

**T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**EĞİMLİ AKİFERLERDE SU TABLASI DEĞİŞİMİNİN
SAYISAL ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GİZEM MERMER

DENİZLİ, TEMMUZ - 2022

**T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**



**EĞİMLİ AKİFERLERDE SU TABLASI DEĞİŞİMİNİN
SAYISAL ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GİZEM MERMER

DENİZLİ, TEMMUZ - 2022

KABUL VE ONAY SAYFASI

Gizem MERMER tarafından hazırlanan “**EĞİMLİ AKİFERLERDE SU TABLASI DEĞİŞİMİNİN SAYISAL ANALİZİ**” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 18.07.2022 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Danışman
Prof. Dr. Gürhan GÜRARSLAN
Pamukkale Üniversitesi

.....

Üye
Prof. Dr. Ülker GÜNER BACANLI
Pamukkale Üniversitesi

.....

Üye
Doç. Dr. Aslı Ülke KESKİN
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

.....

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
..... tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

.....

Prof. Dr. Yusuf ÖNER

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

İmza:

Öğrenci Adı Soyadı: Gizem Mermer

ÖZET

**EĞİMLİ AKİFERLERDE SU TABLASI DEĞİŞİMİNİN SAYISAL
ANALİZİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
GİZEM MERMER
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. GÜRHAN GÜRARSLAN)

DENİZLİ, TEMMUZ - 2022

Bu tez çalışmasında eğimli/geçirimsiz akiferlerin su tablası değişimini tanımlamak için doğrusal olmayan Boussinesq denkleminin MATLAB programı üzerinde Zaman Çizgileri Yöntemi'ne dayalı bir Sonlu Farklar şeması ile (FDM-MOL) yeni bir referans çözüm ile belirlenmesi amaçlanmıştır. İki farklı akifer örneği incelenmiş ve önceki çalışmalarda çeşitli yöntemlerle elde edilen sonuçlar farklı Δx değerleri alınarak elde edilen referans çözümler ile karşılaştırılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Akifer, Su Tablası, Sayısal Analiz, Sonlu Farklar Yöntemi, Zaman Çizgileri Yöntemi, MATLAB.

ABSTRACT

NUMERICAL ANALYSIS OF WATER TABLE FLUCTUATION IN SLOPING AQUIFERS

MASTER THESIS

GİZEM MERMER

PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE

DEPARTMENT OF CIVIL ENGINEERING

(SUPERVISOR:PROF. DR. GURHAN GURARSLAN)

DENİZLİ, JULY 2022

In this study, it is aimed to determine the non-linear Boussinesq equation with a new reference solution Finite Difference Method based on the Method of Lines (FDM-MOL) method on the MATLAB program to describe the water table change of sloped/impermeable aquifers. Two different aquifer samples were examined and the results obtained by various methods in previous studies were compared with the reference solutions created by taking different Δx values.

KEYWORDS: Aquifer, Water Table, Numerical analysis, Finite Difference Method, Method of Lines, MATLAB.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ŞEKİL LİSTESİ	iv
SEMBOL LİSTESİ	viii
KISALTMA LİSTESİ	ix
ÖNSÖZ	x
1. GİRİŞ	1
1.1 Amaç ve Kapsam.....	1
1.2 Tezin Organizasyonu.....	1
2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI	3
2.1 Analitik Çözümlere Dayalı Çalışmalar	4
2.2 Nümerik Çözümlere Dayalı Çalışmalar	12
2.3 Deneysel Çalışmalar	14
3. YÖNETİCİ DENKLEMLER	17
3.1 İki Drenaj Arasında Beslenme Olması Durumu.....	20
3.2 Tez Kapsamında İncelenen Problemlerin Yönetici Denklemleri.....	22
3.2.1 Birinci Problem: Eğimli Bir Akiferde Su Tablasının Alçalması	23
3.2.2 İkinci Problem: Sabit Beslenme Koşulları Altında Akarsu ve Eğimli Akiferin Etkileşimi	24
4. SONLU FARKLAR YÖNTEMİ	27
4.1 Taylor Serisi Açılımı ile Sonlu Farklar Yöntemi	27
4.2 Polinomlar Yardımı ile Sonlu Farklar Formüllerinin Türetilmesi	34
4.3 Bir Kısmi Diferansiyel Denklemin Sonlu Farklar Yöntemi ile Parçalanması.....	37
4.4 Karışık Kısmi Türevlerin Sonlu Fark Yaklaşımı	39
4.4.1 Taylor Serisi Açılımı	40
4.4.2 Tek Bağımsız Değişkenli Kısmi Türevlerin Açılımı.....	41
5. SAYISAL MODELİN TANITILMASI	46
5.1 Tezde Kullanılan Problemler ve Yönetici Denklemleri	46
5.2 Zaman Çizgileri Yöntemi (Method of Lines).....	47
6. MODEL SONUÇLARININ DEĞERLENDİRİLMESİ	49
6.1 Birinci Problem: Eğimli Bir Akiferde Su Tablasının Alçalması.....	49
6.2 İkinci Problem: Sabit Beslenme Koşulları Altında Akarsu ve Eğimli Akiferin Etkileşimi	52
6.2.1 Beslenme Olması Durumu.....	52
6.2.2 Boşaltma Olması Durumu	63
7. SONUÇ VE ÖNERİLER	73
8. KAYNAKLAR	75
9. ÖZGEÇMİŞ	80

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3.1: Eğimli ve geçirimsiz bir tabaka üzerinde Boussinesq denklemi (Chauhan 2014)	17
Şekil 3.2: İki Drenaj Arasında Beslenme ile Sabit Akış (Chauhan 2014)	21
Şekil 3.3: Eğimli bir akiferde düşen su tablasının gösterimi (Upadyaya ve Chauhan 2001 ^a)	23
Şekil 3.4: Sabit yeniden doldurma ve beslenme olması durumunda akiferdeki su tablası gösterimi (Upadyaya ve Chauhan 2001 ^b)	24
Şekil 3.5: Sabit yeniden doldurma ve boşaltma olması durumunda akiferdeki su tablası gösterimi (Upadyaya ve Chauhan 2001 ^b)	25
Şekil 4.1: Denklem (4.3)'teki grid noktalarının gösterimi (Hoffmann ve Chiang 2000).....	28
Şekil 4.2: Denklem (4.7)'teki grid noktalarının gösterimi (Hoffmann ve Chiang 2000).....	29
Şekil 4.3: Denklem (4.12)'teki grid noktalarının gösterimi (Hoffmann ve Chiang 2000).....	30
Şekil 4.4: f fonksiyonuna yaklaşan ikinci mertebeden bir polinom gösterimi (Hoffmann ve Chiang 2000)	34
Şekil 4.5: Farklı adım boyutlarına sahip f fonksiyonuna yaklaşan ikinci mertebeden bir polinomun gösterimi (Hoffmann ve Chiang 2000)....	36
Şekil 4.6: Denklem (4.54)'ün grid sistemi (Hoffmann ve Chiang 2000).....	38

TABLO LİSTESİ

Sayfa

Tablo 4.1: $O(\Delta x)$ kesme hatasına sahip ileri fark gösterimi (Hoffmann ve Chiang 2000).....	43
Tablo 4.2: $O(\Delta x)$ kesme hatasına sahip geri fark gösterimi (Hoffmann ve Chiang 2000).....	43
Tablo 4.3: $O(\Delta x)^2$ kesme hatasına sahip merkezi fark gösterimi (Hoffmann ve Chiang 2000).....	44
Tablo 4.5: $O(\Delta x)^2$ kesme hatasına sahip geri fark gösterimi (Hoffmann ve Chiang 2000).....	45
Tablo 4.6: $O(\Delta x)^4$ kesme hatasına sahip merkezi fark gösterimi (Hoffmann ve Chiang 2000).....	45
Tablo 5.1: DOPRI5 için Butcher dizisi (Bahar ve Gürarlan 2020).....	48
Tablo 6.1: Eğim olmaması durumunda orta noktadaki su tablası değerleri.....	49
Tablo 6.2: Eğim olmaması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri ..	50
Tablo 6.3: %4 eğim olması durumunda orta noktadaki su tablası değerleri.....	50
Tablo 6.4: %4 eğim olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri ..	50
Tablo 6.5: %6 eğim olması durumunda orta noktadaki su tablası değerleri.....	50
Tablo 6.6: %6 eğim olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri ..	51
Tablo 6.7: %8 eğim olması durumunda orta noktadaki su tablası değerleri.....	51
Tablo 6.8: %8 eğim olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri ..	51
Tablo 6.9: %0 eğim, $t = 1$ gün, $R = 0$ mm/gün ve beslenme olması durumundaki su tablası değerleri.....	52
Tablo 6.10: : %0 eğim, $t = 1$ gün, $R = 0$ mm/gün ve beslenme olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri	53
Tablo 6.11: %5 eğim, $t = 1$ gün, $R = 0$ mm/gün ve beslenme olması durumundaki su tablası değerleri	53
Tablo 6.12: %5 eğim, $t = 1$ gün, $R = 0$ mm/gün ve beslenme olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri	53
Tablo 6.13: %10 eğim, $t = 1$ gün, $R = 0$ mm/gün ve beslenme olması durumundaki su tablası değerleri	54
Tablo 6.14: %10 eğim, $t = 1$ gün, $R = 0$ mm/gün ve beslenme olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri	54
Tablo 6.15: %0 eğim, $t = 1$ gün, $R = 5$ mm/gün ve beslenme olması durumundaki su tablası değerleri	55
Tablo 6.16: %0 eğim, $t = 1$ gün, $R = 5$ mm/gün ve beslenme olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri	55
Tablo 6.17: %5 eğim, $t = 1$ gün, $R = 5$ mm/gün ve beslenme olması durumundaki su tablası değerleri	55
Tablo 6.18: %5 eğim, $t = 1$ gün, $R = 5$ mm/gün ve beslenme olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri	56
Tablo 6.19: %10 eğim, $t = 1$ gün, $R = 5$ mm/gün ve beslenme olması durumundaki su tablası değerleri	56
Tablo 6.20: %10 eğim, $t = 1$ gün, $R = 5$ mm/gün ve beslenme olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri	56

Tablo 6.21: %0 eğim, $t = 5$ gün, $R = 0$ mm/gün ve beslenme olması durumundaki su tablası değerleri	57
Tablo 6.22: %0 eğim, $t = 5$ gün, $R = 0$ mm/gün ve beslenme olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri	57
Tablo 6.23: %5 eğim, $t = 5$ gün, $R = 0$ mm/gün ve beslenme olması durumundaki su tablası değerleri	58
Tablo 6.24: %5 eğim, $t = 5$ gün, $R = 0$ mm/gün ve beslenme olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri	58
Tablo 6.25: %10 eğim, $t = 5$ gün, $R = 0$ mm/gün ve beslenme olması durumundaki su tablası değerleri	59
Tablo 6.26: : %10 eğim, $t = 5$ gün, $R = 0$ mm/gün ve beslenme olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri	59
Tablo 6.27: %0 eğim, $t = 5$ gün, $R = 5$ mm/gün ve beslenme olması durumundaki su tablası değerleri	60
Tablo 6.28: %0 eğim, $t = 5$ gün, $R = 5$ mm/gün ve beslenme olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri	60
Tablo 6.29: %5 eğim, $t = 5$ gün, $R = 5$ mm/gün ve beslenme durumundaki su tablası değerleri	61
Tablo 6.30: %5 eğim, $t = 5$ gün, $R = 5$ mm/gün ve beslenme durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri	61
Tablo 6.31: %10 eğim, $t = 5$ gün, $R = 5$ mm/gün ve beslenme olması durumundaki su tablası değerleri	62
Tablo 6.32: %10 eğim, $t = 5$ gün, $R = 5$ mm/gün ve beslenme olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri	62
Tablo 6.33: %0 eğim, $t = 1$ gün, $R = 0$ mm/gün ve boşaltma olması durumundaki su tablası değerleri	63
Tablo 6.34: %0 eğim, $t = 1$ gün, $R = 0$ mm/gün ve boşaltma olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri	63
Tablo 6.35: %5 eğim, $t = 1$ gün, $R = 0$ mm/gün ve boşaltma olması durumundaki su tablası değerleri	64
Tablo 6.36: %5 eğim, $t = 1$ gün, $R = 0$ mm/gün ve boşaltma olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri	64
Tablo 6.37: %10 eğim, $t = 1$ gün, $R = 0$ mm/gün ve boşaltma olması durumundaki su tablası değerleri	64
Tablo 6.38: %10 eğim, $t = 1$ gün, $R = 0$ mm/gün ve boşaltma olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri	65
Tablo 6.39: %0 eğim, $t = 1$ gün, $R = 5$ mm/gün ve boşaltma olması durumundaki su tablası değerleri	65
Tablo 6.40: %0 eğim, $t = 1$ gün, $R = 5$ mm/gün ve boşaltma olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri	65
Tablo 6.41: %5 eğim, $t = 1$ gün, $R = 5$ mm/gün ve boşaltma olması durumundaki su tablası değerleri	66
Tablo 6.42: %5 eğim, $t = 1$ gün, $R = 5$ mm/gün ve boşaltma olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri	66
Tablo 6.43: %10 eğim, $t = 1$ gün, $R = 5$ mm/gün ve boşaltma olması durumundaki su tablası değerleri	66
Tablo 6.44: %10 eğim, $t = 1$ gün, $R = 5$ mm/gün ve boşaltma olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri	67
Tablo 6.45: %0 eğim, $t = 5$ gün, $R = 0$ mm/gün ve boşaltma olması durumundaki su tablası değerleri	67

Tablo 6.46: %0 eğim, $t = 5$ gün, $R = 0$ mm/gün ve boşaltma olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri	68
Tablo 6.47: %5 eğim, $t = 5$ gün, $R = 0$ mm/gün ve boşaltma olması durumundaki su tablası değerleri	68
Tablo 6.48: %5 eğim, $t = 5$ gün, $R = 0$ mm/gün ve boşaltma olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri	68
Tablo 6.49: %10 eğim, $t = 5$ gün, $R = 0$ mm/gün ve boşaltma olması durumundaki su tablası değerleri	69
Tablo 6.50: %10 eğim, $t = 5$ gün, $R = 0$ mm/gün ve boşaltma olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri	69
Tablo 6.51: %0 eğim, $t = 5$ gün, $R = 5$ mm/gün ve boşaltma olması durumundaki su tablası değerleri	70
Tablo 6.52: : %0 eğim, $t = 5$ gün, $R = 5$ mm/gün ve boşaltma olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri	70
Tablo 6.53: %5 eğim, $t = 5$ gün, $R = 5$ mm/gün ve boşaltma olması durumundaki su tablası değerleri	71
Tablo 6.54: %5 eğim, $t = 5$ gün, $R = 5$ mm/gün ve boşaltma olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri	71
Tablo 6.55: %10 eğim, $t = 5$ gün, $R = 5$ mm/gün ve boşaltma olması durumundaki su tablası değerleri	72
Tablo 6.56: %10 eğim, $t = 5$ gün, $R = 5$ mm/gün ve boşaltma olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri	72

SEMBOL LİSTESİ

t	:	Zaman
x	:	Konum
x₀	:	İlk Konum
x_f	:	Son Konum
H	:	Su Yüksekliği
h	:	Su Tablası Yüksekliği
h₀	:	İlk Su Tablası Yüksekliği
S	:	Akifer Spesifik Verimi
q_x	:	x Yönünde Birim Zaman ve Alan Başına Su Girişi/Çıkışı
q_y	:	y Yönünde Birim Zaman ve Alan Başına Su Girişi/Çıkışı
R	:	Şarj
K	:	Hidrolik İletkenlik
f	:	Akifer Porozitesi
α	:	Eğim
z	:	xy Düzlemi Üzerindeki Dikey Mesafe
c₁	:	İntegral Sabiti
c₂	:	İntegral Sabiti
R	:	Yeniden Doldurma
L	:	Akifer Uzunluğu
Δx	:	Adım Boyutu
D	:	Derinlik
i²xerfc(y)	:	y hata fonksiyonunun ikinci dereceden integrali
V	:	Suyun Herhangibir Zamandaki Kümülatif Çıkış Hacmi
V_i	:	Dikdörtgen Bölgede Bulunan Suyun Başlangıç Hacmi
W	:	Sistem Genişliği
Y	:	Laplace Değişkeni
Δx_f	:	İlk İleri Fark
∇x_f	:	İlk Geri Fark
A	:	Katsayı
B	:	Katsayı
C	:	Katsayı
F	:	Konumsal Diferansiyel Operatör
p	:	Zaman İndeksi
v	:	Kademe İndeksi
k_v	:	Her Aşamada Hesaplanan Yaklaşık Eğim Matrisi
Δt_p	:	t _p Zamanında Dinamik Olarak Belirlenen Zaman Adımı
e_{tol}	:	Belirlenen Tolerans Değeri

KISALTMA LİSTESİ

ADI	: Değişen Doğrultulu Kapalı Yöntem
DQM	: Diferansiyel Kareleme Yöntemi
RK4	: 4. Mertebeden Runge-Kutta Yöntemi
PDE	: Kısmi Diferansiyel Denklem
MOL	: Zaman Çizgileri Yöntemi

ÖNSÖZ

Bu çalışmada eğimli/geçirimsiz akiferlerin su tablası değişimini tanımlamak için doğrusal olmayan Boussinesq denkleminin MATLAB programı üzerinde FDM-MOL yöntemine dayalı yeni bir referans çözüm ile belirlenmesi amaçlanmıştır. İki farklı akifer örneği incelenmiş ve önceki çalışmalarda çeşitli yöntemlerle elde edilen sonuçlar farklı Δx değerleri alınarak elde edilen referans çözümler ile karşılaştırılmıştır.

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde, tezde kullanılan algoritmaların hazırlanmasında ve tezin her aşamasında bilgi, deneyim ve sabrını esirgemeyerek beni tavsiyeleriyle yönlendiren, destekleyen, her zaman farklı bir pencereden bakmamı sağlayan ve ufku genişleten danışmanım Prof. Dr. Gürhan Gürarlan'a çok teşekkür ederim. Bugünlere gelmemde katkısı olan ismini saymadığım tüm hocalarıma, tez süresince moral ve motivasyon kaynağım olan bütün arkadaşlarıma, tezimin son zamanlarında bana arkadaş olan ve maddi, manevi beni destekleyen kuzenim Buket'e ve hayatım boyunca maddi, manevi hep arkamda olan annem Semra, babam Mehmet Süleyman ve kardeşim Kaan Efe'ye minnettarım.

1. GİRİŞ

1.1 Amaç ve Kapsam

Yeraltı suları, denizler, okyanuslar, atmosfer ve yeryüzü arasında olan su döngüsünün bir unsurunu meydana getirir. Yeraltı suyu ve yüzey suyu sistemleri arasında var olan etkileşim, doğada gözlemlenen yaygın bir olgudur. Gözlemlenen bu etkileşim, bir yağış sırasında veya sonrasında meydana gelebilir. Su tablasının yüksekliği ve yeraltı suyu miktarı besleme ve boşaltma olması durumu ile değişir. Toprağa yağmur suyu sızdığında, su tablası yükselir ve bu da yeraltı suyunun bir yüzey suyu beslenmesine sebep olur. Su çekilen yapılarda örneğin kuyu gibi, su tablası alçalır ve çukurluk meydana gelir. Buradan da anlaşılacağı üzere bir genelleme yapılırsa, beslemenin fazla olduğu yerlerde su tablası yüksekliği ve yeraltı suyu seviyesi artar. Beslemenin az ve boşaltmanın fazla olduğu yerlerde ise tam tersi şekilde su tablası yüksekliği ve yeraltı suyu seviyesi azalır (Özdemir 2016). Sürdürülebilir bir yeraltı suyu yönetimi için, besleme, boşaltma gibi olaylar sırasında ve sonrasında yeraltı suyu tablasının hareketlerini anlamak oldukça önemlidir.

Bu tez kapsamında, eğimli/geçirimsiz akiferlerin su tablası değişimini tanımlamak için doğrusal olmayan Boussinesq denkleminin MATLAB programı üzerinde FDM-MOL yöntemine dayalı yeni bir referans çözüm ile belirlenmesi amaçlanmıştır. İki farklı akifer örneği incelenmiş ve önceki çalışmalarda çeşitli yöntemlerle elde edilen sonuçlar farklı Δx değerleri alınarak elde edilen referans çözümler ile karşılaştırılmıştır.

1.2 Tezin Organizasyonu

Bölüm 2’de ilk olarak literatür taraması yapılmıştır. Analitik çözümlere dayalı çalışmalar, nümerik çözümlere dayalı çalışmalar ve deneysel çalışmalar olarak ayrı ayrı anlatılmıştır.

Bölüm 3'te Dupuit-Forchheimer varsayımına dayanan Boussinesq denklemi tanıtılmış ve bu denklemin elde edilişini anlatılmıştır. Daha sonrasında tez kapsamında incelenen problemler, bu problemlerin yönetici denklemleri, başlangıç ve sınır koşulları verilmiştir.

Bölüm 4'te Sonlu Farklar Yöntemi tanıtılmış, İleri Sonlu Fark, Geri Sonlu Fark ve Merkezi Sonlu Fark formülleri verilmiştir.

Bölüm 5'te Zaman Çizgileri Yöntemi tanıtılmıştır.

Bölüm 6'da tez kapsamında incelenen problemler, referans bir çözüm ile analiz edilip tablolar oluşturulmuştur.

