\lambda}_n - \lambda_n)\tilde{y}_n^2 \in L_1(0, 1)$, $(0, 1)$ üzerinde h.h.y $\hat{q} = \lambda_n - \tilde{\lambda}_n$ elde edilir.

3.2 Dirichlet Sınır Değer Problemi için Ters Problem

Şimdi (3.1), (3.2) ve Teorem 3.1.1'i dikkate alarak aşağıdaki örnekleri ele alalım.

3.2.1 Örnek (3.1) ve (3.2) sınır değer problemini göz önüne alalım.

$\tilde{q}(x) \equiv 0$ olsun. Bu durumda $\tilde{\lambda}_0 = 1, \tilde{y}_0(x) = \sin x$ göz önünde bulundurarak diferansiyel ifadede yerine yazılırsa

$$-\tilde{y}_0''(x) + (\lambda_0 - \tilde{\lambda}_0)\tilde{y}_0(x) = \lambda_0\tilde{y}_0(x),$$

eşitliği (3.1) ile Teorem 3.1.1'den $q(x) = \tilde{q}(x) + \lambda_0 - \tilde{\lambda}_0$ yazılarak elde edilir. Buradan $-\tilde{y}_0''(x) = \tilde{\lambda}_0 \tilde{y}_0(x)$ iddiası sağlanır.

3.2.1 Sonuç Eğer

$$\lambda_0 = 1 + 2 \int_0^1 q(x) \sin^2 x \, dx$$

ise, bu takdirde $(0, 1)$ aralığında h.h.y $q(x) = \lambda_0 - 1$ dir (Yurko 2013).

3.2.2 Örnek (3.1) diferansiyel ifadesi (3.2) Dirichlet sınır değer problemini ele alalım.

$\tilde{q}(x) \equiv 0$ olsun. Bu takdirde $\tilde{\lambda}_n = (n\pi)^2$, $\tilde{y}_n = \sqrt{2} \sin n\pi x$ bazı $n \geq 1$ için ve Teorem 3.1.3 aşağıdaki iddia anlamına gelir.

3.2.2 Sonuç Bazı n 'ler için

$$\lambda_n - (n\pi)^2 = 2 \int_0^1 q(x) \sin^2 n\pi x \, dx$$

ve $\lambda_n - (n\pi)^2 = \text{ess inf } q$ veya $\lambda_n - (n\pi)^2 = \text{ess sup } q$ olsun. Bu takdirde $(0, 1)$ aralığında h.h.y $q(x) = \lambda_n - (n\pi)^2$ dir (Kıraç 2019).

3.3 Quasi-Periyodik Sınır Değer Problemi için Ters Problem

Kıraç (2016a), q potansiyeli üzerine herhangi bir koşul koymadan $q \in L_1[0, 1]$ ve (3.3) sınır koşulları, $t \in [0, 2\pi)$ ile $L_t(q)$ Sturm-Liouville operatörü için klasik Ambarzumyan teoremini ispatladı.

(3.1) ifadesi ile $L^2(-\infty, \infty)$ uzayında üretilen $L(q)$ Hill operatörünün $S(L(q))$ spektrumu ile q periyodik potansiyeli $t \in [0, 2\pi)$ için $L_t(q)$ operatörlerinin $S(L_t(q))$ spektrumlarının birleşimi olduğundan, $L_t(q)$ operatörleri $L(q)$ operatörünün spektral teorisinde temel bir rol oynar (Kıraç 2016a).

Şimdi teorem ve ispatı için kullanacağımız önemli birkaç bilgi verelim.

