

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ELEKTROMANYETİK ALANLARIN GRAVİTASYONA
MİNİMAL OLMAYAN BAĞLANMASININ NOETHER
SİMETRİSİ YAKLAŞIMIYLA ÇÖZÜMLERİ**

DOKTORA TEZİ

FATMA ÇELİKTAŞ

DENİZLİ, HAZİRAN-2022

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



**ELEKTROMANYETİK ALANLARIN GRAVİTASYONA MİNİMAL
OLMAYAN BAĞLANMASININ NOETHER SİMETRİSİ
YAKLAŞIMIYLA ÇÖZÜMLERİ**

DOKTORA TEZİ

FATMA ÇELİKTAŞ

DENİZLİ, HAZİRAN-2022

Bu tez çalışması Pamukkale Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü tarafından 2018FEBE001 nolu proje ile desteklenmiştir.

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

FATMA ÇELİKTAŞ

ÖZET

**ELEKTROMANYETİK ALANLARIN GRAVİTASYONA
MINİMAL OLMAYAN BAĞLANMASININ NOETHER
SİMETRİSİ YAKLAŞIMIYLA ÇÖZÜMLERİ
DOKTORA TEZİ
FATMA ÇELİKTAŞ
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. ÖZCAN SERT
DENİZLİ, HAZİRAN-2022**

Bu tezde elektromanyetik alanın uzay-zaman geometrisine etkileri araştırılmıştır. Burada, özellikle gravitasyonel ve elektromanyetik alanların çok yoğun olması durumunda ortaya çıkan minimal olmayan bağlanma terimleri üzerinde çalışılmıştır. Nötron yıldızları ve kuasarlar gibi çok büyük kütleli nesnelere çok şiddetli manyetik alanlar gözlemlendiği için, bu nesnelere etrafındaki geometri ve bunun evrende oluşturacağı etkiler oldukça önemli olabilir. Dahası, Einstein'ın gravitasyon teorisi güneş sistemini mükemmel bir şekilde açıklasa da, kozmolojik ölçeklerde karanlık madde ve karanlık enerji gibi kaynağı açıklanamayan çok önemli sorunlara sahiptir. Son yıllarda, bu sorunları açıklamak için Einstein'ın teorisi, eğrilik tensörünün farklı kombinasyonlarıyla modifiye edilerek bu kavramların kaynağının geometrik olduğu ileri sürülmüştür. Bu nedenle elektromanyetik alan varlığında da bu şekilde minimal ve minimal olmayan alternatif modeller gündeme gelmiştir. Burada minimal olmayan $Y(R)F^2$ formunda bağlanmalı modellerin Noether simetrisi yaklaşımıyla çözümleri araştırılmıştır. Bu modellerin simetrisi ve korunan nicelikler ortaya çıkartılarak bu modellere yeni çözümler bulunmuştur. Ayrıca, bu modellerin anizotropik yıldızlara uygulaması yapılmış ve yıldızın kütlesi, elektrik yükü ve kırmızıya kayma gibi fiziksel özelliklerinin yarıçapa bağlı ifadeleri elde edilmiştir. Son olarak bu tarz bağlanmaların ilk akla gelen örneklerini içeren bazı modellerin FLRW, Schwarzschild ve Reissner-Nördstrom geometrisi arkaplanında kararlılık analizi çalışılmıştır.

ANAHTAR KELİMELELER: Einstein-Maxwell teorisi, Küresel simetrik çözümler, Diferansiyel formlar.

ABSTRACT

SOLUTIONS OF THE NON-MINIMALLY COUPLED ELECTROMAGNETIC FIELDS TO GRAVITY VIA NOETHER SYMMETRY APPROACH

PhD THESIS

FATMA ÇELİKTAŞ

PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE

MATHEMATICS

(SUPERVISOR: PROF. DR. ÖZCAN SERT)

DENİZLİ, JUNE-2022

In this thesis, the effects of the electromagnetic field on the space-time geometry were investigated. Here, the non-minimal coupling terms, which arise especially when the gravitational and electromagnetic fields are very dense, have been studied. Since very strong magnetic fields are observed in very massive objects such as neutron stars and quasars, the geometry around these objects and its effects on the universe can be very important. Moreover, although Einstein's theory of gravity explains the solar system perfectly, it has very important problems that cannot be explained on cosmological scales, such as dark matter and dark energy. In recent years, Einstein's theory has been modified with different combinations of the curvature tensor to explain these problems, and it has been suggested that the origin of these concepts is geometric. Therefore, minimal and non-minimal alternative models have come to the fore in the presence of electromagnetic field. Here solutions of the non-minimally $Y(R)F^2$ type coupled models were investigated by Noether symmetry approach. By revealing the symmetries and conserved quantities of these models, new solutions have been found to these models. Furthermore, these models were applied to the anisotropic stars and the radius-dependent expressions of the physical properties of the star such as mass, electric charge and redshift were obtained. Then, stability analysis of some models containing the first examples of this type of coupling was studied on the background of FLRW, Schwarzschild and Reissner-Nördstrom geometry.

KEYWORDS: Einstein-Maxwell theory, Spherically symmetric solutions, Differential forms.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
SEMBOL LİSTESİ	v
ÖNSÖZ	vi
ŞEKİL LİSTESİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. EINSTEIN'IN GRAVİTASYON TEORİSİ	10
2.1 Einstein-Maxwell Teorisi	17
3. ELEKTROMANYETİK ALANLARIN GRAVİTASYONA MİNİMAL OLMAYAN BAĞLANMASI	18
3.1 $Y(R)F^2$ Modelinin Alan Denklemlerinin Bulunması	18
3.2 Noether Teoremi	26
4. NOETHER TEOREMİNİN MİNİMAL OLMAYAN GRAVİTASYON MODELİNE UYGULANMASI	29
4.1 Noether Teoreminin $Y(R)F^2$ Modeline Uygulanması	29
4.2 Euler-Lagrange Denklemleri	34
4.3 Bazı Yeni Çözümler	36
4.4 Çözümlerin Bazı Termodinamik Özellikleri	37
5. MİNİMAL OLMAYAN $Y(R)F^2$ GRAVİTASYONUNDA ANİZOTROPİK YILDIZLAR	44
5.1 Küresel Simetrik, Statik, Anizotropik Çözümler	45
5.2 Konformal Simetri	47
5.3 Süreklilik ve Sınır Koşulları	49
6. RF^2 TÜRÜ BAĞLANMA TERİMLERİ İÇİN KARARLILIK ANALİZİ	52
6.1 Kozmolojik FLRW Metriği Arkaplanında Kararlılık Analizi	53

6.2 Schwarzschild Arkaplanında Kararlılık Analizi	56
7. SONUÇ VE ÖNERİLER	60
5. KAYNAKLAR	61
ÖZGEÇMİŞ	67

SEMBOL LİSTESİ

M	:	Manifold
g	:	Metrik tensör
$\{x^\mu\}$:	Koordinat Fonksiyonları
$T(M)$:	Tanjant demeti
$T^*(M)$:	Kotanjant demeti
η_{ab}	:	Minkowski metriği
$\{e^a\}$:	Ortonormal Kobazları
$\{X_b\}$:	Ortonormal Bazları
\wedge	:	Dış çarpım operatörü
\lrcorner	:	iç çarpım operatörü
d	:	Dış türev işlemi
$*$:	Hodge Star işlemi
$\Lambda^p(M)$:	p-formları uzayı
Λ^a_b	:	Bağlantı 1-formları
D	:	Kovaryant Dış Türev
T^a	:	Burulma 2-formları
ω^a_b	:	Levi-Civita Bağlantı 1-formları
K^a_b	:	Koburulma 1-formları
Q^a_b	:	Metrik Gradyan Tensörü (Nonmetricity)
R^a_b	:	Eğrilik 2-formları
R^a	:	Ricci Eğrilik 1-formları
R	:	Ricci Eğrilik skaları
L	:	Lagrange 4-formu
\mathcal{L}	:	Lagrange Fonksiyonu
δ	:	Sonsuz küçük varyasyon

ÖNSÖZ

Çalışma sürecinde her türlü yol gösterici olan, bilgi birikimiyle çalışmama farklı açılardan bakmamı sağlayan, çalışmanın yürütülmesi sırasında desteğini esirgemeyen danışmanım sayın Prof. Dr. Özcan SERT'e sonsuz teşekkür ederim.

Ayrıca bu çalışmayı yaparken olumlu tavrıyla ve yansıttığı enerjisi ile beni cesaretlendiren, çalışmamda tüm bilgi ve birikimini benimle paylaşan hocaların hocası sayın Prof. Dr. Muzaffer ADAK'a teşekkürü bir borç bilirim.

Son olarak tüm hayatım boyunca benim yanımda olan, aldığım kararları her zaman destekleyen, sadece bu çalışma sürecinde değil tüm hayatım boyunca beni cesaretlendiren ve moral veren annem Sezenur ÇELİKTAŞ'a, kardeşim Merve ÇELİKTAŞ'a ve şuan fiziken yanımda olmasada her zaman ruhen yanımda hissettiğim babam Kadir ÇELİKTAŞ'a sonsuz şükranlarımı sunar ve teşekkür ederim.

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 4.1: Hawking sıcaklığının olay ufku göre grafiği, $q = 0,4$ alınmıştır, kesikli çizgi Reissner-Nordström durumu ve düz çizgi minimal olmayan modeldir.	42
Şekil 4.2: Isı kapasitesinin olay ufku yarıçapına göre grafiği, $q = 0,4$ alınmıştır, kesikli çizgi Reissner-Nordström durumuna and düz çizgi minimal olmayan durumuna karşılık gelir.	43

1. GİRİŞ

Evrende şiddetine göre sırasıyla güçlü nükleer kuvvet, elektromanyetik kuvvet, zayıf nükleer kuvvet ve kütleçekim kuvveti olmak üzere dört temel kuvvet vardır. Bu temel kuvvetler, temel parçacıkların etkileşiminin nasıl olacağını ifade eder. Bundan dolayı kuvvet yerine daha çok etkileşim ifadesi kullanılır. Bunlardan ilki olan güçlü nükleer etkileşim, atomun çekirdeğinde bulunan protonların aynı elektrik yüküne sahip olmasına karşın, nasıl birbirlerine oldukça yakın bir şekilde durabildiklerini açıklayabilir. En güçlü etkileşim olmasına rağmen etki mesafesi $10^{-15}m$ kadar küçüktür. Elektromanyetik etkileşim ise elektrik yüklü parçacıklar arasında meydana gelen etkileşimdir. Benzer şekilde elektrik yüklü bir parçacık elektrik veya manyetik alandan geçerken de bu etkileşimi hisseder. Bu etkileşimi ilk olarak fizikçi Charles-Augustin de Coulomb elektrik yüklü cisimlerin birbirine uyguladığı kuvvet ile ifade etmiştir. 1785 yılında bu kuvvet hakkında yazdığı rapor ile bu kuvvet Coulomb yasası olarak kayıtlara girmiştir. Coulomb yasası, iki noktasal yük arasındaki elektriksel kuvvetin bu yüklerin büyüklüğünün çarpımıyla doğru orantılı, aralarındaki mesafenin karesiyle ters orantılı olduğunu ortaya çıkarmıştır. Daha sonra, 1820 yılında bilim insanları Jean-Baptiste Biot ve Felix Savart elektrik akımı taşıyan bir tel etrafında dairesel manyetik alan halkalarının oluştuğunu ve akım ile manyetik alan arasındaki bağıntının nasıl olacağını ortaya koymuşlardır. 1831 yılında Faraday elektrik ve manyetik alanın birbirinden tamamen bağımsız olmadığını, manyetik alandaki değişimin elektrik alana yol açtığını deneysel olarak gösterdi. 1860'lı yıllara gelindiğinde James Clerk Maxwell elektrik ve manyetik alanın sağladığı bu denklemleri, Maxwell Denklemleri olarak da bilinen dört temel denklem olarak ifade edip yayınlamıştır.

Bir diğer etkileşim olan zayıf nükleer etkileşim, atomların radyoaktif bozunmalarını başarılı bir şekilde açıklayabilmektedir. Zayıf nükleer etkileşim güçlü nükleer etkileşimde olduğu gibi çok küçük ölçeklerde, yani atom altı ölçeklerde etkilidir.

Son etkileşim olarak kütleçekim; şiddet olarak diğer kuvvetlere göre çok zayıf

olsada etkisi günlük hayatta her an hissedilebilir. Bununla birlikte gezegenlerin, yıldızların, galaksilerin ve kara deliklerin hareketini belirleyen önemli bir etkileşimdir. Temel parçacıkların keşfedilmesinden gravitasyonel dalgaların ölçülmesine, gezegenlerin hareketinin anlaşılmasından kara deliklerin gözlemlenmesine kadar akıllarda hep şu soru vardı: Kütleçekim nedir? Hala bu soruya tam olarak yanıt bulunmuş değildir. Kütleçekim, kütlesi olan herşeyin birbirine doğru hareket ettiği veya birbirine doğru çekildiği şeklinde tanımlanabilir. Ayrıca Einstein'ın Kütleçekimi teorisi kabul gördükten sonra sadece kütlesi olan nesnelere için değil, enerji ve momentuma sahip bütün nesnelere kütleçekimden etkilendiği anlaşılmıştır. Fakat yine de anlaşılması hala oldukça zor ve karışıktır.

Kütleçekim her ne kadar Newton tarafından kuvvet olarak tanımlansa da, gerçekte; kütleli bir cismin etrafında oluşturduğu uzayzaman geometrisinde başka bir test parçacığının kendi yörüngesini takip etmesi olarak karşımıza çıkmaktadır. Böylece kütleçekim kuvvetinin yerini uzayzaman geometrisi alır. Kütle, uzayzaman geometrisini belirler. Bu geometriden dolayı kütleçekim etkisi meydana gelir.

Kütleçekimin tarihi diğer etkileşimlere göre çok eskilere dayanmaktadır. M.Ö. 4.yüzyılda yaşamış olan Aristoteles kütlesi büyük olan nesnelere daha hızlı, kütlesi küçük olan nesnelere ise daha yavaş düştüğünü söylemiştir. Fakat, 16.yüzyılda Galileo Galilei farklı kütleli cisimlerin yere aynı ivme ile düştüğünü ortaya koyarak bu varsayımı çürütmüştür. Hatta son yıllarda yapılan çalışmalar Galileo'nin kütleçekim deneyini atomlar için bile gerçekleştirebilmişlerdir (Asenbaum ve diğ. 2020).

Daha sonra Isaac Newton 1687 yılında iki kütle arasındaki bu çekimi $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ ile verilen ters kare yasasıyla ifade etmiştir. Burada F kuvvet, m_1, m_2 cisimlerin kütleleri, G evrensel kütleçekim oranı sabiti, r ise cisimlerin kütle merkezleri arasındaki uzaklıktır. Bu yasa, her nesnenin uzaklıklarının kareleri ile ters orantılı ve kütlelerinin çarpımıyla doğru orantılı olan bir kuvvet ile diğer bütün nesnelere çekebileceğini söyler. Newton'un bu teorisi sadece dünya ölçeğinde değil galaksiler arası etkileşimlerin kabaca hesabında bile kullanılabilen etkili bir yöntemdir.

Yüzyıllardır gökbilimciler, gezegenlerin hareketlerini hesaplamada Newton teorisini kullanarak büyük bir başarı elde etmişlerdir. Newton teorisinin bu başarısı basitliğinde gizlidir. Newton teorisinde zaman mutlak bir kavram olarak düşünülür. Yani; gözlemciden gözlemciye değişmez, bütün gözlemcilerin ortak bir zamanı ölçtüğü düşünülür. Newton teorisi oldukça kullanışlı olmasına karşın, 1900 lü yılların başlarında ortaya çıkan bir takım sorunları açıklamakta yetersiz kalmıştır. Bu olayları aşağıdaki gibi sıralayabiliriz:

- Einstein'ın 1905 yılında yayınladığı özel görelilik kuramına göre hiç bir bilgi ışık hızından daha hızlı iletilemez. Fakat Newton'un kütleçekim teorisine baktığımızda, cisimlerden birinin konumunda bir değişiklik yapıldığında sonsuz bir hızla diğerini etkilemesi gerektiği yani özel göreliliğe aykırı bir şekilde ışık hızından daha hızlı bir şekilde kuvvet etkisinin hissedildiği görülür. Çünkü Newton'un çekim yasasında zaman kavramı yoktur. Işık hızının boşlukta sabit olduğu, 1887 yılında Albert A. Michelson ve Edward W. Morley tarafından yapılan deneylerin öncülüğünde defalarca ölçümlerden sonra gözlemlenmişti. Bu gözlem Maxwell denklemleriyle uyum içindeydi. Ayrıca, 1905 yılında yayınlanan Einstein'ın Özel Görelilik teorisinin temel postülasıydı. Bunun sonucu olarak Özel Görelilik teorisinde Lorentz simetrisi ortaya çıkarmıştır ve bu Lorentz simetrisi Maxwell denklemlerine başarıyla uygulanmıştır. Fakat; Lorentz dönüşümlerinin Newton denklemine uygulanamaması en büyük sorunlardan biriydi.
- Merkür gezegenindeki Newton teorisinin öngördüğü eliptik yörüngelerden sapmalar yaparak, perihelion presesyonu denilen hareketi yapmasının sebebini tam olarak açıklayamaz.
- Yıldız, dünya gibi çok büyük kütleli cisimlerden uzaklaşan bir ışığın veya fotonun kırmızıya kayması gerçeğini tam olarak açıklayamaz.
- Yine yıldız gibi büyük kütleli cisimlerin etrafından geçen foton demetinin yıldız doğru çekilerek eğrilmiş bir yol izlemesini doğru bir şekilde açıklayamaz.

Bu nedenle bu olayları da açıklayabilecek yeni kütleçekim (gravitasyon) teorisi arayışları ortaya çıkmıştır. Einstein'ın 1915 yılında yayınlanan kütleçekim teorisi bu sorunları ortadan kaldırmıştır. Bu teori Genel Relativite (GR) veya Genel Görelilik olarak bilinir. Genel Görelilik teorisine göre kütleçekim veya gravitasyon, maddenin bulunduğu ortamda ve zamanda yani uzayzamanda oluşturduğu bükülmeden kaynaklanır. Kütleçekim artık bir kuvvet değil uzayzaman eğriliğinin sonucu olarak karşımıza çıkar. Einstein'ın bu teorisi;

- Güneş gibi büyük kütleli cisimlerin yakınından geçen bir ışık demetinin bu kütlelerden etkilenip, kütlelere doğru çekilmiş bir yol izleyeceğini tam olarak açıklayabildi. Bu gözlem 1919 yılında güneş tutulması sırasında Arthur Eddington tarafından yapıldı.
- Evrenin sabit kalamayacağını ve sürekli genişleyeceğini açıklayabiliyordu. Bu gözlem 1929 yılında E. Hubble tarafından yapıldı (Hubble 1929).
- Bir yıldız veya gezegenin çekiminden uzaklaşan bir ışığın kırmızı renge doğru kayması başka bir ifadeyle enerjisinin azalması gerektiğini öngörüyordu. Bu gerçek 1959 yılında, yeryüzündeki bir laboratuvardan gönderilen gamma ışınlarıyla gözlemlendi (Pound ve Rebka 1959).
- Güneşin kütleçekimi nedeniyle Dünya'dan Venüs gezegenine gönderilen bir radar sinyalinin, gidiş ve dönüş süreleri arasında bir gecikme olmasını öngörüyordu. Yine bu durumun gözlemi yapıldı (Shapiro ve diğ. 1971).
- Akıllı telefonlar gökyüzündeki uyduların GPS mekanizmasını kullanır. Einstein'ın Kütleçekim teorisine göre, bu uydulardaki saatler yerdeki saatlere göre daha hızlı çalışır. Yani kütleçekimin daha fazla olduğu konumda, zaman daha yavaş akar. İşte bu yüzden akıllı telefonlarda Kütleçekim teorisinin öngördüğü düzeltmeler her an sürekli yapılarak dünya yüzeyi ile uydu arasında konum ve zamandaki sapmalar ortadan kaldırılmaktadır.

- Kütleçekim (gravitasyon) dalgalarının varlığı yine teorinin önemli öngörülerinden biriydi. İvmelenen elektrik yüklerinin elektromanyetik dalga yayması gibi, ivmelenen kütleler de uzayda gravitasyonel dalgalara yol açar. Fakat bu dalgaların enerjisi, gözlemlenmesi çok zor olacak kadar k c kt r. Yaklaşık 1,3 milyar yıl önce güneşin kütlesinin 60 katı kütleye sahip iki karadeliğin çarpışmasıyla oluşan gravitasyonel dalgaların bugüne kadar süren yolculukları 2016 yılında dünyadaki laboratuvar ortamından geçerken bıraktığı izlerle Abbott ve diğ. (2016a,b)  alışmalarıyla açıklığı kavuşmuştur.
- Uzay-zamanda kara delik denilen çok büyük kütleli ve çok k c k hacime sahip, içindeki kütleçekimden ışığın bile kurtulamayacağı cisimlerin varlığını öngörüyordu. Kara deliklerin doğrudan gözlemi 2019 yılında Event Horizon teleskobu tarafından gözlemlenmiştir .