Bölüm 7'de, bölüm 6'da önceki çalışmalardaki farklı sayısal yöntemlerden elde edilen sonuçlar geliştirilen referans çözümlerle karşılaştırılmıştır.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Dupuit (1863) tarafından geçirimsiz bir tabakadaki yeraltı suyu akışının yaklaşık bir analizi yapılmıştır. Bu analizde kabul edilen varsayımlara göre, akış veya drenaj sınırları, akiferin tüm derinliğini tamamen keser ve yeraltı suyu akışı, sabit hidrolik özelliklere sahip homojen, izotropik bir ortamda gerçekleşir. Ayrıca yapılan bu analizler, Dupuit-Forchheimer varsayımları olarak bilinen aşağıdaki varsayımları da dikkate alır (Reddi 2003):

- a) Sızıntı hattı eğimindeki küçük değişiklikler için, hidrolik yük derinlikten bağımsızdır.
- b) Akışa neden olan hidrolik eğim, su tablasının eğimine eşittir.

Akarsu akışına yeraltı suyu deşarjının katkısı, yeraltı suyu akışı ya da taban akışı olarak adlandırılır. Yağış sırasında akımın esas olarak yüzeyde olduğu varsayılır. Yağışın olmadığı dönemlerde ise, akarsu akışı yeraltı suyu akışından oluşur (Hall 1968, Norum ve Luthin 1968). Bununla birlikte, bazı çalışmalar, yeraltı suyu akışının bir yağış olayı sırasında bile akarsu akışına hakim olabileceğini göstermiştir (Shanley ve diğ. 2002). Taban akışını tahmin etmek için, kuru dönemlerde akarsu akışına karşı bir havza içindeki ortalama yeraltı suyu tablası çizilerek taban akışının derecelendirme eğrisi oluşturulabilir (Schneider 1961). Küçük bir havzada bir yağış sırasında veya sonrasında yeraltı suyu tablası hızla yükselebilir ve bu yükselmeye meydana gelen su tablasındaki değişimler, bir durgunluk eğrisi ile gösterilebilir (Chow ve diğ. 1988). Durgunluk eğrisi, bir havzadaki drenaj oranını göstermektedir.

Bir şarj olayına yeraltı suyu tablasının tepkisi, akifer tabanının topoğrafya özelliklerine bağlı olabilmektedir. Eğimli yamaçlar, birçok havzadaki peyzaj unsurlarıdır. Bu nedenle topoğrafya unsurunun iyi anlaşılması gerekmektedir (Torch ve diğ. 2003). Buna ek olarak, hem ıslak hem de kuru koşullar altında yüksek arazi havzasının hidrolojisini kontrol eden ana unsurlardan biri, yamaçtaki yeraltı akışıdır (Brutsaert 1994). Birçok araştırmacı, analitik ve sayısal yaklaşımlar kullanarak, yarı sonsuz ve yatay akiferde, bitişik akıştaki su tablasının ani yükselmesi veya alçalmasından kaynaklanan su tablası değişimini incelemiştir.

2.1 Analitik Çözümlere Dayalı Çalışmalar

Boussinesq (1877), su tablası değişimi için basit bir doğrusallaştırma yöntemi önermiştir. Çünkü kullanılan yönetici denklem doğrusal olmayan bir denklemdir. Çözümlerinde bu denklemler genellikle basitleştirilerek ve belli yaklaşımlar geliştirilerek çözülmektedir.

Chauhan (1968) tarafından, düz veya orta eğimli arazilerle ilgili yeraltı drenaj teorilerinin çoğu, süreklilik ve Dupuit-Forchheimer varsayımları ilkesine dayanarak türetilen Boussinesq kısmi diferansiyel denklemlerinin çözümü elde edilerek geliştirilmiştir. Paralel açık hendekler arasında uzanan eğimli arazide geçici su tablası düşüşü, analog bilgisayarda Boussinesq denklemi çözülerek ve hendeklerdeki sıfır ve değişken zaman uç koşulları için analitik yöntemlerle elde edilmiştir. Sonuçlar, viskoz akış modelinde yapılan gözlemlerle karşılaştırıldığında akış bölgesini, zaman değişkenli uç koşullara sahip çözümün, sıfır uç koşullu çözümden daha iyi tanımladığı görülmüştür.

Marino (1974), yatay bir akiferdeki geçici su profilleri için aşağıdaki analitik Denklemi türetmiştir.

$$h^2(x, t) - h_0^2 = \frac{2RDt}{S} \left\{ 1 - \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4i^2 \times \operatorname{erfc} \frac{l(n) + x}{\sqrt{\frac{KDt}{S}}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4i^2 \times \operatorname{erfc} \frac{l(n+1) - x}{\sqrt{\frac{KDt}{S}}} \right] \right\} \quad (2.1)$$

Buradaki h_0 , ilk su tablası değeri, h şarj etkisinden sonra su tablası yüksekliğidir ve L akifer uzunluğudur. $i^2 \times \operatorname{erfc}(y)$, y hata fonksiyonunun ikinci dereceden integralidir, $h(x, t)$ belirli bir zaman ve yerdeki hidrolik yüksekliktir. K hidrolik iletkenlik, D akifer derinliği, R şarj oranı ve S spesifik verimdir.

Denklem (2.1)'de verilen analitik çözüm için aşağıdaki başlangıç koşulu dikkate alınmıştır.

$$\begin{aligned}h^2 - h_0^2 &= 0 \\t &= 0 \\x &\geq 0\end{aligned}\tag{2.2}$$

Sınır koşulları ise aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}h^2 - h_0^2 &= 0 \\t &> 0 \\x &= 0\end{aligned}\tag{2.3.a}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(h^2 - h_0^2) &= 0 \\t &> 0 \\x &= \frac{L}{2}\end{aligned}\tag{2.3.b}$$

Yatay ve geçirimsiz bir bariyerin üzerinde farklı kotlarda bulunan iki kanal arasında yer alan sınırlandırılmamış bir akiferdeki su tablasının uzaysal ve zamansal değişimini tahmin etmek için analitik çözüm, Gill (1984) tarafından elde edilmiştir. Daha sonra Mustafa (1987), doğrusallaştırılmış Boussinesq denkleminde sabit şarj terimini dahil etmiş ve kanallardan sürekli şarj ve sızıntının su tablası değişimi üzerindeki etkisini analiz etmiştir.

Melville ve Sims (1987), bir yamaçtaki akış probleminin farklı senaryoları için sabit durum boyutsuz analitik çözümler türetmiştir. Bu analitik çözümler, F 'in alacağı değerlere göre değişmektedir. F değeri aşağıdaki Denklem ile bulunmaktadır.

$$F = \frac{R}{KT^2}\tag{2.4}$$

Denklem (2.4)'teki R şarj oranı ve K hidrolik iletkenliktir.

$F = 0.25$ olduğunda analitik çözüm aşağıdaki gibidir.

$$\ln\left(\frac{H}{H_0}\right) = \frac{\frac{x}{H}}{2 - \frac{x}{H}} - \ln\left[1 - \left(\frac{x}{H}\right) + \left(\frac{x}{2H}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.5)$$

Buradaki H , aşağıdaki gibi elde edilir.

$$H = \frac{hC^2}{LS} \quad (2.6)$$

Denklem (2.6)'daki h su tablası yüksekliği ve $C = \cos \theta$, $S = \sin \theta$ 'dir. F değerinin 0.25'ten küçük ve 0.25'ten büyük olması durumunda ise analitik çözüm aşağıda verilen Denklem (2.7) ve (2.8)'ten elde edilmektedir.

$F < 0.25$ olduğunda;

$$\ln\left(\frac{H}{H_0}\right) = \frac{1}{2\sqrt{1-4F}} \ln\left\{\frac{2 - \left(\frac{x}{H}\right)(1 - \sqrt{1-4F})}{2 - \left(\frac{x}{H}\right)(1 + \sqrt{1-4F})}\right\} - \ln\left[1 - \left(\frac{x}{H}\right) + F\left(\frac{x}{H}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.7)$$

$F > 0.25$ olduğunda;

$$\ln\left(\frac{H}{H_0}\right) = \frac{1}{\sqrt{4F-1}} \left[\left(\frac{\pi}{2}\right) - \tan^{-1}\left\{\frac{2 - \left(\frac{x}{H}\right)}{\left(\frac{x}{H}\right)\sqrt{4F-1}}\right\} \right] - \ln\left[1 - \left(\frac{x}{H}\right) + F\left(\frac{x}{H}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.8)$$

Türetilen bu analitik çözümlerde dikkate alınan sınır koşulları aşağıdaki gibidir.

$$\frac{dh}{dx} = 0, \quad t > 0, \quad x = 0 \quad (2.9.a)$$

$$h = h_1, \quad t > 0, \quad x = L \quad (2.9.b)$$

Rai ve Singh (1992), Boussinesq denkleminde, sonunda sabit hale gelen ve zamanla doğrusal azalan bir şarj değişken oranını kabul edip Laplace dönüşümü yöntemini kullanarak bir analitik çözüm elde etmiştir.

Sanford ve diğ. (1993) tarafından hem yatay hem de eğimli bir akiferdeki geçici su profilleri için analitik bir çözüm türetmiştir. Yatay bir akifer için türetilen analitik çözüm aşağıdaki gibidir.

$$h = \frac{\gamma}{2}(2Lx - x^2) + h(0, t) \quad (2.10)$$

Buradaki L , akifer uzunluğu ve $h(0, t)$ su tablası sınır noktasıdır ($x = 0$). γ ise aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\gamma = \frac{3}{L^3} \left(\frac{V_i - V}{S_w} - h(0, t)L \right) \quad (2.11)$$

Buradaki V_i , dikdörtgen bölgede bulunan suyun başlangıç hacmi, V suyun herhangi bir zamanda kümülatif çıkış hacmidir. S , spesifik verim ve w ise sistemin genişliğidir.

Eğimli bir akifer için geçici su profili aşağıdaki analitik çözüm ile tahmin edilmiştir.

$$h = \frac{\gamma}{2}(2Lx - x^2) - x \tan \alpha + h(0, t) \quad (2.12)$$

Buradaki γ ise aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\gamma = \frac{3}{L^3} \left(\frac{V_i - V}{S_w} - h(0, t)L + \frac{1}{2}L^2 \tan \alpha \right) \quad (2.13)$$

Elde edilen bu çözüm için aşağıdaki başlangıç koşulu dikkate alınmıştır. Buradaki x_0 , başlangıçtaki konum ve t_0 başlangıçtaki zamandır.

$$h = h(x_0, t_0), \quad t = 0, \quad x \geq 0 \quad (2.14)$$

Sınır koşulları ise aşağıdaki gibidir.

$$h = h(x_0, t), \quad t > 0, \quad x = 0 \quad (2.15.a)$$

$$\frac{dh}{dx} = 0, \quad t > 0, \quad x = L \quad (2.15.b)$$

Fetter (1994), kararlı durumdaki yatay ve serbest bir akifer için aşağıdaki analitik çözümü türetmiştir.

$$h^2 = h_1^2 - \frac{\{(h_1^2 - h_2^2)x\}}{L} + \frac{\{R(L - x)x\}}{K} \quad (2.16)$$

h , serbest akiferdeki hidrolik yükseklik, R şarj oranı, L akifer uzunluğu ve K hidrolik iletkenliktir. h_1 ve h_2 sırasıyla sol ve sağ sınırlarda bulunan hidrolik yüksekliklerdir.

Türetilen bu analitik çözüm için aşağıdaki sınır koşulları dikkate alınmıştır.

$$h = h_1, \quad x = 0, \quad t > 0 \quad (2.17.a)$$

$$h = h_2, \quad x = L, \quad t > 0 \quad (2.17.b)$$

Sewa Ram ve diğ. (1994), aynı zamanda Mustafa (1987) tarafından kabul edilen aynı problem için analitik çözüm elde etmiştir. Ancak yapılan bu çalışmada, Laplace dönüşümü kullanmak yerine daha basit bir dönüşüm kullanılmıştır. Bu çözümden elde edilen sonuçlar Mustafa (1987)'nin çözümlerine oldukça yakın bulunmuştur. Tüm bu yapılan çalışmalarda, şarj oranı ya sıfır ya sabit olarak ya da zamanla doğrusal olarak azaldığı kabul edilmiştir.

Guo (1997), bir rezervuar ile serbest bir akifer arasındaki su akışını gözlemlemiştir. Yeraltı suyunun hareketini doğrusal olmayan Boussinesq denklemi ile tanımlamış ve yeni bir analitik çözüm geliştirmiştir.

Upadhyaya (1999), sabit veya zamana bağlı şarj, sabit veya derinliğe bağlı dışarı sızmaya yanıt olarak eğimli ve yatay bir akiferdeki su tablası değişimini tanımlamak amacıyla bir dizi akış durumu için çeşitli matematiksel çözümler elde etmiştir. Bu çalışma, Mustafa (1987)'nin çalışmasındaki sızma hızı sıklığına karşılık olarak benzer şekilde, zaman içinde değişen bir şarj oranı göz önünde bulundurularak genişletilmiştir. Önerilen analitik çözüm, Laplace dönüşümünden daha basit bir yaklaşım olan yerli olarak tasarlanmış bir dönüşüm kullanılarak elde edilmiştir.

Kim ve Ann (2001), yatay ve serbest bir akiferde geçici su profilleri için analitik bir çözüm elde etmiştir. Türetilen analitik çözüm aşağıdaki gibidir.

$$h(x, t) = -\frac{\beta x^2}{2\alpha} + \left(\frac{\beta L}{2\alpha} + \frac{h_2 - h_1}{L}\right)x + h_1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (2.18)$$

Buradaki $h(x, t)$ belirli bir yer ve zamandaki hidrolik yüksekliktir. Denklem (2.18)'teki C_n şu şekilde elde edilmektedir.

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left[h_0 - h_1 + \frac{\beta x^2}{2\alpha} - \left(\frac{\beta L}{2\alpha} + \frac{h_2 - h_1}{L}\right)x \right] \times \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (2.19)$$

Denklem (2.18) ve (2.19)'daki β ve α aşağıdaki gibi bulunmaktadır.

$$\beta = \frac{R}{S} \quad (2.20)$$

$$\alpha = \frac{KD}{S} \quad (2.21)$$

Buradaki R şarj oranı, D akifer derinliği, S verim ve K hidrolik iletkenliği temsil etmektedir. Türetilen bu denklemin çözümünde dikkate alınan başlangıç koşulu aşağıdaki gibidir.

$$h = h_0(x), \quad t = 0, \quad x \geq 0 \quad (2.22)$$

Sınır koşulları ise aşağıdaki gibidir.

$$h = h_1, \quad x = 0, \quad t > 0 \quad (2.23.a)$$

$$h = h_2, \quad x = L, \quad t > 0 \quad (2.23.b)$$

Buradaki h_1 ve h_2 sırasıyla sol ve sağ sınırlarda bulunan hidrolik yüksekliklerdir.

Upadhyaya ve Chauhan (2001^a) tarafından, yatay ve geçirimsiz bir bariyer üzerindeki iki dren arasına düşen su tablalarını tanımlamak için Boussinesq denkleminin analitik çözümleri, Baumann ve Werner yöntemleri ile lineerleştirilmiştir. Aynı şekilde Upadhyaya ve Chauhan (2001^b)'ın başka bir çalışmasında, doğrusal ve doğrusal olmayan Boussinesq denkleminin analitik bir çözümü bitişik akıştaki su seviyesinin ani yükselmesinden veya düşmesinden

kaynaklanan yarı sonsuz, eğimli ve yatay bir akiferde su tablası değişimini tanımlamak için elde edilmiştir.

Verhoest ve diğ. (2002), hem yatay hem de eğimli akiferlerin geçici su profillerini hesaplamak için bir analitik çözüm geliştirmiştir. Eğimli akifer durumu için geliştirilen analitik çözüm aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
h = H_1 - \frac{e^{-\alpha(L-x)}[LR + 2\alpha Sf(H_1 - H_2)] \sinh(\alpha x)}{2\alpha Sf \sinh(\alpha L)} + \frac{Rx}{2\alpha Sf} \\
+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi[D - H_1 - (-1)^n(D - H_2)e^{-\alpha L}]}{\alpha^2 L^2 + n^2 \pi^2} e^{\alpha x} \sin \frac{n\pi x}{L} \exp \left[- \left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right. \right. \\
\left. \left. + \alpha^2 \right) ft \right] \\
+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi L^2 R e^{\alpha x} [e^{-\alpha L} - (-1)^n]}{Sf(\alpha^2 L^2 + n^2 \pi^2)^2 (-1)^n} \sin \frac{n\pi x}{L} \exp \left[- \left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \alpha^2 \right) ft \right]
\end{aligned} \quad (2.24)$$

Burada R , şarj oranı, L akifer uzunluğu, S spesifik verim, $\alpha = -\frac{U}{2K}$, $U = \frac{k \sin i}{S}$, $f = \frac{KpD \cos i}{S}$, K hidrolik iletkenlik, p lineerleştirme sabiti ve i akifer yatağının eğimidir.

Yatay ve serbest bir akiferde $i = 0$, $U = 0$ ve $\alpha = 0$ durumunda Denklem (2.24) şu şekilde basitleştirilebilir.

$$\begin{aligned}
h = H_1 + \frac{x(H_2 - H_1)}{L} + \frac{Nx(L - x)}{2fK} \\
+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[D - H_1 - (-1)^n(D - H_2)]}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{L} \exp \left[- \left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \alpha^2 \right) Kt \right] \\
+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L^2 N [(-1)^n - 1]}{fK n^3 \pi^3} \sin \frac{n\pi x}{L} \exp \left[- \frac{n^2 \pi^2}{L^2} Kt \right]
\end{aligned} \quad (2.25)$$

Yukarıda verilen (2.24) ve (2.25) Denklemlerinde dikkate alınan başlangıç koşulu aşağıdaki gibidir.

$$h = D, \quad t = 0, \quad x \geq 0 \quad (2.26)$$

Burada D toprak tabakanın derinliğidir. Sınır koşulları da aşağıdaki gibidir.

$$F = \frac{D_1}{y}, \quad x = 0, \quad t > 0 \quad (2.27.a)$$

$$F = \frac{D_2}{y}, \quad x = L, \quad t > 0 \quad (2.27.b)$$

F su tablası yüksekliğinin Laplace dönüşümü ve y Laplace değişkenidir. $D_1 = D - H_1$ ve $D_2 = D - H_2$, H_1 $x = 0$ 'daki su tablası ve H_2 ise $x = L$ 'deki su tablasıdır.

Singh ve diğ. (2006) tarafından, düz, parabol ve eliptik başlangıç su tablası profilleri için eğimli/eğimsiz akifere monte edilen iki paralel drenaj arasına düşen su tablasını tanımlamak amacıyla Boussinesq denklemi için Werner doğrusallaştırma yöntemini kullanılarak analitik bir çözüm elde edilmiştir.

Rupp ve Selker (2006), akiferin hidrolik parametrelerini tahmin etmek için durgunluk hidrografını incelemiştir. Analitik çözümleri, eğimli bir akifer için doğrusallaştırılmış tek boyutlu Boussinesq denklemiyle, tam doğrusal olmayan denklemin sayısal çözümleri karşılaştırılmıştır.

Cuthbert (2010) tarafından, doğrusallaştırılmış Boussinesq denkleminin analitik bir çözüm, akifer parametrelerinin tahminlerini kullanarak yeraltı suyu drenajı için bir ifade geliştirmek amacıyla genişletilmiştir. Bu daha sonra yeraltı suyu şarjını tahmin etmek için geliştirilmiş bir su tablası dalgalanması tekniğini geliştirmek için de kullanılmıştır.

Bansal ve Das (2011), geçirimsiz bir akiferdeki kararsız yeraltı suyu akışını karakterize eden ve aşağı doğru eğimli bir yatağın üzerine yerleştirilen tek boyutlu doğrusallaştırılmış Boussinesq denkleminin analitik çözümünü sunmuşlardır. Bir ucunda akifer sabit bir su seviyesi ile temas halindedir ve diğer ucunda su seviyesi bitişik bir akarsudan katlanarak yükselmektedir. Upadhyaya ve Chauhan (2001^b) tarafından incelenen aynı problem ve koşulları için sonuçlar, problemin analitik, sayısal ve deneysel olarak çözülmesiyle elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma, sonuçların oldukça yakın olduğunu göstermiştir.

Bansal (2012), bir başka çalışmasında, gerçekçi koşullar altındaki bir akarsu akifer sistemindeki klasik geçici yüzey-yeraltı suyu etkileşimini analiz etmiştir. Eğimli ve sınırlandırılmış bir akifer, bir ucunda sabit su seviyesinde ve diğer ucunda ise su

seviyesi eşit bir hızda yükselen ve bir akarsu ile temas halindedir. Analitik çözümler, Laplace dönüşümü kullanılarak doğrusallaştırılmış Boussinesq denklemi çözülerek elde edilmiştir.

Vanikar ve Bansal (2020), eğimli ve geçirimsiz bir tabakada bulunan akiferdeki zamanla değişen yer altı suyu akışının yaklaşık analitik çözümünü Laplace dönüşüm yöntemi kullanılarak elde etmiştir. Elde edilen sonuçlar sayısal bir örnekle gösterilmiştir.

2.2 Nümerik Çözümlere Dayalı Çalışmalar

Marino (1975), sınırsız bir akiferin akış seviyelerindeki değişikliklere tepkisini simüle eden bir dijital bilgisayar modeli sunmuştur. Model, yatay ve sınırsız bir akifer için tek boyutlu Boussinesq denkleminin dayandırılmaktadır.

Chapman (1980), eğimli bir yatak üzerindeki yer altı suyunun iki boyutlu Dupuit-Forchheimer akışı için yeni bir yaklaşımın, iki sabit akış durumu için bilinen sonuçlarıyla karşılaştırıldığında, en az 30° eğim açılarına kadar kabul edilebilir olduğunu göstermiştir. Yaklaşım, üç boyutlu sayısal modelleme için uygundur ve akış modelinin yatak eğimi tarafından kontrol edildiği durumlar için tavsiye edilmektedir.

Beven (1981), sabit şarjlı, eğimli ve serbest bir akifer için tek boyutlu Boussinesq denkleminin boyutsuz formunu Kapalı Sonlu-Farklar yaklaşımı ile çözmüştür.

