PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

POZİTİF LİNEER OPERATÖRLER VE HEMEN HEMEN YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Seycan AYVAZ

Ref No: 10030433

Anabilim Dalı : Matematik

Programı : Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Özlem GİRGİN ATLIHAN

MART 2014

YÜKSEK LİSANS TEZ ONAY FORMU

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü 101441016 nolu öğrencisi Seycan AYVAZ tarafından hazırlanan "**POZİTİF LİNEER OPERATÖRLER VE HEMEN HEMEN YAKINSAKLIK**" başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı : **(Jüri Başkanı)**	**Prof.Dr. Mehmet Ali SARIGÖL**
Eş Danışman :	**Yd.Doç.Dr. Özlem Girgin ATLIHAN**
Jüri Üyesi :	**Yrd.Doç. Dr. Özcan MUTLU**

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 26/03/2014. tarih ve ....14/15.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü
Prof. Dr. Orhan KARABULUT

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

İmza :

Öğrenci Adı Soyadı : Seycan AYVAZ

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması, Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Anabilim Dalı Yüksek Lisans programında yapılmıştır. Bu tez çalışmamda beni yönlendiren ve bana yardımcı olan çok değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Özlem GİRGİN ATLIHAN'a ve desteklerini benden hiç esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

Mart 2014 Seycan AYVAZ

İÇİNDEKİLER

ÖZET

POZİTİF LİNEER OPERATÖRLER VE HEMEN HEMEN YAKINSAKLIK

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, klasik Bohman-Korovkin yaklaşım teoremleri ve ispatları verilmiştir. Ayrıca buna ilişkin bazı örnekler incelenmiştir. Dördüncü bölümde, hemen hemen yakınsaklık metodu kullanılarak geliştirilen Korovkin tipli yaklaşım teoremleri incelenmiştir. Beşinci bölümde, üçüncü ve dördüncü bölümde verilen yaklaşım operatörleri için süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Korovkin Teoremi, pozitif lineer operatörler, Hemen Hemen Yakınsaklık Yöntemi.

SUMMARY

ALMOST CONVERGENCE AND POSITIVE LINEAR OPERATORS

This thesis consists of five chapters. The first chapter has been devoted to the introduction. The second chapter, the basic definitions and consepts have been recalled. The third chapter, classic Bohman-Korovkin approximation theorems and proofs have been given. Moreover, examples concerning these theorems have also been analysed. The fourth chapter, developed with the use of almost convergence method Korovkin type approximation theorem has also been analysed. In the final chapter, the rate of convergence with the help of continuous module has been examined for approximation operators given in chapter third and fourth.

Keywords: Korovkin Theorem, positive linear operators, almost convergence.

1.GİRİŞ

Klasik Yaklaşım Teorisi, 1885 yılında Alman Matematikçi Karl Weierstrass'ın sonlu aralıkta sürekli olan her fonksiyona bu aralıkta yakınsayan bir polinomun olacağını ispat etmesiyle başlamıştır. Birçok matematikçi bunun ispatını farklı şekilde ele almıştır. Örneğin Bernstein 1912 yılında Bernstein polinomlarının $C[0,1]$ uzayındaki fonksiyonlara düzgün yakınsadığını ispatlamıştır. Daha sonraları pozitif lineer operatör dizilerinin yaklaşım özellikleri üzerine çalışılmıştır. Dolayısıyla $(L_n)_{n\in\mathrm{N}}$ dizisinin sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsak olması için gerekli şartlar nelerdir sorusu akla gelmektedir. Bu sorunun cevabını üç matematikçi Popoviciu (1951), Bohman (1952) ve Korovkin (1953) birbirinden bağımsız olarak bulmuşlardır. Bu sonuçlar birçok matematikçinin bu yaklaşımları farklı uzaylara genişletmesine kaynak sağlamıştır. Böylelikle Yaklaşım Teorisi'nin özel bir dalı olan Korovkin tipi Yaklaşım Teorisi ortaya çıkmıştır.

Kompakt bir aralıkta sürekli fonksiyonların yaklaşım hakkındaki klasik Korovkin teoremi, bir pozitif lineer operatör dizisinin birim operatöre yakınsayıp yakınsamayacağına ilişkin şartları belirler. Süreksizlik noktalarında ise, bu operatörlerin genellikle fonksiyonun sağ ve sol limitlerinin aritmetik ortalamaya yakınsadığı görülür. Fakat süreksizlik noktalarında yakınsak olmayan Hermit-Fejer yaklaşım operatörleri gibi operatörlerde vardır Bojanic ve Cheng (1983). Böyle durumlarda yakınsaklık kaybını gidermek için Cesaro tipi toplanabilme metotlarını kullanmak yarar sağlar Bojanic ve Khan (1992). Fejer, Cesaro metodunun sürekli periyodik fonksiyonların Fourier serisini yakınsak yapmada etkili olduğunu göstermiştir.

Klasik Korovkin teoremindeki pozitif lineer operatör dizisinin birim operatöre yakınsamaması durumunda ilk yöntem olarak hemen hemen yakınsaklık metodunun kullanımı düşünülmüştür. Bununla ilgili çalışmalar King ve Swetits (1970), Mohapatra (1977) tarafından yapılmıştır.

Bu tezde, öncelikle Klasik Bohmán-Korovkin teoremleri ve ispatları incelenmiştir. Daha sonra King ve Swetits (1970), Mohapatra (1977) tarafından hemen hemen yakınsaklık kullanılarak verilen Korovkin tipli yaklaşım teoremleri ve ispat teknikleri incelenmiştir. Son olarak süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım oranlarının hesaplanma teknikleri incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, ihtiyaç duyulacak tanım ve temel kavramlardan söz edilecektir.

Tanım 2.1 X boştan farklı bir küme, F reel veya kompleks sayıların bir cismi olsun.

$+: X \times X \rightarrow X$

$\bullet: F \times X \rightarrow X$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X kümesine F cismi üzerinde bir lineer uzay (vektör uzayı) denir.

$\forall x, y, z \in X$ ve $\lambda, \mu \in F$ için

i. $x + y = y + x,$

ii. $(x + y) + z = x + (y + z),$

iii. $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.

iv. $\forall x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır.

v. $1.x = x,$

vi. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y,$

vii. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x,$

$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x.$, Kreyzing (1978).

Tanım 2.2 X ve Y fonksiyon uzayları olmak üzere $L: X \rightarrow Y$, dönüşümüne operatör denir.

- Her $f \geq 0$ fonksiyonu için $L(f) \geq 0$ ise L operatörüne *"pozitif operatör"* denir.
- $\forall \alpha, \beta \in K$ ve $\forall f, g \in X$ için $L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$ ise L operatörüne lineer operatör denir.

Yukarıda verilen iki özelliği sağlayan L operatörüne *"lineer pozitif operatör"* denir. Kreyzing (1978).

Özellikler.

i. $-f \leq 0 \Rightarrow L(-f) = -L(f) \leq 0$

şeklindedir.

ii. Lineer pozitif operatörler monoton artandır.

$f < g$ olsun. Bu durumda $L(f) < L(g)$ olduğunu gösterelim.

$$f < g \Rightarrow g - f > 0 \Rightarrow L(g) - L(f) > 0 \Rightarrow L(g) > L(f)$$

elde edilir.

iii. L lineer pozitif operatör olmak üzere

$$|L(f)| \leq L(|f|)$$

gerçeklenir. Bunun için

$$-L(|f|) \leq L(f) \leq L(|f|)$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} -|f| \leq f \leq |f| &\Rightarrow L(-|f|) \leq L(f) \leq L(|f|) \\ &\Rightarrow -L(|f|) \leq L(f) \leq L(|f|) \\ &\Rightarrow |L(f)| \leq L(|f|) \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 2.3 X kompleks veya reel vektör uzayı olmak üzere $\| \; \| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu fonksiyona X üzerinde bir norm ve $(X, \| \; \|)$ ikilisine de normlu uzay denir. $\forall x, y \in X$ ve $\lambda \in F$ olsun.

i. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

ii. $\|\lambda x\| = |\lambda| . \|x\|$,

iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Tanım 2.4 X boştan farklı bir küme ve $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu fonksiyona X üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine de metrik uzay denir. $\forall x, y \in X$ olsun.

i. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

ii. $d(x, y) = d(y, x)$,

$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ Kreyzing (1978).