Kütleçekim hakkında bilinen tüm düşünceler Albert Einstein ile birlikte değişmiştir. Einstein'ın bu teorisi, evren hakkındaki düşüncelerimizi tamamen değiştirmiş ve gravitasyonel etkileşimlerle bağlantılı diğer olaylar hakkında bize bilgi veren bir gravitasyon teorisi olmuştur. Genel Görelilik, Newton teorisinin aksine kütleçekimin bir geometri etkisi olduğunu, yani gezegen ve galaksiler gibi daha büyük yapıdaki yıldızların uzayı b kmesiyle meydana gelen eğrilik sonucu cisimlerin birbirine doğru çekildiklerini söyler. Bu olay doğrudan enerji miktarı ve madde ile ilgilidir. Matematiksel olarak bu ilişki Einstein alan denklemleri ile gösterilir. uzayzamanın gravitasyonel davranışını belirleyen bu alan denklemleri bir eylem (action) ilkesinden varyasyon hesabıyla türetilir. Bu eylem fonksiyoneli Einstein tarafından R Ricci eğrilik skalarıyla orantılı olarak önerilmiştir. Buradan elde edilen alan denklemlerinin yukarıdaki saydığımız Newton teorisinin problemlerini daha hassas bir şekilde açıkladığı g r lm ştir. Einstein Alan Denklemlerinin ilk tam  z m  1916 yılında Karl Schwarzschild tarafından yapılmıştır. Ayrıca zaman kavramı artık genel görelilikte mutlak bir kavram değildir. Zaman kütleçekim alanındaki konuma bağlıdır ve birlikte uzayzaman kavramını oluştururlar. Einstein'ın

bu teorisi Newton'un açıklayamadığı durumları açıklamış ve ilerleyen yıllarda yapılan deneylerde doğrulanmıştır. Dahası iki kara deliğin birleşmesiyle oluşan ve 11 Şubat 2016 da gözlemlenen gravitasyonel dalga Genel Göreliliğin bir tahminiydi. Ayrıca kara deliklerin varlığı genel görelilik ile tahmin edilmişti.

Einstein teorisi pek çok gözlemle başarılı olsa bile kozmoloji, astrofizik ve kuantum alan teorisi gibi konularda bazı problemlere sahiptir. Bu problemlerin başında Hubble teleskobunun gözlemediği evrenin ivmeli bir şekilde genişlemesi durumu gelmektedir (Albrecht ve Steinhardt 1982, Guth 1981, Linde 1982, Starobinsky 1980). Einstein Genel Görelilik Teorisi bu genişlemeyi, evrenin başlangıcından itibaren açıklayabilen bir teori değildir. Bu nedenle karanlık enerji (dark energy) kavramı ortaya atılarak Amanullah ve diğ. (2010), Knop ve diğ. (2003), Perlmutter ve diğ. (1999), Riess ve diğ. (1998), Schwarz ve diğ. (2016), Weinberg ve diğ. (2013), bu gözlemi açıklamaya çalışan çok çeşitli teoriler ortaya atılmıştır.

Yine astrofiziksel olarak büyük ölçeklerde veya galaksiler ölçeğinde ortaya çıkan Einstein'ın teorisinin açıklayamadığı bir diğer kavram ise karanlık madde (dark matter) kavramıdır (Baer ve diğ. (2015), Overduin ve Wesson (2004)). Karanlık madde kavramı şöyle açıklanabilir: Galaksilerin parlaklıkları yani gözlemlenebilen madde miktarı merkezden uzaklaştıkça azalmaktadır. Öyleyse galaksilerin yörüngesel dönme hızları merkezinden uzaklaştıkça azalmalıdır. Fakat gözlemler bu dönme hızlarının azalmadığını bunun yerine neredeyse sabit kaldığını ortaya çıkarmıştır. Bu durumu açıklamak için ise galaksilere dağılmış, ne olduğu bilinmeyen fazladan maddenin (karanlık maddenin) varlığına ihtiyaç duyulmaktadır. Bu problemler o kadar önemlidir ki, gözlemler evrenin sadece %4 ünün bildiğimiz atomları içeren maddeden oluştuğunu geriye kalan kısmının %76 sının karanlık enerji ve %20 lik kısmının karanlık maddeye karşılık gelmesi gerektiğini söylemektedir.

Diğer taraftan kuantum alan teorisi ve Genel Relativite Teorisini birleştirmenin yani; $10^{-35}m$ büyüklüğündeki Planck ölçeğinde (limitinde) Gravitasyon Teorisinin ne olacağı sorusunun cevabı merak edilmektedir (Brill ve Wesson 1970). Örneğin;

Büyük Patlama (Big Bang) teorilerinde evrenin Planck ölçeğinden daha küçük bir duruma çökmesi söz konusu olabilir. Bundan sonraki aşamada ne olur sorusunun cevabı merak uyandırmaktadır. Diğer bir örnek olarak Gravitasyonel çökme durumu düşünülebilir. Örneğin bir yıldızın gravitasyonel olarak çöküp kara deliğe dönüşmesi olayı, maddesel parçacıkların birbirine çok yakın olmasına yol açarak bizi Planck ölçeğindeki durumu anlamaya zorlar. Yine kuantum alan teorisinin büyük ölçeklerdeki limiti gravitasyonla uyum içinde olmalıdır (Sotiriou 2007). Bu sorulara cevap bulmak için yeni gravitasyon teorisi arayışları sürmektedir.

Güneş sistemi ölçeği ile birlikte, galaksiler ölçeğinde başarılı bir kütleçekim teorisi bulmak için alan denklemlerinin madde kısmına karanlık madde parçacığı gibi yeni kozmik alanlar veya parçacıklar eklemek yerine, gravitasyon kısmını değiştirme düşüncesi en iyi alternatif yollardan biridir. Bu nedenle, bu problemlerde gravitasyonel alan denklemlerindeki gravitasyon kısmını değiştirerek çözüm aranabilir. İlk modifiye gravitasyon teorisi önerisini gravitasyonel alan denklemlerine Λ sabiti ekleyerek, Einstein ortaya atmıştır. Her ne kadar o zaman için evrenin statik olduğu düşünülse ve statik kozmolojik çözümler bulmak için bu sabit kullanılsa da bugün bu sabit evrenin ivmelenerek genişlemesini açıklamak için kullanılan en etkili yöntemlerden biridir. Dahası Einstein, gravitasyon teorisinin elektromanyetik teoriyi de kapsayacak şekilde çalışmalar vardı. Günümüze kadar Einstein'ın teorisini modifiye etmek için pek çok teori önerildi. Bu teorilerden son yıllarda en çok çalışılan biri ise $f(R)$ teorisidir. Bu teori sadece R Ricci eğrilik skalarından oluşan Einstein teorisinin, $f(R)$ yani Ricci skalarının herhangi bir fonksiyoneli olacak şekilde genelleştirilmesinden oluşur (Allemandi ve diğ. 2004, Capozziello 2002, Capozziello ve diğ. 2003b, Capozziello ve diğ. 2004, Capozziello ve diğ. 2006, Capozziello ve diğ. 2007a, Capozziello ve diğ. 2003a, Carroll ve diğ. 2004, Cognola ve diğ. 2005, Kerner 1982, Nojiri ve Odintsov 2003, Nojiri ve Odintsov 2004, Starobinsky 1980). Bunu yaparken güneş sistemi ölçeğinde Einstein teorisinin başarılarını kaybetmeyen ve analitik olan bir $f(R)$ fonksiyoneli bulunmalıdır. Bu nedenle genel bir $f(R)$ fonksiyoneliyle başlayıp bu

teorinin çözümlerini araştırmak önemlidir.

$f(R)$ gravitasyon teorisinin fiziksel çözümlerini araştırmanın yollarından birisi uzay-zaman metriğinin simetrilerini kullanmaktır. Bu simetriler arasında, uzay-zaman metriğinin Noether simetrisini kullanmak ilginç ve güncel yaklaşımlarından birisidir (Capozziello ve Lambiase 2000, Capozziello ve diğ. 2007b, Capozziello ve Ritis 1993, Capozziello ve diğ. 1996). Yani metriğin simetrisi olarak Noether Simetrisi kullanılır ve bu simetriye uygun $f(R)$ gravitasyon teorisi aranır. Metrik uyumlu $f(R)$ gravitasyon teorisi için kozmolojik çözümler Noether simetrisi kullanılarak Capozziello ve De Felice (2008), Vakili (2008) makalelerinde incelenmiştir. Yine metrik uyumlu olmayan teoriler, yani Palatini yaklaşımı kullanılarak düşünölen $f(R)$ teorilerinin Noether simetrisinin varlığında kozmolojik çözümleri ise Roshan ve Shojai (2008) çalışmasında bulunabilir. $f(R)$ gravitasyon teorisinin Noether simetrisinin varlığında küresel simetrik çözümleri ise Capozziello ve diğ. (2007c) çalışmasında verilmiştir.

Son yıllardaki karanlık madde Baer ve diğ. (2015), Overduin ve Wesson (2004) ve karanlık enerji Amanullah ve diğ. (2010), Knop ve diğ. (2003), Perlmutter ve diğ. (1999), Riess ve diğ. (1998), Schwarz ve diğ. (2016), Weinberg ve diğ. (2013) problemi ile ilgili yapılan bu astrofiziksel gözlemler Einstein'ın Kütleçekim teorisinin büyük ölçeklerde modifiye edilmesi gerektiğini göstermektedir. Bu nedenle elektromanyetik alanların varlığında kullanılan Einstein-Maxwell teorisinin de bu gözlemleri açıklayabilmesi için modifiye edilmesi gerekir (Adak ve diğ. 2017, Bamba ve diğ. 2008, Bamba ve Odintsov 2008, Baykal ve Dereli 2015, Campanelli ve diğ. 2008, Dereli ve Sert 2011a, Dereli ve Sert 2011b, Drummond ve Hathrell 1980, Mazzitelli ve Spedalieri 1995, Sert 2012, Sert 2013, Sert 2016, Sert 2017, Sert ve Adak 2019, Turner ve Shojai 1988). Özellikle nötron yıldızları ve quark yıldızları gibi çok fazla enerji yoğunluğuna, basınca ve elektromanyetik alanlara sahip olağanüstü astrofiziksel durumları açıklayabilmek için gravitasyonel ve elektromanyetik alanların $Y(R)F^2$ -formunda çiftlenimli olduğu yeni etkileşim türleri önerilebilir. Bu olağanüstü koşullar ortadan kalktığıında bu teori minimal Einstein-Maxwell teoriye dönüşür.

Bu tez çalışmasında $Y(R)F^2$ -formunda çiftlenimli gravitasyon modelinin çözümlerini, genel bir çözüm bulma tekniği olan Noether simetrisi yaklaşımıyla bulmaya çalışacağız. Bu çözümlerin gözlemlerle tutarlı olup olmadığına bakacağız. Bu çözümlerin matematiksel ve fiziksel sonuçlarını inceleyeceğiz.

2. EINSTEIN'IN GRAVİTASYON TEORİSİ

Genel görelilik teorisi geometrik bir teoridir. Bu nedenle Genel Görelilik teorisini anlamak için diferansiyel geometrik kavramlara ihtiyaç duyulur. Bu tezde gravitasyonel modeller diferansiyel geometrik kavramların dış cebiri kullanılarak diferansiyel formlar aracılığıyla incelenecektir. Kullandığımız notasyon ve tanımların daha detaylı açıklamaları Dereli (1984), Flanders (1963), Thring (1997), Dereli ve diğ. (1995), Dereli ve diğ. (1996), Adak ve Sert (2005), Adak ve diğ. (2006), Trautman (1972), Cartan (1923), Sert (2005) çalışmalarında bulunabilir. Bu dış cebir işlemlerini bir M manifoldu üzerinde yapıyoruz. Burada M manifoldu, bir dizi harita tarafından koordinatlara dönüştürülen ve koordinatlarla ifade edilebilen, üzerinde dönüşümlerin, vektörlerin, tensörlerin tanımlanmasına imkan sağlayan topolojik bir uzaydır.

Daha teknik olarak, eğer bir topolojik uzay kümesi, elemanı olan her bir nokta etrafında, lokal olarak n -boyutlu kartezyen uzay olan \mathbb{R}^n gibi görünüyorsa bu sürekli uzay kümesi bir manifold yapısı kazanır. Başka bir ifadeyle boyutu n olan bir manifoldun her bir noktası n -boyutlu bir \mathbb{R}^n uzayına homomorfik olan bir komşuluğa sahiptir. Buradaki homomorfizm ise bir topolojik uzaydan başka bir topolojik uzaya sürekli ve tersi olan bir gönderimdir. Bir boyutta doğru ve daire manifold yapısı oluşturur. Fakat, birbirini kesen çizgiler bire-bir gönderim oluşturmadığı için manifold değildir. İki boyutta ise düzlem, küre, torus gibi şekiller manifold örnekleridir. Ayrıca, herhangi sayıda bağımsız değişkenlerle sürekli bir şekilde parametrize edilebilen noktalar kümesi de manifold yapısı oluşturur. Örneğin, Klasik Mekanikte bir parçacığın faz uzayı üç konum ve üç momentumdan oluşan 6 boyutlu bir manifold yapısı oluşturur. Buradaki gönderime harita veya koordinat sistemi denir. Ayrıca, uzayzamandaki noktaları koordinatlar yardımıyla tanımlayabiliriz. Bu tezde 4-boyutlu bir uzayzaman manifoldu düşüneceğiz.

M manifoldu üzerindeki bir m noktası etrafında bir U açık komşuluk kümesi düşünelim. Bu m noktasını, oluşturulan bu haritada koordinat fonksiyonlarını $\{x^\mu\}$

ile ifade edebiliriz. Bu U açığı \mathbb{R}^n in bir alt kümesi olan V açığına gönderen bire-bir ve üzerine bir $f(x^\mu)$ gönderimi bulabiliriz. Yine bu m noktasını başka bir $\{y^\mu\}$ koordinat fonksiyonlarını kullanarak ifade edebiliriz. Burada $\{y^\mu\}$ den $\{x^\mu\}$ ye bire-bir ve tersi olan bir dönüşüm bulabiliriz. Benzer şekilde $f(y^\mu)$ den $f(x^\mu)$ ye bire-bir ve tersi olan bir dönüşüm bulabilirsek bu topolojik uzay bir manifold yapısı kazanır. Bu manifold üzerindeki bir p noktasından geçen eğrilerin teğetinin oluşturduğu uzaya $T_p(M)$ tanjant uzayı denir ve bu uzayın baz vektörleri $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$ ile gösterilir. Bu tanjant uzayının duali de $\{dx^\mu\}$ baz ko-vektörlerinden oluşan $T_p^*(M)$ ile gösterilen kotanjant uzayı olarak isimlendirilir. Dahası $\{X_a\}$ ile ifade edilen ortanormal bazları tanjant uzayındaki baz vektör alanlarını ortonormal yapacak şekilde $X_a = h_a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ ile tanımlanır. Benzer düşünceyle e^a ile gösterilen ortanormal kobazları veya ko-çerçeveleri de dual uzayda baz ko-vektör alanlarını ortonormal yapacak şekilde $e^a = h^a_\mu dx^\mu$ olarak tanımlanır. Ayrıca e^a lar, ortanormal 1-formlar olarak da isimlendirilmektedir.

Uzayzamandaki X_a, X_b gibi iki ortanormal baz vektörünün iç çarpımı

$$g(X_a, X_b) = \eta_{ab}, \quad a, b, \dots = 0, 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

Minkowski düz uzayzaman metriğini verir ve bu Minkowski metriği

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

ile verilen $K(-1,1,1,1)$ köşegen elemanlarına sahip olan bir matristir. Böylece bu çarpım $(0, 2)$ tipi simetrik g ile gösterilen bir metrik tensöre karşılık gelir. M manifoldu üzerindeki bir (p, q) tipi tensör

$$\underbrace{T^*(M) \times \dots T^*(M)}_{p \text{ kez}} \times \underbrace{T(M) \times \dots T(M)}_{q \text{ kez}} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.3)$$

ile verilir. Burada \times tensörel çarpımı gösterir. A bir p form olmak üzere $A \in \Lambda^p(M)$ yani p formları uzayının bir elemanı olan bu tensör

$$A = \frac{1}{p!} A_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \quad (2.4)$$

olarak dx^μ 1-formlar ve $A_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}$ bileşenler cinsinden ifade edilebilir. Dış cebirde tanımlanan dış türev

$$d : \Lambda^p(M) \longrightarrow \Lambda^{p+1}(M) \quad (2.5)$$

bir p -formu $p + 1$ -forma götürür. Benzer şekilde iç çarpım operatörü de

$$\iota : \Lambda^p(M) \longrightarrow \Lambda^{p-1}(M) \quad (2.6)$$

p -formu $p - 1$ -forma haritalar.

Yine diferansiyel form notasyonunda hodge star operatörü

$$* : \Lambda^p(M) \longrightarrow \Lambda^{4-p}(M) \quad (2.7)$$

p -formu $4 - p$ forma yansıtan bir işlem olarak tanımlanır.

$$*1 = e^{0123} \quad (2.8)$$

ise yönlendirilmiş hacim elemanıdır. Dış cebirdeki bu işlemler aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. $\iota_a f = 0$
2. $\iota_a e^b = \delta_a^b$
3. $\iota_a \iota_b = -\iota_b \iota_a$
4. $e^a \wedge \iota_a A = pA$
5. $\iota_a (A \wedge B) = \iota_a A \wedge B + (-1)^p A \wedge \iota_a B$
6. $d(A + B) = dA + dB$

$$7. d(dA) = 0$$

$$8. dA \wedge B = dA \wedge B + (-1)^p A \wedge dB$$

$$9. A \wedge *B = B \wedge *A$$

$$10. \iota_a *A = *(A \wedge e_a)$$

Burada A bir p -form, B ise bir q -formdur. Genel Göreliliğin çıkış noktasını oluşturan önemli bir nicelik olan Levi-Civita Bağlantısı ω^a_b , tensörlerin paralel taşınmasında kullanılır ve metrik tensörden türetilir. Uzayzamanın düz olduğu kartezyen koordinatlarda bu bağlantı bileşenleri sıfır olmaktadır. Fakat, eğrisel koordinatlarda bağlantı sıfırdan farklı olmaktadır. Bir tensörün dış türevinin Lorentz dönüşümü altında invariant olmadığı ortaya çıkmıştır. Burada bağlantı terimleri Levi-Civita bağlantısından daha fazlası olarak metrikle ilişkili olmayan bileşenlere sahip olabilir. Bu tam bağlantı 1-formunu Λ^a_b ile gösterelim. Lorentz dönüşümü altında invariant kalacak şekilde türev işlemi olan kovaryant dış türev işlemi bir (p, q) tipi tensör için, dış türevine ilave bağlantı terimleri eklenerek

$$\begin{aligned} DB_{a_1 \dots a_p}{}^{b_1 \dots b_q} &= dB_{a_1 \dots a_p}{}^{b_1 \dots b_q} + \Lambda^{b_1}{}_c \wedge B_{a_1 \dots a_p}{}^{cb_2 \dots b_q} + \dots \\ &\quad - \Lambda^c{}_{a_1} \wedge B_{ca_2 \dots a_p}{}^{b_1 \dots b_q} - \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

şeklinde tanımlanır. Burada tam bağlantı 1-formun Lorentz dönüşümü

$$\Lambda^a{}_b = L^a{}_k \Lambda^k{}_m L^{-1m}{}_b + L^a{}_k dL^{-1k}{}_b \quad (2.10)$$

olarak tanımlanırsa yukarıdaki kovaryant dış türevin Lorentz dönüşümü tensörel bir yapıya sahip olur. Bu ilave terimler düz kartezyen koordinatlarda sıfırken eğrisel koordinatlarda sıfırdan farklı olur. Bu Λ_{ab} bağlantısını Γ_{abc} ile gösterilen üç bileşenli bağlantı temsilleriyle de ifade edebiliriz.

$$\Lambda_{ab} = \Gamma_{abc} e^c \quad (2.11)$$

Λ_{ab} bağlantısının simetrik kısmı Metrik Gradyant veya Nonmetricity tensörü olarak bilinir ve

$$Q_{ab} = \frac{1}{2}(\Lambda_{ab} + \Lambda_{ba}) = -\frac{1}{2}D\eta_{ab} \quad (2.12)$$

ile tanımlanır. Bu tensörün sıfır olması ise bağlantının antisimetrik olmasına yol açar. Yani $\Lambda_{ab} = -\Lambda_{ba}$ veya $\Gamma_{abc} = -\Gamma_{bac}$ ise $Q_{ab} = 0$ olur. Bu durumdaki bağlantıya metrik uyumlu bağlantı denir.