Sims (1986), yamaç akış problemini çözmek için farklı bir yaklaşım sunmuştur. Doğrusal olmayan problemi çözmek için Açık Sonlu-Farklar yaklaşımına dayanan sayısal bir model geliştirmiştir. Bu modelin en büyük dezavantajı, ayrıştırma adımının kararlı bir çözüm üretecek kadar küçük olması gerektiği olarak tespit edilmiştir.

Serrano ve Workman (1998), bir alüvyon vadisi akiferinde geçici akım/akifer etkileşimlerini modellemek için sayısal bir model sunmuştur. Model, bir ayrışma yöntemi kullanılarak çözülen yatay ve serbest bir akifer için tek boyutlu Boussinesq denkleminin dayandırılmaktadır.

Manglik ve Singh (1998), iki boyutlu denklem için matematiksel bir çözüm elde etmişlerdir ve dikdörtgen bir havzadan zaman içinde değişen şarj nedeniyle su tablasındaki dalgalanmaları tahmin etmişlerdir.

Parlange ve diğ. (2001), yatay ve sınırsız bir akifer için tek boyutlu Boussinesq denkleminin dayanan sayısal bir model geliştirmiştir. Denklem, genel amaçlı iki boyutlu bir kısmi diferansiyel denklem çözücüsü ile yazılmış Sonlu-Elementler programı kullanılarak çözülmüştür.

Upadhyaya ve Chauhan (2001^a) tarafından, Boussinesq denkleminin doğrusal olmayan formunun sayısal çözümleri, Sonlu-Farklar ve Sonlu-Elementler Yöntemleri ile bulunmuştur. Aynı şekilde Upadhyaya ve Chauhan (2001^b)'ın başka bir çalışmasında, doğrusal ve doğrusal olmayan Boussinesq denkleminin Sonlu Elementler sayısal çözümü, bitişik akıştaki su seviyesinin ani yükselmesinden veya düşmesinden kaynaklanan yarı sonsuz, eğimli ve yatay bir akiferde su tablası değişimini tanımlamak için elde edilmiştir. Sonuçlar, doğrusal olmayan denklemin doğrusallaştırılmasının, öngörülen su tablası yükseklikleri üzerinde sadece marjinal bir etkiye sahip olduğunu göstermektedir.

Verhoest ve diğ. (2002), sayısal bir model sunmuştur ve sonuçları geçici bir analitik çözümle karşılaştırmıştır. Sunulan bu sayısal modelde, Boussinesq denkleminin tek boyutlu doğrusallaştırılmış formunu çözmek için Crank-Nicholson ve Sonlu-Elementler yaklaşımı kullanılmıştır.

Rocha ve diğ. (2007), sabit bir şarj alan yatay bir akifer için iki boyutlu doğrusallaştırılmış Boussinesq denklemini dikkate alan sayısal bir model geliştirmiştir. Denklem, kütle merkezli Sonlu-Fark yaklaşımını kullanan MODFLOW kullanılarak çözülmüştür.

Kaya ve Arısoy (2011), akifer-akış problemlerinin çözümünde Diferansiyel Kareleme Yöntemi (DQM)'ni kullanmıştır. Aynı şekilde Ghaheri ve Meraji (2012), Boussinesq denkleminin doğrusal olmayan, boyutlu ve boyutsuz formunu çözmek için Diferansiyel Kareleme Yöntemi (DQM)'ne dayalı çözümler yapmışlardır. Elde edilen sonuçlar ve doğruluk dereceleri, literatürde bulunan mevcut deneysel ve sayısal verilerle karşılaştırılmış ve DQM'nin doğru sonuçlar ürettiği, formüle edilmesi ve

çalıştırılmasının çok kolay olduğu, büyük ağ boyutuna ihtiyaç duymadığı ve zaman açısından çok verimli olduğu görülmüştür.

Shaikh ve Das (2017) tarafından gelgit dalgalarının yeraltı suyu akışı üzerindeki etkileri incelenmiştir. Sızıntı ile gelgit suyunun yakınındaki iki boyutlu bir akiferdeki su tablası dalgalanmaları incelenmiş ve doğrusal olmayan denklem için ADI (Değişen Doğrultulu Kapalı Yöntem) metodu ile bir sayısal çözüm elde edilmiştir. Elde edilen bu sayısal çözümler, doğrusallaştırılmış denklemin analitik çözümleriyle karşılaştırılmıştır.

Vanikar ve Bansal (2020), eğimli ve geçirimsiz bir tabakada bulunan akiferdeki zamanla değişen yeraltı suyu akışını simüle etmek amacıyla matematiksel bir model geliştirmiştir. Doğrusal olmayan Boussinesq denklemi ile simüle edilmiştir. Yaklaşık analitik çözümü ise, Laplace dönüşüm yöntemi kullanılarak elde edilmiştir.

2.3 Deneysel Çalışmalar

Baumann (1952), bir şarj durumunda su tablasının değişiminin, şarj havzasının şekli ve boyutu, akiferin hidrolik özellikleri, zemin yüzeyi ile başlangıç su tablası arasındaki dikey mesafe gibi diğer faktörlerin yanı sıra sızma hızına ve süresine bağlı olduğunu tespit etmiştir.

Bear (1978), su tablası değişiminin sızma oranına bağlı olması, su tablasına gelen şarj oranının sızma oranına bağlı olduğunu ve şarj havzasının altındaki toprak gözeneklerinin tortu tıkanması nedeniyle üstel formda zamanla az ya da çok azaldığını göstermiştir.

Vaculin ve diğ. (1979), üç boyutlu bir toprak levhada ($6 \text{ m} \times 5 \text{ cm} \times 2 \text{ m}$) şarj ile laboratuvar deneyi yapmıştır. Levha, geçirimsiz yatay bariyer üzerinde duran bir çerçeve ile desteklenen iki plastik cam duvar arasında ince perçin kumu ile doldurulmuştur. Levhanın her iki tarafı da rezervuarların sabit uç kısımlarına bağlanmıştır. Toprak yüzeyin merkezinde 1 m genişliğinde $q = 0.148 \text{ m/sa}$ 'lık bir akış uygulanmıştır. Kalan toprak yüzeyi, buharlaşma kayıplarını önlemek için

kaplanmıştır. Sızma sırasında, su içeriği gama ışınları kullanılarak ölçülmüştür. Ayrıca sabit rezervuar uçlarından çıkış hacmi de ölçülmüştür.

Abdulrazzak ve Morel-Seytoux (1983), gerçek saha koşullarını simüle etmek için zamana bağlı şarjı dikkate almanın teorik ve pratikte önemli bir etkisinin olduğunu öne sürmüştür. Deney ve analiz sonuçları, şarj oranının zamanla katlanarak azaldığını göstermektedir. Daha sonra, Singh (1996)'da zaman içinde değişen şarjın dikkate alınması gerektiğini savunmuştur.

Sloan ve Moore (1984) tarafından yeraltı akışını tahmin etmek için geliştirilen beş matematiksel model, Hewlett ve Hibbert (1963) tarafından, Coweeta Hidroloji Laboratuvarı'nda tek tip eğimli toprak çukurda yapılan deşarj ölçümleriyle karşılaştırılmıştır. Modeller, Richards denklemine dayalı bir ve iki boyutlu Sonlu Eleman modellerini, bir kinematik dalga modelini ve Boussinesq varsayımlarına dayanan iki basit depolama-deşarj modelini içermektedir.

Zomorodi (1991), İran'ın Ghavin Ovası'nda yaptığı bir saha çalışmasında, sabit şarj oranı varsayımına dayanan çözümlerin, su tablasının gözlenen durgunluğunu açıklayamadığını göstermiştir.

Sanford ve diğ. (1993) tarafından yamaç drenajı için, akifer çıkışında ani su çekilmesi durumunda çeşitli uygulamalar yapılmıştır. Kümülatif çıkış hacmi, akış hızı ve su tablası profilinin tahminine yönelik denklemler, eğimli ve geçirimsiz bir tabakanın üzerindeki yeraltı suyu akışı için Boussinesq yaklaşımına dayanmaktadır. Çıkış denklemlerinin doğruluğu bir dizi laboratuvar deneyi ile karşılaştırılmıştır.

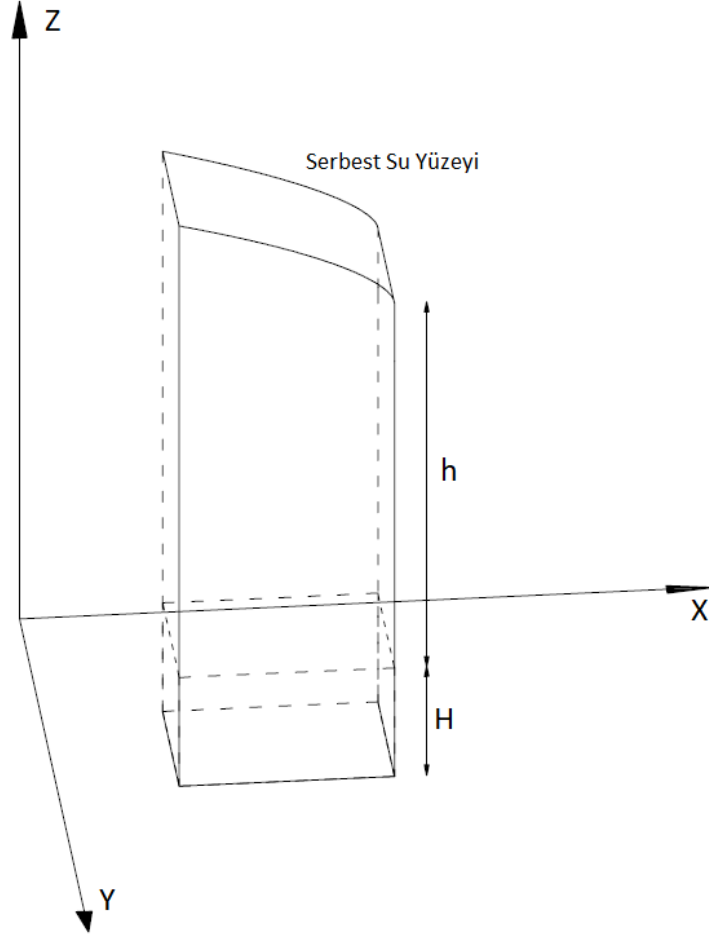
Sanford ve diğ. (1998), üç boyutlu cam kanalda (245 cm × 30 cm × 30 cm) bir dizi deney gerçekleştirmiştir. Kanal, 23 cm derinliğe kadar bir kum-çakıl karışımı ile doldurulmuştur. Su tablasının yüksekliğini ölçmek için çeşitli yerlerde kanalın iç duvarına birkaç küçük izleme kuyusu yerleştirilmiştir. Her kuyudaki su tablasının yüksekliği ve kümülatif çıkış, drenaj duruncaya kadar periyodik olarak kaydedilmiştir.

Kim ve Ann (2001), su tablası seviyelerini dışarıdan görselleştirmek için akrilik plakalar ile oluşturulan üç boyutlu serbest bir akifer modeli (67 cm × 15 cm × 50 cm) kullanarak laboratuvar deneyleri gerçekleştirmiştir. Yapılan bu deneylerde, su

tablasının yüksekliğini ölçmek için, ön duvarda düzenli aralıklarla yedi basınç göstergesi yerleştirilmiştir.

Saxena ve diğ. (2021) tarafından, şarj ve sızma olan eğimli ve geçirimsiz bir akiferdeki su tablasının mekânsal ve zamansal değişimlerini tahmin etmek için akış-akifer modeli geliştirilmiştir. Yeraltı sızıntı problemini simüle etmek için, Boussinesq denklemi analitik olarak çözülmüştür. Yapılan gözlemler sürekli şarj altında akiferin orta kısmında su tablasının biriktiğini göstermektedir.

3. YÖNETİCİ DENKLEMLER



Şekil 3.1: Eğimli ve geçirimsiz bir tabaka üzerinde Boussinesq denklemi (Chauhan 2014)

Akış, geçirimsiz bir tabaka üzerinde, hafif eğimli bir akiferde ve Şekil (3.1)'de gösterildiği gibi bir prizma içinde gerçekleşmektedir. Boussinesq denklemi, bu örnekteki gibi çoğu drenaj problemlerinin çözümü için yönetici denklemdir. Dupuit-Forchheimer varsayımına dayanmaktadır. Bu denklemin kabul ettiği diğer varsayımlar aşağıdaki gibidir:

- xy düzleminde geçirimsiz tabakaya dikey olan akiferdeki H , pozitif kabul edilir.
- Geçirimsiz tabaka üzerindeki su tablası yüksekliği $H + h$ 'tır.
- xy düzlemindeki alan elemanı $d\sigma = dxdy$ 'dir.
- Akiferin verimi S 'dir.
- Prizma hacmindeki serbest su $d\sigma = (H + h)S$ 'dir.

- f. x yönünde birim zamanda birim alan başına su girişi q_x ile gösterilir.
- g. Şekil (3.1)'deki prizmanın sol tarafından gelen akış $q_x(H + h)dy$ 'dir.
- h. Prizmanın sağ tarafından çıkan akış $\left[q_x + \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} \right) dx(H + h)dy \right]$ 'dir.
- i. x yönünde prizmada biriken kütle, giriş su kütesinden çıkış su kütesinin çıkarılması ile bulunur ve $-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx(H + h)dy$ 'dir.

Yağmur veya artezyen akışı gibi dikey bir akış ya da buharlaşma nedeniyle dışarı bir akış söz konusu olabilir. Bu şarj olayı R ile gösterilir ve giriş ya da çıkış akışı durumuna göre uygun işaret kullanılır. Yukarıdaki varsayımlara göre bu prizmadaki net akış aşağıdaki gibi ifade edilir (Chauhan 2014).

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx(H + h)dy + -\frac{\partial q_y}{\partial y} dy(H + h)dx + R \quad (3.1)$$

İki yöndeki bu su hareketi, zaman içinde içeri veya dışarı akış ile yükselme alçalma gibi olaylarla serbest su yüzeyine neden olacaktır. Zaman içindeki bu değişim aşağıdaki gibi formüle edilir.

$$dt = S \frac{\partial h}{\partial t} dx dy \quad (3.2)$$

Böylece bu su dengesi için aşağıdaki Denklem yazılabilir.

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx(H + h)dy + -\frac{\partial q_y}{\partial y} dy(H + h)dx + R = S \frac{\partial h}{\partial t} dx dy \quad (3.3)$$

Darcy Yasası uygulanırsa:

$$q_x = -K \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.4)$$

$$q_y = -K \frac{\partial h}{\partial y} \quad (3.5)$$

Denklem (3.3)'te yerine koyulursa:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[K(H + h) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K(H + h) \frac{\partial h}{\partial y} \right] + R = S \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.6)$$

Normal bir akış x yönünde olduğu için denklem aşağıdaki şekle indirgenir.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[K(H + h) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + R = S \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.7)$$

Denklem (3.7) düzenlenirse:

$$K(H + h) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x} + K \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + R = S \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.8)$$

Denklem (3.8), eğimli ve geçirimsiz bir tabaka üzerindeki akiferin Boussinesq denklemidir. $\left(\frac{\partial H}{\partial x} = -\alpha \right)$

Werner (1957), akifer tabanının xy düzlemi üzerinde olduğunu ve dikey mesafenin z olduğunu varsaymıştır.

$$z = H + h \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial t} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (3.11)$$

Denklem (3.11), Denklem (3.10)'da yerine koyulursa:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t} \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = -\alpha + \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.13)$$

Denklem (3.13)'ün 2. Türevi alınırsa:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (3.14)$$

Boussinesq denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$Kz \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - K\alpha \frac{\partial z}{\partial x} + K \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + R = S \frac{\partial z}{\partial t} \quad (3.15)$$

3.1 İki Drenaj Arasında Beslenme Olması Durumu

Yatay bir akış için yönetici denklem olarak aşağıdaki Boussinesq denklemi kullanılır (Chauhan 2014).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{R}{K} = S \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.16)$$

Kararlı ve tek boyutlu bir akış için $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$ olur.

x yönündeki bir akış için yönetici denklem aşağıdaki hale gelir.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) = -\frac{R}{K} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (h^2) = 2h \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.18)$$

Eşitliğinden faydalanarak Denklem (3.17) aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{1}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x^2} = -\frac{R}{K} \quad (3.19)$$

Denklemin her iki yanını 2 ile çarpılırsa aşağıdaki Denklem elde edilir.

$$\frac{\partial h^2}{\partial x^2} = -2 \frac{R}{K} \quad (3.20)$$

Bu denklemler ile farklı su seviyelerine sahip, iki dren arası L mesafesi olan ve sabit bir beslenme/yağış alan (R) akiferler için çözüm elde edilebilir.

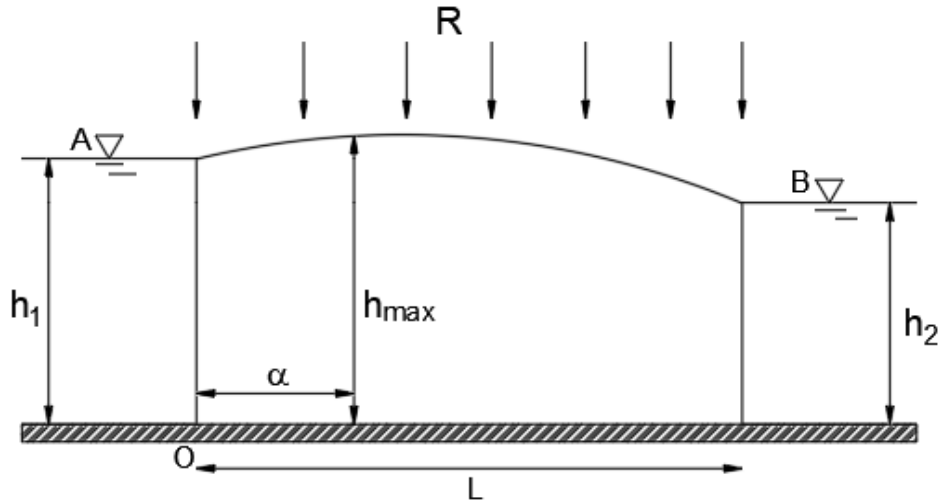
Denklem (3.20)'nin bir kez integrali alındığında:

$$\frac{\partial h^2}{\partial x} = -\frac{2R}{K}x + c_1 \quad (3.21)$$

İkinci integral alınırsa:

$$h^2 = -\frac{Rx^2}{K} + c_1x + c_2 \quad (3.22)$$

Buradaki c_1 ve c_2 integral sabitleridir. Bu iki sabiti bulmak için akış sınırında iki koşul gerekir. Aşağıdaki Şekil (3.2) için sınır koşulları Denklem (3.23) ve (3.24)'de verilmiştir.



Şekil 3.2: İki Drenaj Arasında Beslenme ile Sabit Akış (Chauhan 2014)

$$h(0) = h_1 \quad (3.23)$$

$$h(L) = h_2 \quad (3.24)$$

Denklem (3.23)'te verilen koşul, Denklem (3.22)'de yerine koyulursa:

$$h_1^2 = c_2 \quad (3.25)$$

Denklem (3.24)'te verilen koşul ise yine aynı şekilde Denklem (3.22)'de yerine koyulursa:

$$h_2^2 = -\frac{RL^2}{K} + c_1L + c_2 \quad (3.26)$$

Bu denklemden c_1 aşağıdaki şekilde bulunur.

$$c_1 = \frac{h_2^2 - h_1^2}{L} + \frac{RL}{K} \quad (3.27)$$

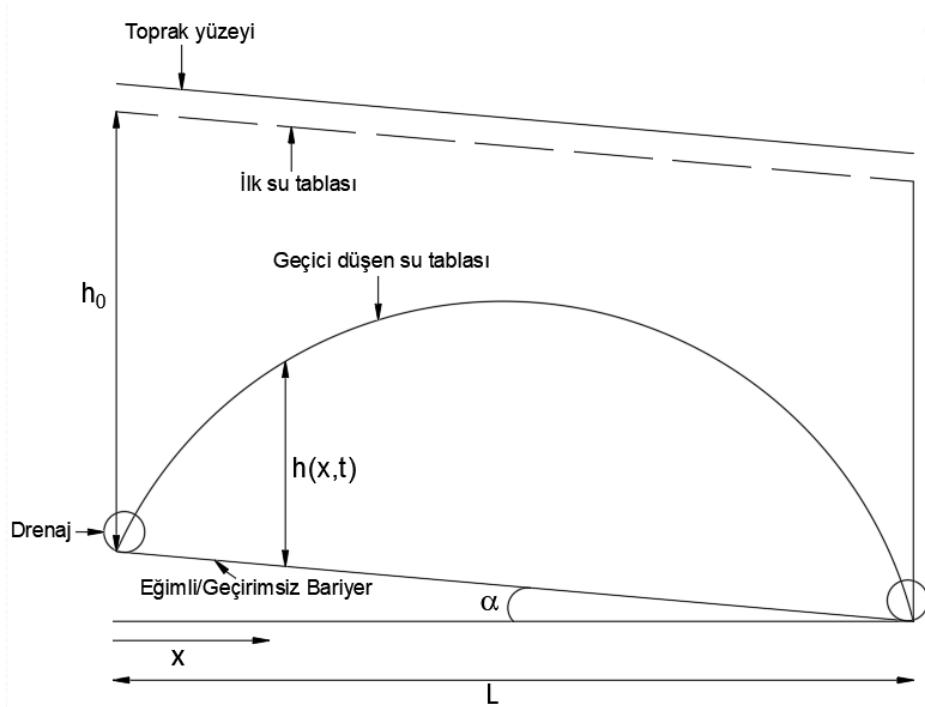
c_1 ve c_2 Denklem (3.22)'de yerine koyulursa, iki drenaj arasındaki geçirimsiz tabakanın üzerindeki yer altı suyu yüzeyini veren sınır-değer probleminin Denklemi aşağıdaki olur (Chauhan, 2014).

$$h^2 = -\frac{Rx^2}{K} + \frac{h_2^2 - h_1^2}{L}x + \frac{RL}{K}x + h_1^2 \quad (3.28)$$

3.2 Tez Kapsamında İncelenen Problemlerin Yönetici Denklemleri

Bu çalışmada, iki farklı eğimli akifer problemi ele alınmıştır. Bu problemlerin yönetici denklemleri, başlangıç ve sınır koşulları ayrı ayrı aşağıda verilmiştir.