$L_t(q)$ 'nin normalleştirilmiş özfonksiyonu $y_{n,t}(x)$ 'e karşılık gelen $\lambda_n(t)$

özdeğerlerinde asimptotik formülünü elde etmek için, önce

$$-y''_{n,t}(x) + q(x)y_{n,t}(x) = \lambda_n(t)y_{n,t}(x)$$

denkleminin her iki tarafını $e^{i(2\pi n+t)x}$ ile çarpalım,

$$(-y''_{n,t}(x) + q(x)y_{n,t}(x), e^{i(2\pi n+t)x}) = (\lambda_n(t)y_{n,t}(x), e^{i(2\pi n+t)x})$$

$L_2[0, 1]$ deki iç çarpım tanımından

$$\int_0^1 -y''_{n,t}(x)e^{-i(2\pi n+t)x} dx + (q(x)y_{n,t}(x), e^{i(2\pi n+t)x}) = (\lambda_n(t)y_{n,t}(x), e^{i(2\pi n+t)x}) \quad (3.8)$$

(3.8) eşitliğinin sol kısmında bulunan integralde kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\int_0^1 -y''_{n,t}(x)e^{-i(2\pi n+t)x} dx = -y''_{n,t}(x)e^{-i(2\pi n+t)x} \Big|_0^1 - i(2n\pi + t) \int_0^1 y'_{n,t}(x)e^{-i(2\pi n+t)x} dx$$

olur. Bu eşitlikte sağ taraftaki ilk terim 0'dır. Eşitliğin sağındaki ikinci terim için tekrar kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 -y''_{n,t}(x)e^{-i(2\pi n+t)x} dx \\ &= -i(2n\pi + t) \left[y_{n,t}e^{-i(2\pi n+t)x} \Big|_0^1 - i(2n\pi + t) \int_0^1 y_{n,t}(x)e^{-i(2\pi n+t)x} dx \right] \end{aligned}$$

olur. Bu eşitliğin sağındaki ilk terim 0 ikinci terim (3.8) eşitliğinde yerine koyulursa,

$$(q(x)y_{n,t}(x), e^{i(2\pi n+t)x}) = (\lambda_{n,t} - (2n\pi + t)^2)(y_{n,t}(x), e^{i(2\pi n+t)x}) \quad (3.9)$$

elde edilir. Şimdi yukarıdaki asimptotik formülü elde edebilmek için gerekli olan lemma ve teoremi verelim.

3.3.1 Lemma (3.9)'un sağ tarafı için,

$$(q(x)y_{n,t}(x), e^{i(2\pi n+t)x}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} q_{-m}(y_{n,t}(x), e^{i(2\pi(n+m)+t)x}) \quad (3.10)$$

eşitliği sağlanır. Üstelik, $|N| \gg 1$ için

$$|(q(x)y_{n,t}(x), e^{i(2\pi n+t)x})| < 2M, \quad \forall n \quad (3.11)$$

burada $M = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |q_n|$ (Veliev ve Duman 2002).

Şimdi (3.9) ve (3.10) formülleri aşağıdaki gibidir. Bu formüllerde N 'nin yerine n alınarak ve (3.10)'ın sağ tarafı ile (3.9)'un sağ tarafı yer değiştirilerek

$$(\lambda_n(t) - (2n\pi + t)^2)(y_{n,t}(x), e^{i(2\pi n+t)x}) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} q_{n_1}(y_{n,t}(x), e^{i(2\pi(n-n_1)+t)x}) \quad (3.12)$$

elde edilir. Burada

$$R_1 = \sum_{n_1} \frac{q_{n_1}(q(x)y_{n,t}(x), e^{i(2\pi(n-n_1)+t)x})}{\lambda_n(t) - (2n\pi + t)^2}.$$

3.3.1 Teorem $t \neq 0, \pi$ için $L_t(q)$ operatörünün $y_{n,t}(x)$ özfonksiyonu

$$y_{n,t}(x) = e^{i(2\pi n+t)x} + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (3.13)$$

asimptotik formülünü sağlar. Karşılık gelen $\lambda_n(t)$ özdeğeri

$$\lambda_n(t) = (2n\pi + t)^2 + q_0 + O\left(\frac{\ln |n|}{n}\right) \quad (3.14)$$

asimptotik formülü sağlanır, burada $n \in \mathbb{Z}$ için $q_n = (q, e^{i2\pi nx})$ ve $(.,.)$, $L_2[0, 1]$ 'de iç çarpımdır (Veliev ve Duman 2002).