Bir başka geometrik tensör olarak ortonormal ko-çerçeve 1-formlarının kovaryant dış türevine

$$T^a := De^a = de^a + \Lambda^a_b \wedge e^b \quad (2.13)$$

burulma tensörü ya da torsion denir. Burulmanın olmadığı uzay-zamanda $T^a = 0$ olur. Bu ise;

$$de^a + \Lambda^a_b \wedge e^b = de^a + \Gamma^a_{bc} \wedge e^{bc} = 0 \quad (2.14)$$

olduğu anlamına gelir. Bu eşitlikten Λ^a_b bileşenleri çözülebilir. Buna da burulmasız ve nonmetricity içermeyen ω_{ab} Levi-Civita bağlantısı denir.

$$\omega_{ab} = \frac{1}{2}[\iota_b de_a - \iota_a de_b + (\iota_{ab} de_c) e^c] \quad (2.15)$$

Levi-Civita bağlantısına karşılık gelen $\tilde{\Gamma}_{abc}$ bağlantı temsilleri ise yukarıdaki ifade ι_k ile iç çarpım yapılarak

$$\tilde{\Gamma}_{abk} = \frac{1}{2}[\iota_{kb} de_a - \iota_{ka} de_b + (\iota_{ab} de_k)] \quad (2.16)$$

olarak ifade edilir. Şimdi de burulmalı uzayzaman geometrilerinde e^a ortonormal

bazının ikinci kovaryant dış türevine bakalım.

$$\begin{aligned}
D^2 e^a &= D(De^a) = D(T^a) \\
&= dT^a + \Lambda^a_b \wedge T^b \\
&= d(de^a + \Lambda^a_b \wedge e^b) + \Lambda^a_b \wedge (de^b + \Lambda^b_c \wedge e^c) \\
&= d^2 e^a + d\Lambda^a_b \wedge e^b - \Lambda^a_b \wedge de^b + \Lambda^a_b \wedge de^b + \Lambda^a_b \wedge \Lambda^b_c \wedge e^c \\
&= d\Lambda^a_b \wedge e^b + \Lambda^a_c \wedge \Lambda^c_b \wedge e^b \\
&= (d\Lambda^a_b \wedge + \Lambda^a_c \wedge \Lambda^c_b) \wedge e^b \\
&= R^a_b(\Lambda) \wedge e^b \tag{2.17}
\end{aligned}$$

olduğu gösterilebilir. Görüldüğü gibi ortonormal ko-çerçeve 1- formunun iki kere kovaryant dış türevi alındığında uzay-zamanın eğriliğiyle ilişkili

$$R^a_b(\Lambda) = d\Lambda^a_b + \Lambda^a_c \wedge \Lambda^c_b \tag{2.18}$$

eğrilik tensörü 2-formunu elde edilir. (2.17) denkleminin Bianchi özdeşliği denir. Burulmanın sıfırdan farklı olması durumunda buradaki Λ^a_b bağlantısını

$$\Lambda^a_b = \omega^a_b + K^a_b \tag{2.19}$$

olarak yazabiliriz. Burada K^a_b ko-burulma tensörüdür (veya bağlantı 1-formudur) ve $K^a_b \wedge e^b = T^a$ olacak şekilde T^a dan türetilir. Eğer K^a_b ko-burulma bağlantısı sıfır ise Levi-Civita bağlantısından oluşan eğrilik tensörü 2- formu

$$R^a_b(\omega) = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b \tag{2.20}$$

şeklinde tanımlanır. Eğrilik 2-formu R_{ab} ve Burulma 2-formu T^a ortonormal 1-formlar cinsinden

$$R_{ab} = \frac{1}{2} R_{ab,cd} e^{cd} \tag{2.21}$$

$$T^a = \frac{1}{2} T^a_{,bc} e^{bc} \tag{2.22}$$

olarak yazılabilir.

Einstein'in gravitasyon teorisi gravitasyon alanındaki yüksüz bir test parçacığının jeodeziğini belirleyen alan denklemleriyle ifade edilir. Bu alan denklemleri Einstein-Hilbert Lagrangianı olarak bilinen bir Lagrange 4-formunun manifold üzerinden integrali olan bir eylem (action) integralinden varyasyon ilkesiyle türetilebilir.

$$I[e^a, \omega^a_b] = \int_M (L + L_m + \lambda_a \wedge T^a) \quad (2.23)$$

Burada L gravitasyonel Lagrange 4-formunu, L_m ise madde Lagrange 4-formunu ifade eder. T^a burulma tensörü 2-formu, λ_a ise burulmasız uzayzaman geometrisine kısıtlayan bir Lagrange çarpanı 2-formudur. Bu teorinin alan denklemleri varyasyon hesabıyla türetilir. Burada gravitasyonel lagrangian olarak

$$L_{E-H} = \frac{1}{2\kappa^2} R^a_b(\omega) \wedge *(e_a \wedge e^b) = \frac{1}{2\kappa^2} R * 1 \quad (2.24)$$

ile verilen Einstein-Hilbert Lagrange 4-formu olarak alınır. Burada R^a_b eğrilik tensörü, κ^2 gravitasyonel sabit ve R ise eğrilik skalarındır. (2.23) eyleminin varyasyonu alındığında

$$\delta I = \int_M [\delta e^a \wedge (\frac{1}{2\kappa^2} R^b_c(\omega) \wedge *e_{ab}{}^c + \frac{\delta L_m}{\delta e^a}) - \delta \omega^a_b \wedge \frac{1}{2\kappa^2} T^c \wedge *e_a{}^b{}_c + \delta \lambda_a \wedge T^a]$$

elde edilir. Bu eylemin ortonormal referans ko-çerçeve varyasyonu

$$G_a = \kappa^2 \tau_a \quad (2.25)$$

ile ifade edilen Einstein alan denklemlerini verir. Burada

$$G_a = -\frac{1}{2} R^{bc}(\omega) \wedge *e_{abc} \quad \tau_a = \frac{\delta L_m}{\delta e^a} \quad (2.26)$$

dır. Burada τ_a (2.26) ile tanımlanan maddesel kısmın enerji-momentum tensörüdür. Bağlantı varyasyonu ve λ_a varyasyonu ise

$$T^c = 0 \quad (2.27)$$

olduğunu verir.

2.1 Einstein-Maxwell Teorisi

Elektromanyetik alanların varlığı da düşünüldüğünde Einstein gravitasyon teorisi yerine Einstein-Maxwell teorisi kullanılır. Bu teoride L ile verilen önceki Einstein-Hilbert Lagrange 4-formunu şimdi Einstein-Maxwell Lagrange 4-formu ile değiştiririz.

$$L_{E-M} = \frac{1}{2\kappa^2} R_{ab} \wedge *(e^a \wedge e^b) - \frac{1}{2} F \wedge *F + \lambda_a \wedge T^a \quad (2.28)$$

Burada R_{ab} eğrilik tensörü, F elektromanyetik tensör ve λ_a ise $T^a = 0$ burulmasız durumlarını veren Lagrange çarpanıdır. Bu Lagrange 4-formunun varyasyonları alınarak

$$-\frac{1}{2\kappa^2} R^{bc} \wedge *e_{abc} = \frac{1}{2} (\iota_a F \wedge *F - F \wedge \iota_a *F) + \tau_a \quad (2.29)$$

gravitasyonel alan denklemleri ve

$$d(*F) = 0, \quad dF = 0 \quad (2.30)$$

elektromanyetik alan denklemleri bulunur. (2.30) denklemleri boşlukta Maxwell denklemleri olarak bilinir.

3. ELEKTROMANYETİK ALANLARIN GRAVİTASYONA MİNİMAL OLMAYAN BAĞLANMASI

Bilindiği gibi Einstein-Maxwell teorisi minimal bir teoridir. Yani R eğrilik skalaları ile $F \wedge *F$ Maxwell tensörü ayrı terimlerin toplamı olarak Lagrangian da bulunacak şekilde yazılan bir teoridir. Bu teoriyi minimal olmayacak şekilde genişletmenin bir yolu eğrilik tensörü ve Maxwell tensörünün tensörel çarpımından oluşan $Y(R)F \wedge *F$ terimleri teoriye ekleyerek yapılabilir. Bu tür bağlanmalar ilk olarak 1971 yılında Prasanna tarafından ortaya atıldı (Prasanna 1971). Yine bu teori daha sonra 1976 yılında fiziksel bir nicelik olan elektrik yükü ile geometrik bir ifade olan eğrilik tensörü arasında nasıl bir ilişki olduğunu öğrenebilmek ve bununla ilgili daha fazla ipuçları elde edebilmek amacıyla Horndeski tarafından analiz edildi (Horndeski 1976). Bu bağlanma terimlerinin eğri uzayzaman arka planında QED deki etkin foton eyleminin 1-loop vakum-polarizasyonundan elde edilebileceğinin gösterilmesi bu terimleri önemli kılmaktadır (Drummond ve Hathrell 1980).

3.1 $Y(R)F^2$ Modelinin Alan Denklemlerinin Bulunması

Minimal olmayan bağlanmalı bir model olan aşağıdaki $Y(R)F^2$ türü terim içeren eylem integralinin varyasyonunu alarak gravitasyonel ve elektromanyetik alan denklemlerini türetelim.

$$I(e^a, \omega_a^b, A) = \int_M \left(\frac{1}{2\kappa^2} R * 1 - Y(R)F \wedge *F + 2A \wedge J + L_m + \lambda_a \wedge T^a \right) \quad (3.1)$$

Burada L_m madde Lagrange 4-formu, A elektromanyetik potansiyel 1-formu, J elektromanyetik akım 3-formudur. (3.1) ifadesinde integralin içi

$$L = \left(\frac{1}{2\kappa^2} R * 1 - Y(R)F \wedge *F + 2A \wedge J + L_m + \lambda_a \wedge T^a \right) \quad (3.2)$$

modelin lagrangianını ifade eder. (3.2) Lagrange 4-formunun terim terim varyasy-

onunu alalım. İlk olarak $R * 1$ in varsyonu ile başlayalım.

$$\begin{aligned}
\delta(R * 1) &= \delta R * 1 + R\delta * 1 \\
&= \delta(\iota_{ba}R^{ab}) * 1 + R\delta\left(\frac{1}{4!}\epsilon_{abcd}e^{abcd}\right) \\
&= \delta(\iota_b)\iota_a R^{ab} * 1 + \iota_b\delta(\iota_a)R^{ab} * 1 + \iota_{ba}\delta(R^{ab}) * 1 + R\frac{1}{4!}4\epsilon_{abcd}\delta e^a \wedge e^{bcd} \\
&= 2\delta(\iota_b)R^b * 1 + \iota_{ba}\delta(R^{ab}) * 1 + \delta e^a R\frac{1}{3!}\epsilon_{abcd} \wedge e^{bcd} \tag{3.3}
\end{aligned}$$

(3.3) denkleminin ikinci terimi için $\iota_b(\iota_a\delta(R^{ab}) * 1) = 0$ ve $\iota_a(\delta(R^{ab}) * e_b) = 0$ eşitliklerinden faydalanılır.

$$\delta(R * 1) = 2\delta(\iota_b e^c) \wedge \iota_c R^b * 1 - \delta(R^{ab}) * e_{ba} + \delta e^a \wedge R * e_a \tag{3.4}$$

(3.4) denkleminin birinci terimi için $\delta(\iota_b e^c) = \delta(\delta_b^c) = 0$ eşitliğini, ikinci terim için de $R^{ab} = D\omega^{ab}$ ifadesini yerine koyduğumuzda

$$\delta(R * 1) = -2\iota_b\delta e^c \wedge \iota_c R^b * 1 - \delta(D\omega^{ab}) * e_{ba} + \delta e^a \wedge R * e_a \tag{3.5}$$

ifadesi elde edilir. (3.5) denkleminin ilk terimi için $\iota_b(\delta e^c \wedge \iota_c R^b * 1) = 0$ eşitliğinden elde ettiğimiz $\iota_b\delta e^c \wedge \iota_c R^b * 1 = \delta e^c \wedge *R_c$ ifadesi yerine koyulur.

$$\delta(R * 1) = -2\delta e^c \wedge *R_c - D\delta\omega^{ab} \wedge *e_{ba} + \delta e^a \wedge R * e_a. \tag{3.6}$$

Son olarak (3.6) denklemindeki ikinci terim için $mod(d) = D(\delta\omega^{ab} \wedge *e_{ba}) = 0$ eşitliğini de kullanarak $\delta(R * 1)$ elde edilir

$$\delta(R * 1) = -2\delta e^c \wedge *R_c - \delta\omega^{ab} \wedge D(*e_{ba}) + \delta e^a \wedge R * e_a. \tag{3.7}$$

İkinci olarak $Y(R)F \wedge *F$ teriminin varyasyonunu alma işlemi ile devam edelim. Bu varyasyonu alırken $\delta(\alpha \wedge *\beta) = \delta\alpha \wedge *\beta + \delta\beta \wedge *\alpha - \delta e^a \wedge [\iota_a\alpha \wedge *\beta - \alpha \wedge \iota_a * \beta]$

özdeşliğini hatırlayalım. Burada α p-form, β ise 4-p formdur.

$$\begin{aligned}
\delta(Y(R)F \wedge *F) &= \delta(Y(R)F) \wedge *F + \delta F \wedge *(Y(R)F) \\
&\quad - \delta e^a \wedge [\iota_a(Y(R)F)] \wedge *F - Y(R)F \wedge \iota_a *F] \\
&= \delta(Y(R))F \wedge *F + Y(R)\delta F \wedge *F + \delta F \wedge *(Y(R)F) \\
&\quad - \delta e^a \wedge [\iota_a(Y(R)F)] \wedge *F - Y(R)F \wedge \iota_a *F] \\
&= \frac{\delta Y}{\delta R} \delta R F \wedge *F + 2\delta F \wedge *(Y(R)F) \\
&\quad - \delta e^a \wedge [\iota_a(Y(R)F)] \wedge *F - Y(R)F \wedge \iota_a *F] \\
&= Y_R \delta(\iota_{ba} R^{ab})F \wedge *F + 2Y(R)(\delta dA) \wedge *F \\
&\quad - \delta e^a \wedge [\iota_a(Y(R)F)] \wedge *F - Y(R)F \wedge \iota_a *F] \\
&= Y_R \delta(\iota_b) \iota_a R^{ab} F \wedge *F + Y_R \iota_b \delta(\iota_a) R^{ab} F \wedge *F \\
&\quad + Y_R \iota_{ba} \delta(R^{ab})F \wedge *F + 2Y(R)d\delta A \wedge *F \\
&\quad - \delta e^a \wedge [\iota_a(Y(R)F)] \wedge *F - Y(R)F \wedge \iota_a *F] \quad (3.8)
\end{aligned}$$

(3.8) ifadesinde ilk terim için $d(2Y(R)d\delta A \wedge *F) = 0$ denkleminde elde ettiğimiz eşitliği yerine yazalım

$$\begin{aligned}
\delta(Y(R)F \wedge *F) &= 2Y_R \delta(\iota_b) R^b \wedge F \wedge *F + Y_R \iota_{ba} \delta(R^{ab})F \wedge *F \\
&\quad - \delta e^a \wedge [\iota_a(Y(R)F)] \wedge *F - Y(R)F \wedge \iota_a *F] \\
&\quad + \delta A \wedge 2d(Y_R *F) \quad (3.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2Y_R \delta(\iota_b) e^c \wedge \iota_c R^b \wedge F \wedge *F + Y_R \iota_{ba} \delta(R^{ab})F \wedge *F \\
&\quad - \delta e^a \wedge [\iota_a(Y(R)F)] \wedge *F - Y(R)F \wedge \iota_a *F] \\
&\quad + \delta A \wedge 2d(Y_R *F). \quad (3.10)
\end{aligned}$$

(3.10) ifadesindeki birinci terimin yerine $\delta(\iota_b e^c) = \delta(\delta_b^c) = 0$ denkleminde elde ettiğimiz eşitliği; ikinci terimin yerine de $\iota_b(Y_R \iota_a \delta R^{ab} \wedge F \wedge *F) = 0$ ve $D(Y_R \iota_a \delta \omega^{ab} \iota_{ab}(\wedge F \wedge *F)) = 0$ denklemlerinden elde ettiğimiz ifadeyi yerine

yazdığımızda

$$\begin{aligned}
\delta(Y(R)F \wedge *F) &= 2Y_R \iota_b \delta e^c \wedge \iota_c R^b \wedge F \wedge *F - \delta \omega^{ab} \wedge (DY_R \iota_{ab}(F \wedge *F)) \\
&\quad - \delta e^a \wedge [\iota_a(Y(R)F)] \wedge *F - Y(R)F \wedge \iota_a *F \\
&\quad + \delta A \wedge 2d(Y_R *F)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

eşitliği bulunur. Son olarak da (3.11) eşitliğindeki birinci terimin yerine $\iota_b(Y_R \iota_a \delta e^c \wedge \iota_c R^b \wedge F \wedge *F) = 0$ denkleminde elde ettiğimiz eşitliği yazalım.

$$\begin{aligned}
\delta(Y(R)F \wedge *F) &= \delta e^c 2Y_R \iota_c R^b \wedge \iota_b(F \wedge *F) - \delta \omega^{ab} \wedge (DY_R \iota_{ab}(F \wedge *F)) \\
&\quad + \delta A \wedge 2d(Y_R *F) - \delta e^a \wedge [\iota_a(Y(R)F)] \wedge *F \\
&\quad - Y(R)F \wedge \iota_a *F
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Şimdi de $2A \wedge J$ ve $\lambda_a \wedge T^a$ terimlerinin varyasyonlarını alalım

$$\delta(2A \wedge J) = \delta A \wedge 2J \tag{3.13}$$

$$\delta(\lambda_a \wedge T^a) = \delta \lambda_a \wedge T^a + \lambda_a \wedge \delta T^a \tag{3.14}$$

$$= \delta \lambda_a \wedge T^a + \lambda_a \wedge \delta(de^a + \omega^{ab} \wedge e_b) \tag{3.15}$$

$$= \delta \lambda_a \wedge T^a + \delta e^a \wedge D\lambda_a + \delta \omega^{ab} \wedge \lambda_a \wedge e_b. \tag{3.16}$$

Elde ettiğimiz bütün bu terimlerin varyasyonlarını toplayalım.

$$\begin{aligned}
\delta L &= \delta e^a \wedge (-2 *R_a + R *e^a - 2Y_R \iota_a R^b \wedge \iota_b(F \wedge *F) \\
&\quad + \iota_a(Y(R)F)) \wedge *F - Y(R)F \wedge \iota_a *F + D\lambda_a \\
&\quad + \delta \omega^{ab} \wedge (-D *e_{ba} + DY_R \iota_{ab}(F \wedge *F) + \lambda_a \wedge e_b) \\
&\quad + \delta A \wedge (-2d(Y_R *F) + 2J)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

e^a varyasyonunun katsayısı sıfıra eşitlenince

$$\begin{aligned}
-2 *R_a + R *e^a &= 2Y_R \iota_a R^b \wedge \iota_b(F \wedge *F) - \iota_a(Y(R)F) \wedge *F \\
&\quad + Y(R)F \wedge \iota_a *F - D\lambda_a
\end{aligned} \tag{3.18}$$

gravitasyonel alan denklemi elde edilir. Denklem sol tarafının $-\frac{1}{2\kappa^2}R^{bc} \wedge *e_{abc}$ ifadesine eşit olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}R^{bc} \wedge *e_{abc} &= -\frac{1}{4}R^{bc}{}_{,gf}e^{gf} \wedge *e_{abc} \\ &= -\frac{1}{4}R^{bc}{}_{,gf}e^{gf} \wedge \iota_c *e_{ab} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Ayrıca $e_{gf} \wedge \iota_c *e_{ab}$ terimi bir formların yıldızı olarak yazmak mümkündür. Bunu göstermek için aşağıdaki iç çarpım eşitliğini kullanalım.

$$\begin{aligned} \iota_c(e^{gf} \wedge *e_{ab}) &= \delta_c^g e^f \wedge *e_{ab} - \delta_c^f e^g \wedge *e_{ab} + e_{gf} \wedge \iota_c *e_{ab} \\ e_{gf} \wedge \iota_c *e_{ab} &= \iota_c(-\delta_b^g \delta_a^f *1 + \delta_a^g \delta_b^f *1) - \delta_c^g e^f \wedge *e_{ab} + \delta_c^f e^g \wedge *e_{ab} \end{aligned} \quad (3.20)$$

elde edilir. Burada $e^f \wedge *e_{ab} = e^f \wedge \iota_b *e_a$ dir. Bu terimi aşağıdaki iç çarpım işlemi yoluyla sadece bir formlar cinsinden yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \iota_b(e^f \wedge *e_a) &= \delta_b^f \wedge *e_a - e^f \wedge \iota_b *e_a \\ \iota_b \delta_a^f *1 &= \delta_b^f \wedge *e_a - e^f \wedge \iota_b *e_a \\ e^f \wedge \iota_b *e_a &= \delta_b^f \wedge *e_a - \delta_a^f \wedge *e_b \end{aligned} \quad (3.21)$$

Bulduğumuz bu eşitliği (3.27) de yerine koyalım. Böylece $e_{gf} \wedge \iota_c *e_{ab}$ ifadesini 1-formların yıldızı olarak aşağıdaki gibi buluruz.

$$\begin{aligned} e_{gf} \wedge \iota_c *e_{ab} &= -\delta_b^g \delta_a^f *e_c + \delta_a^g \delta_b^f *e_c - \delta_c^g \delta_b^f *e_a + \delta_c^g \delta_a^f *e_b \\ &\quad + \delta_c^f \delta_b^g *e_a - \delta_c^f \delta_a^g *e_b \end{aligned} \quad (3.22)$$

(3.22) eşitliğini (3.19) de yerine yazdığımızda

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}R^{bc} \wedge *e_{abc} &= -\frac{1}{4}(-R^{bc}{}_{,ba} *e_c + R^{bc}{}_{,ab} *e_c - R^{bc}{}_{,cb} *e_a + R^{bc}{}_{,ca} *e_b \\ &\quad + R^{bc}{}_{,bc} *e_a - R^{bc}{}_{,ac} *e_b) \\ &= -\frac{1}{4}(-2R^{bc}{}_{,ba} *e_c + 2R^{bc}{}_{,bc} *e_a + 2R^{bc}{}_{,ca} *e_b) \\ &= -\frac{1}{4}(-4R^{bc}{}_{,ba} *e_c + 2R^{bc}{}_{,bc} *e_a) \\ &= R^{bc}{}_{,ba} *e_c - \frac{1}{2}R^{bc}{}_{,bc} *e_a \\ &= *R_a - \frac{1}{2}R *e_a \end{aligned} \quad (3.23)$$

bu iki ifadenin eşitliğinin ispatını tamamlamış oluruz. Şimdi de $Y_{R^l a} R^b \wedge \iota_b (F \wedge *F)$ terimine göz atalım.