3.2.1 Birinci Problem: Eğimli Bir Akiferde Su Tablasının Alçalması



Şekil 3.3: Eğimli bir akiferde düşen su tablasının gösterimi (Upadyaya ve Chauhan 2001^a)

Eğimli ve geçirimsiz bir bariyer üzerindeki iki dren arasında meydana gelen su tablası Şekil (3.3)'de gösterilmektedir. Buradaki h , su tablası yüksekliği, h_0 ilk su tablası yüksekliği, L eğimli/geçirimsiz bariyerin uzunluğu ve α küçük bir değere sahip geçirimsiz bariyerin eğimidir.

İki paralel dren arasına düşen su tablaları için sınır-değer problemi formüle edilirken, anlık yeniden beslenme nedeniyle su tablası yüksekliğinin yer yüzeyine ulaştığı ancak akiferin drenajı nedeniyle düştüğü varsayılmaktadır.

Eğimli bir akiferde bulunan paralel iki dren arasına düşen su tablalarını tanımlamak için Boussinesq (1904) tarafından türetilen doğrusal olmayan ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklem aşağıdaki gibi yazılabilir (Upadyaya ve Chauhan 2001^a).

$$h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - \alpha \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) = \frac{f}{K} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.29)$$

Yatay bir akifer için ($\alpha = 0$) Denklem (3.29) aşağıdaki gibi düzenlenir.

$$h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 = \frac{f}{K} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.30)$$

Buradaki f akifer porozitesi ve K ise hidrolik iletkenliktir.

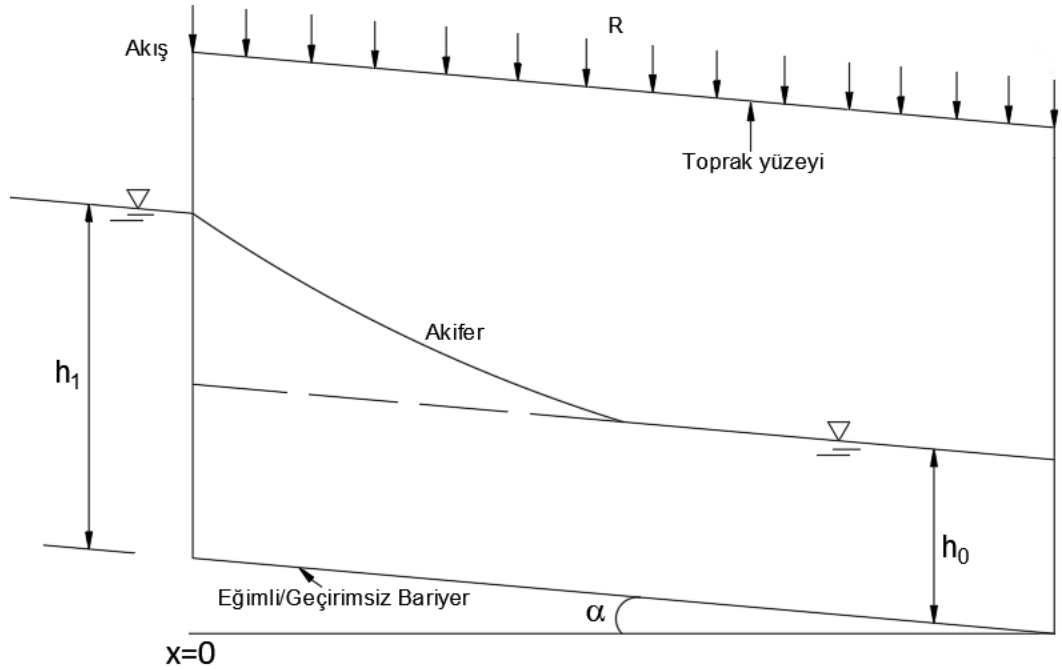
Denklem (3.29) ve (3.30)'a karşılık gelen başlangıç ve sınır koşulları aşağıdaki gibidir.

$$h(x, 0) = h_0, \quad t = 0, \quad 0 < x < L \quad (3.31.a)$$

$$h(0, t) = h(L, t) = 0, \quad t > 0, \quad x = 0, x = L \quad (3.31.b)$$

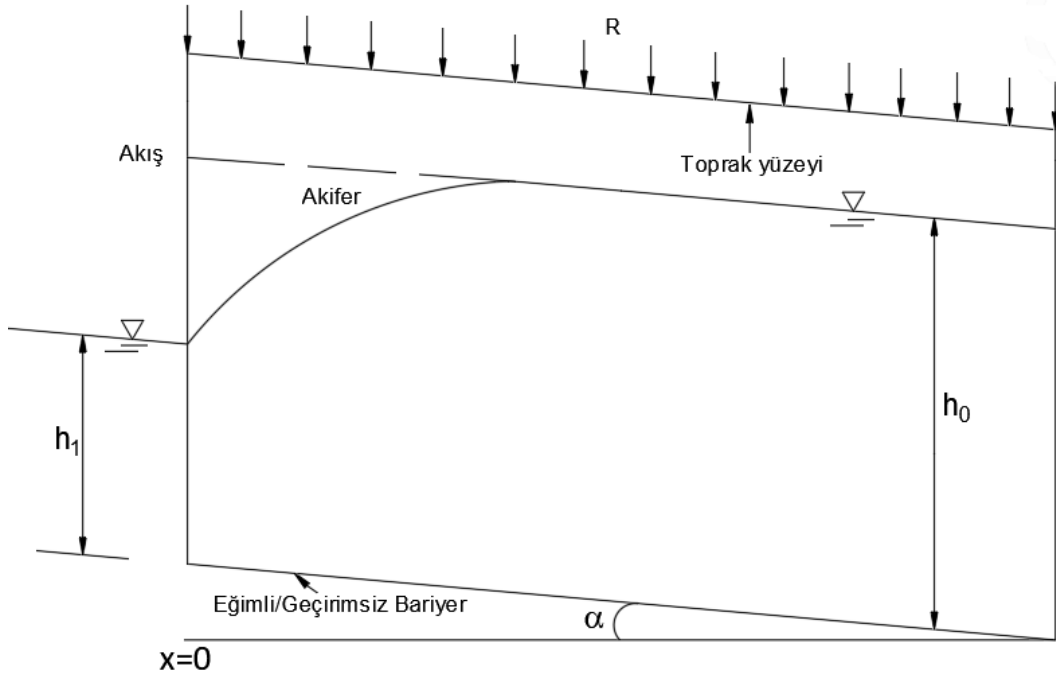
3.2.2 İkinci Problem: Sabit Beslenme Koşulları Altında Akarsu ve Eğimli Akiferin Etkileşimi

Sabit yeniden doldurma altında beslenme durumundaki eğimli bir akiferin gösterimi aşağıdaki gibidir.



Şekil 3.4: Sabit yeniden doldurma ve beslenme olması durumunda akiferdeki su tablası gösterimi (Upadyaya ve Chauhan 2001^b)

Şekil (3.5)'de ise, sabit yeniden doldurma altında boşaltılan eğimli bir akifer görülmektedir.



Şekil 3.5: Sabit yeniden doldurma ve boşaltma olması durumunda akiferdeki su tablası gösterimi (Upadyaya ve Chauhan 2001^b)

Boussinesq (1904), geçirimsiz bir bariyer üzerindeki eğimli bir akiferdeki yeraltı suyu akışını tanımlamak için, süreklilik ilkesini ve Dupuit-Forchheimer varsayımlarını kullanarak kısmi bir diferansiyel denklem türetmiştir. Werner (1953, 1957), yeniden doldurma terimini ekledikten sonra doğrusal olmayan Boussinesq denklemini aşağıdaki şekilde düzenlemiştir.

$$h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - \alpha \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{R}{K} = \frac{f}{K} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.32)$$

Buradaki h , su tablası yüksekliği, h_0 ilk su tablası yüksekliği, L eğimli/geçirimsiz bariyerin uzunluğu, α küçük bir değere sahip geçirimsiz bariyerin eğimi, f akifer porozitesi, K hidrolik iletkenlik ve R ise yeniden doldurmayı ifade etmektedir. Denklem (3.33)'e karşılık başlangıç ve sınır koşulları aşağıdaki gibidir (Upadyaya ve Chauhan 2001^b).

$$h = h_1, \quad x = 0, \quad t > 0 \quad (3.33.a)$$

$$h = h_0, \quad x > 0, \quad t = 0 \quad (3.33.b)$$

$$h = h_0, \quad x \rightarrow \infty, \quad t > 0 \quad (3.33.c)$$

Buradaki h ve h_0 , akiferin $x = 0$ ve $x = \infty$ noktalarındaki su seviyelerini göstermektedir.

4. SONLU FARKLAR YÖNTEMİ

Kısmi diferansiyel denklemlerdeki bağımlı değişkenlerin diferansiyelleri yaklaşık ifadeler kullanılarak elde edilebilir. Bu bölümde, bir f fonksiyonunun diferansiyellerine yaklaşmak için iki yöntem ele alınmıştır. Birinci yöntem, sıklıkla kullanılan bir yöntem olan Taylor serisi açılımıdır. İkinci yöntem ise n mertebeden bir polinom kullanılarak yapılan açılımdır (Hoffmann ve Chiang 2000).

4.1 Taylor Serisi Açılımı ile Sonlu Farklar Yöntemi

Analitik bir $f(x)$ fonksiyonu, Taylor serisi açılımı ile x 'e bağlı $f(x + \Delta x)$ olarak yazılabilir.

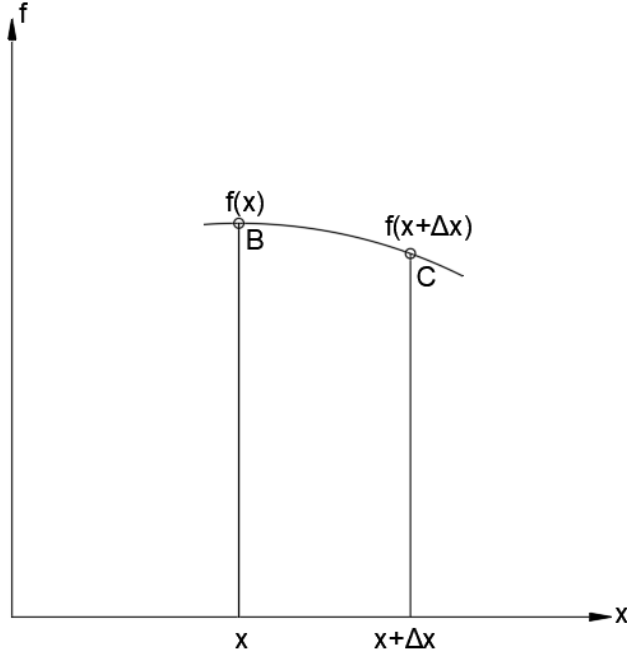
$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &= f(x) + (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \\ &= f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\Delta x)^n}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Buradan $\frac{\partial f}{\partial x}$ aşağıdaki (4.2) Denklemi gibi olur.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \quad (4.2)$$

Tüm terimler Δx ve daha yüksek faktörlerle toplanabilir, toplanan bu terimler $O(\Delta x)$ şeklinde gösterilir. Bu gösterim, hata mertebesini ifade eder. Bu gösterime göre Denklem (4.2) aşağıdaki gibi olur (Hoffmann ve Chiang 2000):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (4.3)$$



Şekil 4.1: Denklem (4.3)'teki grid noktalarının gösterimi (Hoffmann ve Chiang 2000)

Denklem (4.3), f fonksiyonunun x 'e göre birinci kısmi türevi için olan bir yaklaşımdır. Bu denklem, Şekil 4.1'de grafiksel olarak da gösterildiği gibi, fonksiyonun B ve C noktalarındaki değeri kullanılarak B noktasındaki fonksiyonun eğimi olarak yorumlanabilir. i indeksi, x yönündeki noktaları temsil ettiğine göre aşağıdaki Denklem yazılabilir.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (4.4)$$

Bu Denklem, Δx hata mertebeli f fonksiyonunun ilk ileri fark yaklaşımı olarak bilinir. Burada adım azaldıkça hata terimi de azalır ve doğruluk artar.

$f(x - \Delta x)$ 'in x noktası civarındaki Taylor serisi açılımı aşağıdaki gibidir:

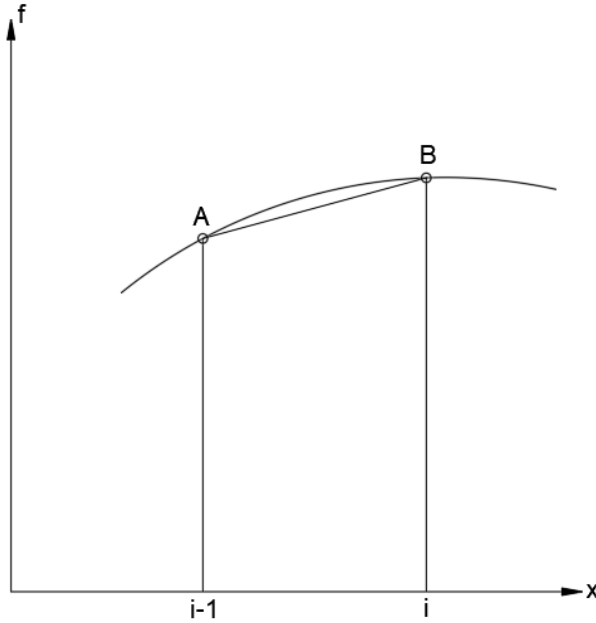
$$\begin{aligned} f(x - \Delta x) &= f(x) - (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \\ &= f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{(\Delta x)^n}{n!} \right] \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Buradan $\frac{\partial f}{\partial x}$ aşağıdaki (4.6) Denklemi gibi olur.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (4.6)$$

Bu denklem, i indeksi kullanılarak ise aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (4.7)$$



Şekil 4.2: Denklem (4.7)'teki grid noktalarının gösterimi (Hoffmann ve Chiang 2000)

Denklem (4.7) Şekil 4.2'de de gösterildiği gibi, A ve B noktalarındaki fonksiyon değerlerini kullanarak B noktasındaki fonksiyonunun eğimini temsil eder. Denklem (4.7), f fonksiyonunun Δx hata mertebeli ilk geri fark yaklaşımıdır. Denklem (4.1) ve (4.5)'teki Taylor serisi açılımları göz önüne alınırsa (Hoffmann ve Chiang 2000):

$$f(x + \Delta x) = f(x) + (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \quad (4.8)$$

$$f(x - \Delta x) = f(x) - (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \quad (4.9)$$

Denklem (4.8)'den Denklem (4.9) çıkarılarak aşağıdaki Denklem (4.10) elde edilir.

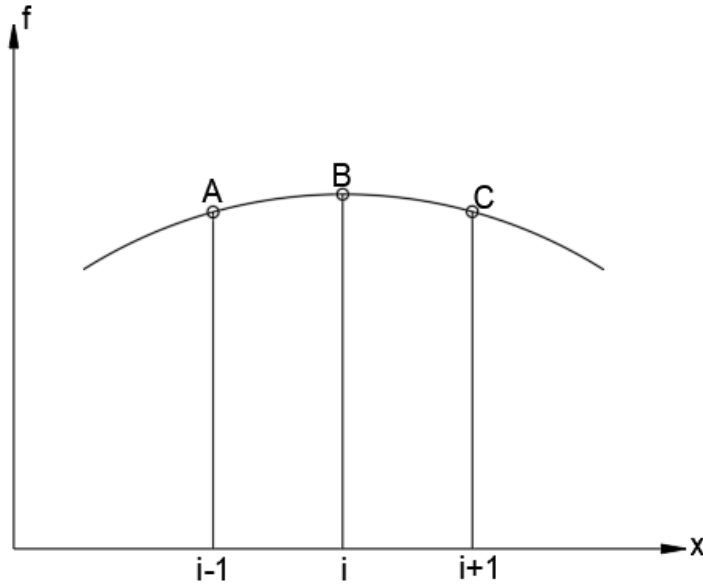
$$f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) = 2\Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + 2 \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \quad (4.10)$$

Buradan $\frac{\partial f}{\partial x}$ aşağıdaki (4.11) Denklemi gibi olur.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (4.11)$$

Bu Denklem, i indeksi kullanılarak ise aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (4.12)$$



Şekil 4.3: Denklem (4.12)'teki grid noktalarının gösterimi (Hoffmann ve Chiang 2000)

Denklem (4.12), Şekil 4.3'te gösterildiği gibi A ve C noktalarındaki fonksiyon değerlerini kullanarak B noktasındaki f fonksiyonunun eğimini temsil eder. Bu denklem, f fonksiyonunun $(\Delta x)^2$ hata mertebeli merkezi fark yaklaşımıdır. Yukarıdaki denklemler f fonksiyonunun birinci türevi için elde edilmiştir. Daha yüksek mertebeden türevler için yine Taylor serisi açılımı aşağıdaki gibidir.

$$f(x + \Delta x) = f(x) + (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \quad (4.13)$$

Buradan $f(x + 2\Delta x)$ aşağıdaki gibi yazılır.

$$f(x + 2\Delta x) = f(x) + (2\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \quad (4.14)$$

Denklem (4.13)'ün iki ile çarpılıp Denklem (4.14)'ten çıkarılmasıyla Denklem (4.15) elde edilir.

$$-f(x + \Delta x) + f(x + 2\Delta x) = -f(x) + (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (\Delta x)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \quad (4.15)$$

Buradan $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ aşağıdaki (4.16) Denklemi gibi olur.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x) \quad (4.16)$$

Bu denklem, i indeksi kullanılarak ise aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_i = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x) \quad (4.17)$$

Bu denklem, f fonksiyonunun x 'e göre ikinci türevi için ileri fark yaklaşımını temsil eder. Hata mertebesi Δx 'tir. İkinci türev için benzer yaklaşım, $f(x - \Delta x)$ ile $f(x - 2\Delta x)$ fonksiyonları Taylor serisi açılımları kullanılarak aşağıdaki gibi üretilir (Hoffmann ve Chiang 2000).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_i = \frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x) \quad (4.18)$$

Bu denklem, f fonksiyonunun x 'e göre ikinci türevi için geri fark yaklaşımını temsil eder. Hata mertebesi Δx 'tir. İkinci türevin merkezi fark yaklaşımı ise aşağıdaki gibidir:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \quad (4.19)$$

Bu denklem, i indeksi kullanılarak ise aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \quad (4.20)$$

f fonksiyonunun x 'e göre daha yüksek mertebeden türevleri için olan yaklaşımlar, aynı yöntem kullanılarak bulunabilir. Kolaylık olması için, elde edilen ilk ileri fark $f_{i+1} - f_i$ 'yi $\Delta_x f_i$ olarak ve ilk geri fark $f_i - f_{i-1}$ 'i $\nabla_x f_i$ olarak yazılabilir. Bu gösterimle, Birinci dereceden ileri ve geri farklar Denklem (4.21) ve (4.22) gibi yazılabilir (Hoffmann ve Chiang 2000).

$$\Delta_x^n f_i = \Delta_x^{n-1}(\Delta_x f_i) \quad (4.21)$$

$$\nabla_x^n f_i = \nabla_x^{n-1}(\nabla_x f_i) \quad (4.22)$$

Çeşitli merkezi fark operatörleri benzer şekilde tanımlanabilir. Bazı benzer operatörler aşağıdaki gibidir:

$$\delta_x^* f_i = f_{i+1} - f_{i-1} = \Delta_x f_i + \nabla_x f_i \quad (4.23.a)$$

$$\delta_x f_i = f_{i+1/2} - f_{i-1/2} \quad (4.23.b)$$

$$\begin{aligned} \delta_x^2 f_i &= \delta_x(\delta_x f_i) = \delta_x(f_{i+1/2} - f_{i-1/2}) \\ &= (f_{i+1} - f_i) - (f_i - f_{i-1}) \\ &= f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1} \end{aligned} \quad (4.23.c)$$

$$(\Delta_x \nabla_x) f_i = \Delta_x f_i - \nabla_x f_i = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1} \quad (4.23.d)$$

$$(\Delta_x \nabla_x)^2 f_i = f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2} \quad (4.23.e)$$

Yukarıdaki gibi tanımlanan operatörler kullanılarak, daha yüksek türevlerin ileri, geri ve merkezi yaklaşımları aşağıdaki gibi yazılır.

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n} \Big|_i = \frac{\Delta_x^n f_i}{(\Delta x)^n} + O(\Delta x) \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n} \Big|_i = \frac{\nabla_x^n f_i}{(\Delta x)^n} + O(\Delta x) \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n} \Big|_i = \frac{\Delta_x^n f_{i-n/2} + \nabla_x^n f_{i+n/2}}{2(\Delta x)^n} + O(\Delta x)^2 \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n} \Big|_i = \frac{\Delta_x^n f_{i-(n-1)/2} + \nabla_x^n f_{i+(n-1)/2}}{2(\Delta x)^n} + O(\Delta x)^2 \quad (4.27)$$

Denklem (4.27) için n sayısının tek sayı olması gerekmektedir.