İspat $t \neq 0, \pi$ için (3.13) ve (3.14) formüllerini ispatlamak için, (3.9), (3.11) ve Veliev-Duman'ın (2002) makalesindeki eşitsizlikten (bkz (10))

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} |(y_{n,t}(x), e^{i(2\pi(n+k)+t)x})|^2 &< \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} \frac{(2M)^2}{k^2 |2(2\pi n + t) - 2\pi k|^2} \\ &= O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} (y_{n,t}(x), e^{i(2\pi(n+k)+t)x}) e^{i(2\pi(n+k)+t)x} \right\| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Böylece $y_{n,t}(x)$

$$y_{n,t}(x) = (y_{n,t}(x), e^{i(2\pi n+t)x}) e^{i(2\pi n+t)x} + h(x) \quad (3.15)$$

formunun bir açılımına sahiptir, burada

$$\|h(x)\| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Üstelik, (3.15) ile birlikte $\|e^{-itx}y_{n,t}(x)\| = 1$,

$$|(y_{n,t}(x), e^{i(2\pi n+t)x})| = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (3.16)$$

verir. Böylece (3.15) ve (3.16)'den (3.13) sağlanır.

Şimdi (3.14)'i ispatlayalım. Veliev-Duman'ın (2002) makalesindeki eşitsizlik (bkz (10)), tüm $n \in \mathbb{Z}$ için $|q_n| \leq M$ eşitsizliği ve (3.11) kullanılarak

$$R_1 = O\left(\frac{\ln |n|}{n}\right) \quad (3.17)$$

olur.

Şimdi (3.12) eşitliğinin her iki tarafını $(y_{n,t}(x), e^{i(2\pi n+t)x})$ ile bölerek ve (3.16)-(3.17) kullanılarak

$$\begin{aligned} \lambda_n(t) &= (2\pi n + t)^2 + q_0 + \frac{R_1}{(y_{n,t}(x), e^{i(2\pi n+t)x})} \\ &= (2\pi n + t)^2 + q_0 + \frac{O\left(\frac{\ln |n|}{n}\right)}{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &= (2\pi n + t)^2 + q_0 + O\left(\frac{\ln |n|}{n}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (3.14) asimptotik formülü ispatı tamamlanır.

$q = 0$ olduğunda, $n \in \mathbb{Z}$ için $(2\pi n + t)^2$, $e^{i(2\pi n+t)x}$ özfonksiyonuna karşılık gelen herhangi sabit $t \in [0, 2\pi)$ aralığı için $L_t(0)$ operatörünün özdeğeridir.

3.3.2 Teorem Eğer $[0, 2\pi)$ aralığında herhangi bir sabit t için $L_t(q)$ operatörünün ilk özdeğeri $\min\{t^2, (2\pi - t)^2\}$ değerinin alt kümesi ve $S(L_t(q))$ spektrumu $\{(2n\pi - t)^2 : n \in \mathbb{N}\}$ kümesini içerirse, bu takdirde h.h.y $q = 0$ dır (Kıraç 2016a).

İspat Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için varsayım kullanarak $(2\pi n - t)^2$, $S(L_t(q))$ spektrumuna ait ve yeterince büyük n 'ler için $t \neq 0, \pi$ olduğundan asimptotik formülü, Cheng ve diğerleri (2010) makalesinde $t = 0, \pi$ için asimptotik formülünü dikkate alarak

$$q_0 = \int_0^1 q(x) dx = 0 \quad (3.18)$$

elde edilir. Burada Cheng ve diğerlerinin (2010) çalışmasındaki asimptotik formüller aşağıdadır.