$$\begin{aligned}
Y_{R^l a} R^b \wedge \iota_b (F \wedge *F) &= Y_{R^l a} R^b \wedge \iota_b \left(\frac{1}{2} F_{mn} e^{mn} \wedge * \frac{1}{2} F_{kl} e^{kl} \right) \\
&= Y_{R^l a} R^b \wedge \iota_b \left(\frac{1}{4} F_{mn} F_{kl} e^{mn} \wedge * e^{kl} \right) \\
&= Y_{R^l a} R^b \wedge \iota_b \left(\frac{1}{4} F_{mn} F_{kl} e^{mn} \wedge \iota_l * e^k \right) \quad (3.24)
\end{aligned}$$

$\iota_l (e^{mn} \wedge * e^k) = 0$ ifadesindeki iç çarpım dağıtılsa, buradaki $e^{mn} \wedge \iota_l * e^k$ terimi diğerleri cinsinden aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned}
e^{mn} \wedge \iota_l * e^k &= \delta^{ln} e^m \wedge * e^k - \delta^{ln} e^m \wedge * e^k \\
&= \delta^{ln} \delta^{mk} * 1 - \delta^{lm} \delta^{nk} * 1 \quad (3.25)
\end{aligned}$$

Bunu (3.24) de yerine koyalım.

$$\begin{aligned}
Y_{R^l a} R^b \wedge \iota_b (F \wedge *F) &= \frac{1}{2} Y_{R^l a} R^b \wedge \iota_b F_{mn} F^{mn} * 1 \\
&= \frac{1}{2} Y_{R^l a} R^b \wedge F_{mn} F^{mn} * e_b \\
&= \frac{1}{2} Y_R F_{mn} F^{mn} * R_a \quad (3.26)
\end{aligned}$$

Bir diğer denklem olarak (3.17) denkleminde ω^{ab} varyasyonunun katsayısını sıfıra eşitleyelim.

$$\lambda_a \wedge e_b = D * e_{ba} - DY_{R^l ab} (F \wedge *F) \quad (3.27)$$

Burada $D * e_{ba} = T^c \wedge e_{bac}$ dir. Riemannsal yüzeyde $T^c = 0$ dir. Dolayısıyla (3.27)

$$\lambda_a \wedge e_b = -DY_{R^l ab} (F \wedge *F) \quad (3.28)$$

eşitliğine dönüşür.

$$\Sigma_{ab} = -DY_{R^l ab} (F \wedge *F) \quad (3.29)$$

tanımı yapalım. Bu denklemden λ_a yı çözmek için denklemi antisimetrik hale getirmemiz ve iç çarpım kullanmamız gerekir.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\lambda_a \wedge e_b - \lambda_b \wedge e_a) &= \Sigma_{ab} \\ \lambda_a \wedge e_b - \lambda_b \wedge e_a &= 2\Sigma_{ab} \\ t^b \lambda_a \wedge e_b + \lambda_a t^b e_b - t^b \lambda_b \wedge e_a - \lambda_b t^b e_a &= 2t^b \Sigma_{ab} \\ -2\lambda_a + 4\lambda_a - t^b \lambda_b \wedge e_a - \lambda_a &= 2t^b \Sigma_{ab}\end{aligned}$$

$$\lambda_a = 2t^b \Sigma_{ab} + t^b \lambda_b \wedge e_a \quad (3.30)$$

Bulduğumuz bu λ_a yı iç çarpım t^a ile çarpalım.

$$\begin{aligned}t^a \wedge \lambda_a &= 2t^{ab} \Sigma_{ab} + t^a t^b \lambda_b \wedge e_a - t^b \lambda_b t^a e_a \\ t^b \wedge \lambda_b &= \frac{1}{2} t^{ab} \Sigma_{ab}\end{aligned} \quad (3.31)$$

(3.31) ifadesini (3.30) de yerine yazdığımızda

$$\lambda_a = 2t^b \Sigma_{ab} + \frac{1}{2} t^{bc} \Sigma_{bc} \wedge e_a \quad (3.32)$$

elde edilir. (3.32) ifadesinin kovaryant türevini alalım.

$$\begin{aligned}D\lambda_a &= -2Dt^b DY_{Rl_{ab}}(F \wedge *F) - \frac{1}{2} D(t^{bc} DY_{Rl_{bc}}(F \wedge *F)) \wedge e_a \\ &= -2Dt^b DY_{Rl_{ab}}(F \wedge *F) - \frac{1}{2} D(t^{bc} D(\frac{1}{2} Y_R F_{mn} F^{mn} * e_{bc})) \\ &= -2Dt^b DY_{Rl_{ab}}(F \wedge *F) - \frac{1}{2} D(t^{bc} (D(\frac{Y_R}{2} F_{mn} F^{mn}) * e_{bc} \\ &\quad + \frac{Y_R}{2} F_{mn} F^{mn} D * e_{bc}))\end{aligned} \quad (3.33)$$

Burada $D * e_{bc} = T^k \wedge e_{kbc}$ dir. Riemann geometrisinde $T^k = 0$ olduğundan $D * e_{bc} = 0$ dır. Diğer taraftan $D(\frac{Y_R}{2} F_{mn} F^{mn})$ 1-form olduğundan iki kez iç çarpım yapıldığında $D(t^{bc} D(\frac{1}{2} Y_R F_{mn} F^{mn})) = 0$ olur. Dolayısıyla (3.33) ifadesi

$$\begin{aligned}D\lambda_a &= -2Dt^b DY_{Rl_{ab}}(F \wedge *F) \\ &= -2Dt^b D \frac{Y_R}{2} l_{ab} F_{mn} F^{mn} * 1 \\ &= -Dt^b D(Y_R F_{mn} F^{mn}) \wedge * e_{ab}\end{aligned} \quad (3.34)$$

olarak elde edilir.

Böylece bu $D\lambda_a$ yı gravitasyonel alan denkleminde yerine yazarak

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2\kappa^2}R^{bc} \wedge *e_{abc} &= \frac{1}{2}Y(\iota_a F \wedge *F - F \wedge \iota_a *F) \\
&+ \frac{1}{2}Y_R F_{mn} F^{mn} *R_a \\
&+ \frac{1}{2}D[\iota^b D(Y_R F_{mn} F^{mn})] \wedge *e_{ab}, \quad (3.35)
\end{aligned}$$

ile verilen modelin Lagrangian 4-formundan elde edilen gravitasyon alan denklemleri bulunmuş olur. Ayrıca elektromanyetik alan denklemleri ise

$$d(*YF) = 0, \quad dF = 0 \quad (3.36)$$

ile verilmişti. Bu denklemler belirli bir metrik ve elektromanyetik alan düşünülerek hesaplandığında oldukça karışık ve non-lineerdir terimler içermektedir. $\frac{1}{2}D[\iota^b D(Y_R F_{mn} F^{mn})] \wedge *e_{ab}$ terimi denklemin yüksek mertebeden türevler içermesine yol açan bir terimdir. Bu terimden kurtulmak için

$$Y_R F_{mn} F^{mn} = -\frac{1}{\kappa^2} \quad (3.37)$$

kısıt koşulunu kullanalım. Bu koşul yukarıdaki gravitasyonel alan denkleminin izi ile de tutarlı bir koşuldur. Ayrıca bu koşul yine gravitasyonel alan denkleminin kovaryant dış türevi alınarak da ulaşılabilecek önemli bir denklemdir. Böylece gravitasyonel alana ve Maxwell alanına ait denklemler:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2\kappa^2}R^{bc} \wedge *e_{abc} &= \frac{1}{2}Y(\iota_a F \wedge *F - F \wedge \iota_a *F) \quad (3.38) \\
&+ \frac{1}{2}Y_R F_{mn} F^{mn} *R_a \\
d(*YF) &= 0 \quad (3.39)
\end{aligned}$$

Bu denklemlerin küresel simetrik statik çözümleri Dereli ve Sert 2011b, Sert 2012, Sert 2013, Sert 2016 makalelerinde, kozmolojik çözümleri ise Sert (2019), Sert ve Adak 2019 makalelerinde bulunabilir. Burada bu denklemleri çözmek için alternatif bir yol olarak Emmy Noether'in ortaya koyduğu aşağıdaki teoremi kullanacağız.

3.2 Noether Teoremi

1918 yılında Emmy Noether tarafından verilen Noether teoremi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Teorem: M manifoldu üzerinde bir X vektör alanının Lie türevi; yani, bu vektör alanı doğrultusundaki türevi \mathcal{L}_X ve Lagrangian fonksiyonu $L(r, q^i(r), q'^i(r))$ olsun. Eğer

$$\mathcal{L}_X L = 0 \quad (3.40)$$

ise

$$\Sigma_0 = \alpha^i \frac{\partial L}{\partial q^i} \quad (3.41)$$

fonksiyonu bir hareket sabitidir. Burada α^i ler simetriyi belirleyen konfigürasyon uzayına bağlı keyfi fonksiyonlardır. X vektör alanı bu Lagrangianın bir simetrisine karşılık gelir ve Σ_0 ile verilen korunumlu bir niceliğin varlığını gösterir. Burada L nin konfigürasyon uzayı $Q = \{q^i\}$ ise, bunun tanjant uzayı $TQ = \{q^i, q'^i\}$ olur ve sonsuz küçük nokta dönüşümü (point transformation) Q üzerindeki simetriyi veren genel bir vektör alanı ile temsil edilebilir. Bu vektör alanı

$$X = \alpha^i(q) \frac{\partial}{\partial q^i} + \alpha'^i(q) \frac{\partial}{\partial q'^i} \quad (3.42)$$

olarak alınır. Burada $q' = \frac{dq}{dr}$ dir. Böylece Noether korunumlu yükü

$$\mathcal{L}_X L = \alpha^i(q) \frac{\partial L}{\partial q^i} + \alpha'^i(q) \frac{\partial L}{\partial q'^i} = 0 \quad (3.43)$$

denklemden türetilebilir.

İspat: Bu teorem Euler-Lagrange denklemleri kullanılarak ispatlanabilir. Bu ispata geçmeden önce Euler-Lagrange denklemlerini hatırlayalım.

$$\mathcal{A} = \int_{r_0}^{r_1} L(r, q(r), q'(r)) dr \quad (3.44)$$

eylem fonksiyoneli olsun. Eylem fonksiyonellerinin durağan yörüngelerini bulmak için $\delta \mathcal{A} = 0$ koşulu kullanılır. δ varyasyon operatörünü göstermektedir. Eylem

fonksiyonelinin varyasyonunu alırsak

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{A} &= \delta \int_{r_0}^{r_1} L(r, q(r), q'(r)) dr \\ &= \int_{r_0}^{r_1} \left(\frac{\partial L}{\partial r} \delta r + \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial q'} \delta q' \right) dr = 0\end{aligned}\quad (3.45)$$

denklemi elde edilir. İlk terimde integrali hesapladıktan sonra, belirli bir r değeri için $\delta r = 0$ olma özelliğini kullanabiliriz. Buradan hareketle

$$\delta\mathcal{A} = \int_{r_0}^{r_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial q'} \delta q' \right) dr = 0\quad (3.46)$$

olur. Varyasyon ile türevin yer değiştirme özelliğinden dolayı

$$\delta q' = \delta \left(\frac{dq}{dr} \right) = \frac{d}{dr} (\delta q)\quad (3.47)$$

olarak ifade edilebilir. $\delta q' = \frac{d}{dr} (\delta q)$ ifadesini tam türev kullanarak aşağıdaki gibi yazılabiliriz

$$\frac{\partial L}{\partial q'} \delta q' = \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L}{\partial q'} \delta q \right) - \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L}{\partial q'} \right) \delta q.\quad (3.48)$$

(3.48) eşitliği (3.46) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{A} &= \int_{r_0}^{r_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q - \delta q \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L}{\partial q'} \right) \right] dr + \frac{\partial L}{\partial q'} \delta q \Big|_{r_0}^{r_1} = 0 \\ &= \int_{r_0}^{r_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L}{\partial q'} \right) \right] \delta q dr + \frac{\partial L}{\partial q'} \delta q \Big|_{r_0}^{r_1} = 0.\end{aligned}\quad (3.49)$$

Sınırlarda varyasyon $\delta q(r_0) = \delta q(r_1) = 0$ dır. Dolayısıyla

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L}{\partial q'} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0\quad (3.50)$$

elde edilir. (3.50) denkleminde Euler-Lagrange denklemi denir.

Şimdi (3.50) Euler-Lagrange denklemini α^i ile çarpınca

$$\alpha^i \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L}{\partial q'^i} \right) - \alpha^i \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0\quad (3.51)$$

olarak yazılır. $\alpha^i \frac{d}{dr} \frac{\partial L}{\partial q'^i}$ ifadesi tam türev kullanarak

$$\alpha^i \frac{d}{dr} \frac{\partial L}{\partial q'^i} = \frac{d}{dr} \left(\alpha^i \frac{\partial L}{\partial q'^i} \right) - \frac{d\alpha^i}{dr} \frac{\partial L}{\partial q'^i}\quad (3.52)$$

yeniden yazılabilir. (3.52) eşitliğini (3.51) denkleminde yerine koyarsak

$$\frac{d}{dr} \left(\alpha^i \frac{\partial L}{\partial q^i} \right) - \frac{d\alpha^i}{dr} \frac{\partial L}{\partial q^i} - \alpha^i \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \quad (3.53)$$

elde edilir. Son olarak (3.53) eşitliği düzenlendiğinde

$$\frac{d}{dr} \left(\alpha^i \frac{\partial L}{\partial q^i} \right) = \alpha^i \frac{\partial L}{\partial q^i} + \frac{d\alpha^i}{dr} \frac{\partial L}{\partial q^i} \quad (3.54)$$

olarak bulunur. (3.54) denkleminin sol tarafı tam türev olduğu için integrale yerleştirildiğinde, parantez içindeki ifade bir sabite eşit olacak şekilde

$$\alpha^i \frac{\partial L}{\partial q^i} = \Sigma_0 \quad (3.55)$$

haline gelir ve buna hareket sabiti denir, sağ tarafı da $\frac{d\alpha^i}{dr} = \alpha'^i$ olmak üzere

$$\alpha^i \frac{\partial L}{\partial q^i} + \alpha'^i \frac{\partial L}{\partial q^i} = \mathcal{L}_X L \quad (3.56)$$

Lie türevini verir. Dolayısıyla (3.54) denkleminde sol tarafta parantezin içi sabit ise, sağ tarafta Lie türevinin sıfır olduğu açıktır, yani $\mathcal{L}_X L = 0$ dir.

4. NOETHER TEOREMİNİN MİNİMAL OLMAYAN GRAVİTASYON MODELİNE UYGULANMASI

4.1 Noether Teoreminin $Y(R)F^2$ Modeline Uygulanması

Aşağıda elektromanyetik alanların gravitasyona minimal olmayan bağlanmasının eylemi verilmiştir:

$$\mathcal{I} = \int \left[\frac{R}{2\kappa^2} * 1 - Y(R)F \wedge *F \right]. \quad (4.1)$$

(4.1) eyleminin varyasyonunun alınması ve alan denklemlerin elde edilmesini yukarıda incelemiştik. Bu alan denklemlerine aşağıdaki küresel simetrik, statik uzayzaman metriği için çözümlere bakacağız.

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + \frac{1}{A(r)}dr^2 + B(r)d\theta^2 + B(r)\sin^2\theta d\phi^2. \quad (4.2)$$

Metriğin küresel simetriye sahip olması, metrik fonksiyonlarının θ, ϕ gibi koordinatlardan bağımsız olması ve metriğin açısız kısmında zaman koordinatının bulunmaması olarak karşımıza çıkar. Genel görelilikte Einstein alan denklemlerinin bu metrik için çözümleri Schwarzschild çözümleri olarak bilinir. Kara delikler, yıldızlar, gezegenler gibi astrofiziksel nesnelere dönme hareketine sahiptirler. Klasik fizikte dönme hareketi küresel simetrik olma özelliğini bozamaz. Ancak görelilik teorisinde zaman bir koordinattır ve metriğin açısız kısmında karşımıza çıkar böylece küresel simetri bozulur. Bu durumda metriğin küresel simetrik yapısı bozulur. Bu nedenle, dönme hareketinin olduğu durumlarda Kerr metriği, Kerr–Newman metriği, Kerr–Schild metriği gibi dönen simetriye sahip metrikler kullanmak gerekir. Yine de bu kompakt dönen nesnelere temel düzeyde niceliksel yapıları hakkında öngörüler elde etmek için küresel simetrik olduğunu düşünmek iyi bir yaklaşımdır. Ayrıca burada metriğin statik olması, metrik fonksiyonu olan $A(r)$ nin zaman koordinatı olan t den bağımsız olması anlamına gelir. Buradaki $B(r)$ fonksiyonu metriğin dairesel yöndeki bileşenini belirleyen fonksiyondur ve çember durumu için $B(r) = r^2$ olur.

Yukarıdaki (4.2) metriği için önce R^{ba} eğrilik iki formları hesaplanır, sonra $R = \iota_a \iota_b R^{ba}$ bağıntısı yardımıyla R^{ba} nın iki defa iç çarpımı alınarak Ricci skaları hesaplanır.

$$R = -A'' - \frac{2AB''}{B} - \frac{2A'B'}{B} + \frac{AB'^2}{2B^2} + \frac{2}{B}. \quad (4.3)$$

Bu küresel simetrik statik metrik için aşağıda verilen non-minimal gravitasyon modeline Noether Teoremi kullanılarak çözümler araştırılacaktır. Burada verilen hesaplar Sert ve Çelikleş (2020) makalesinde yayınlanmıştır. (4.1) minimal olmayan modelin eyleminde R Ricci skalarının içindeki ikinci mertebeden türevler Noether teoreminin uygulanmasına izin vermez. Bu nedenle bu terimlerden kısmi integrasyon yoluyla kurtulmak için λ Lagrange çarpanı ile $\lambda(R - \bar{R})$ terimi ekleyerek aşağıdaki eylem kullanılacaktır.

$$\mathcal{I} = \int \left[\frac{R}{2\kappa^2} * 1 - Y(R)F \wedge *F - \lambda(R - \bar{R}) * 1 \right]. \quad (4.4)$$

(4.4) ifadesinde ikinci türevler Noether simetrisini bulmayı zorlaştırır. Bu nedenle bu terimlerden kurtulmak için R eğrilik skaları

$$\bar{R} = R^* - A'' - \frac{2AB''}{B} \quad (4.5)$$

\bar{R} olarak yeniden ifade edilebilir. (4.4) eyleminin λ ya göre varyasyonu alındığında

$$\delta\lambda = -(R - \bar{R}) = 0$$

elde edilir. Burada $\bar{R} = R$ olduğu kolaylıkla görülür. Aynı şekilde (4.4) denkleminin R ye göre varyasyonu alındığında

$$\delta R \left(\frac{1}{2\kappa^2} * 1 + Y_R(R) \phi'^2 * 1 - \lambda * 1 \right) = 0 \quad (4.6)$$

bulunur ve (4.6) denkleminde λ nın

$$\lambda = \frac{1}{2\kappa^2} + Y_R(R) \phi'^2. \quad (4.7)$$

olduğu açıktır. Varyasyon alma işlemlerinde elde edilen $\bar{R} = R$ ve (4.7) ifadeleri (4.4) eyleminde yerine yazıldıktan sonra integralin içi

$$L = \frac{R}{2\kappa^2} *1 - Y(R)F \wedge *F - \left(\frac{1}{2\kappa^2} *1 + Y_R(R)F \wedge *F \right) \left(R - R^* + A'' + \frac{2AB''}{B} \right) \quad (4.8)$$

lagrangianına dönüşür. Burada $Y(R)$ keyfi bir fonksiyondur. $Y_R(R)F \wedge *F$ terimindeki yüksek mertebeden türevler Noether yaklaşımını zorlaştırır. Ancak alan denklemlerin izini alarak elde ettiğimiz aşağıdaki denklem

$$Y_R(R)F \wedge *F = -\frac{1}{2\kappa^2} \quad (4.9)$$

enerji-momentum tensörünün korunumuna karşılık gelir ve Lagrangiandaki yüksek mertebeden türevleri ortadan kaldırır. Burada $F = dA$ ile verilir ve A elektromanyetik potansiyel 1-form olarak

$$A = \phi(r)dt \quad (4.10)$$

şeklinde sadece elektriksel potansiyel bileşenine sahip olduğunu varsayalım. Bu durumda Maxwell tensörü 2-formu sadece elektriksel bileşene sahiptir.

$$F = \phi'(r)e^1 \wedge e^0 = \phi'(r)dt \wedge dr \quad (4.11)$$

(4.8) lagrangianında gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra yeni lagrangian

$$L = \frac{AB'^2}{2\kappa^2 B} + \frac{A'B'}{\kappa^2} - \frac{BR}{2\kappa^2} + BY(R)\phi'^2 + \frac{2}{\kappa^2}. \quad (4.12)$$

olarak bulunur. Bu lagrangianın konfigürasyon uzayı $q \equiv \{A, B, \phi, R\}$ ve tangent uzayı $Tq \equiv \{A, A', B, B', \phi, \phi', R, R'\}$ olarak alınır. Noether Teoremi, bir lagrangianın

$$X = \alpha_i \frac{\partial}{\partial q^i} + \alpha'_i \frac{\partial}{\partial q'^i}, \quad (4.13)$$

ile verilen bir X vektör alanına göre Lie türevi alınıp sıfıra eşitlenirse

$$\mathcal{L}_X L(q^i, q'^i) = XL(q^i, q'^i) = 0 \quad (4.14)$$

X in bir simetri olduğunu ve bu simetriye karşılık gelen

$$\Sigma_0 = \alpha_i \frac{\partial L}{\partial q^i} \quad (4.15)$$

olarak verilen bir korunumlu niceliğin olduğunu söyler. Bu modelin korunumlu niceliğini bulmak için konfigürasyon uzayı ile verilen bu lagrangianın Lie türevi alındığında