Taylor serisi açılımlarındaki ek terimler dikkate alınarak, türevlerin daha doğru bir tahmini elde edilir. Aşağıdaki Taylor serisi açılımı göz önüne alınırsa:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \quad (4.28)$$

Buradan $\frac{\partial f}{\partial x}$ aşağıdaki (4.29) Denklemi gibi olur.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^2}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \quad (4.29)$$

Denklem (4.29)'daki $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ yerine aşağıdaki gibi bir ileri fark ifadesi koyulursa:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x) - 2f(x + \Delta x) + f(x + 2\Delta x)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x) \quad (4.30)$$

Aşağıdaki Denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &- \frac{\Delta x}{2} \left[\frac{f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x) \right] \\ &- \frac{(\Delta x)^2}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \end{aligned} \quad (4.31)$$

Denklem (4.31) düzenlenirse aşağıdaki Denklem (4.32) elde edilir.

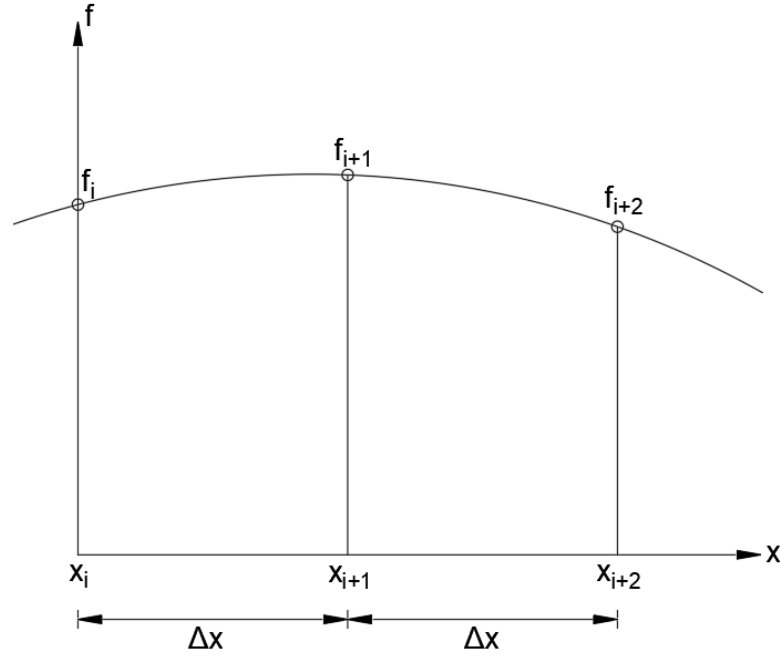
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-f(x + 2\Delta x) + 4f(x + \Delta x) - 3f(x)}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (4.32)$$

Böylece, f fonksiyonunun ikinci mertebeden bir sonlu fark yaklaşımı elde edilmiştir. Geri fark yaklaşımı için yine aynı şekilde ikinci mertebeden türevi birinci mertebeden bir geri fark yaklaşımıyla değiştirerek elde etmek mümkündür. Genel olarak, daha yüksek mertebeden ileri, geri ve merkezi yaklaşımlar, Taylor serisindeki daha fazla terimin türevlerinin ileri, geri ve merkezi fark temsilleriyle değiştirilmesiyle elde edilir (Hoffmann ve Chiang 2000).

4.2 Polinomlar Yardımı ile Sonlu Farklar Formüllerinin Türetilmesi

Bir polinomun katsayıları, bağımsız değişkenin eşit aralıkta bulunan noktalarından oluşan bir dizi veriden elde edilerek hesaplanır. Bir türevin yaklaşık değeri bulunmak istenirse de bu polinomdan yararlanır. Örneğin, ikinci mertebeden Denklem (4.33) gibi bir polinom göz önüne alınırsa (Hoffmann ve Chiang 2000):

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C \quad (4.33)$$



Şekil 4.4: f fonksiyonuna yaklaşan ikinci mertebeden bir polinom gösterimi (Hoffmann ve Chiang 2000)

Şekil 4.4'te gösterildiği gibi x_i orijin olarak kabul edilirse, $x_i = 0$, $x_{i+1} = \Delta x$ ve $x_{i+2} = 2\Delta x$ olur. Bu noktadaki f fonksiyonunun değerleri ise $f(x_i) = f_i$, $f(x_{i+1}) = f_{i+1}$ ve $f(x_{i+2}) = f_{i+2}$ olur. Böylece Denklem (4.33)'te $x_i = 0$ eşitliği yerine koyulursa bu Denklem C katsayısına eşit olur ve aşağıdaki gibi yazılır (Hoffmann ve Chiang 2000).

$$f_i = Ax_i^2 + Bx_i + C = C \quad (4.34)$$

x_{i+1} ve x_{i+2} noktalarındaki fonksiyon değerleri ise şu şekilde yazılır.

$$f_{i+1} = Ax_{i+1}^2 + Bx_{i+1} + C = A(\Delta x)^2 + B(\Delta x) + C \quad (4.35)$$

$$f_{i+2} = Ax_{i+2}^2 + Bx_{i+2} + C = A(2\Delta x)^2 + B(2\Delta x) + C \quad (4.36)$$

Denklem (4.34), (4.35) ve (4.36)'dan katsayılar aşağıdaki gibi bulunur.

$$C = f_i \quad (4.37)$$

$$B = \frac{-f_{i+2} + 4f_{i+1} - 3f_i}{2(\Delta x)} \quad (4.38)$$

$$A = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{2(\Delta x)^2} \quad (4.39)$$

f fonksiyonunun birinci türevi:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2Ax + B \quad (4.40)$$

$x_i = 0$ yerine koyulduğunda Denklem aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i = B \quad (4.41)$$

Denklem (4.38)'deki B katsayısının değeri Denklem (4.41)'de yerine koyulursa:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-f_{i+2} + 4f_{i+1} - 3f_i}{2(\Delta x)} \quad (4.42)$$

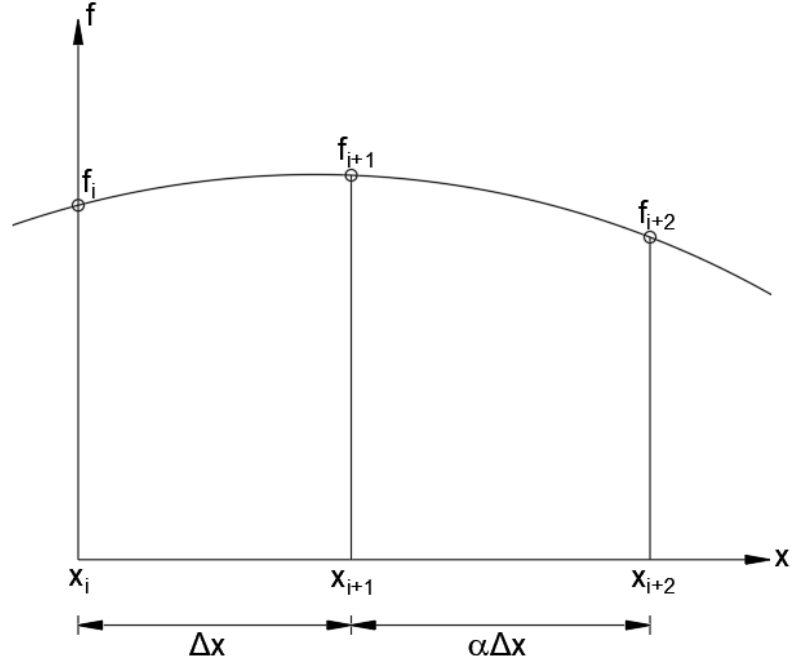
Denklem (4.42), Taylor serisi açılımı ile elde edilen ileri fark ifadesi ile aynıdır. f fonksiyonunun ikinci türevi:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2A \quad (4.43)$$

Denklem (4.39)'daki A katsayısının değeri Denklem (4.43)'te yerine koyulursa:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{(\Delta x)^2} \quad (4.44)$$

Denklem (4.44), aynı şekilde Denklem (4.42) gibi Taylor serisi açılımı ile elde edilen sonlu fark yaklaşımı ile aynıdır (Hoffmann ve Chiang 2000).



Şekil 4.5: Farklı adım boyutlarına sahip f fonksiyonuna yaklaşan ikinci mertebeden bir polinomun gösterimi (Hoffmann ve Chiang 2000)

Şekil 4.5 'te olduğu gibi noktalar arasındaki mesafe aynı değilse, türevin sonlu fark yaklaşımı yine aynı şekilde bulunur.

$x_i = 0$, $x_{i+1} = \Delta x$ ve $x_{i+2} = (1 + \alpha)\Delta x$ varsayılırsa her bir noktadaki fonksiyon denklemleri aşağıdaki Denklem (4.45), (4.46) ve (4.47) gibi yazılabilir.

$$f_i = C \quad (4.45)$$

$$f_{i+1} = A(\Delta x)^2 + B(\Delta x) + C \quad (4.46)$$

$$f_{i+2} = A(1 + \alpha)^2(\Delta x)^2 + B(1 + \alpha)(\Delta x) + C \quad (4.47)$$

Bu denklemlerdeki katsayılar aşağıdaki gibidir.

$$C = f_i \quad (4.48)$$

$$B = \frac{-f_{i+2} + (1 + \alpha)^2 f_{i+1} - (\alpha^2 + 2\alpha) f_i}{\alpha(1 + \alpha)\Delta x} \quad (4.49)$$

$$A = \frac{f_{i+2} - (1 + \alpha) f_{i+1} + \alpha f_i}{\alpha(1 + \alpha)(\Delta x)^2} \quad (4.50)$$

Denklem (4.41)'de elde edildiği gibi birinci türev B katsayısına eşittir ve şu şekilde yazılır:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i = \frac{-f_{i+2} + (1 + \alpha)^2 f_{i+1} - \alpha(\alpha + 2)f_i}{\alpha(1 + \alpha)\Delta x} \quad (4.51)$$

Elde edilen bu denklem, ikinci mertebeden bir yaklaşımdır. f fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2A \quad (4.52)$$

Burada A katsayısı yerine koyulursa:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \left[\frac{f_{i+2} - (1 + \alpha)f_{i+1} + \alpha f_i}{\alpha(1 + \alpha)(\Delta x)^2} \right] \quad (4.53)$$

Elde edilen bu denklem, birinci mertebeden bir yaklaşımdır. Yine aynı adımlar kullanılarak geri ve merkezi fark yaklaşımları da elde edilebilir (Hoffmann ve Chiang 2000).

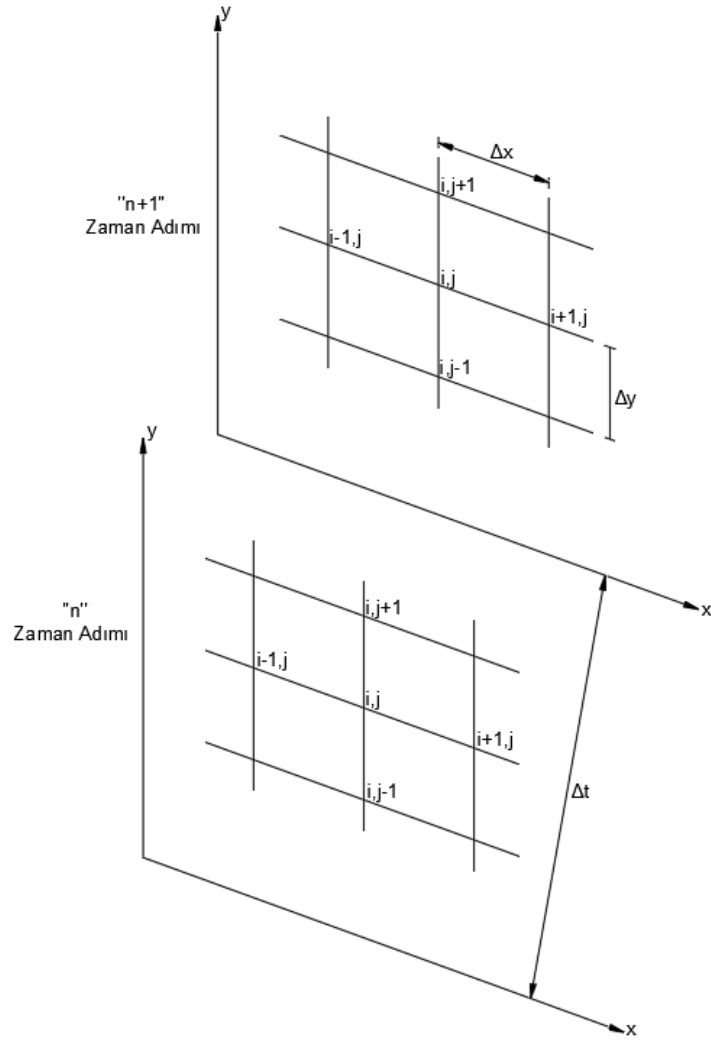
4.3 Bir Kısmi Diferansiyel Denklemin Sonlu Farklar Yöntemi ile Parçalanması

t zaman, x, y iki uzaysal koordinat ve bağımlı değişken $f = f(t, x, y)$ ise kısmi diferansiyel denklem aşağıdaki şekilde yazılabilir (Hoffmann ve Chiang 2000).

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \quad (4.54)$$

Burada α sabit terimdir.

Bu kısmi diferansiyel denklemi eşit aralığa sahip bir alandaki sonlu fark denklemiyle yaklaştırmak gerekir. Aşağıdaki Şekil 4.6'daki i ve j alt simge indekslerini, x ve y kartezyen koordinatları üst simge indeksi n zamanı, Δx ve Δy uzaysal ızgara aralıklarını ve Δt ise zaman adımını temsil etmektedir (Hoffmann ve Chiang 2000).



Şekil 4.6: Denklem (4.54)'ün grid sistemi (Hoffmann ve Chiang 2000)

Burada n zamanındaki f fonksiyonu bilinmekte olup $n + 1$ zamanındaki f fonksiyonu bulunmaya çalışılmaktadır. Bu nedenle, Denklem (4.54) hem n hem de $n + 1$ zaman adımında ifade edilebilir. İlk olarak n zamanında birinci hata mertebeli bir ileri fark yaklaşımı yazılırsa:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (4.55)$$

f fonksiyonunun n zaman adımında x ve y 'ye göre ikinci mertebeden türevi merkezi fark yaklaşımı kullanılarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1,j}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \quad (4.56.a)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f_{i,j+1}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} + O(\Delta y)^2 \quad (4.56.b)$$

Denklem (4.55), (4.56.a) ve (4.56.b), Denklem (4.54)'te yerlerine koyulursa:

$$\begin{aligned} \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n}{\Delta t} = \alpha \left[\frac{f_{i+1,j}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{f_{i,j+1}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right] \\ + O[\Delta t, (\Delta x)^2, (\Delta y)^2] \end{aligned} \quad (4.57)$$

Denklem (4.57), n zaman adımındadır. Burada sağ taraf kesme hatasını temsil etmektedir. Sağ taraftaki en düşük terim birinci mertebeden olduğundan, denklem birinci mertebeden kesme hatasına sahiptir (Hoffmann ve Chiang 2000).

Aşağıdaki ikinci durum için, Denklem $n + 1$ zaman adımında yazılmıştır.

$$\begin{aligned} \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n}{\Delta t} = \alpha \left[\frac{f_{i+1,j}^{n+1} - 2f_{i,j}^{n+1} + f_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{f_{i,j+1}^{n+1} - 2f_{i,j}^{n+1} + f_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} \right] \\ + O[\Delta t, (\Delta x)^2, (\Delta y)^2] \end{aligned} \quad (4.58)$$

Elde edilen (4.57) ve (4.58) sonlu farklı denklemleri, sırasıyla açık ve kapalı denklemler olarak sınıflandırılır. Açık ve kapalı denklemlerdeki fark bilinmeyen terimlerin sayısıdır. Bu nedenle, bu iki denklemin çözüm yöntemi birbirinden farklıdır. Açık denklemde sadece bir bilinmeyen vardır ve her nokta için doğrudan çözülebilmektedir. Kapalı denklemde ise birden fazla bilinmeyen olduğundan bilinmeyenleri aynı anda çözmek için $n + 1$ zaman adımındaki tüm noktalar için sonlu fark denklemi yazılmalıdır. Açıkçası, açık denklemin çözümü kapalı denklemden daha basittir. Ama kapalı denklemler açık denklemlere göre daha karardır (Hoffmann ve Chiang 2000).

4.4 Karışık Kısmi Türevlerin Sonlu Fark Yaklaşımı

Karışık kısmi türevlere yaklaşmak için iki yöntem kullanılabilir. Birinci yöntem, iki değişken için Taylor Serisi Açılımını kullanmaktır. İkinci ve daha kolay yöntem ise yalnızca bir bağımsız değişkenin dahil olduğu kısmi türevlerin yaklaşımını

kullanılmaktadır. Her iki yöntem aşağıdaki başlıklar altında detaylı bir şekilde anlatılmıştır (Hoffmann ve Chiang 2000).

4.4.1 Taylor Serisi Açılımı

Karışık kısmi türevler için Taylor Serisi Açılımı yaklaşımını göstermek amacıyla aşağıda x ve y iki değişkenli $\partial^2 f / (\partial x \partial y)$ göz önüne alınmıştır.

$f(x + \Delta x, y + \Delta y)$ aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned} & f(x + \Delta x, y + \Delta y) \\ &= f(x, y) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta y)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ &+ 2 \frac{\Delta x \Delta y}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + O[(\Delta x)^3, (\Delta y)^3] \end{aligned} \quad (4.59)$$

Denklem (4.59), i ve j indeksleri kullanılarak yazılırsa:

$$\begin{aligned} f_{i+1,j+1} &= f_{i,j} + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta y)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ &+ O[(\Delta x)^3, (\Delta y)^3] \end{aligned} \quad (4.60)$$

Aynı şekilde, $f(x - \Delta x, y - \Delta y)$, $f(x + \Delta x, y - \Delta y)$ ve $f(x - \Delta x, y + \Delta y)$ açılımları da aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} f_{i-1,j-1} &= f_{i,j} - \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} - \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta y)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ &+ \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + O[(\Delta x)^3, (\Delta y)^3] \end{aligned} \quad (4.61.a)$$

$$\begin{aligned} f_{i+1,j-1} &= f_{i,j} + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} - \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta y)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ &- \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + O[(\Delta x)^3, (\Delta y)^3] \end{aligned} \quad (4.61.b)$$

$$\begin{aligned}
f_{i-1,j+1} = f_{i,j} - \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta y)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\
- \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + O[(\Delta x)^3, (\Delta y)^3]
\end{aligned} \tag{4.61.c}$$

Denklem (4.60) ve (4.61.c)'den aşağıdaki Denklem elde edilir.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j-1}}{4(\Delta x)(\Delta y)} + O[(\Delta x)^2, (\Delta y)^2] \tag{4.62}$$

Yüksek mertebeden türevlerin sonlu fark yaklaşımı Denklem (4.62) gibi elde edilir (Hoffmann ve Chiang 2000).

4.4.2 Tek Bağımsız Değişkenli Kısmi Türevlerin Açılımı

Tek bağımsız değişkene sahip kısmi türevler için geliştirilen yaklaşık ifadeler karışık kısmi türevleri hesaplamak için de kullanılabilir. Aşağıdaki gibi bir kısmi türev düşünülürse (Hoffmann ve Chiang 2000):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \tag{4.63}$$

$\partial f / \partial y$, $(\Delta y)^2$ kesme hatasına sahip merkezi fark yaklaşımı kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y} + O(\Delta y)^2 \tag{4.64}$$

Buradan:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y} \right] + O(\Delta y)^2 \\ &= \frac{1}{2\Delta y} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{i,j+1} - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{i,j-1} \right] + O(\Delta y)^2\end{aligned}\quad (4.65)$$

Aynı şekilde $\partial f / \partial x$ yerine $(\Delta x)^2$ kesme hatasına sahip merkezi fark yaklaşımı yazılırsa Denklem (4.65) aşağıdaki gibi olur:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2\Delta y} \left[\frac{f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1}}{2\Delta x} - \frac{f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j-1}}{2\Delta x} \right] + O[(\Delta x)^2, (\Delta y)^2] \quad (4.66)$$

Bu denklem düzenlenirse:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1} - f_{i+1,j-1} + f_{i-1,j-1}}{4(\Delta x)(\Delta y)} + O[(\Delta x)^2, (\Delta y)^2] \quad (4.67)$$

Aşağıdaki Denklem ise bu ifadenin $\Delta x, \Delta y$ kesme hatasına sahip ileri fark yaklaşımı kullanılarak yazılmasıyla elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta y} \right] + O(\Delta y) \\ &= \frac{1}{\Delta y} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{i,j+1} - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{i,j} \right] + O(\Delta y) \\ &= \frac{1}{\Delta y} \left[\frac{f_{i+1,j+1} - f_{i,j+1}}{\Delta x} - \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x} \right] + O(\Delta x, \Delta y) \\ &= \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i,j+1} - f_{i+1,j} + f_{i,j}}{\Delta x \Delta y} + O(\Delta x, \Delta y)\end{aligned}\quad (4.68)$$

Bu gibi benzer yaklaşımlar, türevler için geri fark kullanılarak ya da x 'in türevi için ileri fark ve y 'nin türevi için geri fark kullanılarak elde edilebilir (Hoffmann ve Chiang 2000).

Aşağıda verilen Tablolarda farklı kesme hatalarına göre geri, ileri ve merkezi fark gösterimleri yer almaktadır.