Tanım 2.5 (X, d) metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n = n_0(\varepsilon)$ varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.6 (X, d) metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi ve $x \in X$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n = n_0(\varepsilon)$ varsa (x_n) dizisine yakınsaktır denir.

Tanım 2.7 (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X' in bir elemanına yakınsıyorsa (X, d)'ye tam metrik uzay denir Kreyzing (1978).

Tanım 2.8 Tam ve normlu bir lineer uzaya Banach uzayı denir.

Tanım 2.9 X ve Y fonksiyon uzayları olmak üzere $L: X \to Y$, lineer bir operatör olsun.

$$\|L(f)\|_Y \leq K \cdot \|f\|_X$$

olacak şekilde $\exists K \geq 0$ reel sayısı var ise L'ye sınırlı operatör denir.

Tanım 2.10 X ve Y fonksiyon uzayları olmak üzere $L: X \to Y$, bir operatör olsun.

$$\|L\|_{X \to Y} = \sup\left\{\frac{\|L(f)\|_Y}{\|f\|_X}, \|f\|_X \neq 0\right\}$$

olsun. $\|L\|_{X \to Y}$ ifadesine L operatörünün normu denir.

Tanım 2.11 $X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f: X \to \mathbb{R}$ ve $x_0 \in X$ olsun. $\varepsilon \rangle 0$ verilsin. Eğer $|x - x_0| \langle \delta$ koşulunu sağlayan $\forall x \in X$ için $|f(x) - f(x_0)| \langle \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon) \rangle 0$ sayısı bulunabiliyorsa f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir denir. f, $\forall x \in X$ için sürekli ise f süreklidir denir. Kreyzing (1978).

Tanım 2.12 $X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyon ile $\varepsilon \rangle 0$ verilsin. Eğer $|x - z| \langle \delta$ şartını sağlayan $\forall x, z \in X$ için $\delta = \delta(\varepsilon) \rangle 0$ sayısı bulunabiliyorsa f fonksiyonu X'de düzgün süreklidir denir. Kreyzing (1978).

Teorem 2.13 $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ise bu f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında düzgün süreklidir.

Tanım 2.14 $X \subseteq \mathbb{R}$ $f: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall x \in X$ için $|f(x)| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı var ise f fonksiyonuna sınırlı fonksiyon denir.

Tanım 2.15 $\Omega = \{y = (y_{np}) | y: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathrm{K}, (p,n) \to y(n,p) = y_{np}\}$ şeklinde tanımlı Ω cümlesi "*çift diziler uzayı*" olarak adlandırılır.

Tanım 2.16 $y \in \Omega$ dizisi ve $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $\forall n \geq n_0$ ve $\forall p \in \mathbb{N}$ için $|y_{np} - a| \langle \varepsilon$ koşulunu sağlayan bir $n_0 \in n_0(\varepsilon)$ sayısı bulunabiliyorsa $y = (y_{np})$ dizisi a sayısına p indisine göre düzgün yakınsaktır denir.

Hemen belirtmeliyiz ki, p indisine göre düzgün yakınsak $y = (y_{np})$ dizisinin düzgün sınırlı olması gerekmez.

Bu durumu gösteren bir örnek verelim.

$$y_{np} = \begin{cases} p, & n = 0, \quad p \in \mathbb{R} \\ 0, & \textit{diğer} \quad \textit{durumda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı (y_{np}) dizisini ele alalım.

$$\lim_{n \to \infty} y_{np} = 0 \quad (\forall p \in \mathbb{N}^0),$$

$$\sup_{(n,p \in \mathbb{N}^0)} |y_{np}| = \infty.$$

Tanım 2.17 $x = (x_k)$ reel terimli bir dizi olsun.

$$t_{pn} = \frac{1}{n} \sum_{k=p}^{n+p-1} x_k$$

şeklinde tanımlı (t_{pn}) çift dizisi bir $a \in \mathbb{R}$ sayısına p indisine göre düzgün yakınsak ise (x_k) dizisi a sayısına hemen hemen yakınsaktır denir. Lorentz (1948).

Teorem 2.18 a) Yakınsak her dizi hemen hemen yakınsaktır.

b) Hemen hemen yakınsak her dizi sınırlıdır.

İspat.

a) $x = (x_k)$ yakınsak bir dizi olsun. O halde

$\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $\exists N \in \mathbb{N}^0 \ni \forall k > N$ için $|x_k - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ kalır. Burada $\forall n_0 \in N$ için

$$2\frac{(N+1)}{n_0+1}\|x\|_\infty \langle \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir N seçilirse $\forall p \in \mathbb{N}^0$ ve $n \geq n_0$ için

$$\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=p}^{n+p}(x_k-a)\right| = \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=p}^{n+p}(x_k-a)\right| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=p}^{n+p}|x_k-a|$$

$$\leq \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}(n+p-p+1)\varepsilon/2, p \geq N \\ \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=p}^{N}|x_k-a| + \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=N+1}^{n+p}|x_k-a|, p\langle N \end{cases}$$

$$\leq \begin{cases} \varepsilon/2, p \geq N \\ \dfrac{1}{n+1}(N-p+1)2\|x\|_\infty + \dfrac{1}{n+1}(n+p-N)\varepsilon/2, \\ p\langle N \end{cases}$$

$$< \varepsilon$$

olduğu görülür.

Böylece $x = (x_k)$ dizisinin hemen hemen yakınsak bir dizi olur. Şimdi hemen hemen yakınsak olduğu halde yakınsak olmayan bir dizi örneği verelim.

$x = (x_k) = (1,0,1,0,1,0,...)$ dizisinin yakınsak olmadığı açıktır. Şimdi bu dizinin hemen hemen yakınsak olduğunu gösterelim.

$$\frac{n+1}{2} - 1 \leq \sum_{k=p}^{n+p} x_k \leq \frac{n+1}{2} + 1$$

$$\sum_{k=p}^{n+p} x_k = x_p + x_{p+1} + ... + x_{n+p} = \frac{1+(-1)^p}{2} + ... + \frac{1+(-1)^{n+p}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(n+1+(-1)^p + ... + (-1)^{n+p})$$

$$I = ((-1)^p + ... + (-1)^{n+p})$$

I ifadesi için

$$\text{p tek} \Rightarrow \begin{cases} -1, n+p & tek \\ 0, n+p & çift \end{cases} \qquad \text{p çift} \Rightarrow \begin{cases} 0, n+p & tek \\ 1, n+p & çift \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n+1}(\frac{n+1}{2}-1)\leq\frac{1}{n+1}\sum_{k=p}^{n+p}x_k\leq\frac{1}{n+1}(\frac{n+1}{2}+1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{n+1}\sum_{k=p}^{n+p}x_k\to\frac{1}{2},(n\to\infty), \text{ p ye göre düzgün.}$$

Böylece $(x_k)=(1,0,1,0,...)$ dizisinin hemen hemen yakınsak olduğu görülür.

b) Şimdi hemen hemen yakınsak her dizinin sınırlı olduğunu gösterelim.

$x\in(x_k)$ hemen hemen yakınsak bir dizi olsun. O halde $\exists a\in K$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists n_0\in N^0$ $\ni$ $\forall n\geq n_0$

$$\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=p}^{n+p}x_k-a\right|<\varepsilon=1$$

olur. $\forall p\in N^0$ için

$$\begin{aligned}|x_p|&=\left|\sum_{k=p}^{p+n_0+1}x_k-\sum_{k=p+1}^{p+n_0+1}x_k\right|\\&=\left|\sum_{k=p}^{p+n_0+1}(x_k-a)-\sum_{k=p+1}^{p+n_0+1}(x_k-a)+a\right|\\&\leq(p+n_0+1)-p+1+n_0+1+|a|\\&=2n_0+3+|a|\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (x_k) dizisinin sınırlı olduğu görülür.

