BAŞKENT UNIVERSITY
JOURNAL OF EDUCATION

2021, 8(2), 292-314 ISSN 2148-3272

GeoGebra Destekli Matematiksel Modelleme Sürecinin Merdiven Problemi Çözümü Çerçevesinde Yapılandırılması

Structuring GeoGebra-Aided Mathematical Modeling Process within the Framework of Ladder Problem Solution

Çağlar Naci Hıdıroğlu[a*], Süleyman Emre Aktaş[b]

[a]Pamukkale University, Denizli, Turkey
[b] Ministry of National Education, Istanbul, Turkey

Öz
Bu çalışmanın amacı, 21. yy.de matematik öğretiminde önemli bir araç olan GeoGebra'nın matematiksel modelleme sürecinde nasıl kullanılabileceğini ve sürece olası etkilerini "Merdiven Problemi" çerçevesinde örneklendirmektir. Çalışmada kuramsal çerçeve olarak dokuz temel basamak (problemin analizi, sistematik yapıyı kurma, matematikselleştirme, üst matematikselleştirme, matematiksel analiz, yorumlama, doğrulama, revize etme, raporlaştırma) ve dokuz temel bileşen (karmaşık gerçek yaşam durumu, gerçek yaşam problem durumu, gerçek yaşam problem durumunun modeli, yardımcı matematiksel model/ler, ana matematiksel model, matematiksel çözüm, gerçek yaşam çözümü, çözüm kararı, çözüm raporu) ile yapılandırılan teknoloji destekli matematiksel modelleme süreç modeli dikkate alınmıştır. Bu çalışma ile öğrencilerin, matematik öğretmenlerinin ve matematik öğretmeni adaylarının matematiksel modelleme ve GeoGebra'dan matematik derslerinde nasıl yararlanabileceklerine ilişkin bazı açıklamalar getirilecektir.

Anahtar Kelimeler: Matematik eğitimi, Matematiksel modelleme, GeoGebra, Teknoloji destekli matematiksel modelleme süreci.

Abstract
The aim of this study is to sample how GeoGebra, an important tool in mathematics teaching in 21st century, can be used in mathematical modeling and its possible effects on the process within the framework of "Ladder Problem". In this study, technology-aided mathematical modeling, which is structured with nine steps (problem analysis, constructing a systematic structure, mathematization, metamathematization, mathematical analysis, interpretation, validation, revision, reporting) and nine components (complex real world situation, real world problem situation, model of real world problem situation, sub-mathematical model/s, main mathematical model, mathematical solution, real world solution, solution decision, solution report), is considered as a theoretical framework. With this study, some explanations will be made about how students, mathematics teachers and prospective mathematics teachers can utilize mathematical modeling and GeoGebra in mathematics lessons.

Keywords: Mathematics education, Mathematical modeling, GeoGebra, Technology-aided mathematical modeling.

1. Giriş

21 yy. becerilerine bakıldığında öğrencilerin aritmetik işlemlerdeki becerilerinden ziyade; akıl yürütme, tahmin etme, doğrulama, koordine etme, mantıksal ve uzamsal düşünme, tasarlama gibi üst düzey becerilerinin geliştirilmesi daha önemlidir (English ve Watters, 2004; Millî Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018b; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). Bu becerilerin geliştirilmesi sürecinde, matematiksel modelleme yaklaşımı matematik öğrenme sürecinde önemli bir rol oynamaktadır.

[*]*ADDRESS FOR CORRESPONDENCE: Assoc.Prof.Dr. Çağlar Naci Hıdıroğlu, Department of Mathematics Education, Faculty of Education, Pamukkale University, Denizli, Turkey, E-mail address: chidiroglu@pau.edu.tr. ORCID ID: 0000-0002-3774-4957.*
[b]*Süleyman Emre Aktaş, Ministry of National Education, Necdet Semker Secondary School, Istanbul, Turkey, E-mail address: emre.aktas961@gmail.com. ORCID ID: 0000-0002-3991-2483.*
Received Date: March 27th, 2020. Acceptance Date: February 22nd, 2021.