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X L &= \alpha_1 \frac{\partial L}{\partial A} + \alpha_2 \frac{\partial L}{\partial B} + \alpha_3 \frac{\partial L}{\partial \phi} + \alpha_4 \frac{\partial L}{\partial R} \\ &+ \alpha'_1 \frac{\partial L}{\partial A'} + \alpha'_2 \frac{\partial L}{\partial B'} + \alpha'_3 \frac{\partial L}{\partial \phi'} + \alpha'_4 \frac{\partial L}{\partial R'} \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} &= \alpha_1 \frac{B'^2}{2\kappa^2 B} + \alpha_2 \left(\frac{-AB'^2}{2\kappa^2 B^2} - \frac{R}{2\kappa^2} + Y(R)\phi'^2 \right) \\ &+ \alpha_4 \left(\frac{-B}{2\kappa^2} + BY_R(R)\phi'^2 \right) + \alpha'_1 \frac{B'}{\kappa^2} + \alpha'_2 \left(\frac{AB'}{\kappa^2 B} + \frac{A'}{\kappa^2} \right) \\ &+ \alpha'_3 2BY(R)\phi' = 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

elde edilir. Burada $\alpha_i = \alpha_i(A, B, \phi, R)$ olduğundan dolayı α'_i türevlerini alırken zincir kuralı uygulanmalıdır

$$\alpha'_i = \frac{\partial \alpha_i}{\partial A} A' + \frac{\partial \alpha_i}{\partial B} B' + \frac{\partial \alpha_i}{\partial \phi} \phi' + \frac{\partial \alpha_i}{\partial R} R'. \quad (4.18)$$

α'_i türevlerini açık bir şekilde (4.16) lagrangianında yerine yazdığımızda

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X L &= \alpha_1 \frac{B'^2}{2\kappa^2 B} + \alpha_2 \left(\frac{-AB'^2}{2\kappa^2 B^2} - \frac{R}{2\kappa^2} + Y(R)\phi'^2 \right) \\ &+ \alpha_4 \left(\frac{-B}{2\kappa^2} + BY_R(R)\phi'^2 \right) \\ &+ \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial A} A' + \frac{\partial \alpha_1}{\partial B} B' + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \phi} \phi' + \frac{\partial \alpha_1}{\partial R} R' \right) \frac{B'}{\kappa^2} \\ &+ \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial A} A' + \frac{\partial \alpha_2}{\partial B} B' + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \phi} \phi' + \frac{\partial \alpha_2}{\partial R} R' \right) \left(\frac{AB'}{\kappa^2 B} + \frac{2A'}{\kappa^2} \right) \\ &+ \left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial A} A' + \frac{\partial \alpha_3}{\partial B} B' + \frac{\partial \alpha_3}{\partial \phi} \phi' + \frac{\partial \alpha_3}{\partial R} R' \right) 2Y(R)\phi' = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

elde edilir. Noether teoreminden dolayı elde edilen polinom sıfır olmalıdır. Bundan dolayı buradaki her bir lineer bağımsız terimin katsayısı sıfıra eşitlenir. Eğer

konfigürasyon uzayının boyutu n ise simetri çözümlerini veren $1 + n(n + 1)/2$ kısmi diferansiyel denklem elde edilir. Bu çalışmada konfigürasyon uzayının boyutu 4 olduğundan 11 denklem elde edildi. Fakat bunlardan ikisi birbirinin aynısı çıktığından lineer bağımsız denklemler aşağıdaki 10 denkleme dönüşür.

$$\frac{\alpha_1}{2B} - \frac{\alpha_2 A}{2B^2} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial B} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial B} \frac{A}{B} = 0, \quad (4.20)$$

$$\alpha_2 Y(R) + \alpha_4 B Y_R(R) + 2 \frac{\partial \alpha_3}{\partial \phi} B Y(R) = 0, \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \phi} \frac{1}{\kappa^2} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \phi} \frac{1}{\kappa^2} \frac{A}{B} + 2 \frac{\partial \alpha_3}{\partial B} B Y(R) = 0, \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial A} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial A} \frac{A}{B} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial B} = 0, \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial \phi} \frac{1}{\kappa^2} + 2 \frac{\partial \alpha_3}{\partial A} B Y(R) = 0, \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial R} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial R} \frac{A}{B} = 0, \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial A} = 0, \quad \frac{\partial \alpha_2}{\partial R} = 0, \quad \frac{\partial \alpha_3}{\partial R} B Y(R) = 0, \quad (4.26)$$

$$\alpha_2 R + \alpha_4 B = 0. \quad (4.27)$$

R nin keyfi bir fonksiyonu olan $Y(R)$ için (4.20-4.27) denklemlerinin bir çözüm kümesi

$$\alpha_1(A, B) = \frac{c_1}{\sqrt{B}}, \quad \alpha_2(B) = 0, \quad \alpha_3(\phi) = c_2, \quad \alpha_4(B, \phi, R) = 0 \quad (4.28)$$

olarak bulunur. Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir. Ayrıca bulunan α_i ler (4.13) de yerine koyulduğunda X vektör alanı

$$X = \frac{c_1}{\sqrt{B}} \frac{\partial}{\partial A} - \frac{c_1}{2B^{3/2}} \frac{\partial}{\partial A'} + c_2 \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (4.29)$$

olarak bulunur ve (4.15) hareket sabiti

$$\Sigma_0 = \frac{2c_1}{\kappa^2} + 2c_2 B Y(R) \phi' \quad (4.30)$$

olarak elde edilir.

4.2 Euler-Lagrange Denklemleri

Metrik fonksiyonlarını ve minimal olmayan fonksiyonlarını belirleyebilmek için

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L}{\partial q'^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \quad (4.31)$$

eşitliğiyle verilen Euler-Lagrange denklemlerini kullanalım. Burada L yerine bu modelin Lagrangianı olan (4.32)

$$L = \frac{AB'^2}{2\kappa^2 B} + \frac{A'B'}{\kappa^2} - \frac{BR}{2\kappa^2} + BY(R)\phi'^2 + \frac{2}{\kappa^2} \quad (4.32)$$

ifadesi ve q^i yerine de sırasıyla konfigürasyon uzayının elemanları $q^i = A, B, \phi, R$ uygulandığında

$$\frac{B''}{\kappa^2} - \frac{B'^2}{2\kappa^2 B} = 0 \quad (4.33)$$

$$\frac{A'B'}{B} + \frac{AB''}{B} - \frac{AB'^2}{2B^2} + A'' + \frac{R}{2} - Y(R)\phi'^2 \kappa^2 = 0 \quad (4.34)$$

$$\frac{d}{dr} (2B\phi'Y(R)) = 0 \quad (4.35)$$

$$Y_R(R)\phi'^2 = \frac{1}{2\kappa^2} \quad (4.36)$$

diferansiyel denklemlerini elde ederiz. (4.33) ve (4.35) denklemlerini sırasıyla çözüldüğünde

$$B(r) = b_1(r + b_2)^2, \quad Y(R)\phi' = \frac{q}{B}, \quad (4.37)$$

elde edilir. Burada q kaynağın elektrik yüküne karşılık gelen bir integrasyon sabitidir. Ayrıca (4.34) denkleminin r ye göre türevi alındığında (4.36) koşulu bulunabilir. Bunu göstermek için (4.3) eşitliğinin türevi alınıp bazı düzenlemeler yapıldığında

$$dR = -A''' - \frac{2A''B'}{B} + \frac{A'B'^2}{2B^2} + \frac{AB'B''}{B^2} - \frac{2B'}{B^2} \quad (4.38)$$

bulunur. (4.34) denkleminde R yerine (4.3) Ricci skaları ve ϕ' yerine (4.37) denkleminin çözümünden bulduğumuz $\phi' = \frac{q}{BY(R)}$ koyulursa

$$\frac{q^2 \kappa^2}{Y(R)} = \frac{A'' B^2}{2} - \frac{A B'^2}{4} + B \quad (4.39)$$

elde edilir. (4.39) denkleminin türevi alındığında

$$\phi'^2 \kappa^2 dY = -\frac{A'''}{2} - \frac{A'' B'}{B} + \frac{A' B'^2}{4B^2} + \frac{A B' B''}{2B^2} - \frac{B'^2}{B^2} \quad (4.40)$$

bulunur. (4.38) ve (4.40) denklemleri eşitlendiğinde

$$Y_R(R) \phi'^2 = \frac{1}{2\kappa^2} \quad (4.41)$$

olduğu görülür. Dolayısıyla (4.36) denkleminin aslında (4.34) nin türevine karşılık geldiği görülür. Böylece bu modeli tarifleyen üç diferansiyel denkleme sahip oluruz.

Küresel simetriyi sağlamak için $B = r^2$ olarak, Dereli ve Sert 2011b, Sert 2012, Sert 2013, Sert 2016 çalışmalarda incelenen modelin alan denklemlerinden elde edilmiş diferansiyel denkleme dönüştüğünü buluruz.

$$\frac{A''}{2} + \frac{1-A}{r^2} - \kappa^2 Y(R) \phi'^2 = 0. \quad (4.42)$$

Böylelikle bu iki metotun, yani Noether simetrisi metodu ve alan denklemlerine çözüm bulma metodunun aynı (4.42) diferansiyel denklemini verdiği gösterilmiştir. (4.37) denklemini de düşünülerek bu denklemin çözümü bulunabilir. Noether simetrisine göre bu modelin (4.30) korunumlu yükünün

$$\Sigma_0 = \frac{2c_1}{\kappa^2} + 2qc_2 \quad (4.43)$$

olduğu ortaya çıkar. Buradan korunumlu niceliğin, elektromanyetik alan varlığındaki bu gravitasyonel sistemin q elektrik yükü ile gravitasyonel bağlanma sabiti olan κ^2 yi içerdiği görülür.

Şimdi de $E_L = q^i \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \right) - L$ formülü ile enerji fonksiyonu hesaplandığında.

$$E_L = \frac{BR}{2\kappa^2} + \frac{A B'^2}{2\kappa^2 B} + \frac{A' B'}{\kappa^2} + BY(R) \phi'^2 - \frac{2}{\kappa^2}. \quad (4.44)$$

ifadesi bulunur. (4.44) enerji fonksiyonu tanımına (4.3) eşitliği yazıldığında denklemin sifira eşit olduğu bulunur.

4.3 Bazı Yeni Çözümler

(4.42) diferansiyel denkleminin çözümlerini elde edebilmek için iki yöntem kullanılabilir. Birincisi minimal olmayan belirli bir $Y(R)$ fonksiyonuyla başlanır ve sonra $A(r)$ fonksiyonu bulunur. İkinci yöntem ise literatürde Reissner-Nördstrom çözümü olarak bilinen çözüme, olası düzeltme terimlerini içeren asimptotik olarak düz olan geometrileri seçerek başlanır ve buradan bağlanmanın şiddetini belirleyen lagrangiyandaki $Y(R)$ fonksiyonu belirlenir. Bu çalışmada ikinci yöntem kullanılmıştır. İlk çözüm olarak Yukawa-tipi düzeltme terimi içeren aşağıdaki metrik fonksiyonunu göz önüne alalım:

$$A_1(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2} - a \frac{e^{-r}}{r^2} \quad (4.45)$$

bu metrik için diğer bilinmeyen fonksiyonlar olan elektriksel potansiyel fonksiyonu ve non-minimal fonksiyon

$$\phi(r) = \frac{q}{r} - \frac{ae^{-r}(r+4)}{qr}, \quad (4.46)$$

$$Y(r) = \frac{8q^2/\kappa^2}{4q^2 - a(r+2)^2e^{-r}}. \quad (4.47)$$

olarak elde edilir. Bu metrik fonksiyonu için Ricci skaları $R = \frac{a}{e^r r^2}$ hesaplanarak tersi alındığında $r = 2W(x)$ bulunur. Böylece R cinsinden (4.47) minimal olmayan fonksiyonu aşağıdaki gibi yeniden ifade edilebilir

$$Y(R) = \frac{8q^2/\kappa^2}{4q^2 - 4(W(x)+1)^2e^{-2W(x)}}. \quad (4.48)$$

$x = \sqrt{\frac{a}{4R}}$ olmak üzere $W(x)$ Lambert fonksiyonudur.

İkinci metrik fonksiyon olarak, başka bir Yukawa-tipi düzeltme terimli ve asimptotik olarak düz olan aşağıdaki metrik fonksiyonu alınırsa

$$A_2(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2} - \left(1 + \frac{4}{r} + \frac{6}{r^2}\right)ae^{-r}. \quad (4.49)$$

aşağıdaki çözümler elde edilir

$$\phi(r) = \frac{q}{r} - \frac{a(r^3 + 6r^2 + 18r + 24)e^{-r}}{qr}, \quad (4.50)$$

$$Y(r) = \frac{8q^2/\kappa^2}{4q^2 - a(r^4 + 4r^3 + 12r^2 + 24r + 24)e^{-r}}. \quad (4.51)$$

(4.49) metrik fonksiyonu için Ricci skaları $R = ae^{-r}$ ve $x = \frac{a}{R}$ olmak üzere ters fonksiyonu $r = \ln x$ kullanılarak (4.51) minimal olmayan fonksiyon R cinsinden

$$Y(R) = \frac{8q^2/\kappa^2}{4q^2 - (\ln^4 x + 4\ln^3 x + 12\ln^2 x + 24\ln x + 24)R} \quad (4.52)$$

olarak tekrardan yazılır. Böylece yeni minimal olmayan modeller ve bunlara karşılık gelen çözümler elde edilmiş olur.

4.4 Çözümlerin Bazı Termodinamik Özellikleri

Dev bir yıldızın hayal edilemeyecek kadar küçük bir noktaya sıkıştırılması sonucu tekillik oluşur. Tekillik uzay ve zamanın bükülmesinin sonsuza gittiği noktadır. Çıplak bir tekillik ise yıldızın çöktüğü fakat olay ufkunun onun etrafını çevrelemediği, dolayısıyla tekilliğin açık olduğu kuramsal bir senaryodur. Olay ufku kara deliğin sınırıdır. Bu sınır ışığın kütleçekimden kaçamayacağı yüzeyi belirler. Yukarıdaki (4.45) ve (4.49) metrik fonksiyonları, parametre seçimlerine bağlı bir veya iki olay ufku olan ya da hiç ufku olmayan bir kara deliğe ait çıplak bir tekilliğini tanımlayabilirler. Bir olay ufkuna sahip kara delikler için $r = r_h$ olduğu veya iki olay ufkuna sahip olan karadelikler için dışardakinin $r = r_h$ olduğu durumlarda Hawking sıcaklığı

$$T = \frac{A'(r_h)}{4\pi} \quad (4.53)$$

ile tanımlanır. (4.45) ve (4.49) metrik fonksiyonları için sıcaklığı hesapladığımızda sırasıyla

$$4\pi T_1 = \frac{a(r_h + 2)}{r_h^3 e^{r_h}} + \frac{2M}{r_h^2} - \frac{2q^2}{r_h^3}, \quad (4.54)$$

$$4\pi T_2 = \frac{a(r_h^3 + 4r_h^2 + 10r_h + 12)}{r_h^3 e^{r_h}} + \frac{2M}{r_h^2} - \frac{2q^2}{r_h^3} \quad (4.55)$$

bulunabilir. Şekil 2.1 de bu minimal olmayan model ve Reissner-Nordström durumu için olay ufkuunun yarıçapı r_h olduğu durumda sıcaklığın değişimi gösterilmiştir.

Entropi, bir sistemdeki düzensizliğin ölçüsüdür ve S harfiyle gösterilir. Karadelikler sıfırdan farklı bir entropiye sahiptirler. Örneğin; bir madde kara deliğin içine düştüğünde kendisini ve çevresini içine alan sistemin toplam entropisi artar ki bu da termodinamiğin ikinci yasasını koruduğunu gösterir. Ayrıca, bir maddenin sıcaklığını $1^\circ C$ değiştirmek için gerekli olan ısı miktarına ısı kapasitesi denir. Kara deliğin entropisi olay ufkuyla belirlenen yüzey alanıyla

$$S = \pi r_h^2 \quad (4.56)$$

olarak tanımlanır. Bu entropiyi kullanarak ısı kapasitesi

$$C = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_q \quad (4.57)$$

formülünden elde edilir. Yukarıdaki iki metrik fonksiyon için ısı kapasitesi hesaplandığında sırasıyla

$$C_1 = \frac{2\pi r_h^2 ((r_h^2 - q^2)e^{r_h} + a(r_h + 1))}{(3q^2 - r_h^2)e^{r_h} - a(r_h^2 + 3r_h + 3)}, \quad (4.58)$$

$$C_2 = \frac{2\pi r_h^2 ((r_h^2 - q^2)e^{r_h} + a(r_h^3 + 3r_h^2 + 6r_h + 6))}{(3q^2 - r_h^2)e^{r_h} - a(r_h^4 + 3r_h^3 + 9r_h^2 + 18r_h + 18)}. \quad (4.59)$$

elde edilir.

Isı kapasitesi bir kara deliğin faz geçiş noktaları ve termal kararlılık noktaları hakkında bilgi verir. Kararlılık noktası yerel minimum noktadır, yani enerjinin minimum olduğu noktadır. Isı kapasitesi kararlı bir kara delik için pozitif ve sonlu olmalıdır. Negatif bir değer kararsızlığı gösterir. Isı kapasitesi negatiften pozitifte geçerken, kara delik kararsız bir halden kararlı bir hale geçer. Bu geçişler faz geçişidir. Burada faz geçişi ya maddenin kendi fiziksel özelliklerinin değişmesi ya da maddenin içinde bulunduğu sistemin fiziksel özelliklerinin değişmesi olarak karşımıza çıkabilir. Isı kapasitesinin sıfır olduğu noktalar Tip-1 kararsızlığı verir ve ısı kapasitesinin sonsuza gittiği noktalar ise bir kara delik için ikinci dereceden faz geçişine karşılık

gelen Tip-2 kararsızlık noktalarıdır. Ayrıca Şekil 2.2 de minimal olmayan modelde Reissner-Nordström çözümü için olay ufku yarıçapı r_h değerine karşılık gelen ısı kapasitesi farklı aralıklarda çizdirilmiştir ve incelendiğinde bu kararsızlık noktaları açıkça görülmektedir. q parametresi $q = 0,4$ alındığında kararlı bir kara delik için Reissner-Nördstrom çözümünden sapmayı ifade eden minimal olmayan a parametresininin A_1 çözümünde $a = 0,16$ ve A_2 çözümünde $a = 0,026$ gibi üst sınırı olduğu bulunur. Dahası a parametresi 0 dan üst sınıra artarken Tip-2 kararsızlık noktaları 0,7 den 0 a azalır. Ayrıca elektrik yükü arttıkça a parametresinin üst sınırları daha yüksek değerlere çıkabilir.

Diğer taraftan M kütleli ve ϕ elektrik potansiyeli olan dönmeyen bir kara delik için termodinamiğin birinci yasası

$$dM = TdS + \phi dq \quad (4.60)$$

olarak alınır. Bu yasa durağan bir karadeliğin sahip olduğu maddedeki sonsuz küçük bir değişimin sıcaklık, entropi ve elektrik yükündeki değişim arasındaki ilişkiyi gösterir.

Eistein-Maxwell teorisindeki Reissner-Nordström kara deliği için birinci yasadaki M kütlesi

$$M = 2TS + \phi Q \quad (4.61)$$

Smarr formülü Smarr 1973 ile ifade edilebilir. Smarr formülü bir kara deliğin kütlesini ϕ elektromanyetik potansiyeli, Q elektrik yükü gibi diğer geometrik ve dinamik parametrelere bağlayan ilişkidir. Literatürde Smarr formülü çeşitli boyutlarda ve teorilerdeki karadelikler için elde edilmiştir. Bu çalışmalardan bazıları şunlardır:

- Keyfi boyutlarda dönen kara delikler (Modak 2012, Myers ve Perry 1986),
- Einstein-Maxwell-dilaton kara delikler (Liu ve diğ. 2015),
- 3-boyutlu gravitasyondaki kara delik (Liang ve diğ. 2017),

- Lineer olmayan elektrodinamiklerde yüklü kara delikler (Balart ve Fernando 2017).

Benzer şekilde statik AdS kara delikleri için Smarr formülünün geometrik bir şekilde türetilişi gösterilmiştir (Kastor ve diğ. 2009). Yüklü kara delikler için genelleştirilmiş bir Smarr formülü bir ölçekleme kanunundan elde edilmiştir (Diaz-Alonso ve Rubiera-Garcia 2013). Bir P-V terimi içeren lineer olmayan elektrodinamikteki kara deliklerin Smarr formülü ve termodinamikleri incelenmiştir (Azreg-Anou 2015a, Azreg-Anou 2015b).