$m = 2n$ veya $2n - 1$ için

$$\begin{aligned} \lambda_m &= (2n\pi)^2 + 2 \int_0^1 q(x) dx + 2(-1)^m [A_{4n}^2 + B_{4n}^2]^{1/2} + o(n^{-1}) \\ \hat{\lambda}_m &= (2n - 1)^2 \pi^2 + 2 \int_0^1 q(x) dx + 2(-1)^m [A_{4n-2}^2 + B_{4n-2}^2]^{1/2} + o(n^{-1}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

A_n ve B_n , q 'nin Fourier katsayılarıdır, yani

$$A_n = \frac{1}{2} \int_0^1 \cos n\pi t q(t) dt, \quad B_n = \frac{1}{2} \int_0^1 \sin n\pi t q(t) dt$$

dir.

Şimdi $t \in [0, 2\pi)$ için $L_t(q)$ operatörünün ilk özdeğerini t^2 ya da $(2\pi - t)^2$ olduğunu gösterelim ki bu özdeğerler sırasıyla $y = e^{itx}$ veya $y = e^{i(-2\pi+t)x}$ özfonksiyonlarına karşılık gelir. İlk olarak kabul edelim ki $\min\{t^2, (2\pi - t)^2\}$ 'nin değeri t^2 olsun, Rayleigh-Ritz bağıntısına göre (3.18)'dan $y = e^{itx}$ için

$$t^2 \leq \lambda_0(t) \leq \frac{(-y'' + q(x)y, y)}{(y, y)}$$

eşitsizliğinde $L_2[0, 1]$ 'deki iç çarpım tanımından

$$\frac{\int_0^1 -y'' \bar{y} dx + \int_0^1 q(x) |y|^2 dx}{\int_0^1 y \bar{y} dx} = t^2 + q_0 = t^2$$

olur. Dolayısıyla $L_t(q)$ operatörünün ilk özdeğeri $\lambda_0(t) = t^2$ ve $y = e^{itx}$ test fonksiyonu operatörün özfonksiyonudur. Böylece (3.1) denklemini içine $y = e^{itx}$ ve $\lambda_0(t) = t^2$ ifadelerini yerleştirerek $L_1[0, 1]$ 'de $q = 0$ elde edilir. Benzer şekilde

$\min\{t^2, (2\pi - t)^2\}$ 'nin değeri $(2\pi - t)^2$ ise, o halde $y = e^{i(-2\pi+t)x}$ fonksiyonu ilk özdeğer $(2\pi - t)^2$ 'ye karşılık gelen özfonksiyondur ve $L_1[0, 1]$ 'de $q = 0$ 'dır.

3.3.1 Uyarı Dikkat edilirse Teorem 3.3.2'de $S(L_t(q))$ spektrumunun $\{(2n\pi - t)^2 : n \in \mathbb{N}\}$ alt kümesi yerine eğer $\{(2n\pi + t)^2 : n \in \mathbb{N}\}$, $\{m^2 : m, \text{ tüm } n \in \mathbb{N} \text{ için ya } (2n\pi - t) \text{ ya da } (2n\pi + t)\}$ alt kümelerinin biri kullanılır ise, bu takdirde teoremin iddiası geçerlidir.

3.4 Periyodik ve Anti-Periyodik Sınır Değer Problemi için Ters Problem

(3.3) quasi-periyodik sınır koşulunda $t = 0$ ve $t = \pi$ durumları sırasıyla (3.4) ve (3.5) problemlerine karşılık gelir.

Yurko (2013)'de self-adjoint diferansiyel operatörlerin zayıf sınıfları üzerinde Teorem 1.1.5'in genelleştirmelerini kanıtladı. Bu sonuçların bazıları aşağıdaki gibidir:

3.4.1 Teorem (a)

$$\lambda_0 = \int_0^1 q(x) dx$$

(3.1)-(3.4) periyodik sınır değer probleminin ilk özdeğeri olsun, bu takdirde h.h.y $q = \lambda_0$ 'dır.