3. KLASİK BOHMAN-KOROVKİN TEOREMİ

Teorem 3.1 $L_n : C[a,b] \to C[a,b]$ ile tanımlı lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

a) $\forall f \in C[a,b]$ için $\lim_n \|L_n f - f\|_{C[a,b]} = 0$

b) $f_i(t) = t^i$ $i = 0,1,2$ olmak üzere $\lim_n \|L_n f_i - f_i\|_{C[a,b]} = 0$ [2], [12].

Burada $C\left[a,b\right]$, $\left[a,b\right]$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların vektör uzayını göstermek üzere

$$\|f\|_{C[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

normuna göre bir Banach uzayı olur.

İspat.

$a \Rightarrow b$ önermesinin doğruluğunu gösterelim.

$\forall i = 0,1,2$ için $f_i(t) = t^i$ ile verilen fonksiyonlar, $C\left[a,b\right]$ uzayının elemanı olduğu için ispat açıktır.

$b \Rightarrow a$ önermesinin doğruluğunu gösterelim.

$f \in C[a,b]$ alalım. f sürekli olduğundan $\forall \varepsilon \rangle 0$ için $\exists \delta$ vardır $\ni$ $|t-x| \langle \delta$ koşulunu sağlayan $\forall x,t \in [a,b]$ için $|f(t) - f(x)| \langle \varepsilon$ vardır. Şimdi $|t-x| \geq \delta$ için

$$\frac{t-x}{\delta} \geq 1 \Rightarrow \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1$$

elde edilir. f sınırlı olduğundan

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| \leq 2M_f \cdot 1 \leq 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

elde edilir. O halde $\forall x,t \in C[a,b]$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

gerçeklenir. L_n lineer pozitif operatörü son bulunan eşitsizliğe uygulanırsa,

$$L_n(|f(t)-f(x)|;x) \le L_n\left(\varepsilon + 2M_f\frac{(t-x)^2}{\delta^2};x\right)$$

$$L_n(|f(t)-f(x)|;x) \le \varepsilon L_n(1;x) + 2\frac{M_f}{\delta^2}L_n\left((t-x)^2;x\right)$$

$$= \varepsilon L_n(1;x) + 2\frac{M_f}{\delta^2}\{L_n(t^2;x)$$

$$-2xL_n(t;x) + x^2L_n(1;x)\}$$

$$= L_n(\varepsilon;x) + 2\frac{M_f}{\delta^2}\{L_n(t^2;x)$$

$$-2xL_n(t;x) + L_n(x^2;x)) \pm 2x^2\}$$

$$= \varepsilon L_n(1;x) + 2\frac{M_f}{\delta^2}\{\left(L_n(t^2;x) - x^2\right)$$

$$-2x\left(L_n(t;x) - x\right) + x^2\left(L_n(1;x) - 1\right)\}$$

$$= \varepsilon + \varepsilon\left(L_n(1;x) - 1\right) + 2\frac{M_f}{\delta^2}\{(L_n(t^2;x) - x^2)$$

$$-2x(L_n(t;x) - x) + x^2(L_n(1;x) - 1)\}$$

$$\le \varepsilon + \varepsilon\left|L_n(1;x) - 1\right| + 2\frac{M_f}{\delta^2}\{\left|L_n(t^2;x) - x^2\right|$$

$$-2|x|\left|L_n(t;x) - x\right| + \left|x^2\right|\left|L_n(1;x) - 1\right|\} \tag{1.1}$$

bulunur.

$$L_n(|f(t)-f(x)|;x) \le \varepsilon$$

Böylece

$$\left|L_n(f(t);x) - f(x)\right| = \left|L_n(f(t);x) - L_n(f(x);x) + L_n\left(f(x);x\right) - f(x)\right|$$

$$\le \left|L_n(f(t);x) - L_n(f(x);x)\right| + \left|f(x)\right|\left|L_n(1:x) - 1\right|$$

$$\le L_n\left(\left|f(t) - f(x)\right|;x\right) + \left|f(x)\right|\left|L_n(1;x) - 1\right|$$

Bu son eşitsizliğin her iki tarafının supremumu alınarak norma geçilirse ve (1.1) eşitsizliği de dikkate alınırsa

$$\|L_n f - f\| \le \varepsilon + H\left(\|L_n f_2 - f_2\| + \|L_n f_1 - f_1\| + \|L_n f_0 - f_0\|\right)$$

elde edilir. Burada

$$H = maks\{\varepsilon, 2\frac{M_f}{\delta^2}\underset{a\le x\le b}{maks}|2x|, 2\frac{M_f}{\delta^2}\underset{a\le x\le b}{maks}|x^2|\}$$

şeklindedir. Böylece ε keyfi olduğunda yeterince küçük seçilirse

$$\lim_n \|L_n f - f\| = 0$$

elde edilir.

Örnek 3.1 $C[0,1] = \{f \mid f:[0,1] \to \mathbb{R}$, sürekli fonksiyon$\}$ lineer uzayı için,

$$B_n(f;x) = \sum_{k=o}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{(n-k)}$$

şeklinde tanımlı olan Bernstein operatörünün Korovkin Teoremi'nin şartlarını sağladığını gösteriniz.

Çözüm.

$$B_n(1;x) = \sum_{k=0}^{n} 1.\binom{n}{k} x^k (1-x)^{(n-k)} = (x + (1-x))^n = 1$$

$$B_n(1;x) = 1$$

bulunur. O halde,

$$\lim_n \|B_n 1 - 1\| = 0$$

olduğu açıktır.

$$B_n(t;x) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{(n-k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\frac{n!}{(n-k)!k!} x^k (1-x)^{(n-k)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!k(k-1)!}x^{k}(1-x)^{(n-k)}$$

$$=x\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{(k-1)}(1-x)^{(n-k)}$$

$$=x\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k-1}(x+1-x)^{(n-1)}$$

$$=x(x+1-x)^{(n-1)}$$
$$=x.1^{(n-1)}=x$$

$$B_n(t;x)=x$$

olduğundan

$$\lim_{n}\underset{0\le x\le 1}{maks}\left|B_n(t;x)-x\right|=0 \Leftrightarrow \lim_{n}\left\|B_n f_1-f_1\right\|=0$$

elde edilir.

$$B_n(t^2;x)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k^2}{n^2}\right)\binom{n}{k}x^{k}(1-x)^{(n-k)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!k(k-1)!}x^{k}(1-x)^{(n-k)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}x^{k}(1-x)^{(n-k)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{k-1+1}{n}\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}x^{k}(1-x)^{(n-k)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{k-1}{n}\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}x^{k}(1-x)^{(n-k)}$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n}\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}x^{k}(1-x)^{(n-k)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{k-1}{n}\frac{(n-1)(n-2)!}{(n-k)!(k-1)(k-2)!}x^{k}(1-x)^{(n-k)}$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n}\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}x^{k}(1-x)^{(n-k)}$$

$$=\frac{n-1}{n}x^2\sum_{k=0}^{n}\frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!}x^{(k-2)}(1-x)^{(n-k)}$$

$$+\frac{1}{n}x\sum_{k=0}^{n}\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}x^{(k-1)}(1-x)^{(n-k)}$$

$$=\frac{n-1}{n}x^2\sum_{k=0}^{n}\frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!}x^{(k-2)}(1-x)^{(n-k)}$$

$$+\frac{1}{n}x\sum_{k=0}^{n}\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}x^{(k-1)}(1-x)^{(n-k)}$$

$$=\frac{n-1}{n}x^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n-2}{k-2}x^{(k-2)}(1-x)^{(n-k)}$$

$$+\frac{1}{n}x\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{(k-1)}(1-x)^{(n-k)}$$

$$B_n(t^2;x)=\frac{n-1}{n}x^2.1^{(n-2)}+\frac{x}{n}1^{(n-1)}=x^2\left(\frac{n-1}{n}\right)+\frac{x}{n}$$

eşitliği gerçeklenir. O halde,

$$\lim_n \underset{0\le x\le 1}{maks}\left|B_n(t^2;x)-x^2\right|=0 \Leftrightarrow \lim_n\left\|B_nf_2-f_2\right\|=0$$

elde edilir. Böylece Korovkin Teoremi'nin hipotezleri gerçeklenir.