Ayrıca, bu Smarr bağıntısı Einstein-Maxwell modelini modifiye eden diğer gravitasyon modelleri için de türetilebilir. Bu durumda τ enerji-momentum tensörünün izinin integrali olan Komar integralinden aşağıdaki gibi türetilmiştir (Balart ve Fernando 2017, Breton 2005, Komar 1959, Mazhari 2019).

$$M = 2TS + q\phi - \frac{1}{2} \int \tau dV \quad (4.62)$$

Burada τ , $G_a = \kappa^2 \tau_a$ gravitasyonel alan denkleminde elde edilen enerji-momentum tensörünün izidir ve alanlar tarafından yapılan "iş yoğunluğu (work density)" ile bağlantılıdır (Hayward 1998). Minimal Einstein-Maxwell durumunda, Maxwell enerji-momentum tensörünün izi sıfır olduğundan (4.62) bağıntısı kendiliğinden sağlanır. Einstein-Maxwell teorisinin aksine minimal olmayan $Y(R)F^2$ bağlanması sıfır olmayan bir enerji-momentum tensörü izine yol açar. Bu izi denklemin sol tarafından da hesaplayabiliriz:

$$\tau = \frac{1}{8\pi} * (G_a \wedge e^a). \quad (4.63)$$

Burada $\kappa^2 = 8\pi$ alındı ve

$$\begin{aligned} G_a \wedge e^a &= e^a \wedge \left(\frac{-1}{2} R^{bc} \wedge *e_{abc} \right) \\ &= \frac{-1}{2} R^{bc} \wedge e^a \wedge \iota_a * e_{abc} \\ &= -R^{bc} \wedge *e_{abc} \\ &= -R * 1 \end{aligned} \quad (4.64)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\tau = \frac{1}{8\pi} * (G_a \wedge e^a) = \frac{R}{8\pi} = -\frac{1}{8\pi} \left[A'' + \frac{4A'}{r} + \frac{2}{r^2} (A - 1) \right]. \quad (4.65)$$

(4.45) ve (4.49) metrik fonksiyonlarının Smarr formülünü sağlayıp sağlamadıklarını incelemek için bu düzeltme terimini küresel simetrik statik bir metrik için hesaplayalım.

$$\int_V \frac{\tau}{2} dV = \frac{1}{16\pi} \int_{r_h}^{\infty} R(r) 4\pi r^2 dr \quad (4.66)$$

$$= \frac{1}{4} \int_{r_h}^{\infty} [-r^2 A'' - 4r A' - 2(A - 1)] dr \quad (4.67)$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{r_h}^{\infty} \left[\left(\frac{r^2 A'}{2} \right)' + (rA)' - 1 \right] dr \quad (4.68)$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{r^2 A'}{2} + rA - r \right) - \left(\frac{r_h^2 A'}{2} + r_h A - r_h \right) \right] \quad (4.69)$$

$$= \frac{M}{2} + \frac{r_h^2 A'(r_h)}{4} - \frac{r_h}{2} \quad (4.70)$$

Görüldüğü gibi kütle parametresine ve metrik fonksiyonunun türevine bağlıdır. Daha sonra olay ufkunda (4.46) elektrik potansiyeli

$$\phi = \int_{r_h}^{\infty} E dr = \frac{q}{r_h} - a \frac{e^{-r_h} (r_h + 4)}{4qr_h} \quad (4.71)$$

olarak hesaplanır. Böylece (4.62) Smarr formülünde yerine yazılarak buradan elde edilen kütle

$$M = \frac{q^2 + r_h^2 - ae^{-r_h}}{2r_h} \quad (4.72)$$

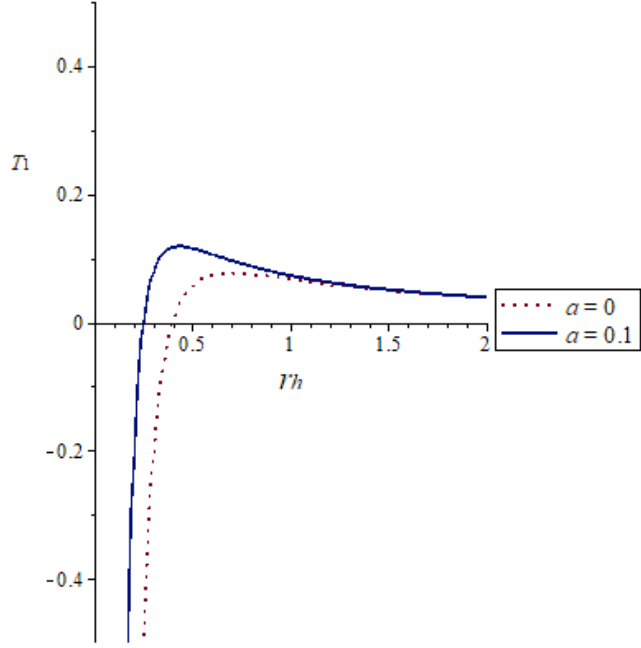
olarak bulunur ve bu kütle metrik fonksiyonunun olay ufkunda sıfır olmasından yani;

$$A_1(r) = 1 - \frac{2M}{r_h} + \frac{q^2}{r_h^2} - a \frac{e^{-r_h}}{r_h^2} = 0 \quad (4.73)$$

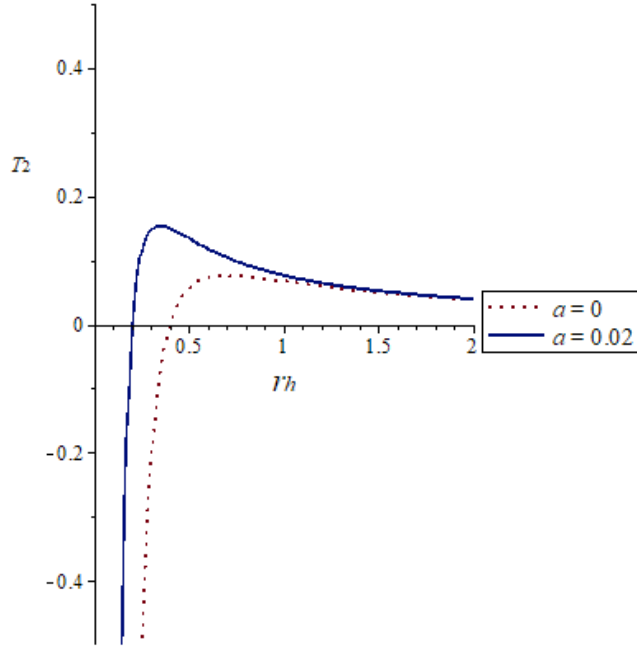
denkleminde elde edilen kütle eşittir. (4.62) Smarr formülü, yukarıdaki hesaplara benzer olarak (4.49) ile verilen ikinci çözüm için de sağlanır ve kütle

$$M = \frac{q^2 + r_h^2 - a(r_h^2 + 4r_h + 6)e^{-r_h}}{2r_h} \quad (4.74)$$

olarak bulunur. Bu sonuçlar Sert ve Çeliktaş (2020) makalesiyle yayına dönüştürülmüştür.

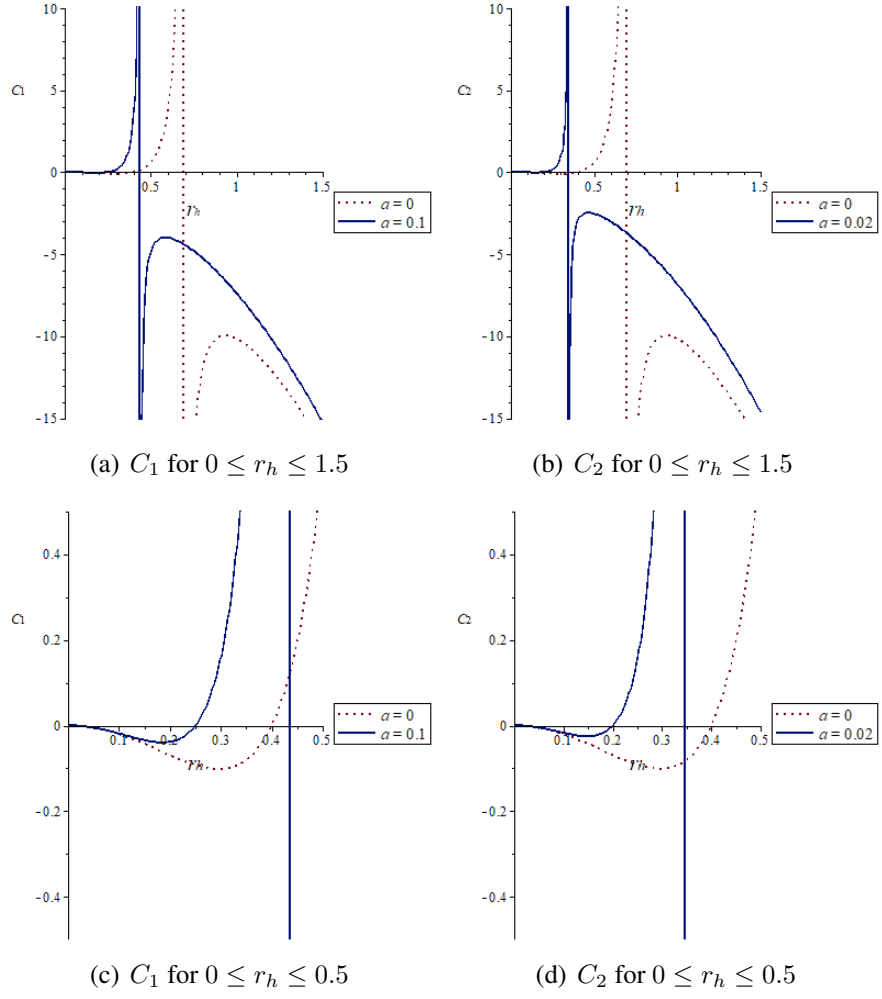


(a)



(b)

Şekil 4.1: Hawking sıcaklığının olay ufkuna göre grafiği, $q = 0,4$ alınmıştır, kesikli çizgi Reissner-Nordström durumu ve düz çizgi minimal olmayan modeldir.



Şekil 4.2: Isı kapasitesinin olay ufku yarıçapına göre grafiği, $q = 0,4$ alınmıştır, kesikli çizgi Reissner-Nordström durumuna and düz çizgi minimal olmayan durumuna karşılık gelir.

5. MİNİMAL OLMAYAN $Y(R)F^2$ GRAVİTASYONUNDA ANİZOTROPİK YILDIZLAR

Kompakt yıldızlar şiddetli gravitasyonel ve elektromagnetik alanları nedeniyle gravitasyon teorilerini test etmek için kullanılan en iyi kaynaklardır. Bu yıldızlar çoğunlukla izotropik olarak düşünülürler. Fakat farklı radyal ve teğetsel bileşenlere sahip anizotropik basınçların varlığındaki anizotropik yıldızları incelemek için önemli nedenler vardır. Bu nedenlerden bazılarını şöyle sıralayabiliriz:

- Küresel simetrik yıldızların anizotropisi arttıkça daha kararlı olacaklarına (içine çökmeyeceklerine) dair çalışmalar vardır.
- Anizotropi yıldızların dönme hareketinden kaynaklanabilir.
- Anizotropik durumlar yıldızların merkezine yakın bölgelerde yüksek basınç nedeniyle daha gerçekçidir.

Bunlarla birlikte elektrik yükü de kompakt yıldızlardaki kararlılığı arttırıcı etki yapar. Bu nedenle yüklü anizotropik yıldızların çözümleri minimal Einstein-Maxwell teori kullanılarak incelenebilir. Fakat bu model son zamanlarda karanlık madde ve karanlık enerji gibi problemleri açıklayamadığı için modifiye edilmelidir. Böylece aşağıdaki eylem ile verilen minimal olmayan Einstein-Maxwell teoriye anizotropik yıldızlar için çözümler aranacaktır.

$$I(e^a, \omega_{ab}, A) = \int_M \left(\frac{1}{2\kappa} R * 1 - \epsilon_0 Y(R) F \wedge *F + \frac{2}{c} A \wedge J + L_m + \lambda_a \wedge T^a \right) \quad (5.1)$$

Burada ϵ_0 boşluğun dielektrik sabiti ve c ışık hızıdır. Daha önceki bölümlerden farklı olarak boyut analizi yardımıyla buradaki fonksiyonların birimlerini ortaya çıkarmak için ϵ_0 ve c yi kullandık. J yıldızın iç kısmındaki elektrik yükünü belirleyen elektromanyetik akım 3- formudur. Burada verilen hesaplar Sert ve diğ. (2018) makalesinde yayınlanmıştır. Madde lagrangianın ko-frame varyasyonu aşağıdaki

enerji momentum 3-formunu verir.

$$\tau_a^m := \frac{\partial L_m}{\partial e^a} = (\rho c^2 + p_t)u_a * u + p_t * e_a + (p_r - p_t)v_a * v \quad (5.2)$$

$u = \delta_a^0 e^a$ zamansal 1-form, $v = \delta_a^1 e^a$ uzaysal 1-formdur. Ko-çerçeve varyasyonu aşağıdaki modifiye edilmiş Einstein denklemini verir.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\kappa} R_{bc} \wedge *e^{abc} &= \epsilon_0 Y(\iota^a F \wedge *F - F \wedge \iota^a *F) + \epsilon_0 Y_R F_{mn} F^{mn} *R^a \\ &+ \epsilon_0 D[\iota_b d(Y_R F_{mn} F^{mn})] \wedge *e^{ab} + \tau_a^m, \end{aligned} \quad (5.3)$$

Elektromanyetik 1-formu olan A ya göre varyasyon

$$d(*YF) = \frac{J}{c\epsilon_0}. \quad (5.4)$$

modifiye edilmiş Maxwell denklemini verir. Maxwell 2-formu $F = dA$ ile verilir ve $dF = 0$ homojen Maxwell denklemini sağlar.

$$Y_R F_{mn} F^{mn} = -\frac{k}{\kappa} \quad (5.5)$$

koşulu altında bu denklemler oldukça basit bir hal alır ve yüksek mertebeden türevler ortadan kalkar. Burada k boyutsuz, keyfi bir reel sabittir.

5.1 Küresel Simetrik, Statik, Anizotropik Çözümler

Bu çalışmada anizotrop yıldızlarının $Y(R)F^2$ -formunda gravitasyonel modelinin çözümlerini aşağıdaki statik küresel simetrik metriği ve sadece $E(r)$ elektrik alana sahip elektromanyetik tensör 2-formunu kullanarak araştıracağız.

$$ds^2 = -f^2(r)dt^2 + g^2(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin(\theta)^2 d\phi^2 \quad (5.6)$$

$$F = E(r)e^1 \wedge e^0.$$

Kaynağın elektrik akım yoğunluğu ise sadece $\rho_e(r)$ elektrik akım yoğunluğu bileşenine sahip olacak şekilde

$$J = \rho_e(r)e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 = \rho_e g r^2 \sin \theta dr \wedge d\theta \wedge d\phi \quad (5.7)$$

olarak alalım. V hacmi ve ∂V sınırı üzerinde Stokes teoremi yardımıyla ve (5.4) Maxwell denkleminden

$$q(r) := \frac{1}{c} \int_V J = \epsilon_0 \int_V d(*YF) = \epsilon_0 \int_{\partial V} *YF = 4\pi\epsilon_0 r^2 Y E. \quad (5.8)$$

olduğu bulunur. Gravitasyonel alan denklemleri yukarıdaki metrik ve Maxwell tensörü için aşağıdaki diferansiyel denklemlere dönüşür.

$$\frac{1}{\kappa} \left(\frac{2g'}{g^3 r} + \frac{g^2 - 1}{g^2 r^2} \right) = \epsilon_0 Y E^2 + \frac{k}{\kappa} \left(\frac{f''}{f g^2} - \frac{f' g'}{f g^3} + \frac{2f'}{f g^2 r} \right) + \rho c^2 \quad (5.9)$$

$$\frac{1}{\kappa} \left(-\frac{2f'}{f g^2 r} + \frac{g^2 - 1}{g^2 r^2} \right) = \epsilon_0 Y E^2 + \frac{k}{\kappa} \left(-\frac{f''}{f g^2} + \frac{f' g'}{f g^3} + \frac{2g'}{g^3 r} \right) - p_r \quad (5.10)$$

$$\frac{1}{\kappa} \left(\frac{f''}{f g^2} - \frac{f' g'}{f g^3} + \frac{f'}{f g^2 r} - \frac{g'}{g^3 r} \right) = \epsilon_0 Y E^2 + \frac{k}{\kappa} \left(-\frac{f'}{f g^2 r} + \frac{g'}{g^3 r} + \frac{g^2 - 1}{g^2 r^2} \right) + p_t \quad (5.11)$$

Gravitasyonel alan denkleminin kovaryant dış türevi alınarak elde edilen korunum denklemleri de hesaba katılmalıdır.

$$p_r' + \frac{f'(\rho c^2 + p_r)}{f} + \frac{2(p_r - p_t)}{r} = 2\epsilon_0 (Y E)' E + \frac{4\epsilon_0 Y E^2}{r}. \quad (5.12)$$

Bu denklem enerji-momentum tensörünün korunumu denklemleri olarak bilinir. Yıldızın içindeki maddeyi ifade eden denklemin, lineer durum denklemleri olduğunu varsayacağız. Yani radyal basınç enerji yoğunluğu ile lineer olarak değişmektedir.

$$p_r = \omega \rho c^2 \quad (5.13)$$

Burada ω orantı sabitidir. Yukarıdaki metrik ve elektromanyetik alan için metrik koşulu

$$\frac{dY}{dR} = \frac{k}{2\epsilon_0 \kappa E^2}, \quad (5.14)$$

haline gelir. Burada R eğrilik skalası

$$R = \frac{2}{g^2} \left(-\frac{f''}{f} + \frac{f' g'}{f g} - \frac{2f'}{f r} + \frac{2g'}{g r} + \frac{g^2 - 1}{g^2 r^2} \right) \quad (5.15)$$

olarak elde edilir.

5.2 Konformal Simetri

Bu (5.6) metriğinin bir parametrelili konformal grup hareketi simetrisinin varlığında çözümlere bakacağız. Bu simetri

$$L_{\xi} \mathbf{g}_{ab} = \frac{\phi_0}{g(r)} \mathbf{g}_{ab} \quad (5.16)$$

ifadesinden türetilir. Burada $L_{\xi} g_{ab}$ bu yıldızın iç metriğinin ξ vektör alanına göre Lie türevi ve ϕ_0 keyfi bir sabittir. Yıldızların iç kısmındaki gravitasyonel alan bu simetri kullanılarak tariflenebilir.

Bu simetriyi sağlayan $f^2(r)$ metrik fonksiyonu

$$f^2(r) = a^2 r^2 \quad (5.17)$$

olarak elde edilir. Yine bu simetriyi sağlayan keyfi $g^2(r)$ metrik fonksiyonu

$$g^2(r) = \frac{3}{1 + br^{\alpha}}, \quad (5.18)$$

Mak (2004) den esinlenilmiştir. Burada b and α keyfi reel sabitlerdir. Bu metrik fonksiyonu orjinde, yani $r = 0$ da düzgündür (regular) ve $\alpha \geq 2$ için tekil olmayan (düzgün) eğrilik skalarına sahiptir.

$$R = -b(\alpha + 2)r^{\alpha-2} \quad (5.19)$$

(5.8)-(5.12) denklemlerinin çözümü olarak diğer bilinmeyen fonksiyonlar

$$\rho(r) = \frac{(k+1)[2 - br^{\alpha}(\alpha - 2)]}{3\kappa c^2 r^2(\omega + 1)}, \quad (5.20)$$

$$p_t(r) = \frac{br^{\alpha}[(k+1)(\alpha - 2) - X]}{3\kappa r^2(\omega + 1)} + \frac{(k+1)(1 - \omega)}{3\kappa r^2(\omega + 1)}, \quad (5.21)$$

$$E^2(r) = \frac{2\omega(k+1)}{3\kappa \epsilon_0 c_0 r^2(\omega + 1)} \left[1 + \frac{Xbr^{\alpha}}{4\omega(k+1)} \right]^{1 + \frac{3k(\omega+1)(\alpha^2-4)}{\alpha X}}, \quad (5.22)$$

$$Y(r) = c_0 \left[1 + \frac{Xbr^{\alpha}}{4\omega(k+1)} \right]^{-\frac{3k(\omega+1)(\alpha^2-4)}{\alpha X}}, \quad (5.23)$$

olarak elde edilir. Burada X

$$X = k\omega(\alpha + 4) + \alpha(3k - 2\omega) - 2(\omega + 3). \quad (5.24)$$

olarak tanımlanmıştır ve anizotropik basınç $p_r = \omega\rho c^2$ ifadesiyle verilir. $R(r)$ fonksiyonunun tersi (5.19) denkleminde r çekilerek bulunur.

$$r = \left[\frac{-R}{b(\alpha + 2)} \right]^{1/(\alpha-2)} \quad (5.25)$$

Buradan da bu minimalliği bozan Y fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur

$$Y(R) = c_0 \left[1 + \frac{bX}{4\omega(k+1)} \left(\frac{-R}{\alpha b + 2b} \right)^{\alpha/(\alpha-2)} \right]^{-\frac{3k(\omega+1)(\alpha^2-4)}{\alpha X}}. \quad (5.26)$$

Böylece bu minimal olmayan gravitasyon modeli

$$L = \frac{1}{2\kappa^2} R * 1 - \epsilon_0 \left[1 + \frac{bX}{4\omega(k+1)} \left(\frac{-R}{(\alpha+2)b} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-2}} \right]^{-\frac{3k(\omega+1)(\alpha^2-4)}{\alpha X}} F \wedge *F + 2A \wedge J + L_m + \lambda_a \wedge T^a. \quad (5.27)$$

ve bu modele karşılık gelen yıldızın iç kısmının geometrisi

$$ds_{in}^2 = -a^2 r^2 c^2 dt^2 + \frac{3}{1 + br^\alpha} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (5.28)$$

metriğiyle ifade edilir. Yine yıldızın içindeki Maxwell tensörü 2-formu

$$F = \frac{q(r)}{4\pi\epsilon_0 Y r^2} e^1 \wedge e^0 \quad (5.29)$$

ifadesi ve (4.27) denklemini kullanılarak yıldızın elektrik yükünün radyal yarıçapa bağlı ifadesi

$$q^2(r) = \frac{32\pi^2 \epsilon_0 \omega (k+1) r^2}{3\kappa(\omega+1)} \left[1 + \frac{Xbr^\alpha}{4\omega(k+1)} \right]^{1 - \frac{3k(\omega+1)(\alpha^2-4)}{\alpha X}} \quad (5.30)$$

olarak elde edilir. Yıldızın dışında ise bu model $R = 0$ olan Einstein-Maxwell teoriye dönüşür.

$$L = \frac{1}{2\kappa^2} R * 1 - \epsilon_0 F \wedge *F + 2A \wedge J + L_m + \lambda_a \wedge T^a. \quad (5.31)$$

Bu modele karşılık gelen Reissner-Nordström çözümü ise

$$ds_{out}^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_b} + \frac{\kappa Q^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0 r_b^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_b} + \frac{\kappa Q^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0 r_b^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (5.32)$$

olarak ifade edilir.