(b) Bazı sabit α ve β için

$$\lambda_0 = \pi^2 + \frac{2}{\alpha^2 + \beta^2} \int_0^1 q(x)(\alpha \sin \pi x + \beta \cos \pi x)^2 dx \quad (3.20)$$

(3.1) ve (3.5) anti-periyodik sınır değer probleminin ilk özdeğeri olsun, bu takdirde h.h.y

$$q = \frac{2}{\alpha^2 + \beta^2} \int_0^1 q(x)(\alpha \sin \pi x + \beta \cos \pi x)^2 dx. \quad (3.21)$$

Kıraç (2018)'de aşağıdaki yeni tek tür sonuçları kanıtladı:

3.4.2 Teorem $\lambda_0(t)$, $L_t(q)$ 'nin ilk özdeğeri olsun. O halde:

a) $t \in [0, \pi)$ için $\lambda_0(t) \geq t^2 + \int_0^1 q(x) dx$ ise, bu takdirde h.h.y $q = \int_0^1 q(x) dx$ 'dir.

b) $t \in [\pi, 2\pi)$ için $\lambda_0(t) \geq (2\pi - t)^2 + \int_0^1 q(x) dx$ ise, bu takdirde h.h.y $q = \int_0^1 q(x) dx$ 'dir.

Teorem 3.4.2 (a)'da $t = 0$ durumu (3.1) ve (3.4) periyodik problemine karşılık gelir ve Teorem 3.4.1 (a)'nın iddiası $\lambda_0(0) = \int_0^1 q(x) dx$ 'in yerine $\lambda_0(0) \geq \int_0^1 q(x) dx$ kullanılarak sağlanır. Teorem 3.4.2 (b)'de $t = \pi$ durumu (3.1)-(3.5) anti-periyodik problemine karşılık gelir ve Teorem 3.4.2 (b)'nin iddiasında t 'nin yerine π alınarak $\lambda_0(\pi) \geq \pi^2 + \int_0^1 q(x) dx$ sağlanır. Yani, Teorem 3.4.1 (b)'nin aksine, Teorem 3.4.2 (b)'de ilk özdeğer Teorem 1.1.5 ve Teorem 3.4.1 (a)'daki gibi sadece potansiyelin ortalama değerine bağlıdır.

İspat

a) $y = e^{itx}$, $t \in [0, \pi)$ için $L_t(q)$ operatörünün $\lambda_0(t)$ ilk özdeğerine karşılık gelen ilk özfonksiyon olduğunu gösterelim. $y = e^{itx}$ test fonksiyonunun (3.3) quasi-periyodik sınır koşullarını sağladığından Rayleigh-Ritz bağıntısı ile

$$t^2 + \int_0^1 q(x) dx \leq \lambda_0(t) \leq \frac{\int_0^1 -y''\bar{y} dx + \int_0^1 q(x)|y|^2 dx}{\int_0^1 |y|^2 dx} = t^2 + \int_0^1 q(x) dx \quad (3.22)$$

elde edilir.

$\lambda_0(t) = (t^2 + \int_0^1 q(x) dx)$, $y = e^{itx}$ ilk özfonksiyonuna karşılık gelen ilk özdeğerdir. (3.1) denkleminde yerine yazılırsa h.h.y $q = \int_0^1 q(x) dx$ 'dir.

b) Benzer şekilde, $t \in [\pi, 2\pi)$ için, $y = e^{i(-2\pi+t)x}$ test fonksiyonu, $\lambda_0(t) = (2\pi - t)^2 + \int_0^1 q(x) dx$ ilk özdeğerine karşılık gelen ilk özfonksiyondur. Böylece h.h.y $q = \int_0^1 q(x) dx$ 'dir.