Örnek 3.2 $C[0,r]$ uzayında

$$S_n(f;x)=e^{-nx}\sum_{k=o}^{\infty}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!}$$

şeklinde tanımlı olan Szasz Operatörü'nün Korovkin Teoremi'nin şartlarını sağladığını gösteriniz.

Çözüm.

$$S_n(1;x)=e^{-nx}\sum_{k=o}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}=e^{-nx}e^{nx}=1$$

bulunur. O halde,

$$\lim_n \|S_n 1 - 1\| = 0$$

olduğu açıktır.

$$S_n(t;x) = e^{-nx}\sum_{k=o}^{\infty}\frac{k}{n}\frac{(nx)^k}{k!}$$

$$= xe^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(nx)^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= xe^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(nx)^{k}}{k!}$$

$$= x.e^{-nx}e^{nx} = x$$

olduğundan

$$\lim_n \underset{0\le x\le r}{maks}|S_n(t;x) - x| = 0 \Leftrightarrow \lim_n \|S_n f_1 - f_1\| = 0$$

elde edilir.

$$S_n(t^2;x) = e^{-nx}\sum_{k=o}^{\infty}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{(nx)^k}{k!}$$

$$= e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}(k-1+1)\frac{n^{k-2}x^k}{(k-1)!}$$

$$= e^{-nx}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(k-1)}{n^2}\frac{(nx)^k}{(k-1)!} + e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{(nx)^k}{(k-1)!}$$

$$= e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{(nx)^{k+2}}{k!} + e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{(nx)^{k+1}}{k!}$$

$$= \frac{(nx)^2}{n^2}e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!} + \frac{x}{n}e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}$$

$$= x^2 + \frac{x}{n}$$

eşitliği gerçeklenir. O halde,

$$\lim_n \underset{0\le x\le r}{maks}\left|S_n(t^2;x) - x^2\right| = 0 \Leftrightarrow \lim_n \|S_n f_2 - f_2\| = 0$$

elde edilir.

Şimdi periyodik fonksiyonlar için verilen Korovkin tipli teoremi verelim.

Teorem 3.2 Burada $C[0,2\pi]=\{f \mid f:[0,2\pi]\to\mathbb{R},$ ve 2π periyotlu fonksiyon$\}$ vektör uzayı olup

$$\|f\| = \underset{x\in[0,2\pi]}{maks}|f(x)|$$

normuna göre Banach uzayıdır. Korovkin (1953).

$L_n : C[0,2\pi]\to C[0,2\pi]$ lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

a) $\forall f\in C[0,2\pi]$ için $\lim\limits_{n}\|L_n f - f\|_{C[0,2\pi]} = 0,$

b) $f_1(t)=1, f_2(t)=\sin t, f_3(t)=\cos t$ olmak üzere $\lim\limits_{n}\|L_n f_i - f_i\|_{C[0,2\pi]} = 0.$

İspat. $a \Rightarrow b$ gerçeklendiği açıktır. Çünkü verilen fonksiyonlar $C[0,2\pi]$ uzayının elemanıdır.

Şimdi $b\Rightarrow a$ olduğunu gösterelim. $f\in C[0,2\pi]$ alalım. f sürekli olduğundan $\forall\varepsilon\rangle 0$ için $\exists\delta$ vardır $\ni$ $|t-x|\langle\delta$ koşulunu sağlayan $\forall x,t\in[0,2\pi]$ için $|f(t)-f(x)|\langle\varepsilon$ vardır. Şimdi $|t-x|\geq\delta$ için

$$\Rightarrow \frac{t-x}{\delta}\geq 1 \Rightarrow \frac{(t-x)^2}{\delta^2}\geq 1$$

elde edilir. f , $[0,2\pi]$ aralığında sınırlı olduğundan

$$|f(t)-f(x)|\leq|f(t)|+|f(x)|\leq 2M_f$$

gerçeklenir.

$x\in(t-\delta, 2\pi+t-\delta]$ aralığını alalım. Bu aralığın boyu 2π olup

$-\delta < x-t \leq 2\pi-\delta$ eşitsizliğinden $|x-t|<\delta$ bulunur.

$|x-t|<\delta$ için $|f(x)-f(t)|<\varepsilon$ olduğu biliniyor. Şimdi $-\delta < x-t \leq 2\pi-\delta$ aralığı ele alınırsa,

$$1<\frac{\sin^2\left(\frac{x-t}{2}\right)}{\sin^2\frac{\delta}{2}}$$

eşitsizliği gerçeklenir. O halde $\forall x,t\in C[0,2\pi]$ için

$$|f(x)-f(t)|<\varepsilon+2M_f\frac{\sin^2(\frac{x-t}{2})}{\sin^2\frac{\delta}{2}}$$

elde edilir. Bu son eşitsizliğin her iki tarafına L_n lineer pozitif operatör uygulanırsa,

$$L_n(|f(x)-f(t)|;x)\leq \varepsilon L_n(1;x)+2\frac{M_f}{\sin^2\frac{\delta}{2}}L_n\left(\sin^2\left(\frac{x-t}{2}\right);x\right)$$

$$=\varepsilon L_n(1;x)+2\frac{M_f}{\sin^2\frac{\delta}{2}}L_n\left(\frac{1-\cos 2\left(\frac{x-t}{2}\right)}{2};x\right)$$

$$=\varepsilon L_n(1;x)+2\frac{M_f}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\frac{1}{2}(L_n(1;x)-\cos xL_n(\cos t;x)$$

$$-\sin xL_n(\sin t;x)\pm 1)$$

$$=\varepsilon L_n(1;x)+2\frac{M_f}{\sin^2(\frac{\delta}{2})}\frac{1}{2}[L_n(1;x)-1$$

$$-\cos x(L_n(\cos t;x)-\cos x)$$

$$-\sin x(L_n(\sin t;x)-\sin x)]$$

Buradan ifadenin sağ tarafının supremumu alınıp, norma geçilir ve b hipotezi dikkate alınırsa, Korovkin Teoremi'ndeki benzer düşünce kullanılarak $\forall f\in C[0,2\pi]$ için $\lim_{n\to\infty}\|L_nf-f\|=0$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

4. HEMEN HEMEN YAKINSAKLIK YÖNTEMİ İLE KOROVKİN TİPLİ YAKLAŞIM TEOREMLERİ

Klasik Korovkin Teoremi'ndeki (L_n) lineer pozitif operatör dizisinin I birim operatörüne yakınsamaması durumunda "ne yapılabilir?" sorusu akla gelir. Bu noktada ilk yöntem olarak 1970 yılında King ve Swetits tarafından hemen hemen yakınsaklık metodu kullanılarak yaklaşım teoremleri geliştirilmiştir. Bu bölümde makaledeki teoremler ve ispat teknikleri incelenmiştir.

Teorem 4.1 $L_n : C[a,b] \to C[a,b]$ lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

a) $\forall f \in C[a,b]$ için $\lim\limits_{n} \left\| t_{pn}(f) - f \right\|_{C[a,b]} = 0$, (p'ye göre düzgün).

b) $f_i(t) = t^i$ $i = 0,1,2$ olmak üzere $\lim\limits_{n} \left\| t_{pn}(f_i) - f_i \right\|_{C[a,b]} = 0$, (p'ye göre düzgün).

Burada,

$$t_{pn} = \frac{1}{n} \sum_{j=p}^{p+n-1} L_j(f;x)$$

olarak alınacaktır. [11]

İspat. $a \Rightarrow b$ açıktır.