5.3 Süreklilik ve Sınır Koşulları

Yıldızın gravitasyonel potansiyeli yıldızın iç ve dış kısımlarını ayıran yüzeyinde sürekli olmalıdır. Yıldızın yüzeyinde yıldızın iç çözümü ile dışarıdaki boşluk çözümünü eşleyerek

$$a^2 r_b^2 = 1 - \frac{2GM}{c^2 r_b} + \frac{\kappa Q^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0 r_b^2}, \quad (5.33)$$

$$\frac{3}{1 + b r_b^\alpha} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_b} + \frac{\kappa Q^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0 r_b^2}\right)^{-1}. \quad (5.34)$$

koşulları elde edilir. Bu denklemlerden yıldızın iç geometrisinin metrik fonksiyonlarındaki a ve b sabitleri çözümlerse

$$b = \frac{2r_b^2 - 6GM r_b / c^2 + 3\kappa Q^2 / (4\pi)^2 \epsilon_0}{r_b^{2+\alpha}}, \quad (5.35)$$

$$a^2 = \frac{1 + b r_b^\alpha}{3r_b^2} \quad (5.36)$$

olarak bulunur. Yıldızın sınırında ve dış kısmında madde olmadığından radyal basınç sıfır olacaktır, $p_r(r_b) = \omega c^2 \rho(r_b) = 0$, buradan b parametresi

$$b = \frac{2}{(\alpha - 2)r_b^\alpha}. \quad (5.37)$$

olarak elde edilir. Burada k parametresinin aralığını radyal basınçın pozitif olma koşulunu kullanarak belirleyebiliriz. Bununla birlikte ω nın da aralığını belirlememiz gerekir. Burada $\omega = \frac{dp_r}{d\rho}$ ifadesi ses hızı olarak tanımlanır. Madde içinde ses hızı negatif olmadığı için ve normal madde içinde ses hızının c^2 ışık hızının karesinden daha büyük olmaması gerektiği için ω parametresinin aralığı $0 \leq \omega \leq 1$ olarak

alınmalıdır. Bu aralıkta (5.21) ile verilen $p_t(r)$ nin ikinci kısmı negatif olamadığı için ilk kısımdan aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$(k+1)(\alpha-2) - X \geq 0 \quad (5.38)$$

$p_t(r)$ fonksiyonunu minimum yapan $\omega = 1$ için eşitsizlik

$$3(1-k)(\alpha+2) \geq 0 \quad (5.39)$$

haline gelir. Teğetsel basıncının negatif olmaması için $k \leq 1$ olmalıdır. Diğer yandan toplam elektrik yükünün reel değerli bir fonksiyon olması için

$$1 + \frac{2X}{4\omega(k+1)(\alpha-2)} \geq 0 \quad (5.40)$$

olmalıdır. Buradan $k \geq \frac{2}{\alpha}$ bulunur. Sonuçta k parametresinin aralığı

$$\frac{2}{\alpha} < k \leq 1 \quad (5.41)$$

elde edilir.

Süreklilik sınır koşulundan dolayı yıldızın iç kısmındaki elektrik yükü $q(r)$, yıldızın dış kısmındaki toplam Q yüküne eşit olmalıdır. Yani $q(r_b) = Q$ eşitliğinde (5.37) yerine yazıldığında

$$Q^2(r) = \frac{32\pi^2\epsilon_0\omega(k+1)r_b^2}{3\kappa(\omega+1)} \left[1 + \frac{2X}{4\omega(k+1)(\alpha-2)} \right]^{1 - \frac{3k(\omega+1)(\alpha^2-4)}{\alpha X}} \quad (5.42)$$

bulunur. (5.35) ve (5.37) ifadelerini eşitlediğimizde yıldızın toplam kütlesi

$$M = \left(\frac{\alpha-3}{\alpha-2} \right) \frac{c^2 r_b}{3G} + \frac{c^2 r_b \omega(k+1)}{3G(\omega+1)} \left[1 + \frac{2X}{4\omega(k+1)(\alpha-2)} \right]^{1 - \frac{3k(\omega+1)(\alpha^2-4)}{\alpha X}} \quad (5.43)$$

elde edilir.

Anizotropik yıldızın maddesel kütlesi

$$M_m = \frac{\kappa^2 c^2}{2G} \int_0^{r_b} r^2 \rho dr = \frac{\alpha(k+1)r_b c^2}{3G(\omega+1)(\alpha+1)}. \quad (5.44)$$

olarak hesaplanır. Yine yıldızın yüzeysel gravitasyonel kırmızıya kayması

$$z := \frac{1}{f(r_b)} - 1 \quad (5.45)$$

tanımından

$$z = \sqrt{\frac{3(\alpha - 2)}{\alpha}} - 1 . \quad (5.46)$$

olarak hesaplanır. Bu kırmızıya kayma formülünden gördüğümüz gibi Gravitasyonel kırmızıya kayma ω ve k parametrelerinden bağımsızdır. Kırmızıya kaymanın üst sınırı olan maksimum kırmızıya kayma miktarı $\alpha \rightarrow \infty$ limitinden $z \rightarrow 0,732$ olarak bulunabilir. Böylece yüzeyden kaynaklanan kırmızıya kayma aralığı $0 < z < 0,732$ olarak bulunur. Ayrıca $\alpha = 3$ ise $z = 0$ olur. Buradan gözlemsel deneylerle uyumlu bir model için $\alpha > 3$ olması gerektiği görülebilir. $Y(R)F^2$ modelinde (5.46) bağıntısı kullanılarak gözlemlerle örtüşen yüzeysel gravitasyonel kırmızıya kaymayı verecek α parametresi belirlenebilir. Bu sonuçlar daha detaylı olarak Sert ve diğ. (2018) makalesinde yayınlanmıştır.

6. RF^2 TÜRÜ BAĞLANMA TERİMLERİ İÇİN KARARLILIK ANALİZİ

Bu bölümde öncelikle RF^2 türü bağlanma terimleri için kararlılık analizi incelenecektir. Daha sonra bu çalışmalar minimal olmayan $Y(R)F^2$ bağlanımlı çalışmalara uygulanacaktır. Bu yeni terimlerin bilinen temel çözümlerden ne kadar uzaklaştığı tartışılacaktır.

Jiménez ve diğ. (2013) makalesinde en fazla ikinci mertebeden türevler içeren, böylelikle ghost terimleri içermeyen bir Lagrangian olarak aşağıdaki model ele alınmıştır.

$$L = \frac{1}{2}R - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(RF_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - 4R_{\mu\nu}F^{\mu\sigma}F^{\nu}_{\sigma} + R_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}) \quad (6.1)$$

Bu modeli diferansiyel form notasyonu ile tekrar yazalım

$$L = \frac{1}{2}R * 1 - \frac{1}{2}F \wedge *F + R_{ab}F^{ab} \wedge *F + 2R_a \wedge F^a \wedge *F + RF \wedge *F \quad (6.2)$$

Biz daha genel olarak

$$L = \frac{1}{2}R * 1 - \frac{1}{2}F \wedge *F + c_1 R_{ab}F^{ab} \wedge *F + c_2 R_a \wedge F^a \wedge *F + c_3 RF \wedge *F \quad (6.3)$$

lagrangianı ile başlayıp $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 1$ alarak yukarıdaki lagrangianı elde edebiliriz. Burada $R * 1$, $F \wedge *F$, $R_{ab}F^{ab} \wedge *F$, $R_a \wedge F^a \wedge *F$ ve $RF \wedge *F$ terimleri Horndeski terimleri olarak bilinir. Bu modelin kararlılık analizi Jiménez ve diğ. (2013) makalesinde bulunabilir. Bu çalışmaya benzer olarak minimal olmayan $Y(R)F^2$ bağlanma terimi içeren, aşağıda verilen lagrangian için kararlılık analizine bakacağız.

$$L = R * 1 - Y(R)F \wedge *F \quad (6.4)$$

Bu model için alan denklemleri

$$-\frac{1}{2\kappa^2}R^{bc} \wedge *e_{abc} = \frac{1}{2}Y(\iota_a F \wedge *F - F \wedge \iota_a *F) + \frac{1}{2}Y_R F_{mn}F^{mn} *R_a \quad (6.5)$$

$$d(*YF) = 0, \quad dF = 0 \quad (6.6)$$

olarak daha önce elde edilmişti.

6.1 Kozmolojik FLRW Metriği Arkaplanında Kararlılık Analizi

İlk olarak FLRW metriğinde Horndeski terimlerinin kararlılığına bakalım. Özellikle evrendeki madde ve radyasyonun baskın olduğu evrenin sonraki safhasında elektromanyetik etkiler gravitasyondan daha baskın olduğu için F Maxwell alanının geometri üzerindeki geri etkileri ihmal edilecektir. Sadece gravitasyonun bu Horndeski terimleri üzerine etkileri düşünülecek ve bu etkiler FLRW metriği arkaplanında ele alınacaktır. Yani eylemdeki gravitasyonel kısmın ihmal edildiği Maxwell alanının baskın olduğu aşağıdaki efektif lagrangian durumunda kararlılığa bakılacaktır.

$$L = -\frac{1}{2}F \wedge *F + c_1 R_{ab} F^{ab} \wedge *F + c_2 R_a \wedge F^a \wedge *F + c_3 R F \wedge *F \quad (6.7)$$

Burada FLRW metriğini

$$ds^2 = a^2(t)(-e^0 \otimes e^0 + e^1 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2 + e^3 \otimes e^3) \quad (6.8)$$

olarak alalım. Bu metriğin eğrilik skalarını hesaplırsak $R = \frac{6a''}{a^3}$ elde ederiz. 4-hız vektörü u^a yardımıyla bir gözlemciye bağlı elektrik ve manyetik alanlar sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$E = \iota_u F = u_a \iota^a F = u_a F^a = u_a F^{ab} e_b = F_{ab} u^a e^b \quad (6.9)$$

Burada zamansal bir vektör olarak $u^a = (-1, 0, 0, 0)$ alınır. Buradan Minkowski metriği ile $u_a = (1, 0, 0, 0)$ olur. Yani u^a vektörünün sadece sıfıncı bileşeni sıfırdan farklıdır. F_{ab} antisimetrik olduğu için sadece $F_{0i} u^0 e^i$ ifadesi sıfırdan farklı olur. Böylece $E_0 = F_{00}$ bileşeni yoktur. Yani elektrik alan $E = F_{0i} u^0 e^i = E_i e^i$ dir. Aynı şekilde manyetik alan

$$B = \iota_u *F = u_a \iota^a *F = u_a \iota^a * \frac{1}{2} F_{bc} e^{bc} = \frac{1}{2} u_a F_{bc} \iota^a \frac{1}{2} \epsilon^{bc}{}_{kl} e^{kl} \quad (6.10)$$

$$= \frac{1}{2} u^k F_{bc} \epsilon^{bc}{}_{kl} e^l \quad (6.11)$$

olarak hesaplanır. Yani $B = B_l e^l$ dir. Bu vektörlerle Faraday tensörü olarak da bilinen elektromanyetik tensörü yazalım.

$$F = \frac{1}{2} E \wedge u - \frac{1}{2} * (B \wedge u). \quad (6.12)$$

Bu elektromanyetik tensörü bileşenleri cinsinden açıkça yazmak istersek

$$F = \frac{1}{2} F_{ab} e^{ab} \quad (6.13)$$

$$F = E_1 e^{01} + E_2 e^{02} + E_3 e^{03} + B_1 e^{23} + B_2 e^{31} + B_3 e^{12} \quad (6.14)$$

olduğu görülür. F tensörünü ι^a ile iç çarpım yaparsak F^a 1-formu

$$F^a = \frac{1}{2} E^a \wedge u_b e^b - \frac{1}{2} E_i e^i \wedge u^a - \frac{1}{2} B_c u_d \iota^a * e^{cd} \quad (6.15)$$

elde ederiz. Yine F^a tensörünü ι^b ile iç çarpım yaparsak F^{ab} 0-formunu elde ederiz.

$$F^{ab} = \frac{1}{2} E^a \wedge u^b - \frac{1}{2} E^b \wedge u^a - \frac{1}{2} B_c u_d \epsilon^{abcd} \quad (6.16)$$

Yukarıdaki ifadeleri (6.7) modelindeki her bir terimi hesaplamak için kullanalım. İlk terim,

$$\frac{1}{2} F \wedge *F = \frac{1}{2} (-E^i E_i + B^i B_i) \quad (6.17)$$

ikinci terim,

$$\begin{aligned} F^{ab} R_{ab} \wedge *F &= 2(F^{01} R_{01} \wedge *F + F^{02} R_{02ab} \wedge *F + F^{03} R_{03} \wedge *F + F^{12} R_{12} \wedge *F \\ &\quad + F^{13} R_{13} \wedge *F + F^{23} R_{23} \wedge *F) \\ &= 2 \left[-E_1 \left(-\frac{\ddot{a}}{a^3} + \frac{\dot{a}^2}{a^4} \right) e^{01} + \dots + B_3 \frac{\dot{a}^2}{a^4} e^{12} + \dots \right] \\ &\quad \wedge (-E_1 e^{23} + E_2 e^{13} - E_3 e^{12} + B_3 e^{03} + B_1 e^{01} + B_2 e^{02}) \\ &= \left(-2 \frac{\ddot{a}}{a^3} + 2 \frac{\dot{a}^2}{a^4} \right) E_i E^i * 1 + 2 \frac{\dot{a}^2}{a^4} B_i B^i * 1 \end{aligned} \quad (6.18)$$

üçüncü terim,

$$\begin{aligned} 2F^a \wedge R_a \wedge *F &= 2(F^0 \wedge R_0 \wedge *F + F^1 \wedge R_1 \wedge *F + F^2 \wedge R_2 + F^3 \wedge R_3 \wedge *F) \\ &= \left[\left(\frac{8\ddot{a}}{a^3} - \frac{4\dot{a}^2}{a^4} \right) E_i E^i - \left(\frac{4\ddot{a}}{a^3} + \frac{4\dot{a}^2}{a^4} \right) B_i B^i \right] * 1 \end{aligned} \quad (6.19)$$

ve son terim

$$RF \wedge *F = 6 \frac{\ddot{a}}{a^3} (-E^i E_i + B^i B_i)$$

bulunur. Bulunan bu terimler (6.7) de yerine koyularak integral içinde yazıldığında

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{2} \int \left[\left(1 - 2a_3 \frac{4\ddot{a}}{a^3} + 2a_4 \frac{\dot{a}^2}{a^4} \right) E^i E_i - \left(1 - 2a_1 \frac{\ddot{a}}{a^3} - 2a_2 \frac{\dot{a}^2}{a^4} \right) B^i B_i \right] * \quad (6.20)$$

Burada $a_1 = -2c_1 + 8c_2 - 6c_3$, $a_2 = 2c_1 - 4c_2$, $a_3 = -4c_2 + 6c_3$, $a_4 = 2c_1 - 4c_2$ alınmıştır. Işığın yayılma hızı c_s böyle bir eylemde $B^i B_i$ katsayısının $-E^i E_i$ katsayısına oranı ile bulunur.

$$c_s^2 = \frac{1 - 2a_1 \frac{\ddot{a}}{a^3} - 2a_2 \frac{\dot{a}^2}{a^4}}{1 - 2a_3 \frac{4\ddot{a}}{a^3} + 2a_4 \frac{\dot{a}^2}{a^4}} \quad (6.21)$$

Burada en genel ikinci mertebeden diferansiyel denklemlere yol açan eylem için $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ alınır

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{2} \int \left[\left(1 + \frac{4\dot{a}^2}{a^4} \right) E^i E_i - \left(1 + \frac{4\ddot{a}}{a^3} - \frac{4\dot{a}^2}{a^4} \right) B^i B_i \right] * 1 \quad (6.22)$$

eylem fonksiyoneli elde edilir. Bu eylem Hubble parametresi $\mathcal{H} = \frac{\dot{a}}{a}$ ve yavaşlama parametresi $q = -\frac{\ddot{a}}{\mathcal{H}^2}$ olmak üzere (6.22)

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{2} \int \left[\left(1 + \frac{4\mathcal{H}^2}{a^2} \right) E^i E_i - \left(1 - \frac{4q\mathcal{H}^2}{a^2} \right) B^i B_i \right] * 1 \quad (6.23)$$

ifadesine dönüşür. Bu durumda c_s ışığın ilerleme hızı $B^i B_i$ katsayısının $E^i E_i$ katsayısına oranıdır.

$$c_s^2 = \frac{1 - 4q\mathcal{H}^2}{1 + 4\mathcal{H}^2} \quad (6.24)$$

Böylece c_s ışık hızının $c_s \leq 1$ olması için q yavaşlama parametresinin $q \geq -1$ olması gerekir.

Bu analizden görüleceği gibi $RF \wedge *F$ teriminden yararlanarak $Y(R)F \wedge *F$ terimi için kararlılık durumuna bakabiliriz. $RF \wedge *F$ terimi

$$RF \wedge *F = 6 \frac{\ddot{a}}{a^3} (-E^i E_i + B^i B_i) \quad (6.25)$$

olduğundan $Y(R)F \wedge *F$ terimi de benzer şekilde

$$Y(R)F \wedge *F = Y \left(\frac{\ddot{a}}{a^3} \right) (-E^i E_i + B^i B_i) \quad (6.26)$$

haline gelir. Yine manyetik kısmın katsayısının elektrik kısmın katsayısına oranına bakarsak ışık hızının $c_s = 1$ olduğu görülür. Böylece $Y(R)F \wedge *F$ türü teorilerin etkin (efektif) durumda FLRW arkaplanı kullanıldığında kararlılığında bir sorun olmadığı anlaşılır.

6.2 Schwarzschild Arkaplanında Kararlılık Analizi

Bu bölümde küresel simetrik, yüksüz ve dönmeyen M_* kütleli bir cismin dışındaki gravitasyonel alanını göz önüne alacağız. Bu durum Schwarzschild metriği ile aşağıdaki gibi tariflenir.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_s}{r} \right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{R_s}{r}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (6.27)$$

Burada $R_s = 2GM_*$, kara deliğin olay ufku ile belirlenen Schwarzschild yarıçapıdır. (6.27) metriği için ortonormal ko-çerçeve 1-formları

$$e^0 = \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}} dt, \quad e^1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}} dr, \quad de^2 = r d\theta, \quad e^3 = r \sin \theta d\phi \quad (6.28)$$

alınır. Bu ortonormal 1-formların dış türevi

$$de^0 = \frac{R_s}{2r^2 \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}} e^{10}, \quad de^1 = 0, \quad de^2 = \frac{1}{r} \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}} e^{12},$$

$$de^3 = \frac{1}{r} \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}} e^{13} + \frac{\cot \theta}{r} e^{23} \quad (6.29)$$

olarak elde edilir. Buradan (6.27) metriği için bağlantı 1-formlarını hesaplırsak

$$\begin{aligned}\omega_{01} &= -\frac{R_s}{2r^2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{R_s}{r}}} e^0, & \omega_{12} &= -\frac{1}{r} \sqrt{1-\frac{R_s}{r}} e^2, \\ \omega_{13} &= -\frac{1}{r} \sqrt{1-\frac{R_s}{r}} e^3, & \omega_{23} &= -\frac{\cot \theta}{r} e^3\end{aligned}\quad (6.30)$$

ve diğer bağlantı 1-formlarını sıfır olarak buluruz.