3.4.3 Teorem $\lambda_0(t)$, $L_t(q)$ 'nin ilk özdeğeri olsun ve n_0 yeterince büyük bir tamsayı olduğunu kabul edelim. O halde aşağıdaki iki iddia sağlanır:

a) $t \in [0, \pi)$ ve $n > n_0$ için $\lambda_0(t) \geq t^2$ ve $\lambda_n = (2n\pi + t)^2$ ise bu takdirde h.h.y $q = 0$ 'dır.

b) $t \in [\pi, 2\pi)$ ve $n > n_0$ için $\lambda_0(t) \geq (2\pi - t)^2$ ve $\lambda_n = (2n\pi + t)^2$ ise bu takdirde h.h.y $q = 0$ 'dır.

İspat Teorem 3.4.1’de $t \neq 0, \pi$ için (3.14) ve $t = 0, \pi$ için (3.19) asimptotik formülleri benzerdir. Böylece tüm $t \in [0, \pi) \cup [\pi, 2\pi)$ için, $n > n_0$ için $\lambda_n(t) = (2\pi n + t)^2$ ise, bu takdirde $\int_0^1 q(x) dx = 0$ ’dır. Teorem 3.4.2’den h.h.y $q = 0$ ’dır. Böylece Teorem 3.4.3 (a) ve (b)’nin ispatı tamamlanır.

3.4.1 Uyarı Dikkat edilirse Teorem 3.4.3 (a) ve (b)’de $\lambda_n(t) = (2n\pi + t)^2$ ’nin yerine $S(L_t(q))$ spektrumunun büyük $\lambda_{-n}(t) = (2n\pi - t)^2$ özdeğerleri ise, bu takdirde Teorem 3.4.3’ün iddiaları geçerlidir. Böylece tüm $|n| > n_0$ için teoremin kanıtında, $\lambda_n(t), \lambda_{-n}(t)$ özdeğerlerinin aynı kümesi için yeterlidir.

3.4.4 Teorem

a) $\lambda_0 \geq \int_0^1 q(x) dx$ ise, bu takdirde h.h.y $q = \int_0^1 q(x) dx$.

b) $n > n_0$ için $\lambda_0 \geq 0$ ve $\lambda_n = (n\pi)^2$ ise, bu takdirde h.h.y $q = 0$ ’dır, burada n_0 yeterince büyük pozitif bir tamsayıdır.

İspat

a) Teorem 3.4.2 (a)’nın ispatında olduğu gibi $\lambda_0 \geq \int_0^1 q(x) dx$ için, $y = 1$ test fonksiyonu, $\lambda_0 = \int_0^1 q(x) dx$ ilk özdeğerine karşılık gelen ilk özfonksiyondur. Böylece h.h.y $q = \int_0^1 q(x) dx$ ’dir.

b) Levitan ve Gasymov (1964)’un çalışmasındaki, (3.6) asimptotik formülünden $n > n_0$ için $\lambda_n = (n\pi)^2$ ise, bu takdirde kesinlikle $\int_0^1 q(x) dx = 0$ ’dır. (a)’dan h.h.y $q = 0$ ’dır.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, spektrumu verilen keyfi self-adjoint sınır koşulları ve Sturm-Liouville operatörü için potansiyel fonksiyon belirlendiği gösterilmiştir.