$b \Rightarrow a$ olduğunu gösterelim. $f \in C[a,b]$ alalım. f sürekli bir fonksiyon olduğundan $\forall \varepsilon \rangle 0$ için $\exists \delta$ vardır $\ni$ $|t-x| \langle \delta$ koşulunu sağlayan $\forall x,t \in [a,b]$ için $|f(x)-f(t)| \langle \varepsilon$ vardır. Şimdi $|t-x| \geq \delta$ için

$$\Rightarrow \frac{t-x}{\delta} \geq 1 \Rightarrow \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1$$

elde edilir. f sınırlı olduğundan,

$$|f(x)-f(t)| \leq |f(x)| + |f(t)| \leq 2M_f \frac{(x-t)^2}{\delta^2}$$

gerçeklenir. O halde $\forall x,t \in C[a,b]$ için

$$|f(x)-f(t)|\leq 2M_f\frac{(x-t)^2}{\delta^2}+\varepsilon$$

elde edilir.

Bu son eşitsizliğe L_n lineer pozitif operatörü uygulanırsa,

$$L_n(|f(x)-f(t)|;x)\leq L_n(2M_f\frac{(x-t)^2}{\delta^2}+\varepsilon;x)$$

Şimdi eşitsizliğin her iki tarafında toplam alınır ve uygun matematiksel işlemler yardımı ile

$$t_{pn}(|f(x)-f(t)|;x)\leq t_{pn}\left(2M_f\frac{(x-t)^2}{\delta^2}+\varepsilon;x\right)$$

$$=t_{pn}(\varepsilon;x)+2\frac{M_f}{\delta^2}t_{pn}\left((x-t)^2;x\right)$$

$$=t_{pn}(\varepsilon;x)\mp 1+2\frac{M_f}{\delta^2}(t_{pn}(t^2;x)-2xt_{pn}(t;x)$$

$$+x^2t_{pn}(1;x)\mp 2x^2)$$

$$=\varepsilon(t_{pn}1;x)-1)+\varepsilon+2\frac{M_f}{\delta^2}((t_{pn}(t^2;x)-x^2)$$

$$-2x(t_{pn}(t;x)-x)+x^2(t_{pn}(1;x)-1))$$

$$\leq\varepsilon\left|t_{pn}(1;x)-1\right|+\varepsilon+2\frac{M_f}{\delta^2}(\left|t_{pn}(t^2;x)-x^2\right|$$

$$-2x\left|t_{pn}(t;x)-x\right|+x^2\left|t_{pn}(1;x)-1\right|)$$

olduğu görülür. Şimdi eşitsizliğin sağ tarafının maksimumu alınırsa,

$$H=\mathrm{ma}\,ks\{\varepsilon,2\frac{M_f}{\delta^2}maks\left|2x\right|,2\frac{M_f}{\delta^2}maks\left|x^2\right|\}\text{ olmak üzere}$$

$$t_{pn}(|f(t)-f(x)|;x)\leq\varepsilon\left\|t_{pn}1-1\right\|+\varepsilon+H(\left\|t_{pn}t^2-t^2\right\|-\left\|t_{pn}t-t\right\|+\left\|t_{pn}1-1\right\|)$$

olduğu görülür.

Tekrar hipotez b'yi kullanırsak ve $|f(x)|\leq M_f$ olduğu dikkate alınırsa

$$\left|t_{pn}(f(t);x)-f(x)\right|\leq\left|t_{pn}(f(t);x)-t_{pn}(f(x);x)\right|+\left|f(x)\right|\left|t_{pn}(1:x)-1\right|$$

$$\left|t_{pn}(f(t);x)-f(x)\right|\leq\varepsilon$$

elde edilir. Burada eşitsizliğin sol tarafının $x\in[a,b]$ için supremumu alınırsa ε keyfi olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\left\|t_{pn}f-f\right\|=0 \text{ (p'ye göre düzgün).}$$

gerçeklenir.

Şimdi aşağıdaki örnek Klasik Korovkin Teoremi olan Teorem 3.1'i gerçeklemez ancak King ve Swetits tarafından verilen Teorem 4.1'i gerçekler.

Örnek 4.1

(L_n), Teorem 3.1'deki hipotezleri gerçekleyen ve $C[a,b]$ üzerinde tanımlı lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. T_n, operatörü

$$T_n(f;x)=\left(\frac{1}{2}+u_n\right)L_n(f;x)$$

olacak şekilde tanımlansın. Burada,

$u_n=(1,0,1,0,...)$ şeklinde olsun. Dikkat edilirse (u_n) dizisi klasik olarak yakınsak değil ancak $\frac{1}{2}$ değerine hemen hemen yakınsaktır. Dolayısıyla T_n, lineer pozitif operatörü Klasik Korovkin Teoremi hipotezlerini gerçeklemez.

$$T_n=\frac{L_n}{2}+u_nL_n$$

$$T_n=\frac{L_n}{2}+u_nL_n(f;x)\to\frac{f}{2}+\frac{f}{2}=f$$

Şimdi periyodik fonksiyonlar uzayı için verilen Klasik Korovkin teoreminin hemen hemen yakınsaklık yöntemi kullanılarak geliştirilmiş hali olan aşağıdaki teoremi inceleyelim.

Teorem 4.2 $L_n : C[0,2\pi] \to C[0,2\pi]$ lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

a) $\forall f \in C[0,2\pi]$ için $\lim\limits_{n} \left\| t_{pn} f - f \right\|_{C[0,2\pi]} = 0$, (p ye göre düzgün).

b) $f_1(t) = 0, f_2(t) = \sin t, f_3(t) = \cos t$ olmak üzere $\lim\limits_{n} \left\| t_{pn} f_i - f_i \right\|_{C[0,2\pi]} = 0$,

(p ye göre düzgün). King ve Swetits (1970).

İspat. $a \Rightarrow b$ açıktır.

$b \Rightarrow a$ olduğu gösterilsin. $f \in C[0,2\pi]$ alınsın.. f sürekli olduğundan $\forall \varepsilon \rangle 0$ için $\exists \delta$ vardır $\ni$ $|t-x| \langle \delta$ koşulunu sağlayan $\forall x,t \in [0,2\pi]$ için $|f(x)-f(t)| \langle \varepsilon$ vardır.

Şimdi $|t-x| \geq \delta$ için

$$\Rightarrow \frac{t-x}{\delta} \geq 1 \Rightarrow \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1$$

elde edilir. f, $[0,2\pi]$ aralığında sınırlı olduğundan

$$|f(x)-f(t)| \leq 2M_f$$

gerçeklenir. $x \in (t-\delta, 2\pi + t - \delta]$ aralığını alalım. Bu aralığın boyu 2π olup

$$-\delta < x - t \leq 2\pi - \delta$$

eşitsizliğinden $|x-t| < \delta$ bulunur. $|x-t| < \delta$ için $|f(x)-f(t)| < \varepsilon$ olduğu bilinmektedir.

Şimdi $\delta < x - t \leq 2\pi - t$ aralığını ele alalım. Burada

$$1 < \frac{\sin^2\left(\dfrac{x-t}{2}\right)}{\sin^2 \dfrac{\delta}{2}}$$

eşitsizliği gerçeklenir. O halde $\forall x,t \in C[0,2\pi]$ için

$$|f(x)-f(t)| \le \varepsilon + 2M_f \frac{\sin^2\left(\frac{x-t}{2}\right)}{\sin^2\frac{\delta}{2}}$$

elde edilir. Bu son eşitsizliğin her iki tarafına L_n lineer pozitif operatörü uygulanırsa

$$L_n(|f(x)-f(t)|;x) \le \varepsilon L_n(1;x) + 2\frac{M_f}{\sin^2\frac{\delta}{2}} L_n\left(\sin^2\left(\frac{x-t}{2}\right);x\right)$$

elde edilir. Bu son eşitsizliğin her iki tarafında toplama geçilirse

$$t_{pn}(|f(x)-f(t)|;x) \le \varepsilon t_{pn}(1;x) + 2\frac{M_f}{\sin^2\frac{\delta}{2}} t_{pn}\left(\sin^2\left(\frac{x-t}{2}\right);x\right)$$