Tablo 4.1: $O(\Delta x)$ kesme hatasına sahip ileri fark gösterimi (Hoffmann ve Chiang 2000)

	f_i	f_{i+1}	f_{i+2}	f_{i+3}	f_{i+4}
$(\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x}$	-1	1			
$(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	1	-2	1		
$(\Delta x)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$	-1	3	-3	1	
$(\Delta x)^4 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$	1	-4	6	-4	1

Tablo 4.1’de verilen $(\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x}$ ‘in açılımı aşağıdaki gibidir:

$$(\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} = -f_i + f_{i+1} \quad (4.69.a)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \quad (4.69.b)$$

Tablo 4.2: $O(\Delta x)$ kesme hatasına sahip geri fark gösterimi (Hoffmann ve Chiang 2000)

	f_{i-4}	f_{i-3}	f_{i-2}	f_{i-1}	f_i
$(\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x}$				-1	1
$(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$			1	-2	1
$(\Delta x)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$		-1	3	-3	1
$(\Delta x)^4 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$	1	-4	6	-4	1

Tablo 4.2’de verilen $(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ‘in açılımı aşağıdaki gibidir:

$$(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i \quad (4.70.a)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{(\Delta x)^2} \quad (4.70.b)$$

Tablo 4.3: $O(\Delta x)^2$ kesme hatasına sahip merkezi fark gösterimi (Hoffmann ve Chiang 2000)

	f_{i-2}	f_{i-1}	f_i	f_{i+1}	f_{i+2}
$2(\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x}$		-1	0	1	
$(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$		1	-2	1	
$2(\Delta x)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$	-1	2	0	-2	1
$(\Delta x)^4 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$	1	-4	6	-4	1

Tablo 4.3'te verilen $2(\Delta x)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ 'in açılımı aşağıdaki gibidir:

$$2(\Delta x)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = -f_{i-2} + 2f_{i-1} - 2f_{i+1} + f_{i+2} \quad (4.71.a)$$

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_i = \frac{-f_{i-2} + 2f_{i-1} - 2f_{i+1} + f_{i+2}}{2(\Delta x)^3} \quad (4.71.b)$$

Tablo 4.4: $O(\Delta x)^2$ kesme hatasına sahip ileri fark gösterimi (Hoffmann ve Chiang 2000)

	f_i	f_{i+1}	f_{i+2}	f_{i+3}	f_{i+4}	f_{i+5}
$2(\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x}$	-3	4	-1			
$(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	2	-5	4	-1		
$2(\Delta x)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$	-5	18	-24	14	-3	
$(\Delta x)^4 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$	3	-14	26	-24	11	-2

Tablo 4.4'te verilen $(\Delta x)^4 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$ 'in açılımı aşağıdaki gibidir:

$$(\Delta x)^4 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} = 3f_i - 14f_{i+1} + 26f_{i+2} - 24f_{i+3} + 11f_{i+4} - 2f_{i+5} \quad (4.72.a)$$

$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right)_i = \frac{3f_i - 14f_{i+1} + 26f_{i+2} - 24f_{i+3} + 11f_{i+4} - 2f_{i+5}}{(\Delta x)^4} \quad (4.72.b)$$

Tablo 4.5: $O(\Delta x)^2$ kesme hatasına sahip geri fark gösterimi (Hoffmann ve Chiang 2000)

	f_{i-5}	f_{i-4}	f_{i-3}	f_{i-2}	f_{i-1}	f_i
$2(\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x}$				1	-4	3
$(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$			-1	4	-5	2
$2(\Delta x)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$		3	-14	24	-18	5
$(\Delta x)^4 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$	-2	11	-24	26	-14	3

Tablo 4.5'te verilen $(\Delta x)^4 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$ 'in açılımı aşağıdaki gibidir:

$$(\Delta x)^4 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} = -2f_{i-5} + 11f_{i-4} - 24f_{i-3} + 26f_{i-2} - 14f_{i-1} + 3f_i \quad (4.73.a)$$

$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right)_i = \frac{-2f_{i-5} + 11f_{i-4} - 24f_{i-3} + 26f_{i-2} - 14f_{i-1} + 3f_i}{(\Delta x)^4} \quad (4.73.b)$$

Tablo 4.6: $O(\Delta x)^4$ kesme hatasına sahip merkezi fark gösterimi (Hoffmann ve Chiang 2000)

	f_{i-3}	f_{i-2}	f_{i-1}	f_i	f_{i+1}	f_{i+2}	f_{i+3}
$12(\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x}$		1	-8	0	8	-1	
$12(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$		-1	16	-30	16	-1	
$8(\Delta x)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$	1	-8	13	0	-13	8	-1
$6(\Delta x)^4 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$	-1	12	-39	56	-39	12	-1

Tablo 4.6'da verilen $12(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ 'in açılımı aşağıdaki gibidir:

$$12(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -f_{i-2} + 16f_{i-1} - 30f_i + 16f_{i+1} - f_{i+2} \quad (4.74.a)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i = \frac{-f_{i-2} + 16f_{i-1} - 30f_i + 16f_{i+1} - f_{i+2}}{12(\Delta x)^2} \quad (4.74.b)$$

5. SAYISAL MODELİN TANITILMASI

5.1 Tezde Kullanılan Problemler ve Yönetici Denklemleri

Tez kapsamında bölüm (3.2)'de anlatıldığı gibi iki farklı akifer problemi ele alınmıştır. Bu problemlerin yönetici denklemi genel olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Upadyaya ve Chauhan 2001^b).

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{K}{f} \left[h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - \alpha \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{R}{K} \right] \quad (5.1)$$

Burada R katsayısı beslenmeyi ifade eder, beslenme olmaması durumunda $R = 0$ olarak alınmaktadır. Birinci problemin başlangıç ve sınır koşulları aşağıdaki gibidir.

$$h(x, 0) = h_0, \quad t = 0, \quad 0 < x < L \quad (5.2.a)$$

$$h(0, t) = h(L, t) = 0, \quad t > 0, \quad x = 0, x = L \quad (5.2.b)$$

İkinci problemin başlangıç ve sınır koşulları ise aşağıdaki gibidir.

$$h = h_1, \quad x = 0, \quad t > 0 \quad (5.3.a)$$

$$h = h_0, \quad x > 0, \quad t = 0 \quad (5.3.b)$$

$$h = h_0, \quad x \rightarrow \infty, \quad t > 0 \quad (5.3.c)$$

Denklem (5.2.a) ve (5.2.b)'de verilen koşullar ve Dirichlet sınır koşulu dikkate alınarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} = 0, \quad i = 1 \quad (5.3.a)$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} = F_i, \quad i = 2, 3, \dots, N - 1 \quad (5.3.b)$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} = 0, \quad i = N \quad (5.3.c)$$

Genel denklem aşağıdaki gibi olur.

$$F_i = \frac{K}{f} \left[h_i \frac{\partial^2 h_i}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial h_i}{\partial x} \right)^2 - \alpha \left(\frac{\partial h_i}{\partial x} \right) + \frac{R}{K} \right] \quad (5.4)$$

5.2 Zaman Çizgileri Yöntemi (Method of Lines)

Zaman Çizgileri Yöntemi, zamana bağlı kısmi diferansiyel denklemlerin adi ve zamana bağlı diferansiyel denklemlere dönüştürülmesi için uygulanan bir metottur. Denklem (5.1)'de verilen bir akifer denkleminin konumsal türevleri sonlu farklar yöntemi ile ayrıştırıldığında, aşağıda verilen zamana bağlı adi diferansiyel denklem sistemi elde edilmiştir.

$$\frac{dh}{dt} = F(t, h) \quad (5.5)$$

Burada F , konumsal diferansiyel operatörü temsil etmektedir.

$(M + 1) \times (N + 1)$ adi diferansiyel denklemlerden oluşan denklem (5.5)'in zaman integrasyonu için DOPRI5 (Dormand ve Prince 1980) adı verilen beşinci mertebeden adaptif Runge-Kutta formülü kullanılmıştır. DOPRI5, adi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan bir integrasyon yöntemidir. Yedi aşaması vardır fakat son aşama bir sonraki adımın ilk aşamasıyla aynı noktada değerlendirilmektedir. Buna FSAL (First Same as Last) özelliği adı verilir. Ardışık zaman basamakları için sayısal değerler DOPRI5 şeması ile aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır (Bahar ve Gürarşlan 2020).

$$k_1 = F(t_p, h_p) \quad (5.6)$$

$$k_v = F \left(t_p + \omega_v \Delta t_p, h_p + \Delta t_p \sum_{\xi=1}^{v-1} \phi_v, \xi^k \xi \right), \quad v = 2, 3, \dots, 7 \quad (5.6.a)$$

$$h_{p+1} = h_p + \Delta t_p \sum_{v=1}^7 \psi_v k_v \quad (5.6.b)$$

Burada p ve v zaman ve kademe indekslerini temsil etmektedir. k_v , her aşamada hesaplanan yaklaşık eğim matrisidir, Δt_p t_p zamanında dinamik olarak belirlenen zaman adımıdır. $\omega_v, \phi_v, \xi, \psi_v$ katsayıları ise aşağıdaki Tablo (5.1)'de verilmiştir.

Tablo 5.1: DOPRI5 için Butcher dizisi (Bahar ve Gürarlan 2020)

ω	ϕ						
0	0						
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0					
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$	0				
$\frac{4}{5}$	$\frac{44}{45}$	$-\frac{56}{15}$	$\frac{32}{9}$	0			
$\frac{8}{9}$	$\frac{19372}{6561}$	$-\frac{25360}{2187}$	$\frac{64448}{6561}$	$-\frac{212}{729}$	0		
1	$\frac{9017}{3168}$	$-\frac{355}{33}$	$\frac{46732}{5247}$	$\frac{49}{176}$	$-\frac{5103}{18656}$	0	
1	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	
ψ^T	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	0
ψ'^T	$\frac{5179}{57600}$	0	$\frac{7571}{16695}$	$\frac{393}{640}$	$-\frac{92097}{339200}$	$\frac{187}{2100}$	$\frac{1}{40}$

DOPRI5 şeması için yerel kesme hatası Denklem (5.7)'de verilen formülle elde edilmektedir.

$$e_{p+1} = \Delta t_p \sum_{v=1}^7 (\psi_v - (\psi'_v)k_v) \quad (5.7)$$

Buradaki hata matrisinin sonsuzluk normu, belirlenen bir e_{tol} değeri ile karşılaştırılır. Eğer bu koşul sağlanırsa Denklem (5.8)'da verilen formülasyon ile zaman adımı hesaplanmaktadır.

$$\Delta t_{p+1} = 0.9 \Delta t_p \left(\frac{e_{tol}}{\|e_{p+1}\|_{\infty}} \right)^{\frac{1}{5}}, \quad \|e_{p+1}\|_{\infty} \leq e_{tol} \quad (5.8)$$

Koşul sağlanmaz ise Δt_{p+1} Denklem (5.8) kullanılarak koşul sağlanana kadar güncellenir (Bahar ve Gürarlan 2020).

6. MODEL SONUÇLARININ DEĞERLENDİRİLMESİ

Bu bölümde, eğimli bir akiferde su tablasının alçalması ve sabit beslenme koşulları altında akarsu ve eğimli akiferin etkileşimi başlıklı iki farklı problem incelenmiştir. Problemlerin analiz sonuçları aşağıda detaylı olarak Tablolarda gösterilmiştir.

6.1 Birinci Problem: Eğimli Bir Akiferde Su Tablasının Alçalması

İncelenen bu problemde, $h_0 = 12$ inç, $f = 1.0$, $L = 100$ inç, eğim olmaması durumunda $K = 2.328$ inç/dk, eğim olması durumunda $K = 2.890$ inç/dk olarak alınmıştır. Δt 0.0001 ve Δx ise 0.01 olacak şekilde analizler yapılmıştır (Upadyaya ve Chauhan 2001^a). DQM çözümü de parametreler yine aynı şekilde alınarak elde edilmiştir (Ghaheri ve Meraji 2012). FDM-MOL ile çözülen referans çözümde ise $\Delta x = 10/1024$ alınarak analizler yapılmıştır. Yapılan bu analizlerde, akiferin orta noktasına düşen su tablası yüksekliği 5, 25, 50, 100, 150, 200, 250, 300 dakikalar ve %0, %4, %6, %8 eğimleri için ayrı ayrı elde edilmiştir.

Tablo 6.1, 6.3, 6.5 ve 6.7’te Upadhyaya ve Chauhan (2001^a) tarafından eğimli, geçirimsiz bir akiferin, eğim olmaması ve %4, %6, %8 eğim olması durumlarında orta noktasındaki su tablası değerleri için elde edilen deneysel sonuçlar, Baumann ve Werner’in lineerleştirme yöntemi, sonlu farklar, sonlu elemanlar, hibrit sonlu analitik yöntemi ve DQM (Ghaheri ve Meraji 2012) yöntemi sonuçları verilmiştir. Her yöntemde göre hata normu değerleri ise Tablo 6.2, 6.4, 6.6 ve 6.8’de gösterilmektedir.

Tablo 6.1: Eğim olmaması durumunda orta noktadaki su tablası değerleri

Zaman (dk)	Deneysel Sonuçlar [Chauhan, 1967]	Baumann'ın Lineerleştirme Yöntemi [Baumann, 1952]	Werner'in Lineerleştirme Yöntemi [Werner, 1953,1957]	Sonlu Farklar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^a]	Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^a]	Hibrit Sonlu Analitik Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^a]	Diferansiyel Kareleme Yöntemi (DQM) [Ghaheri ve Meraji, 2012]	Referans Çözüm
5	11.78	11.993	11.999	11.972	11.972	11.966	11.972	11.972
25	10.00	10.596	11.276	10.051	10.051	9.985	10.040	10.051
50	7.80	7.660	9.587	7.984	7.983	7.903	7.983	7.984
100	5.35	3.853	6.796	5.644	5.643	5.560	5.643	5.644
150	4.05	1.938	4.815	4.365	4.364	4.284	4.364	4.364
200	3.25	0.978	3.411	3.558	3.558	3.479	3.558	3.558
250	2.80	0.496	2.417	3.003	3.003	2.925	3.003	3.003
300	2.42	0.254	1.712	2.598	2.598	2.521	2.456	2.598

Tablo 6.2: Eğim olmaması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri

Yöntem	Hata Normu (L_2)
Deneysel Sonuçlar [Chauhan, 1967]	0.6528
Baumann'ın Lineerleştirme Yöntemi [Baumann, 1952]	5.2850
Werner'in Lineerleştirme Yöntemi [Werner, 1953,1957]	2.5984
Sonlu Farklar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^a]	0.0010
Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^a]	0.0014
Hibrit Sonlu Analitik Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^a]	0.2066
Diferansiyel Kareleme Yöntemi (DQM) [Ghaheri ve Meraji, 2012]	0.1424

Tablo 6.3: %4 eğim olması durumunda orta noktadaki su tablası değerleri

Zaman (dk)	Deneysel Sonuçlar [Chauhan, 1967]	Baumann'ın Lineerleştirme Yöntemi [Baumann, 1952]	Werner'in Lineerleştirme Yöntemi [Werner, 1953,1957]	Sonlu Farklar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^a]	Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^a]	Hibrit Sonlu Analitik Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^a]	Diferansiyel Kareleme Yöntemi (DQM) [Ghaheri ve Meraji, 2012]	Referans Çözüm
5	11.75	11.995	11.998	11.926	11.927	11.901	11.925	11.927
25	9.75	9.830	10.861	9.456	9.456	9.564	9.457	9.457
50	7.38	6.447	8.794	7.236	7.235	7.242	7.236	7.236
100	4.86	2.718	5.707	4.902	4.902	4.814	4.902	4.902
150	3.65	1.148	3.703	3.690	3.690	3.607	3.691	3.690
200	2.86	0.488	2.402	2.944	2.944	2.864	2.945	2.944
250	2.47	0.210	1.558	2.437	2.436	2.359	2.437	2.437
300	1.98	0.093	1.011	2.067	2.067	1.991	2.068	2.067

Tablo 6.4: %4 eğim olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri

Yöntem	Hata Normu (L_2)
Deneysel Sonuçlar [Chauhan, 1967]	0.3962
Baumann'ın Lineerleştirme Yöntemi [Baumann, 1952]	5.1852
Werner'in Lineerleştirme Yöntemi [Werner, 1953,1957]	2.6895
Sonlu Farklar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^a]	0.0014
Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^a]	0.0017
Hibrit Sonlu Analitik Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^a]	0.2123
Diferansiyel Kareleme Yöntemi (DQM) [Ghaheri ve Meraji, 2012]	0.0026

Tablo 6.5: %6 eğim olması durumunda orta noktadaki su tablası değerleri

Zaman (dk)	Deneysel Sonuçlar [Chauhan, 1967]	Baumann'ın Lineerleştirme Yöntemi [Baumann, 1952]	Werner'in Lineerleştirme Yöntemi [Werner, 1953,1957]	Sonlu Farklar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^a]	Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^a]	Hibrit Sonlu Analitik Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^a]	Diferansiyel Kareleme Yöntemi (DQM) [Ghaheri ve Meraji, 2012]	Referans Çözüm
5	11.74	11.994	11.998	11.926	11.927	11.901	11.930	11.927
25	9.64	9.801	10.845	9.444	9.443	9.452	9.445	9.445
50	7.20	6.391	8.756	7.208	7.207	7.114	7.208	7.208
100	4.65	2.662	5.648	4.850	4.849	4.762	4.580	4.849
150	3.55	1.111	3.642	3.616	3.615	3.533	3.617	3.616
200	2.62	0.467	2.349	2.849	2.849	2.770	2.851	2.849
250	2.11	0.199	1.515	2.321	2.321	2.244	2.323	2.321
300	1.72	0.087	0.977	1.930	1.930	1.855	1.933	1.930

Tablo 6.6: %6 eğim olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri

Yöntem	Hata Normu (L_2)
Deneysel Sonuçlar [Chauhan, 1967]	0.5080
Baumann'ın Lineerleştirme Yöntemi [Baumann, 1952]	5.0428
Werner'in Lineerleştirme Yöntemi [Werner, 1953,1957]	2.6093
Sonlu Farklar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^a]	0.0017
Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^a]	0.0024
Hibrit Sonlu Analitik Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^a]	0.2045
Diferansiyel Kareleme Yöntemi (DQM) [Ghaheri ve Meraji, 2012]	0.2691

Tablo 6.7: %8 eğim olması durumunda orta noktadaki su tablası değerleri

Zaman (dk)	Deneysel Sonuçlar [Chauhan, 1967]	Baumann'ın Lineerleştirme Yöntemi [Baumann, 1952]	Werner'in Lineerleştirme Yöntemi [Werner, 1953,1957]	Sonlu Farklar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^a]	Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^a]	Hibrit Sonlu Analitik Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^a]	Diferansiyel Kareleme Yöntemi (DQM) [Ghaheri ve Meraji, 2012]	Referans Çözüm
5	11.72	11.994	11.998	11.926	11.926	11.901	11.928	11.927
25	9.54	9.762	10.823	9.426	9.426	9.435	9.428	9.428
50	7.10	6.313	8.703	7.168	7.168	7.075	7.170	7.169
100	4.57	2.586	5.566	4.775	4.774	4.687	4.777	4.775
150	3.25	1.061	3.559	3.511	3.510	3.428	3.513	3.511
200	2.46	0.438	2.276	2.714	2.713	2.634	2.717	2.714
250	1.91	0.184	1.456	2.154	2.153	2.078	2.158	2.155
300	1.48	0.080	0.931	1.730	1.729	1.656	1.735	2.124

Tablo 6.8: %8 eğim olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri

Yöntem	Hata Normu (L_2)
Deneysel Sonuçlar [Chauhan, 1967]	0.8424
Baumann'ın Lineerleştirme Yöntemi [Baumann, 1952]	4.9886
Werner'in Lineerleştirme Yöntemi [Werner, 1953,1957]	2.6525
Sonlu Farklar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^a]	0.3940
Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^a]	0.3950
Hibrit Sonlu Analitik Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^a]	0.5055
Diferansiyel Kareleme Yöntemi (DQM) [Ghaheri ve Meraji, 2012]	0.4090

%4, %6, %8 eğim olması durumlarında orta noktadaki su tablası değerleri ve bu eğimlere göre bulunan sonuçların hata normları yukarıda bulunan 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 6.7 ve 6.8 Tablolarında verilmiştir. Tüm Tablolar incelendiğinde Baumann ve Werner lineerleştirme yöntemi ile elde edilen sonuçların ve deneysel sonuçların referans çözüm ile oldukça farklı olduğu, referans çözüme en yakın sonuçların sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemi ile bulunduğu tespit edilmiştir. Bu iki yöntemin hemen sonrasında ise en iyi sonuçların DQM ve hibrit sonlu analitik yöntemi ile elde edildiği görülmektedir.

6.2 İkinci Problem: Sabit Beslenme Koşulları Altında Akarsu ve Eğimli Akiferin Etkileşimi

İncelenen bu problemde, $K = 20$ m/gün, $f = 0.27$, Δt ve Δx sırasıyla 0.0025 gün ve 2 m olarak alınmıştır. Tablolar %0, %5 ve %10 eğim, $t = 1$ gün, $t = 5$ gün, $R = 0$ mm/gün ve $R = 5$ mm/gün koşulları için ayrı ayrı oluşturulmuştur (Upadyaya ve Chauhan 2001^b). Bu problemde, beslenme/boşaltma olması durumunda akiferdeki h_0 ve h_1 değerleri değişmektedir. Bölüm 6.1’de bahsedilen birinci problem için FDM-MOL kullanılarak oluşturulan referans çözümler değişen koşullar için ayrı ayrı analizleri yapılarak sonuçlar aşağıdaki Tablolarda gösterilmiştir.

6.2.1 Beslenme Olması Durumu

Beslenme olması durumunda akiferde $h_0 = 2$ m ve $h_1 = 3$ m olarak alınarak analizler yapılmıştır.

Aşağıdaki Tablo 6.9, 6.11 ve 6.13’de $R = 0$ mm/gün, $t = 1$ gün ve %0, %5, %10 eğim değerleri için referans çözüm değerleri verilmiştir. Tablo 6.10, 6.12 ve 6.14’de ise yöntemlere göre hata normu değerleri yer almaktadır.