(6.30) bağlantı 1-formları kullanılarak eğrilik bileşenleri aşağıdaki gibi hesaplanır

$$\begin{aligned}R_{01} &= -\frac{R_s}{r^3} e^{01}, & R_{02} &= \frac{R_s}{2r^3} e^{02}, & R_{03} &= \frac{R_s}{2r^3} e^{03} \\ R_{12} &= -\frac{R_s}{2r^3} e^{12}, & R_{13} &= -\frac{R_s}{2r^3} e^{13}, & R_{23} &= \frac{R_s}{r^3} e^{23}.\end{aligned}\quad (6.31)$$

(6.27) metriği için Ricci skaleri hesaplandığında $R = 0$ bulunur. Böylece eylem

$$\mathcal{S} = \int \left[\frac{1}{2} F \wedge *F + F^{ab} R_{ab} \wedge *F \right] \quad (6.32)$$

şeklinde olmalıdır. Burada elektromanyetik tensör (6.14) deki gibi alınabilir.

$$F = E_1 e^{01} + E_2 e^{02} + E_3 e^{03} + B_1 e^{23} + B_2 e^{31} + B_3 e^{12}. \quad (6.33)$$

(6.33) deki elektromanyetik tensörün Hodge yıldızını alırsak

$$*F = -E_1 e^{23} + E_2 e^{13} - E_3 e^{12} + B_1 e^{01} + B_2 e^{02} + B_3 e^{03}. \quad (6.34)$$

elde edilir. Bu iki tensörün dış çarpımı alırsak modelin eylemindeki ilk terimi hesaplarız.

$$F \wedge *F = -E_1 E^1 - E_2 E^2 - E_3 E^3 + B_1 B^1 + B_2 B^2 + B_3 B^3 \quad (6.35)$$

$$= B_i B^i - E_i E^i \quad (6.36)$$

Yine (6.33) elektromanyetik tensörde iç çarpım yardımıyla aşağıdaki 1-formları

$$i^0 F = F^0 = -E_1 e^1 - E_2 e^2 - E_3 e^3, \quad (6.37)$$

$$i^1 F = F^1 = -E_1 e^0 + B_3 e^2 - B_2 e^3, \quad (6.38)$$

$$i^2 F = F^2 = -E_2 e^0 - B_3 e^1 + B_1 e^3 \quad (6.39)$$

buluruz. Yine iç çarpım yardımıyla elektromanyetik tensörün bileşenleri

$$\begin{aligned} i^{10}F &= F^{01} = -E_1, & i^{20}F &= F^{02} = -E_2, & i^{30}F &= F^{03} = -E_3 \\ i^{21}F &= F^{12} = B_3, & i^{31}F &= F^{13} = -B_2, & i^{32}F &= F^{23} = B_1 \end{aligned} \quad (6.40)$$

olarak bulunur. Bu ifadeleri kullanarak modelin eylemindeki ikinci terimi aşağıdaki gibi hesaplarız.

$$\begin{aligned} F^{ab}R_{ab} * F &= 2(F^{01}R_{01} \wedge *F + F^{02}R_{02} \wedge *F + F^{03}R_{03} \wedge *F + F^{12}R_{12} \wedge *F \\ &\quad + F^{13}R_{13} \wedge *F + F^{23}R_{23} \wedge *F) \\ &= 2 \left[E_1 \frac{R_s}{r^3} e^{01} - E_2 \frac{R_s}{2r^3} e^{02} - E_3 \frac{R_s}{2r^3} e^{03} - B_3 \frac{R_s}{2r^3} e^{12} + B_2 \frac{R_s}{2r^3} e^{13} + B_1 \frac{R_s}{r^3} e^{23} \right] \\ &\quad \wedge (-E_1 e^{23} + E_2 e^{13} - E_3 e^{12} + B_3 e^{03} + B_1 e^{01} + B_2 e^{02}) \\ &= -\frac{2R_s}{r^3} E_1 E^1 * 1 + \frac{R_s}{r^3} (E_2 E^2 + E_3 E^3) * 1 \\ &\quad + \frac{2R_s}{r^3} B_1 B^1 * 1 - \frac{R_s}{r^3} (B_2 B^2 + B_3 B^3) * 1 \end{aligned} \quad (6.41)$$

Bulduğumuz bu sonuçları (6.32) eyleminde yerine koyduğumuzda aşağıdaki eylem integralini elde ederiz.

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \int [\alpha E_1 E^1 + \beta (E_2 E^2 + E_3 E^3) - \alpha B_1 B^1 - \beta (B_2 B^2 + B_3 B^3)] * 1 \quad (6.42)$$

Burada α ve β

$$\alpha = 1 + \frac{4R_s}{r^3} \quad (6.43)$$

$$\beta = 1 - \frac{2R_s}{r^3} \quad (6.44)$$

şeklindedir. Burada hayalet alanların olmaması için $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ olmalıdır. Bu durum ise

$$-1 < \frac{4R_s}{M^2 r^3} < 2 \quad (6.45)$$

eşitsizliğine götürür. Yine burada yaptığımız Schwarzschild metriğine benzer sonuçlar, Reissner-Nordström metriği arkaplanı için de elde edilebilir.

Minimal olmayan $Y(R)F \wedge *F$ türü bağlanma içeren modellerde de Schwarzschild ve Reissner-Nordström arkaplanında Ricci eğrilik skaları $R = 0$ olduğu için bu minimal olmayan fonksiyon $Y(R)$ sabit olur. Bu durumda yine ışık hızı $c = 1$ olarak bulunur. Böylece bu modellerin kararlı olduğu bulunur.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde elektromanyetik alanların gravitasyona minimal olmayan bağlanmalarını içeren modeller incelenmiştir. İlk olarak Noether simetrisi yaklaşımı kullanılarak, bu modellere karşılık gelen simetri ve korunumlu nicelikler elde edilmiştir. Daha sonra bu modellerin Euler-Lagrange denklemlerini veren noktasal (point like) lagrangianı elde edilerek, bu lagrangianın, modelin alan denklemleriyle aynı Euler-Lagrange denklemlerini verdiği gösterilmiştir. Daha sonra bu modele iki yeni karadelik çözümü önerilmiştir. Bu çözümlerin fiziksel ve termodinamik özellikleri incelenerek sonuçları ayrıntılı olarak verilmiştir. İkinci olarak, bu modelin anizotropik yıldızlara uygulanmasına bakılarak, anizotropik bir enerji-momentum tensörüne sahip yıldız için küresel simetrik, statik çözümler elde edilmiştir. Bu çözümlere karşılık gelen yıldızların kütleleri, elektrik yükleri ve yarıçapları arasındaki ilişki incelenmiştir. Son olarak bu modelin bazı bilinen FLRW, Schwarzschild gibi temel çözümler arkaplanında karalılık analizi incelenmiş ve bu yeni terimlerin kararlılığı engellemediği ortaya çıkarılmıştır.

5. KAYNAKLAR

- Abbott, B.P. ve diğ. (128 yazar), "GW150914: The Advanced LIGO Detectors in the Era of First Discoveries", *Phys. Rev. Lett.* 116, 131103, (2016).
- Abbott, B.P. ve diğ. (128 yazar), "Tests of General Relativity with GW150914", *Phys. Rev. Lett.* 116, 221101, (2016).
- Adak, M., Akarsu, O., Dereli, T., Sert, Ö., "Anisotropic inflation with a non-minimally coupled electromagnetic field to gravity", *JCAP*, 11 026, (2017).
- Adak, M., Kalay, M., Sert, Ö., "Lagrange formulation of the symmetric teleparallel gravity", *Int. J. Mod. Phys. D* , 15, 619, (2006).
- Adak, M., Sert, Ö., "A solution to symmetric teleparallel gravity", *Turk. J. Phys.* , 29, 1-7, (2005).
- Albrecht, A., Steinhardt, P. J., "Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking", *Phys. Rev. Lett.* 48, 1220, (1982).
- Allemandi, G., Borowiec, A., Francaviglia, M., "Accelerated Cosmological Models in Ricci squared Gravity", *Phys. Rev. D* 70, 103503, (2004).
- Amanullah, R., Lidman, C., Rubin, D. ve diğ., "New Constraints on Ω_M , Ω_Λ , and w from an Independent set of 11 High-Redshift Supernovae Observed with the Hubble Space Telescope", *Astrophys. J.* 716, 712, (2010).
- Asenbaum, P., Overstreet, c., Kim, M., "Atom-Interferometric Test of the Equivalence Principle at the 10^{-12} Level", *Phys. Rev. Lett.* 125, 191101, (2020).
- Azreg-Anou, M., "Black hole thermodynamics: No inconsistency via the inclusion of the missing P-V terms", *Phys. Rev. D* 91, 064049, (2015).
- Azreg-Anou, M., "Charged de Sitter-like black holes: quintessence-dependent enthalpy and new extreme solutions", *Eur. Phys. J. C* 75, no. 1, 34, (2015).
- Baer, H., Choi, K.-Y., Kim, J.E., Roszkowski, L., "Dark matter production in the early Universe: beyond the thermal WIMP paradigm", *Class. Physics Reports* 555, 1, (2015).
- Balart, L., Fernando, S. , "A Smarr formula for charged black holes in nonlinear electrodynamics", *Mod. Phys. Lett. A* , Vol. 32, No. 39, 1750219, (2017).
- Bamba, K., Nojiri, S., Odintsov, S.D., "Future of the universe in modified gravitational theories: Approaching to the finite-time future singularity", *JCAP* 0810:045, (2008).

- Bamba, K., Odintsov, S.D., "Inflation and late-time cosmic acceleration in non-minimal Maxwell- $F(R)$ gravity and the generation of large-scale magnetic fields", *JCAP* 0804:024, (2008).
- Baykal, A., Dereli, T., "A nonminimally coupled Einstein-Maxwell model in a non-Riemann space-time with torsion", *Phys.Rev. D* 92 6, 065018, (2015).
- Breton, N., "Smarr's formula for black holes with non-linear electrodynamics", *Gen.Rel.Grav.* 37:643-650, (2005).
- Brill, D.R., Gowdy, R.H., "Quantization of general relativity", *Rep. Prog. Phys* 33, 413, (1970).
- Campanelli, L., Cea, P., Fogli, G.L., Tedesco, L., "Inflation-Produced Magnetic Fields in $R^n F^2$ and IF^2 models", *Phys. Rev. D* 77, 123002, (2008).
- Capozziello, S., "Curvature Quintessence", *Int. J. Mod. Phys. D*, 11, 483-492, (2002).
- Capozziello, S., Cardone, V.F., Carloni, S., Troisi, A., "Curvature quintessence matched with observational data", *Int.J.Mod.Phys.D* 12:1969-1982, (2003).
- Capozziello, S., Cardone, V.F., Carloni, S., Troisi, A., "Can higher order curvature theories explain rotation curves of galaxies?", *Phys.Lett. A* 326, 292-296, (2004).
- Capozziello, S., Cardone, V.F., Troisi, A., "Dark energy and dark matter as curvature effects", *JCAP*0608:001, (2006).
- Capozziello, S., Cardone, V.F., Troisi, A., "Low surface brightness galaxy rotation curves in the low energy limit of R^n gravity: no need for dark matter?", *Mon. Not. R. Ast. Soc.* 375, 1423–1440, (2007).
- Capozziello, S., Carloni, S., Troisi, A., "Quintessence without scalar fields", *Recent Res.Dev.Astron.Astrophys.* 1:625, (2003).
- Capozziello, S., De Felice, A., " $f(R)$ cosmology by Noether's symmetry", *JCAP* 0808:016, (2008).
- Capozziello, S., Lambiase, G., "Higher-Order Corrections to the Effective Gravitational Action from Noether Symmetry Approach", *Gen.Rel.Grav.* 32, 295-311, (2000).
- Capozziello, S., Nesseris, S., Perivolaropoulos, L., "Reconstruction of the Scalar-Tensor Lagrangian from a Λ CDM Background and Noether Symmetry", *JCAP* 0712:009, (2007).
- Capozziello, S., Ritis, R., "Relation between the potential and nonminimal coupling in inflationary cosmology", *Phys. Lett. A* 177, 1, (1993).

- Capozziello, S., Ritis, R., Rubano, C., Scudellaro, P., "Nöther symmetries in cosmology", *La Rivista del Nuovo Cimento(1978-1999)*, 19, 1–114, (1996).
- Capozziello, S., Stabile, A., Troisi, A., "Spherically symmetric solutions in $f(R)$ -gravity via Noether Symmetry Approach", *Class. Quant. Grav.* 24:2153-2166, (2007).
- Carroll, S.M., Duvvuri, V., Trodden, M., Turner, M., "Is Cosmic Speed-Up Due to New Gravitational Physics?", *Phys.Rev.D* 70:043528, (2004).
- Cartan, E., "On manifolds with an affine connection and the theory of general relativity", edited 1986, *Bibliopolis*, Italy, (1923).
- Cognola, G., Elizalde, E., Nojiri, S. ve diğ., "One-loop $f(R)$ gravity in de Sitter universe", *JCAP* 0502:010, (2005).
- De la Cruz-Dombriz, A., Dobado, A., Maroto, A.L., "Black holes in $f(R)$ theories", *Phys. Rev. D* 80, 124011, (2009), *Phys. Rev. D* 83(E), 029903, (2011).
- Dereli, T., "Diferensiyel Formlar ve Maxwell Denklemleri, Ders Notları", TÜBİTAK Lisansüstü Yaz Okulu, 18-28 Sep, (1984).
- Dereli, T., Önder, M., Schray, J., Tucker, R.W. , Wang, C., "Non-Riemannian Gravity and the Einstein-Proca system", *Class. Quant. Grav.* , 13, L103, (1996).
- Dereli, T., Önder, M., Tucker, R.W., "Solutions for neutral axi-dilaton gravity in four dimensions", *Class. Quant. Grav.* , 12, L25, (1995).
- Dereli, T., Sert, Ö., "Non-minimal $R^\beta F^2$ -Coupled Electromagnetic Fields to Gravity and Static, Spherically Symmetric Solutions", *Mod. Phys. Lett. A* 26, 1487, (2011).
- Dereli, T., Sert, Ö., "Non-minimal $\ln(R)F^2$ Couplings of Electromagnetic Fields to Gravity: Static, Spherically Symmetric Solutions", *Eur. Phys. J. C* 71, 3, 1589, (2011).
- Dereli, T., Üçoluk, G., "Kaluza-Klein reduction of generalised theories of gravity and non- minimal gauge couplings", *Class. Q. Grav.* 7, 1109, (1990).
- Diaz-Alonso, J., Rubiera-Garcia, D., "Thermodynamic analysis of black hole solutions in gravitating nonlinear electrodynamics", *Gen. Rel. Grav.* 45, 1901-1950, (2013).
- Drummond, I.T., Hathrell, S.J., "QED vacuum polarization in a background gravitational field and its effect on the velocity of photons", *Phys. Rev. D* 22, 343, (1980).
- Flanders, H., "DiferentialForms with Applications to the Physical Sciences", ISBN 0122596501, Academic Press, New York, USA, (1963).

- Guth, A.H., "The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems", *Phys. Rev. D* 23, 347, (1981).
- Hayward, S.A., "Unified first law of black-hole dynamics and relativistic thermodynamics", *Class.Quant.Grav.* 15:3147-3162, (1998).
- Horndeski, G.W., "Conservation of charge and Einstein-Maxwell field equations", *J. Math. Phys.* 17, 1980, (1976).
- Hubble, E.P., "A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae", *Proc. US Nat. Acad. Sci.* 15, 168-173, (1929).
- Isham, C. J., "Quantum Gravity 2: A Second Oxford Symposium", edited by Isham, C. J., Penrose, R., and Sciama, D. W., *Clarendon Press*, Oxford, (1981).
- Jiménez, J. B., Durrer, R., Heisenberg, L., Thorsrud, M. "Stability of Horndeski vector-tensor interactions", *JCAP* 064, 1310, (2013).
- Kastor, D., Ray, S., Traschen, J., "Enthalpy and the Mechanics of AdS Black Holes", *Class. Quant. Grav.* 26, 195011, (2009).
- Kerner, R., "Cosmology without Singularity and Nonlinear Gravitational Lagrangians", *Gen. Rel. Grav.* 14, 5, (1982).
- Knop, R. A, Aldering, G., Amanullah, R. ve diğ., "New Constraints on Ω_M , Ω_Λ , and w from an Independent set of 11 High-Redshift Supernovae Observed with the Hubble Space Telescope", *Astrophys. J.* 598, 102, (2003).
- Komar, A., "Covariant Conservation Laws in General Relativity", *Phys. Rev.* 113, 934, (1959).
- Liang, C., Gong, L., Zhang, B., "Smarr formula for BTZ black holes in general three-dimensional gravity models", *Class. Quant. Grav.* 34, 035017, (2017).
- Linde, A.D., "A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems", *Phys. Lett. B* 108, 389, (1982).
- Liu, H., Lu, H., Pope, C.N., "Generalised Smarr Formula and the Viscosity Bound for Einstein-Maxwell-Dilaton Black Holes", *Phys. Rev. D* 92, 064014, (2015).
- Mak, M.K., Harko, T., "Quark stars admitting a one-parameter group of conformal motions", *Int. J. Mod. Phys. D* , 13, 149, (2004).
- Mazharimousavi, S.H., Halilsoy, M., "Einstein-nonlinear Maxwell–Yukawa black hole", *International Journal of Modern Physics D* , 28, 09, 1950120, (2019).

- Mazzitelli, F.D., Spedalieri, F.M., "Scalar Electrodynamics and Primordial Magnetic Fields", *Phys. Rev. D* 52, 6694, (1995).
- Modak, S.K. , *Jour. Conf. Series* 405, 012023, (2012).
- Mueller-Hoissen, F., "Non-minimal Coupling from Dimensional Reduction of the Gauss-Bonnet action", *Physics Letters B*, 201, 3 (1988).
- Mueller-Hoissen, F., "Modification of Einstein-Yang-Mills theory from dimensional reduction of the Gauss-Bonnet action", *Class. Quant. Grav.* 5, L35 (1988).
- Myers, R.C., Perry, M.J., "Black holes in higher dimensional space-times", *Annals Phys.* 172, 304, (1986).
- Nojiri, S., Odintsov, S.D., "Where new gravitational physics comes from: M-theory?", *Phys. Lett. B* ,576,5, (2003).
- Nojiri, S., Odintsov, S.D, "Modified gravity with $\ln R$ terms and cosmic acceleration", *Gen. Rel. Grav.* 36:1765-1780, (2004).
- Overduin, J.M., Wesson, P.S., "Dark Matter and Background Light", *Class. Physics Reports*402, 267, (2004).
- Perlmutter, S., Aldering, G., Goldhaber ve diğ., "Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae", *Astrophys. J.*517, 565, (1999).
- Pound, R.V., Rebka, G.A., Jr., "Gravitational Red-Shift in Nuclear Resonance", *Phys. Rev. Lett.*3, 439, (1959).
- Prasanna, A.R., "A new invariant for electromagnetic fields in curved space-time", *Phys. Lett.*, A37, 331, (1971).
- Riess, A. G., Filippenko, A.V., Challis, P. ve diğ., "Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant", *Astron. J.*116, 1009, (1998).
- Roshan, M., Shojai, F., "Palatini $f(R)$ cosmology and Noether symmetry", *Phys.Lett. B* 668, 238, (2008).
- Schwarz, D.J., Copi, C.J., Huterer, D., Starkman, G.D., "CMB anomalies after Planck", *Class. Quant. Grav.*33 184001, (2016).
- Sert, Ö., "Genel rölativitenin simetrik teleparalel eşdeğeri ve Dirac denklemi", Yüksek Lisans Tezi *Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Fizik Anabilim Dalı, Denizli, (2005).
- Sert, Ö., "Gravity and Electromagnetism with Y(R)F2-type Coupling and Magnetic Monopole Solutions", *Eur. Phys. J. Plus*, 127: 152, (2012).

- Sert, Ö., "Electromagnetic duality and new solutions of the non-minimally coupled $Y(R)$ -Maxwell Gravity", *Modern Physics Letters A*, 28:12 1350049, 1-8 pp., (2013).
- Sert, Ö., "Regular black hole solutions of the non-minimally coupled $Y(R)F^2$ gravity", *J. Math. Phys.* 57, 032501 (2016).
- Sert, Ö., "Radiation fluid stars in the non-minimally coupled $Y(R)F^2$ gravity", *Eur. Phys. J. C*, 77: 97, (2017).
- Sert, Ö., "Inflation of the Universe by the Non-minimal $Y(R)F^2$ Models", *Mod.Phys.Lett.* A35, no.07, 2050037, (2019).
- Sert, Ö., Adak, M., "Anisotropic cosmological solutions to the $Y(R)F^2$ gravity", *Modern Physics Letters A*, Vol. 33, No. 1, 1950286 (2019).
- Sert, Ö., Çeliktaş, F. "Noether Symmetry Approach to the Non-Minimally Coupled $Y(R)F^2$ Gravity", *European Physical Journal C*, 80, 653 (2020).
- Sert, Ö., Çeliktaş, F., Adak, M., "Anisotropic Stars in the Non-minimal $Y(R)F^2$ Gravity", *Eur. Phys. J. C*, 78, 10, 824, (2018).
- Shapiro, I.I., Ash, M.E., Ingalls, R.P. ve diğ., "Fourth Test of General Relativity: New Radar Result", *Phys. Rev. Lett.* 26(18):1132-1135, (1971).
- Smarr, L., "Mass Formula for Kerr Black Holes", *Phys. Rev. Lett.* 30, 71 (1973).
- Sotiriou, T.P., "Modified Actions for Gravity: Theory and Phenomenology", PhD thesis, 230 pages, (2007).
- Starobinsky, A.A., "A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity", *Phys. Rev. Lett.* 91, 99, (1980).
- Thring, W., "Classical Mathematical Physics: Dynamical Systems and Field Theories", (3rd Edition), ISBN 0-397-94843-0, 539p., Springer-Verlag, (1997).
- Trautman, A., "On the Einstein-Cartan equations", I-IV, *Bull. Acad. Polon. Scie.*, 20, 185, 503, 895, (1972a, b, c, 1973a) *ibid.* 21 345 .
- Turner, M.S., Widrow, L.M., "Inflation-produced, large-scale magnetic fields", *Phys. Rev. D* 37, 2743, (1988).
- Vakili, B., "Noether symmetry in $f(R)$ cosmology", *Phys. Lett. B.* 664, (2008).
- Weinberg, D.H., Mortonson, M.J., Eisenstein, D.J. ve diğ., "Observational Probes of Cosmic Acceleration", *Physics Reports* 530, 87, (2013).