$$t_{pn}(|f(x)-f(t)|;x) \le \varepsilon t_{pn}(1;x) + 2\frac{M_f}{\sin^2\frac{\delta}{2}} t_{pn}\left(\left(\frac{1-\cos 2\left(\frac{x-t}{2}\right)}{2}\right);x\right)$$

$$t_{pn}(|f(x)-f(t)|;x) \le \varepsilon t_{pn}(1;x) + 2\frac{M_f}{\sin^2\frac{\delta}{2}} t_{pn}\left(\left(\frac{1}{2}(1-(\cos t.\cos x + \sin t.\sin x))\right);x\right)$$

gerçeklenir. Bu son eşitsizliği takiben,

$$t_{pn}(|f(x)-f(t)|;x) \le t_{pn}(\varepsilon;x) + 2\frac{M_f}{\sin^2\frac{\delta}{2}} t_{pn}\left(\frac{1}{2}(1-\cos t.\cos x - \sin t.\sin x);x\right)$$

$$= t_{pn}(\varepsilon;x) \pm 1 + \frac{M_f}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\Big(t_{pn}(1;x) - \cos x t_{pn}(\cos t;x)$$

$$-\sin x t_{pn}(\sin t;x) \mp 1\Big)$$

$$= \varepsilon\left(t_{pn}(1;x)-1\right) + \varepsilon + \frac{M_f}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\Big(t_{pn}(1;x) - 1 - \cos x t_{pn}(\cos t;x) - \cos x$$

$$-\sin x t_{pn}(\sin t;x) - \sin x\Big)$$

$$=\varepsilon\left(t_{pn}(1;x)-1\right)+\varepsilon+\frac{M_f}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\left(\left(t_{pn}(1;x)-1\right)-\cos x\left(t_{pn}(\cos t;x)-\cos x\right)\right.$$

$$\left.-\sin x\left(t_{pn}(\sin t;x)-\sin x\right)\right)$$

$$\leq\varepsilon\left|t_{pn}(1;x)-1\right|+\varepsilon+\frac{M_f}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\left(\left|t_{pn}(1;x)-1\right|-\cos x\left|t_{pn}(\cos t;x)-\cos x\right|\right.$$

$$\left.-\sin x\left|t_{pn}(\sin t;x)-\sin x\right|\right)$$

olduğu görülür. Eşitsizliğin sağ tarafındaki ifadenin maksimumu alınarak

$$H=maks\{\varepsilon,\frac{M_f}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\underset{a\leq x\leq b}{maks}|2x|,\frac{M_f}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\underset{a\leq x\leq b}{maks}|x^2|\}$$

olmak üzere,

$$t_{pn}\left(|f(t)-f(x)|;x\right)\leq\varepsilon\left\|t_{pn}1-1\right\|+\varepsilon+H\left(\left\|t_{pn}1-1\right\|\right.$$

$$\left.+\left\|t_{pn}\cos t-\cos t\right\|-\left\|t_{pn}\sin t-\sin t\right\|\right)$$

eşitsizliği gerçeklenir. b hipotezi nedeniyle

$$t_{pn}\left(|f(t)-f(x)|;x\right)\leq\varepsilon$$

elde edilir. Böylece $|f(x)|\leq M_f$ olduğu dikkate alınırsa

$$\left|t_{pn}(f(t);x)-f(x)\right|\leq t_{pn}\left(|f(t)-f(x)|;x\right)+|f(x)|.\left|t_{pn}(1:x)-1\right|$$

$$\left|t_{pn}(f(t);x)-f(x)\right|\leq\varepsilon$$

bulunur. Burada eşitsizliğin sol tarafının $x\in[a,b]$ için supremumu alınırsa ε keyfi olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|t_{pn}f-f\right\|=0$, (p'ye göre düzgün) olduğu görülür.

5. YAKINSAKLIK ORANI

Mohapatra (1977) yılında süreklilik modülü yardımıyla Teorem 4.1 ve Teorem 4.2'deki lineer pozitif operatörlerin yaklaşım oranı hesaplanmıştır.

Bu bölümde öncelikle süreklilik modülünün tanımı ve özellikleri hatırlatılmıştır. Daha sonra söz konusu makale, teorem ve ispat teknikleri açısından incelenmiştir.

Tanım 5.1 $f \in C[a,b]$ olsun. f fonksiyonun " *süreklilik modülü*" $w(f;\delta)$ ile gösterilir ve

$$w(f;\delta) = \sup_{|t-x|\leq\delta} |f(t) - f(x)|$$

şeklinde tanımlıdır. Burada δ pozitif bir sabittir.

Süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri gerçekler. Altomore ve Campiti (1914).

Özellikler

i. $w(f;\delta) \geq 0$

ii. $\delta_1 \leq \delta_2 \Rightarrow w(f;\delta_1) \leq w(f;\delta_2)$

iii. $w(f+g;\delta) \leq w(f;\delta) + w(g;\delta)$

iv. $w(f;m\delta) \leq m.w(f;\delta)$

v. $[\![\lambda]\!]$, λ'nın tam değerini göstermek üzere herhangi bir $\lambda \rangle 0$ sayısı

$$w(f;\lambda\delta) \leq (1 + [\![\lambda]\!]) w(f;\delta)$$

vi. $w(f;|t-x|) \geq |f(t) - f(x)|$

vii. $|f(t) - f(x)| \leq \left(\dfrac{|t-x|}{\delta} + 1 \right) w(f;\delta)$

İspat.

i. $w(f,\delta)\geq 0$ olduğu açıktır.

ii. $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $|t-x|\leq \delta_1$, $|t-x|\leq \delta_2$ kümesi tarafından kapsanır. Dolayısıyla supremum özelliğinden $w(f,\delta_1)\leq w(f,\delta_2)$ bulunur.

iii. $w(f+g;\delta)=\sup\limits_{|t-x|\leq\delta}\left|(f+g)(t)-(f+g)(x)\right|$

$$\begin{aligned}\left|(f+g)(t)-(f+g)(x)\right| &= \left|f(t)+g(t)-f(x)-g(x)\right| \\ &\leq \left|f(t)-f(x)\right|+\left|g(t)-g(x)\right| \\ &\leq w(f;\delta)+w(g;\delta)\end{aligned}$$

iv. $|t-x|\leq m\delta \Rightarrow x-m\delta\leq t\leq x+m\delta$

$$t\leq x+m\delta \Rightarrow |h|\leq\delta$$

$$\begin{aligned}w(f;m\delta) &= \sup_{|h|\leq\delta}\left|f(x+mh)-f(x)\right| \\ &= \sup_{|h|\leq\delta}\left|\sum_{k=0}^{m-1} f\left(x+(k+1)h\right)-f(x+kh)\right| \\ &\leq \sup_{|h|\leq\delta}\sum_{k=0}^{m-1}\left|f\left(x+(k+1)h\right)-f(x+kh)\right| \\ &= w(f;\delta)+w(f;\delta)+\ldots \\ &= m.w(f;\delta)\end{aligned}$$

v. $[\![\lambda]\!]\leq\lambda\leq[\![\lambda]\!]+1\leq\lambda+1$

$$\begin{aligned}w(f;\lambda\delta) &\leq w\left(f;\left([\![\lambda]\!]+1\right)\delta\right)\leq\left([\![\lambda]\!]+1\right)w(f;\delta) \\ &\leq(\lambda+1)w(f;\delta)\end{aligned}$$

vi. $w(f;|t-x|)=\sup\limits_{|t-x|\leq\delta}\left|f(t)-f(x)\right|\geq\left|f(t)-f(x)\right|$

elde edilir.

vii. $\left|f(t)-f(x)\right|\leq w\left(f;\dfrac{|t-x|}{\delta}.\delta\right)\leq\left(\dfrac{|t-x|}{\delta}+1\right)w(f;\delta)$

şeklindedir.

Şimdi Klasik Korovkin Teoremi'ndeki operatörler için yaklaşım oranını veren teoremi ifade ve ispat edelim.