Tablo 6.9: %0 eğim, $t = 1$ gün, $R = 0$ mm/gün ve beslenme olması durumundaki su tablası değerleri

X (m)	Lineerleştirme Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Referans Çözüm
0	3.000	3.000	3.000
10	2.603	2.638	2.637
20	2.299	2.318	2.317
30	2.119	2.116	2.115
40	2.038	2.030	2.030
50	2.009	2.005	2.005
60	2.002	2.001	2.001
70	2.000	2.000	2.000
80	2.000	2.000	2.000

Tablo 6.10: : %0 eğim, $t = 1$ gün, $R = 0$ mm/gün ve beslenme olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri

Yöntem	Hata Normu (L_2)
Lineerleştirme Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0397
Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0017

Tablo 6.11: %5 eğim, $t = 1$ gün, $R = 0$ mm/gün ve beslenme olması durumundaki su tablası değerleri

X (m)	Lineerleştirme Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Referans Çözüm
0	3.000	3.000	3.000
10	2.663	2.694	2.694
20	2.361	2.387	2.386
30	2.159	2.161	2.160
40	2.055	2.048	2.047
50	2.015	2.010	2.010
60	2.004	2.002	2.002
70	2.000	2.000	2.000
80	2.000	2.000	2.000

Tablo 6.12: %5 eğim, $t = 1$ gün, $R = 0$ mm/gün ve beslenme olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri

Yöntem	Hata Normu (L_2)
Lineerleştirme Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0410
Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0017

Tablo 6.13: %10 eğim, $t = 1$ gün, $R = 0$ mm/gün ve beslenme olması durumundaki su tablası değerleri

X (m)	Lineerleştirme Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Referans Çözüm
0	3.000	3.000	3.000
10	2.719	2.746	2.746
20	2.428	2.458	2.457
30	2.206	2.215	2.214
40	2.079	2.073	2.072
50	2.025	2.018	2.017
60	2.006	2.003	2.003
70	2.000	2.000	2.000
80	2.000	2.000	2.000

Tablo 6.14: %10 eğim, $t = 1$ gün, $R = 0$ mm/gün ve beslenme olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri

Yöntem	Hata Normu (L_2)
Lineerleştirme Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0419
Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0020

Tablo 6.9’da referans çözümde $\Delta x = 10/16$, tablo 6.11 ve 6.13’de $\Delta x = 10/8$ adımında sonuçların referans çözüm ile yakınsadığı tespit edilmiş ve bu değerler Tablolara yazılmıştır. Referans çözüme en yakın sonuçların her üç Tabloda da sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen sonuçlar olduğu görülmektedir.

Aşağıdaki Tablo 6.15, 6.17 ve 6.19’da $R = 5$ mm/gün, $t = 1$ gün ve %0, %5, %10 eğim değerleri için referans çözüm değerleri verilmiştir. Tablo 6.16, 6.18 ve 6.20’de ise yöntemlere göre hata normu değerleri yer almaktadır.

Tablo 6.15: %0 eğim, $t = 1$ gün, $R = 5$ mm/gün ve beslenme olması durumundaki su tablası değerleri

X (m)	Lineerleştirme Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001^b]	Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001^b]	Referans Çözüm
0	3.000	3.000	3.000
10	2.614	2.648	2.647
20	2.315	2.334	2.333
30	2.137	2.134	2.134
40	2.056	2.048	2.048
50	2.028	2.024	2.024
60	2.020	2.019	2.019
70	2.019	2.019	2.019
80	2.019	2.019	2.019

Tablo 6.16: %0 eğim, $t = 1$ gün, $R = 5$ mm/gün ve beslenme olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri

Yöntem	Hata Normu (L_2)
Lineerleştirme Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0388
Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0014

Tablo 6.17: %5 eğim, $t = 1$ gün, $R = 5$ mm/gün ve beslenme olması durumundaki su tablası değerleri

X (m)	Lineerleştirme Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001^b]	Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001^b]	Referans Çözüm
0	3.000	3.000	3.000
10	2.673	2.704	2.703
20	2.377	2.402	2.401
30	2.176	2.179	2.178
40	2.074	2.066	2.066
50	2.034	2.029	2.029
60	2.022	2.020	2.020
70	2.019	2.019	2.019
80	2.019	2.019	2.019

Tablo 6.18: %5 eğim, $t = 1$ gün, $R = 5$ mm/gün ve beslenme olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri

Yöntem	Hata Normu (L_2)
Lineerleştirme Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0397
Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0017

Tablo 6.19: %10 eğim, $t = 1$ gün, $R = 5$ mm/gün ve beslenme olması durumundaki su tablası değerleri

X (m)	Lineerleştirme Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Referans Çözüm
0	3.000	3.000	3.000
10	2.729	2.755	2.755
20	2.443	2.473	2.472
30	2.224	2.233	2.231
40	2.097	2.092	2.091
50	2.043	2.036	2.036
60	2.024	2.022	2.022
70	2.020	2.019	2.019
80	2.019	2.019	2.019

Tablo 6.20: %10 eğim, $t = 1$ gün, $R = 5$ mm/gün ve beslenme olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri

Yöntem	Hata Normu (L_2)
Lineerleştirme Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0407
Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0024

Yukarıda verilen Tablo 6.15 ve 6.19'da referans çözümde $\Delta x = 10/16$ tablo 6.17'de ise $\Delta x = 10/8$ adımında sonuçların referans çözüme yakınsadığı tespit edilmiş ve bu değerler Tablolarda verilmiştir. Referans çözüme en yakın sonuçların Tablo 6.15, 6.17 ve 6.19'da sonlu elemanlar yöntemiyle elde edilen sonuçlar olduğu görülmektedir.

Aşağıdaki Tablo 6.21, 6.23 ve 6.25'da $R = 0$ mm/gün, $t = 5$ gün ve %0, %5, %10 eğim değerleri için ayrı ayrı için referans çözüm değerleri verilmiştir. Tablo 6.22, 6.24 ve 6.26'da ise yöntemlere göre hata normu değerleri yer almaktadır.

Tablo 6.21: %0 eğim, $t = 5$ gün, $R = 0$ mm/gün ve beslenme olması durumundaki su tablası değerleri

X (m)	Lineerleştirme Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001^b]	Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001^b]	Referans Çözüm
0	3.000	3.000	3.000
10	2.816	2.838	2.838
20	2.642	2.675	2.675
30	2.486	2.518	2.518
40	2.353	2.377	2.377
50	2.245	2.258	2.257
60	2.163	2.165	2.165
70	2.104	2.098	2.098
80	2.063	2.055	2.055
90	2.036	2.029	2.029
100	2.020	2.014	2.014
110	2.011	2.006	2.006
120	2.005	2.003	2.003
130	2.003	2.001	2.001
140	2.001	2.000	2.000
150	2.001	2.000	2.000
160	2.000	2.000	2.000
170	2.000	2.000	2.000
180	2.000	2.000	2.000

Tablo 6.22: %0 eğim, $t = 5$ gün, $R = 0$ mm/gün ve beslenme olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri

Yöntem	Hata Normu (L_2)
Lineerleştirme Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0595
Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0010

Tablo 6.23: %5 eğim, $t = 5$ gün, $R = 0$ mm/gün ve beslenme olması durumundaki su tablası değerleri

X (m)	Lineerleştirme Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001^b]	Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001^b]	Referans Çözüm
0	3.000	3.000	3.000
10	2.888	2.901	2.901
20	2.763	2.786	2.786
30	2.631	2.662	2.662
40	2.502	2.534	2.534
50	2.384	2.410	2.410
60	2.281	2.297	2.297
70	2.196	2.203	2.202
80	2.131	2.129	2.129
90	2.084	2.077	2.077
100	2.051	2.043	2.043
110	2.031	2.022	2.022
120	2.017	2.011	2.011
130	2.009	2.005	2.005
140	2.004	2.002	2.002
150	2.002	2.001	2.001
160	2.001	2.000	2.000
170	2.001	2.000	2.000
180	2.000	2.000	2.000

Tablo 6.24: %5 eğim, $t = 5$ gün, $R = 0$ mm/gün ve beslenme olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri

Yöntem	Hata Normu (L_2)
Lineerleştirme Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0625
Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0010

Tablo 6.25: %10 eğim, $t = 5$ gün, $R = 0$ mm/gün ve beslenme olması durumundaki su tablası değerleri

X (m)	Lineerleştirme Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Referans Çözüm
0	3.000	3.000	3.000
10	2.940	2.944	2.944
20	2.860	2.872	2.872
30	2.763	2.783	2.783
40	2.654	2.682	2.681
50	2.541	2.571	2.571
60	2.430	2.458	2.457
70	2.328	2.349	2.348
80	2.239	2.251	2.250
90	2.172	2.170	2.169
100	2.114	2.107	2.107
110	2.072	2.064	2.063
120	2.044	2.035	2.035
130	2.027	2.018	2.018
140	2.015	2.009	2.009
150	2.008	2.004	2.004
160	2.007	2.002	2.002
170	2.006	2.001	2.001
180	2.000	2.000	2.000

Tablo 6.26: : %10 eğim, $t = 5$ gün, $R = 0$ mm/gün ve beslenme olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri

Yöntem	Hata Normu (L_2)
Lineerleştirme Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0620
Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0024

Tablo 6.21’de referans çözüm $\Delta x = 10/4$ adımında, tablo 6.23’de $\Delta x = 10/16$ ve tablo 6.25’te ise $\Delta x = 10/8$ adımında değerlerin referans çözüme yakınsadığı tespit edilmiş ve Tablolara bu adımlardaki değerler yazılmıştır. Referans çözüme en yakın sonuçların her üç Tabloda da sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen sonuçlar olduğu görülmektedir.

Aşağıdaki Tablo 6.27, 6.29 ve 6.31’de $R = 5$ mm/gün, $t = 5$ gün ve %0, %5, %10 eğim değerleri için referans çözüm değerleri verilmiştir. Tablo 6.28, 6.30 ve 6.32’de ise yöntemlere göre hata normu değerleri yer almaktadır.

Tablo 6.27: %0 eğim, $t = 5$ gün, $R = 5$ mm/gün ve beslenme olması durumundaki su tablası değerleri

X (m)	Lineerleştirme Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Referans Çözüm
0	3.000	3.000	3.000
10	2.846	2.864	2.864
20	2.693	2.722	2.722
30	2.552	2.582	2.582
40	2.429	2.453	2.452
50	2.328	2.342	2.342
60	2.250	2.254	2.254
70	2.193	2.191	2.191
80	2.154	2.148	2.148
90	2.128	2.122	2.122
100	2.112	2.107	2.107
110	2.103	2.099	2.099
120	2.098	2.096	2.096
130	2.095	2.094	2.094
140	2.094	2.093	2.093
150	2.093	2.093	2.093
160	2.093	2.093	2.093
170	2.093	2.093	2.093
180	2.093	2.093	2.093

Tablo 6.28: %0 eğim, $t = 5$ gün, $R = 5$ mm/gün ve beslenme olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri

Yöntem	Hata Normu (L_2)
Lineerleştirme Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0541
Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0010

Tablo 6.29: %5 eğim, $t = 5$ gün, $R = 5$ mm/gün ve beslenme durumundaki su tablası değerleri

X (m)	Lineerleştirme Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Referans Çözüm
0	3.000	3.000	3.000
10	2.912	2.921	2.921
20	2.806	2.825	2.825
30	2.689	2.716	2.716
40	2.571	2.600	2.600
50	2.461	2.486	2.486
60	2.364	2.381	2.381
70	2.283	2.291	2.291
80	2.220	2.221	2.221
90	2.174	2.170	2.170
100	2.142	2.136	2.136
110	2.122	2.116	2.116
120	2.109	2.104	2.104
130	2.101	2.098	2.098
140	2.097	2.095	2.095
150	2.095	2.094	2.094
160	2.094	2.093	2.093
170	2.093	2.093	2.093
180	2.093	2.093	2.093

Tablo 6.30: %5 eğim, $t = 5$ gün, $R = 5$ mm/gün ve beslenme durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri

Yöntem	Hata Normu (L_2)
Lineerleştirme Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0558
Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0000

Tablo 6.31: %10 eğim, $t = 5$ gün, $R = 5$ mm/gün ve beslenme olması durumundaki su tablası değerleri

X (m)	Lineerleştirme Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Referans Çözüm
0	3.000	3.000	3.000
10	2.959	2.961	2.961
20	2.895	2.904	2.904
30	2.812	2.828	2.828
40	2.715	2.738	2.738
50	2.611	2.638	2.638
60	2.507	2.533	2.533
70	2.410	2.431	2.431
80	2.326	2.338	2.338
90	2.259	2.261	2.260
100	2.204	2.200	2.200
110	2.163	2.157	2.157
120	2.136	2.129	2.129
130	2.118	2.112	2.112
140	2.107	2.102	2.102
150	2.100	2.097	2.097
160	2.098	2.094	2.094
170	2.097	2.093	2.093
180	2.093	2.093	2.093

Tablo 6.32: %10 eğim, $t = 5$ gün, $R = 5$ mm/gün ve beslenme olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri

Yöntem	Hata Normu (L_2)
Lineerleştirme Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0554
Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0010

Tablo 6.27 ve 6.31’de referans çözüm $\Delta x = 10/8$ adımında sabitlenirken tablo 6.29’da ise $\Delta x = 10/16$ referans çözüme yakınsadığı görülmüştür ve Tablolara bu değerler yazılmıştır. Referans çözüme en yakın sonuçların her üç Tabloda da sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen sonuçlar olduğu görülmektedir. Ayrıca lineerleştirme yöntemi gerçek bir analitik çözüm olmaması nedeniyle bu yöntem ile beslenme olması durumu için yukarıda verilen tüm Tablolarda referans çözüme uzak sonuçlar bulunmuştur.

6.2.2 Boşaltma Olması Durumu

Boşaltma olması durumunda akiferde $h_0 = 3$ m ve $h_1 = 2$ m olarak alınarak analizler yapılmıştır.

$R = 0$ mm/gün, $t = 1$ gün ve %0, %5, %10 eğim değerleri için elde edilen referans çözümler aşağıda verilen Tablo 6.33, 6.35 ve 6.37’de gösterilmektedir. Tablo 6.34, 6.36 ve 6.38’de ise yöntemlere göre hata normları yer almaktadır.

Tablo 6.33: %0 eğim, $t = 1$ gün, $R = 0$ mm/gün ve boşaltma olması durumundaki su tablası değerleri

X (m)	Lineerleştirme Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Referans Çözüm
0	2.000	2.000	2.000
10	2.397	2.432	2.432
20	2.701	2.717	2.717
30	2.881	2.878	2.878
40	2.962	2.955	2.955
50	2.991	2.986	2.986
60	2.998	2.997	2.997
70	3.000	2.999	2.999
80	3.000	3.000	2.999
90	3.000	3.000	3.000

Tablo 6.34: %0 eğim, $t = 1$ gün, $R = 0$ mm/gün ve boşaltma olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri

Yöntem	Hata Normu (L_2)
Lineerleştirme Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0396
Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0010

Tablo 6.35: %5 eğim, $t = 1$ gün, $R = 0$ mm/gün ve boşaltma olması durumundaki su tablası değerleri

X (m)	Lineerleştirme Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Referans Çözüm
0	2.000	2.000	2.000
10	2.337	2.371	2.372
20	2.639	2.660	2.661
30	2.841	2.842	2.842
40	2.945	2.938	2.938
50	2.985	2.980	2.980
60	2.996	2.994	2.994
70	2.999	2.999	2.999
80	3.000	3.000	3.000
90	3.000	3.000	3.000

Tablo 6.36: %5 eğim, $t = 1$ gün, $R = 0$ mm/gün ve boşaltma olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri

Yöntem	Hata Normu (L_2)
Lineerleştirme Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0423
Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0014

Tablo 6.37: %10 eğim, $t = 1$ gün, $R = 0$ mm/gün ve boşaltma olması durumundaki su tablası değerleri

X (m)	Lineerleştirme Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Referans Çözüm
0	2.000	2.000	2.000
10	2.281	2.312	2.312
20	2.572	2.598	2.599
30	2.794	2.799	2.800
40	2.921	2.915	2.915
50	2.975	2.970	2.970
60	2.994	2.991	2.991
70	2.999	2.998	2.998
80	3.000	3.000	3.000
90	3.000	3.000	3.000

Tablo 6.38: %10 eğim, $t = 1$ gün, $R = 0$ mm/gün ve boşaltma olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri

Yöntem	Hata Normu (L_2)
Lineerleştirme Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0424
Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0014

Elde edilen Tablo 6.33, 6.35 ve 6.37’de referans çözümlerin $\Delta x = 10/8$ adımında sonuçların referans çözüm sonuçlarına yakınsadığı tespit edilmiş ve tablolara bu değerler yazılmıştır. Referans çözüm ile elde edilen sonuçların, sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen sonuçlar ile oldukça yakın olduğu, lineerleştirme yöntemi sonuçlarıyla ise yakınlık göstermediği görülmektedir.

Aşağıda $R = 5$ mm/gün, $t = 1$ gün ve %0, %5, %10 eğim değerleri için elde edilen referans çözümler Tablo 6.39, 6.41 ve 6.43’de verilmiştir. Tablo 6.40, 6.42 ve 6.44’te ise yöntemlere göre hata normları yer almaktadır.

Tablo 6.39: %0 eğim, $t = 1$ gün, $R = 5$ mm/gün ve boşaltma olması durumundaki su tablası değerleri

X (m)	Lineerleştirme Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Referans Çözüm
0	2.000	2.000	2.000
10	2.408	2.444	2.444
20	2.717	2.733	2.733
30	2.899	2.895	2.895
40	2.981	2.973	2.973
50	3.009	3.005	3.005
60	3.017	3.015	3.015
70	3.018	3.018	3.018
80	3.018	3.018	3.018
90	3.018	3.018	3.018

Tablo 6.40: %0 eğim, $t = 1$ gün, $R = 5$ mm/gün ve boşaltma olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri

Yöntem	Hata Normu (L_2)
Lineerleştirme Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0406
Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0000

Tablo 6.41: %5 eğim, $t = 1$ gün, $R = 5$ mm/gün ve boşaltma olması durumundaki su tablası değerleri

X (m)	Lineerleştirme Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Referans Çözüm
0	2.000	2.000	2.000
10	2.348	2.383	2.383
20	2.654	2.675	2.676
30	2.859	2.859	2.859
40	2.963	2.956	2.956
50	3.003	2.998	2.998
60	3.015	3.013	3.013
70	3.018	3.017	3.017
80	3.018	3.018	3.018
90	3.018	3.018	3.018

Tablo 6.42: %5 eğim, $t = 1$ gün, $R = 5$ mm/gün ve boşaltma olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri

Yöntem	Hata Normu (L_2)
Lineerleştirme Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0423
Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0010

Tablo 6.43: %10 eğim, $t = 1$ gün, $R = 5$ mm/gün ve boşaltma olması durumundaki su tablası değerleri

X (m)	Lineerleştirme Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Referans Çözüm
0	2.000	2.000	2.000
10	2.290	2.322	2.323
20	2.587	2.613	2.614
30	2.811	2.816	2.817
40	2.939	2.933	2.933
50	2.993	2.988	2.988
60	3.012	3.009	3.010
70	3.017	3.016	3.016
80	3.018	3.018	3.018
90	3.019	3.018	3.018

Tablo 6.44: %10 eğim, $t = 1$ gün, $R = 5$ mm/gün ve boşaltma olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri

Yöntem	Hata Normu (L_2)
Lineerleştirme Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0438
Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0020

Yukarıda verilen Tablo 6.39, 6.41 ve 6.43’de referans çözümlerin $\Delta x = 10/8$ adımında sonuçların referans çözüm sonuçlarına yakınsadığı tespit edilmiş ve Tablolara bu değerler yazılmıştır. Buradaki sonuçların da sonlu elemanlar yöntemi ile bulunan sonuçlar ile oldukça yakın olduğu, lineerleştirme yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçlar ile ise yakınlık göstermediği görülmektedir.

Aşağıda $R = 0$ mm/gün, $t = 5$ gün ve %0, %5, %10 eğim değerleri için elde edilen referans çözümler aşağıda verilen Tablo 6.45, 6.47 ve 6.49’da gösterilmektedir. Tablo 6.46, 6.48 ve 6.50’de ise yöntemlere göre hata normları yer almaktadır.

Tablo 6.45: %0 eğim, $t = 5$ gün, $R = 0$ mm/gün ve boşaltma olması durumundaki su tablası değerleri

X (m)	Lineerleştirme Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Referans Çözüm
0	2.000	2.000	2.000
10	2.184	2.212	2.212
20	2.358	2.394	2.394
30	2.514	2.546	2.546
40	2.647	2.669	2.669
50	2.755	2.765	2.765
60	2.837	2.838	2.838
70	2.896	2.892	2.892
80	2.937	2.931	2.931
90	2.964	2.957	2.957
100	2.980	2.974	2.974
110	2.989	2.985	2.985
120	2.995	2.992	2.992
130	2.997	2.996	2.996
140	2.999	2.998	2.998
150	2.999	2.999	2.999
160	3.000	2.999	2.999
170	3.000	3.000	3.000
180	3.000	3.000	3.000
190	3.000	3.000	3.000
200	3.000	3.000	3.000

Tablo 6.46: %0 eğim, $t = 5$ gün, $R = 0$ mm/gün ve boşaltma olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri

Yöntem	Hata Normu (L_2)
Lineerleştirme Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0621
Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0000

Tablo 6.47: %5 eğim, $t = 5$ gün, $R = 0$ mm/gün ve boşaltma olması durumundaki su tablası değerleri

X (m)	Lineerleştirme Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Referans Çözüm
0	2.000	2.000	2.000
10	2.112	2.128	2.128
20	2.237	2.266	2.266
30	2.369	2.402	2.402
40	2.498	2.529	2.529
50	2.616	2.640	2.640
60	2.719	2.733	2.733
70	2.804	2.809	2.809
80	2.869	2.867	2.867
90	2.916	2.911	2.911
100	2.949	2.942	2.942
110	2.969	2.964	2.964
120	2.983	2.978	2.978
130	2.991	2.988	2.987
140	2.996	2.993	2.993
150	2.998	2.996	2.996
160	2.999	2.998	2.998
170	2.999	2.999	2.999
180	3.000	3.000	3.000
190	3.000	3.000	3.000
200	3.000	3.000	3.000

Tablo 6.48: %5 eğim, $t = 5$ gün, $R = 0$ mm/gün ve boşaltma olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri

Yöntem	Hata Normu (L_2)
Lineerleştirme Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0640
Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0010

Tablo 6.49: %10 eğim, $t = 5$ gün, $R = 0$ mm/gün ve boşaltma olması durumundaki su tablası değerleri

X (m)	Lineerleştirme Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Referans Çözüm
0	2.000	2.000	2.000
10	2.060	2.066	2.066
20	2.140	2.156	2.156
30	2.237	2.262	2.262
40	2.346	2.376	2.376
50	2.459	2.490	2.490
60	2.570	2.596	2.596
70	2.672	2.690	2.691
80	2.761	2.770	2.770
90	2.828	2.835	2.835
100	2.886	2.886	2.886
110	2.928	2.923	2.923
120	2.956	2.950	2.951
130	2.973	2.969	2.969
140	2.985	2.981	2.982
150	2.992	2.989	2.989
160	2.993	2.994	2.994
170	2.994	2.997	2.997
180	3.000	2.998	2.998
190	3.000	2.999	2.999
200	3.000	3.000	3.000

Tablo 6.50: %10 eğim, $t = 5$ gün, $R = 0$ mm/gün ve boşaltma olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri

Yöntem	Hata Normu (L_2)
Lineerleştirme Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0636
Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0017

Sonuçların Tablo 6.45 ve 6.49’da $\Delta x = 10/8$ adımında tablo 6.47’de ise $\Delta x = 10/4$ ’te referans çözüme yakınsadığı tespit edilmiş ve Tablolara elde edilen bu değerler yazılmıştır. Buradaki sonuçların da sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçlar ile oldukça yakın olduğu, lineerleştirme yöntemi ile elde edilen sonuçlarla ise yakınlık göstermediği görülmektedir.