5. KAYNAKLAR

- Ambarzumian, V., "Über eine Frage der Eigenwerttheorie", *Zeitschrift für Physik* 53, 690-695, (1929).
- Ashrafyan, Y., "A Remark on Ambarzumian's Theorem", *Results Math* 73:36, 34-36, (2018).
- Borg, G., "Eine umkehrung der Sturm-Liouvilleschen eigenwertaufgabe bestimmung der differentialgleichung durch die eigenwerte", *Acta Math.* 78, 1-96, (1946).
- Cheng, Y.H., Wang, T. E. ve Wu, J.W., "A note on eigenvalue asymptotics for Hill's equation ", *Applied Mathematics Letters* 23, 1013-1015, (2010).
- Chern, H.H., Law, C. K. ve Wang, H.J., "Extension of Ambarzumyan's theorem to general boundary conditions ", *J. Math. Anal. Appl.* 263, 333-342, (2001).
- Eastham M.S.P., "The Spectral Theory of Periodic Differential Operators ", *Scottish Academic Press*, Edinburgh, (1973).
- Freiling, G. ve Yurko, V. A., "Inverse Sturm-Liouville Problems and Their Applications", *NOVA Science Publishers*, New York, (2001).
- Hochstadt, H., "Estimates on the stability intervals for the Hill's equation", *Proc. Amer. Math. Soc.* 14, 930-932, (1963).
- Hochstadt, H., "On the determination of a Hill's equation from its spectrum", *Arch. Ration.Mech. Anal.* 19, 353-362, (1965).
- Kıraç, A. A., "Ambarzumyan's theorem for the quasi-periodic boundary conditions", *Anal. Math. Phys.* 6 (3), 297-300, (2016).
- Kıraç, A. A., "Inverse problems associated with the Hill operator", *Electron. J. Diff. Equ.* 2016 (41), 1-12, (2016).
- Kıraç, A. A., "Some Improvements of Ambarzumyan's Theorem", *Advances in Analysis* 3 (3), 121-123, (2018).
- Kıraç, A. A., "An Extension of The First Eigen-type Ambarzumyan theorem", arXiv:1902.03859v1, (2019).
- Kıraç, A. A., "An Extension of The First Eigen-type Ambarzumyan theorem", *Methods of Functional Analysis and Topology* 26, 2, 167-168 (2020).
- Kolmogorov, A. N. ve Fomin, S. V., "Introductory Real Analysis", *Revised English Edition Translated and Edited by Richard A. Silverman, DOVER PUBLICATIONS, INC.*, New York, (1975).

- Levitan, B. M. ve Sargsian I.S., "Introduction to spectral theory", *Transl. Math. Monogr. 39, AMS, Providence, RI*, (1975).
- Levitan, B. M. ve Gasymov, M.G., "Determination of a differential equation by two of its spectra", *Usp. Mat. Nauk* 19, 3–63, (1964).
- Marchenko, V. A., "Sturm–Liouville operators and applications.", *Oper. Theory Adv. Appl., Vol. 22, , Birkhauser*, (1986).
- Naimark, M. A., "Linear Differential Operators", *Vol. I, George G. Harrap and Company, Ltd. , London*, (1967).
- Pöschel, J. ve Trubowitz, E., "Inverse Spectral Theory", *Academic Press*, Boston, (1987).
- Reed, M. ve Simon, B., "Methods of Modern Mathematical Physics, IV: Analysis of operators", *Academic Press*, London, (1978).
- Veliev, O.A. ve Duman, M., "The spectral expansion for a nonself-adjoint Hill operator with a locally integrable potential", *J. Math. Anal. Appl.* 265, 76-90, (2002).
- Veliev, O. A., "Asymptotic analysis of non-self-adjoint Hill operators", *Central European Journal of Mathematics* , 11 (12), 2234-2256, (2013).
ılmazılmazılmaz
- Yılmaz, F., "Bazı Self Adjoint Sturm-Liouville Operatörler için Ters Problemler", Yüksek Lisans Tezi *Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Denizli, (2021).
- Yurko, V. A., "On Ambarzumyan type-theorems", *Applied Mathematics Letters* 26, 506-509, (2013).

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : MEHMET TİVER
Doğum Yeri ve Tarihi : DENİZLİ 07.09.1993
Lisans Üniversite : ÇANKIRI KARATEKİN ÜNİVERSİTESİ
İletişim Adresi : mehmettiver@icloud.com