Teorem 5.2 $L_n : C[a,b] \to C[c,d]$, $[a,b] \subset [c,d]$ olmak üzere lineer pozitif operatör dizisi olsun. Eğer $f \in C[a,b]$ ve $x \in [c,d]$ ise

$$|L_n(f;x) - f(x)| \leq |f(x)||L_n(1;x) - 1| + (L_n(1;x) + \sqrt{L_n(1;x)})w(f;\mu_p(x))$$

eşitsizliği gerçeklenir. Burada

$$\mu_n^2(x) = L_n((t-x)^2;x)$$

şeklindedir. Swetits (1979), Korovkin (1953).

İspat. $w(f;\delta) = \sup\limits_{|t-x| \leq \delta} |f(t) - f(x)|$ alalım. Süreklilik modülünün özelliğinden,

$$|f(t) - f(x)| \leq w(f;|t-x|)$$

yazılır. Buradan

$$|f(t) - f(x)| \leq w(f;\frac{|t-x|}{\delta_n}\delta_n)$$

$$\leq \left(1 + \left(\frac{|t-x|}{\delta_n}\right)w(f;\delta_n)\right)$$

elde edilir.

$$|L_n(f;x) - f(x)| \leq |L_n(f(t);x) - L_n(f(x);x)| + |f(x)||L_n(1;x) - 1|$$

$$\leq L_n(|f(t) - f(x)|;x) + |f(x)||L_n(1;x) - 1|$$

$$\leq L_n\left(\left(1 + \frac{|t-x|}{\delta_n}\right);x\right)w(f;\delta_n) + |f(x)||L_n(1;x) - 1|$$

$$= \left(L_n(1;x) + L_n\left(\frac{|t-x|}{\delta_n};x\right)\right)w(f;\delta_n) + |f(x)||L_n(1;x) - 1|$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa,

$$L_n(|t-x|;x) \le (L_n|t-x|^2;x)^{\frac{1}{2}}(L_n(1^2;x))^{\frac{1}{2}}$$

$$= \mu_n(x)\sqrt{L_n(1;x)}$$

elde edilir. O halde

$$|L_n(f;x)-f(x)| \le w(f;\delta_n)\left(L_n(1;x)+\frac{\mu_n}{\delta_n}\sqrt{L_n(1;x)}\right)+|f(x)||L_n(1;x)-1|$$

gerçeklenir. $\delta_n = \mu_n(x)$ seçilirse

$$|L_n(f;x)-f(x)| \le |f(x)||L_n(1;x)-1|+(L_n(1;x)+\sqrt{L_n(1;x)})w(f;\mu_n(x))$$

olduğu görülür.

Örnek 5.1 $C[0,r]$ uzayında

$$S_n(f;x)=e^{-nx}\sum_{k=o}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!}$$

şeklinde tanımlı olan Szasz Operatörü'nün $R=\sqrt{r}+1$ olmak üzere

$$|S_n(f;x)-f(x)| \le Rw\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

şartını sağladığını gösteriniz.

Çözüm.

$$|S_n(f;x)-f(x)| = \left|e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)\frac{(nx)^k}{k!}\right|$$

$$\le e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\frac{(nx)^k}{k!}$$

$$\le e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\left|\left(\frac{k}{n}\right)-(x)\right|}{\delta}+1\right)w(f;\delta)\frac{(nx)^k}{k!}$$

$$=w(f;\delta)e^{-nx}\left(\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left|\left(\frac{k}{n}\right)-x\right|\right)\frac{(nx)^k}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}\right)$$

$$=w(f;\delta)e^{-nx}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\delta}\left|\left(\frac{k}{n}\right)-x\right|\frac{(nx)^k}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}\right)$$

$$=w(f;\delta)e^{-nx}\frac{1}{\delta}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left|\left(\frac{k}{n}\right)-x\right|+1\right)\frac{(nx)^k}{k!}\right] \tag{2.1}$$

$$B=\sum_{k=0}^{\infty}\left|\left(\frac{k}{n}\right)-x\right|\frac{(nx)^k}{k!}$$

alınmak üzere

$$B=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\left(\frac{k}{n}\right)-x\right|^2\frac{(nx)^k}{k!}\right)^{1/2}\left(\frac{(nx)^k}{k!}\right)^{1/2}$$

$$\leq\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\left(\frac{k}{n}\right)-x\right|^2\frac{(nx)^k}{k!}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}\right)^{1/2}$$

$$e^{-nx}B\leq e^{-nx}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\left(\frac{k}{n}\right)-x\right|^2\frac{(nx)^k}{k!}\right)^{1/2}e^{\frac{nx}{2}}$$

$$e^{-nx}B\leq\left(e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\left(\frac{k}{n}\right)-x\right|^2\frac{(nx)^k}{k!}\right)^{1/2}e^{\frac{nx}{2}}e^{\frac{-nx}{2}}$$

$$=\left(S_n(t^2;x)-2xS_n(t;x)+x^2S_n(1;x)\right)^{1/2}e^0$$

$$=\left(x^2+\frac{x}{n}-2x^2+x^2\right)^{1/2}$$

$$=\left(\frac{x}{n}\right)^{1/2} \tag{2.2}$$

(2.1) ve (2.2) ile şart sağlanır.

Şimdi Teorem 4.1'deki lineer pozitif operatörler için yaklaşım oranını verelim.

Teorem 5.3 $L_n : C[a,b] \to C[a,b]$ lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun.

Her bir $p,n \in \mathbb{N}$ için $p,n = 1,2,...$ için

$$\|f - t_{pn}f\| \le \|f\| \|t_{pn}1 - 1\| + w(\mu_n)\|t_{pn}1 + 1\|$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\mu_{pn}^2 = \|t_{pn}((t-x)^2;x)\|$$

şeklindedir. Mohapatra (1977).

İspat.

$x,t \in [a,b]$ ve δ pozitif bir sayı olmak üzere $|t-x| > \delta$ iken

$$|f(t) - f(x)| \le w\left(f;|t-x|\right) = w\left(f;\frac{|t-x|}{\delta}\delta\right) \le \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right) w(f;\delta)$$

$$\le \left(1 + \frac{|t-x|^2}{\delta^2}\right) w(f;\delta)$$

gerçeklenir.

Eşitsizliğin her iki tarafına L_n lineer pozitif operatör uygularsak,

$$L_n(|f(t) - f(x)|;x) \le L_n\left(w(f;\delta) + \frac{|t-x|^2}{\delta^2} w(f;\delta)\right)$$

olduğu görülür. Her iki tarafın toplamlarını alırsak,

$$t_{pn}(|f(t) - f(x)|;x) \le t_{pn}\left(w(f;\delta) + \frac{|t-x|^2}{\delta^2} w(f;\delta)\right)$$

$$= t_{pn}\left(w(f;\delta);x\right) + \left(\frac{w(f;\delta)}{\delta^2}\right) t_{pn}\left(|t-x|^2;x\right)$$

$$\le t_{pn}\left(w(f;\delta);x\right) + \left(\frac{w(f;\delta)}{\delta^2}\right) \|t_{pn}(|t-x|^2;x)\|$$

$$= t_{pn}\left(w(f;\delta);x\right)+\left(\frac{w(f;\delta)}{\delta^2}\right)\mu_{pn}^2$$

$\mu_{pn} > 0$ olduğundan $\mu_{pn} = \delta$ alalım.

$$= w(f;\delta)t_{pn}(1;x)+\frac{w(f;\delta)}{\delta^2}\mu_{pn}^2$$

$$t_{pn}\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)\leq\left(t_{pn}(1;x)+\frac{\mu_{pn}{}^2}{\delta^2}\right)w(f;\delta)$$

elde edilir.

$$\left|f(x)-t_{pn}(f(t);x)\right|\leq\left|f(x)-t_{pn}(f(x);x)\right|+\left|t_{pn}(f(t);x)-t_{pn}(f(x);x)\right|$$

$$=\left|f(x)\right|\left|1-t_{pn}(1;x)\right|+\left|t_{pn}(f(t)-f(x);x)\right|$$

$$\leq\left|f(x)\right|\left|1-t_{pn}(1;x)\right|+t_{pn}\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)$$

$$=\left|f(x)\right|\left|1-t_{pn}(1;x)\right|+(t_{pn}(1;x)+1)w(\mu_{pn})$$

$$\left\|f(x)-t_{pn}(f(t);x)\right\|\leq\left\|f(x)\right\|\left\|t_{pn}1-1\right\|+\left\|t_{pn}1+1\right\|w(\mu_{pn})$$

Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 5.4 $L_n : C[0,2\pi]\to C[0,2\pi]$ ile tanımlı lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. Her bir $p,n\in\mathbb{N}$ için $p,n=1,2,...$ için

$$\left\|t_{pn}f-f\right\|\leq\left\|f\right\|\left\|t_{pn}1-1\right\|+w(\mu_{pn})\left\|t_{pn}1+1\right\|$$

eşitsizliği elde edilir.