Aşağıda $R = 5$ mm/gün, $t = 5$ gün ve %0, %5, %10 eğim değerleri için elde edilen referans çözümler aşağıda verilen Tablo 6.51, 6.53 ve 6.55’de gösterilmektedir. Tablo 6.52, 6.54 ve 6.56’da ise yöntemlere göre hata normları yer almaktadır.

Tablo 6.51: %0 eğim, $t = 5$ gün, $R = 5$ mm/gün ve boşaltma olması durumundaki su tablası değerleri

X (m)	Lineerleştirme Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Referans Çözüm
0	2.000	2.000	2.000
10	2.213	2.246	2.246
20	2.409	2.448	2.448
30	2.580	2.613	2.613
40	2.724	2.744	2.744
50	2.838	2.846	2.846
60	2.924	2.923	2.923
70	2.986	2.979	2.979
80	3.028	3.019	3.019
90	3.055	3.047	3.047
100	3.072	3.065	3.065
110	3.082	3.077	3.077
120	3.087	3.084	3.084
130	3.090	3.088	3.088
140	3.091	3.090	3.090
150	3.092	3.091	3.091
160	3.092	3.092	3.092
170	3.093	3.092	3.092
180	3.093	3.092	3.092
190	3.093	3.092	3.093
200	3.093	3.092	3.093

Tablo 6.52: : %0 eğim, $t = 5$ gün, $R = 5$ mm/gün ve boşaltma olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri

Yöntem	Hata Normu (L_2)
Lineerleştirme Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0667
Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0014

Tablo 6.53: %5 eğim, $t = 5$ gün, $R = 5$ mm/gün ve boşaltma olması durumundaki su tablası değerleri

X (m)	Lineerleştirme Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Referans Çözüm
0	2.000	2.000	2.000
10	2.135	2.156	2.156
20	2.280	2.313	2.313
30	2.427	2.464	2.464
40	2.567	2.600	2.600
50	2.694	2.717	2.717
60	2.802	2.815	2.815
70	2.890	2.894	2.894
80	2.958	2.954	2.954
90	3.007	3.000	3.000
100	3.041	3.032	3.032
110	3.060	3.055	3.055
120	3.075	3.070	3.070
130	3.083	3.079	3.079
140	3.088	3.085	3.085
150	3.090	3.089	3.089
160	3.091	3.090	3.091
170	3.092	3.092	3.092
180	3.092	3.092	3.092
190	3.092	3.092	3.092
200	3.092	3.092	3.092

Tablo 6.54: %5 eğim, $t = 5$ gün, $R = 5$ mm/gün ve boşaltma olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri

Yöntem	Hata Normu (L_2)
Lineerleştirme Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0702
Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0010

Tablo 6.55: %10 eğim, $t = 5$ gün, $R = 5$ mm/gün ve boşaltma olması durumundaki su tablası değerleri

X (m)	Lineerleştirme Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadhyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	Referans Çözüm
0	2.000	2.000	2.000
10	2.079	2.088	2.088
20	2.176	2.195	2.195
30	2.286	2.316	2.316
40	2.407	2.441	2.441
50	2.529	2.562	2.562
60	2.647	2.674	2.674
70	2.755	2.772	2.772
80	2.847	2.855	2.855
90	2.915	2.922	2.922
100	2.975	2.974	2.974
110	3.019	3.013	3.013
120	3.047	3.041	3.041
130	3.065	3.060	3.060
140	3.077	3.073	3.073
150	3.084	3.081	3.081
160	3.084	3.086	3.086
170	3.084	3.089	3.089
180	3.092	3.091	3.091
190	3.092	3.092	3.092
200	3.092	3.092	3.092

Tablo 6.56: %10 eğim, $t = 5$ gün, $R = 5$ mm/gün ve boşaltma olması durumu için yöntemlere göre hata normu değerleri

Yöntem	Hata Normu (L_2)
Lineerleştirme Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0698
Sonlu Elemanlar Yöntemi [Upadyaya ve Chauhan, 2001 ^b]	0.0000

Yukarıda verilen Tablo 6.51, 6.53 ve 6.55’de sonuçların $\Delta x = 10/4$ adımında referans çözüme yakınsadığı tespit edilmiş ve Tablolara elde edilen bu değerler yazılmıştır. Buradaki sonuçların da sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen sonuçlar ile oldukça yakın olduğu, lineerleştirme yöntemi sonuçlarıyla ise yakınlık göstermediği görülmektedir.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez kapsamında ele alınan kısmi diferansiyel denklemler doğrusal olmayan bir yapıda oldukları için analitik çözümleri mevcut değildir. Bu diferansiyel denklemler lineerleştirilerek bir çözüm elde edilebilir. Ancak bu çözümlerin yaklaşık analitik çözüm olarak dikkate alınmaları ve analitik çözümün yerine kullanılmaları oldukça hatalı bir yaklaşımdır. Literatürde yapılan çalışmalarda Baumann (1952) ve Werner (1953, 1957) tarafından lineerleştirilerek elde edilen çözümler analitik çözümler olarak dikkate alınmış ve bu sonuçlar farklı nümerik yöntemlerle elde edilen çözümlerle kıyaslanmıştır. Ayrıca bu kıyaslamaya Chauhan (1967) tarafından verilen deneysel sonuçlar da dahil edilmiştir. Baumann (1952) ve Werner (1953, 1957)'in lineerleştirme yöntemleri gibi Chauhan (1967) tarafından verilen deneysel sonuçların da nümerik çözümlerden oldukça uzak olduğu görülmektedir. Deneysel sonuçlardaki hatalar, büyük ölçüde model parametrelerinin (K, f) ya hiç ya da yeteri kadar kalibre edilmemiş olmasından meydana gelmektedir. Bu çalışmada bu farklılığın nereden kaynaklandığı incelenmektedir. Doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin farklı nümerik yöntemlerden elde edilen çözümlerinin kesinliği hakkında bir fikir yürütmek için analitik çözüme oldukça yakın olabilecek ve Kojouharov ve Benito (1999)'un “neredeysen kesin” çözüm adını verdiği bir çözüme ihtiyaç vardır. Zaman ve konumda adım boyutları stabilite şartlarını da dikkate alarak yeteri kadar küçültüldüğünde, elde edilen çözümler her noktada bir limit değere yakınsamaktadır ve bu çözümler neredeyse kesin çözümlerdir. Bahar ve Gürarlan (2020) tarafından yapılan çalışmada ise bu çözüme referans çözüm adı verilmektedir. Bu çalışmada eğimli/geçirimsiz bir akiferin su tablası değişimi, zaman çizgileri yöntemine bağlı bir sonlu farklar şeması (FDM-MOL) ile belirlenmeye çalışılmıştır. Bu tez kapsamında ele alınan her iki problem için bir “referans çözüm” geliştirilmiştir. Problemin gerçek çözümü olmadığı için zaman ve konumda adım büyüklükleri yeteri kadar küçültülerek bir referans çözüm elde edilmiştir. Literatürde verilen nümerik çözümlerin ve deneysel sonuçların kesinliği bu referans çözümlere göre yeniden değerlendirilmiştir.

Birinci problem için önceki çalışmalarda verilen deneysel sonuçlar, Baumann ve Werner lineerleştirme yöntemleri, lineer olmayan Boussinesq denklemi için sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemi, hibrit sonlu analitik yöntemi ve DQM yöntemi elde edilen referans çözüm ile karşılaştırılmıştır. Baumann ve Werner lineerleştirme

yöntemlerinin ve deneysel sonuçların elde edilen sonuçlardan çok farklı çıktığı görülmüştür. Burada referans çözüme en yakın sonuçların sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemiyle elde edildiği görülmüştür. DQM ve hibrit sonlu analitik yöntemleriyle elde edilen sonuçların ise referans çözüm sonuçları ile benzerlik taşıdığı tespit edilmiştir.

İkinci problem için ise önceki çalışmalarda verilen lineerleştirme yöntemi ve sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen sonuçlar, birinci problemde olduğu gibi geliştirilen bir referans çözümle karşılaştırılmıştır. Burada R, t, L gibi parametrelerin değişiminden kaynaklı olarak referans çözüm farklı Δx değerleri ile aynı değere yakınsamaktadır. Sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların referans çözümle elde edilen sonuçlarla oldukça yakın olduğu tespit edilmiştir. Birinci problemde olduğu gibi bu problemde de lineerleştirme yöntemi ile elde edilen sonuçların referans çözüm sonuçları ile oldukça uzak olduğu görülmüştür. Bunun sebebi diferansiyel denklemin lineerleştirilerek elde edilen çözümün analitik çözüm niteliği taşımasıdır. $t = 1$ gün ile $t = 5$ gün değerleri için yapılan analizler sonucunda beslenme olması ve $R = 0$ mm/gün olması durumunda $t = 5$ gün için çıkan sonuçların daha yüksek olduğu gözlemlenmiştir. Boşaltma durumunda da tam tersi şekilde $t = 1$ gün için çıkan sonuçların daha yüksek olduğu görülmüştür. $R = 5$ mm/gün olduğunda ise hem $t = 1$ gün hem de $t = 5$ gün değerlerinde her ikisinde de $R = 0$ mm/gün olması durumuna kıyasla sonuçlar daha yüksek bulunmuştur. Bundan sonra yapılacak çalışmalarda, diferansiyel denklemin lineerleştirilmesine dayalı yöntemlerin (Baumann 1952, Werner 1953, Werner 1957) ve sonuçları yeteri kadar kesin olmayan deneysel sonuçların (Chauhan 1967) yerine bu tez çalışmasında elde edilen referans çözümlerin karşılaştırma amaçlı kullanılması daha doğru bir yaklaşım olacaktır.

8. KAYNAKLAR

- Abdulrazzak, M. J. ve Morel-Seytoux, H. J., "Recharge from an ephemeral stream following wetting front arrival to water-table", *Water Resour. Res.*, 19, 194-200, (1983).
- Bahar, E. ve Gürarlan, G., "B-Spline Method of Lines for Simulation of Contaminant Transport in Groundwater", *Water*, 12, 1607, (2020).
- Bansal, R. K. ve Das, S. K., "Response of an Unconfined Sloping Aquifer to Constant Recharge and Seepage from the Stream of Varying Water Level", *Water Resour. Manag.*, 25, 893-911, (2011).
- Bansal, R. K., "Groundwater Fluctuations in Sloping Aquifers Induced by Time-Varying Replenishment and Seepage from a Uniformly Rising Stream", *Transp. Porous Media*, 94, 817-836, (2012).
- Baumann, P., "Ground water movement controlled through spreading", *Trans. Am. Soc. Civ. Engng.*, 117, 1024-1074, (1952).
- Bear, J., *Hydraulics of Groundwater*, New York: McGraw-Hill, (1978).
- Beven, K., "Kinematic subsurface stormflow", *Water Resour. Res.*, 17, 1419-1424, (1981).
- Boussinesq, M. J., *Essai sue la theorie des eaux courants*, Paris: Imprimerie Nationale, (1877).
- Boussinesq, J., "Recherches theoretiques sur l'ecoulement des nappes d'eau infiltrées dans Le Sol et sur le debit des sources", *J. de Math. Pures et Appl.*, 5, 5-78, (1904).
- Brutsaert, W., "The unit response of groundwater outflow from a hillslope", *Water Resour. Res.*, 30, 2759-2763, (1994).
- Chapman, T. G., "Modeling groundwater flow over sloping beds", *Water Resour. Res.*, 16, 1114-1118, (1980).
- Chauhan, H. S., "Analytical and computer solutions of transient water tables for drainage of sloping land", *Water Resour. Res.*, 4, 573-579, (1968).

Chauhan, H.S., *Mathematical Modelling of Agricultural Drainage Groundwater & Seepages*, New Delhi: Indian Council of Agricultural Research, 57-62, (2014).

Chow, V. T., Maidment, D. R. ve Mays, L. W., *Applied Hydrology*, New York: McGraw-Hill, (1988).

Cuthbert, M. O., “An Improved Time Series Approach for Estimating Groundwater Recharge from Groundwater Level Fluctuations”, *Water Resour. Res.*, 46, 1-11, (2010).

Dupuit, J., *Études théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux dans les canaux découverts et à travers les terrains perméables*, Paris: Dunod, (1873).

Fetter, C. W., *Applied Hydrogeology*, New Jersey: Prentice Hall Englewood Cliffs, (1994).

Gill, M. A., “Water table rise due to infiltration from canals”, *J. Hydrol.*, 70, 337-352, (1984).

Ghaheri, A. ve Meraji, S. H., “Numerical Simulation of Groundwater Table Falling in Horizontal and Sloping Aquifers by Differential Quadrature Method (DQM)”, *J. Hydrol. Eng.*, 17, 869-879, (2012).

Guo, W., “Transient Groundwater Flow Between Reservoirs and Water Table Aquifers”, *J. Hydrol.*, 195, 370-384, (1997).

Hall, F. R., “Base-flow recession-A review”, *Water Resour. Res.*, 4, 973-983, (1968).

Hewlett, J. D. ve Hibbert, A. R., “Moisture and energy conditions within a sloping soil mass during drainage”, *J. Geophys. Res.*, 68, 1081-1087, (1963).

Hoffmann, K. A. ve Chiang, S. T., *Computational Fluid Dynamics*, 67208-1078, Wichita: Engineering Education System, (2000).

Kaya, B. ve Arisoy, Y., “Differential Quadrature Solution For One-Dimensional Aquifer Flow”, *Math. Comput. Appl.*, 16, 702-711, (2011).

Kim, D. J. ve Ann, M. J., “Analytical solutions of water table variation in a horizontal unconfined aquifer: Constant recharges and bounded by parallel streams”, *Hydrol. Processes*, 15, 1691-2699, (2001).

Kojouharov, H. V. ve Benito, M. C., “Nonstandard Methods for the Convective-Dispersive Transport Equation with Nonlinear Reactions”, *John Wiley & Sons*, 617-624, (1999).

Manglik, A. ve Singh, S. N., “Two-dimensional modelling of water table fluctuations due to time varying recharge from rectangular basin”, *Water Resour. Res.*, 12, 467-475, (1998).

Marino, M. A., “Rise and decline of the water table induced by vertical recharge”, *J. Hydrol.*, 23, 289-298, (1974).

Marino, M. A., “Digital simulation model of aquifer response to stream stage fluctuation”, *J. Hydrol.*, 25, 51-58, (1975).

Melville, J.G. ve Sims, P. N., “An analysis of hillside seepage”, *Ground Water*, 25, (1987).

Mustafa, S., “Water Table Rise in a Semiconfined Aquifer due to Surface Infiltration and Canal Recharge”, *J. Hydrol.*, 95, 269-276, (1987).

Norum, D. I. ve Luthin, J. N., “The effects of entrapped air and barometric fluctuations in the drainage of porous mediums”, *Water Resour. Res.*, 4, 417-424, (1968).

Özdemir, H., Hidrografya [online], (2016),
http://auzefkitap.istanbul.edu.tr/kitap/cografya_lisans_ao/hidrografya.pdf,
(2016).

Parlange, J. Y., Stagnitti, F., Heilig, A., Szilgyi, J., Parlange, M. B., Steenhuis, T. S., Hogarth, W. L., Barry, D. A. ve Li, L., “Sudden drawdown and drainage of a horizontal aquifer”, *Water Resour. Res.*, 37, 2097-2101, (2001).

Rai, S. N. ve Singh, R. N., “Water table fluctuations in an aquifer system owing to time-varying surface infiltration and canal recharge”, *J. Hydrol.*, 136, 381-387, (1992).

Reddi, L.N., *Seepage in soils: Principles and applications*, New York: John Wiley and Sons, (2003).

Rocha, D., Feyen, J. ve Dassargues, A., “Comparative analysis between analytical approximations and numerical solutions describing recession flow in unconfined hillslope aquifers”, *Hydrogeol. J.*, 15, 1077-1091, (2007).

Rupp, D. E. ve Selker, J. S., “On the use of the Boussinesq equation for interpreting recession hydrographs from sloping aquifers”, *Water Resour. Res.*, 42, 12421, (2006).

Sanford, W. E., Parlange, J. Y. ve Steenhuis, T. S., “Hillslope drainage with sudden drawdown: closed form solution and laboratory experiments”, *Water Resour. Res.*, 29, 2313-2321, (1993).

Saxena, S., Bansal, R. K. ve Singh, B., “Estimation of Water Table Fluctuations in Sloping Aquifer Subjected to Transient Recharge and Seepage From Adjacent Stream”, *ANNALS of Faculty Engineering Hunedoara – International Journal of Engineering*, (2021).

Schneider, R., “Correlations of Groundwater Levels and Air Temperatures in the Winter and Spring in Minnesota”, *U.S. Geol. Surv.*, 14, 219-228, (1961).

Serrano, S. E. ve Workman, S. R., “Modeling transient stream/aquifer interaction with the non-linear Boussinesq equation and its analytical solution”, *J. Hydrol.*, 206, 245-255, (1998).

Sewa Ram, Jaiswal, C. S. ve Chauhan, H. S., “Transient water table rise with canal seepage and recharge”, *J. Hydrol.*, 163, 197-202, (1994).

Shaikh, B. Y. ve Das, S. K., “Effect of tidal fluctuation on water table in a sloping leaky unconfined aquifer”, *Model. Earth Syst. Environ.*, 3, 1395-1407, (2017).

Shanley, J. B., Kendall, C., Smith, T. E., Wolock, D. M. ve McDonnell, J. J., “Controls on old and new water contributions to stream flow at some nested catchments in Vermont, USA”, *Hydrol. Processes*, 16, 589-609, (2002).

Sims, P. N., “Hillside seepage modeling”, M.Sc. Thesis, *Auburn University*, Auburn, (1986).

Singh, R. M., Singh, K. K. ve Singh, S. R., “Falling Water Tables in a Sloping/Nonsloping Aquifer Under Various Initial Water Table Profiles”, *Agric. Water Manag.*, 82, 210-222, (2006).

Sloan, P. G. ve Moore, I. D., “Modeling subsurface stormflow on steeply sloping forested watersheds”, *Water Resour. Res.*, 20, 1815-1822, (1984).

Torch, P. A., Paniconi, C. ve Loon, E. V., “Hillslope-storage Boussinesq model for subsurface flow and variable source areas along complex hillslopes: 1. Formulation and characteristic response”, *Water Resour. Res.*, 11, (2003).

Upadhyaya, A., “Mathematical Modeling of water table fluctuations in sloping aquifers”, Ph.D Thesis, *G. B. Pant University of Agriculture and Technology*, India, (1999).

Upadhyaya, A. ve Chauhan, H. S., “Falling Water Tables in Horizontal/Sloping Aquifer”, *J. Irrig. Drain. Eng.*, 127, 378-384, (2001^a).

Upadhyaya, A. ve Chauhan, H. S., “Water Table Fluctuations Due to Canal Seepage and Time Varying Recharge”, *J. Hydrol.*, 244, 1-8, (2001^b).

Vaculin, M., Khanji, D. ve Vachaud, G., “Experimental and numerical study of a transient, two-dimensional unsaturated-saturated water table recharge problem”, *Water Resour. Res.*, 15, 1089-1101, (1979).

Vanikar, J. C. ve Bansal, R. K., “Mathematical Modeling of Subsurface Seepage Flow over Sloping Terrain due to Vertical Recharge and Seepage from Stream Stage Variations”, *Mukt Shabd J.*, (2020).

Verhoest, N. E. C., Pauwels V. R. N., Troch, P. A. ve Troch, F. P. D., “Analytical solution for transient water table heights and outflows from inclined ditch-drained terrains”, *J. Irrig. Drain. Eng.*, 128, (2002).

Werner, P. W., “On Non-Artesian Ground Water Flow”, *Geofis Pura Appl.*, 25, 37-43, (1953).

Werner, P. W., “Some Problems in Non-Artesian Ground Water Flow”, *Trans. Am. Geophys. Union*, 38(4), 511-518, (1957).

Zomorodi, K., “Evaluation of the response of a water-table to a variable recharge rate”, *Hydrol. Sci. J.*, 36, 67-78, (1991).

9. ÖZGEÇMİŞ