Burada

$$\mu_{pn}^2=\left\|t_{pn}(\sin^2\left(\frac{t-x}{2}\right);x)\right\|$$

şeklindedir. Mohapatra (1977).

İspat. $x \in (t-\delta, 2\pi + t - \delta]$ aralığını alalım. Bu aralığın boyu 2π olup $-\delta < x - t \leq 2\pi - \delta$ eşitsizliğinden $|x-t| < \delta$ bulunur.

$|x-t| < \delta$ için $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$ olduğunu biliyoruz.

Şimdi $-\delta < x - t \leq 2\pi - \delta$ aralığını ele alalım.

$$\frac{\delta}{2} \langle \frac{x-t}{2} \langle \frac{2\pi - \delta}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{x-t}{2}\right) \langle \sin\frac{\delta}{2} \Rightarrow \frac{\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)}{\sin\frac{\delta}{2}} \leq 1$$

$$|f(t) - f(x)| \leq w\left(f; \sin\left(\frac{|t-x|}{2}\right)\right) = w\left(f; \frac{\sin\left(\frac{|t-x|}{2}\right)}{\sin\frac{\delta}{2}} \sin\frac{\delta}{2}\right) \leq \left(1 + \frac{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}{\sin\frac{\delta}{2}}\right) w\left(f; \sin\frac{\delta}{2}\right)$$

$$\leq \left(1 + \frac{\sin^2\left(\frac{t-x}{2}\right)}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\right) w\left(f; \sin\frac{\delta}{2}\right)$$

$$|f(t) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{\sin^2\left(\frac{t-x}{2}\right)}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\right) w\left(f; \sin\frac{\delta}{2}\right)$$

Her bir $p, n = 1, 2, \ldots$ için t_{pn} pozitif ve lineer bir operatördür.

$$L_n\left(|f(t) - f(x)|; x\right) \leq L_n\left(w\left(f; \sin\frac{\delta}{2}\right) + \frac{\sin^2\left(\frac{|t-x|}{2}\right)}{\sin^2\frac{\delta}{2}} w\left(f; \sin\frac{\delta}{2}\right)\right)$$

olduğu görülür. Her iki tarafın toplamlarını alırsak,

$$t_{pn}\left(|f(t) - f(x)|; x\right) \leq t_{pn}\left(w\left(f; \sin\frac{\delta}{2}\right) + \frac{\sin^2\left(\frac{|t-x|}{2}\right)}{\sin^2\frac{\delta}{2}} w\left(f; \sin\frac{\delta}{2}\right)\right)$$

$$= t_{pn}\left(w\left(f;\sin\frac{\delta}{2} \right);x \right) + \frac{w\left(f;\sin\frac{\delta}{2} \right)}{\sin^2\frac{\delta}{2}} t_{pn}\left(\sin^2\left(\frac{|t-x|}{2} \right);x \right)$$

$$\leq t_{pn}\left(w\left(f;\sin\frac{\delta}{2} \right);x \right) + \frac{w\left(f;\sin\frac{\delta}{2} \right)}{\sin^2\frac{\delta}{2}} \left\| t_{pn}\left(\sin^2\frac{|t-x|}{2};x \right) \right\|$$

$$= t_{pn}\left(w\left(f;\sin\frac{\delta}{2} \right);x \right) + \frac{w\left(f;\sin\frac{\delta}{2} \right)}{\sin^2\frac{\delta}{2}} \mu_{pn}^2$$

$\mu_{pn} > 0$ olduğundan $\mu_{pn} = \sin\frac{\delta}{2}$ alalım.

$$= w\left(f;\sin\frac{\delta}{2} \right) t_{pn}(1;x) + \frac{w\left(f;\sin\frac{\delta}{2} \right)}{\mu_{pn}^2} \mu_{pn}^2$$

$$t_{pn}\left(|f(t)-f(x)|;x \right) \leq \left(t_{pn}(1;x) + \frac{\mu_{pn}{}^2}{\mu_{pn}{}^2} \right) w\left(f;\sin\frac{\delta}{2} \right)$$

elde edilir.

$$\left| f(x) - t_{pn}(f(t);x) \right| \leq \left| f(x) - t_{pn}(f(x);x) \right| + \left| t_{pn}(f(t);x) - t_{pn}(f(x);x) \right|$$

$$= |f(x)| \left| 1 - t_{pn}(1;x) \right| + \left| t_{pn}(f(t) - f(x);x) \right|$$

$$\leq |f(x)| \left| 1 - t_{pn}(1;x) \right| + (t_{pn} |f(t) - f(x)|;x)$$

$$= |f(x)| \left| 1 - t_{pn}(1;x) \right| + (t_{pn}(1;x) + 1) w(\mu_{pn})$$

$$\left\| t_{pn} f - f \right\| \leq \| f(x) \| \left\| t_{pn} 1 - 1 \right\| + \left\| t_{pn} 1 + 1 \right\| w(\mu_{pn})$$

Bu ise ispatı tamamlar.

KAYNAK LİSTESİ

[1] B. Wood, Convergence and almost convergence of certain sequences of certain sequences of pozitive linear operators, Studia Math. 34 (1970), 113-119.

[2] Bohman, H. (1952). On approximation of continuous and analytic functions. Ark. Mat., 2; 43-56.

[3] Bojanic R. and Cheng, F. (1983). Estimates fort he rate of approximation of functions of bounded variation by Hermit-Fejer polynomials. Proc. of the Conference of Canadian Math. Soc., 3; 5-17.

[4] Bojanic, R. and Khan, M.K. (1992). Summability of Hermit-Fejer interpolation for functions of bounded variation. J. Nat. Sci. Math., 32; 5-10.

[5] F. A. Altomare and M.Campiti, Korovkin type approximation theory and its application, Walter de Grypter Publ Berlin, (1914).

[6] G. G. Lorentz, A contribution to the theory of divergent sequences, Acta Math 80 (1948), 167-190

[7] G. G. Lorentz, Bernstein Polynomials,Toronto (1953).

[8] H.Bohman, On approximation of continuous and of analytic functions, Ark. Mat. 2 (1952).

[9] J. J. Swetits, On summability and pozitive linear operators, Journal of Approximation Theory, 25 (1979), 186-188.

[10] J. P.King, The Lototsky transform and Bernstein polynomials, Canad. J. Math. SOC.11 (1970), 281-290

[11] King, J. P. And Swetits, J. J. (1970). Pozitive linear operators and summability. J. Austral. Math. Soc., 11; 281-190.

[12] P. P. Korovkin, On convergence of linear pozitive operators in the space of continious functions, Dokl. Akad. Nauk.SSR 90 (1953), 961-969.

[13] Kreyszing, E., Indroductory Functional Analysis With Application, Windsor, (1978).

[14] P.P. Korovkin,Linear Operators and Approximation Theory, India, Delhi, (1960)

[15] R.N. Mohapatra, Quantitive results on almost convergence of a sequence of pozitive linear operators, Journal of Approximation Theory, 20 (1977), 239-250.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Seycan AYVAZ

Doğum Yeri ve Tarihi: Manisa 24/09/1986

Adres: Tunca Mh. 3005 Sk. Palmiye Apartmanı No: 29/9 Manisa

Lisans Üniversite: Uşak Üniversitesi