Gardner (2007), 21. yüzyıl çocuklarının artık “makinelerin yapamadığı” işleri yapabilecek bilgi ve becerilere sahip olmaları gerektiğini vurgulamaktadır. 21. yüzyılın eğitimdeki farklı yaklaşımlarından biri olan STEM [Science/ Technology/ Engineering/ Mathematics] eğitimi, okul öncesi eğitimden yükseköğretime kadar tüm eğitim sürecini kapsayan disiplinler arası bir yaklaşımdır (Gonzalez ve Kuenzi, 2012). Hom (2014) STEM eğitiminin, fen, teknoloji, mühendislik ve matematik disiplinlerini gerçek yaşam bağlamındaki farklı konularla birlikte ve eş zamanlı olarak birleştiren bütünleşik bir yaklaşım olduğunu ifade etmektedir. Dünyada STEM eğitimi ön plana çıkarken (Gonzalez ve Kuenzi, 2012), sanat boyutunun da eklendiği genişletilmiş STEM+A yaklaşımı da bazı ülkelerde ön plana çıkmaktadır (Jin, Chong ve Cho. 2012; Park ve Ko, 2012). Bu anlamda matematiksel modelleme açık uçlu gerçek yaşam problemlerini ele alarak bilim, mühendislik ve matematiği içerisinde barındırmaktadır. GeoGebra gibi yazılımların sürece entegre edilmesini önemseyen teknoloji destekli matematiksel modelleme süreci ile de bütünleşik veya gömülü STEM yaklaşımlarına hizmet eden önemli öğrenme ortamları yaratılabilmektedir.

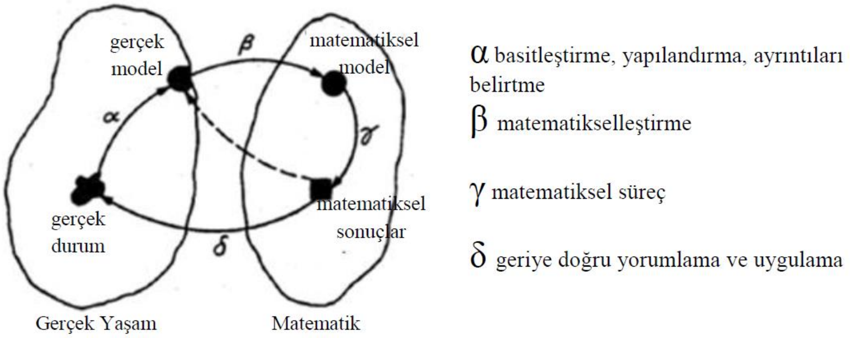
STEM+A gibi eğitimdeki yeni yaklaşımların temel amaçlarından biri, var olan teknolojiyi karşılaşılan güncel problemleri çözerken etkili bir şekilde kullanabilen bireyler yetiştirmektir. Bu doğrultuda 21. yüzyıl becerilerinde karşımıza çıkan kavramlardan birisi de bilgi işlemsel düşünme (*computational thinking*)dir (Wing, 2006). Bilgi işlemsel düşünme, bir problemi GeoGebra vb. dinamik matematik ve geometri yazılımları yardımıyla formüle etme, verileri analiz etme, verileri model ve simülasyonlarla gösterme, algoritmik düşünme ile sonuçlar elde etme, olası farklı çözümleri gösterme ve yapılan çözümü farklı disiplinlerdeki problemlerin çözümüne genelleme ve aktarmayı içermektedir (Barr, Harrison ve Conery, 2011; Wing, 2008). ISTE [International Society for Technology in Education] (2011) bilgi işlemsel düşünmenin yaratıcı düşünme, algoritmik düşünme, eleştirel düşünme, işbirlikli öğrenme ve iletişim becerileri gibi alt beceriler olmadan tanımlanamayacağından bahsetmektedir. Bu anlamda açık uçlu gerçek yaşam problemlerini ele alan matematiksel modelleme problemlerinin teknoloji destekli çözümlerini içeren öğrenme ortamlarının STEM’deki zihinsel becerileri desteklemesinin yanında bilgi işlemsel düşünme becerilerinin de gelişimi için etkili bir yol olabileceği ifade edilebilir. Matematiksel modellemenin 21. yüzyıl becerilerinin ve eğitim yaklaşımlarının zenginleştirilmesinde önemli bir araç olmasından dolayı ona son yıllarda okul matematiği uygulamalarında daha fazla yer verilmesi önemli olmaktadır (MEB, 20009b, 2018b; NCTM, 2000).

1.1. Matematik Öğretiminde Matematiksel Modelleme

Matematiksel modelleme, rutin olmayan gerçek yaşam problemlerini, bilinenlerin ve bilinmeyenlerin tespitini, gerçek yaşam durumlarının matematikleştirilmesini, gerçek yaşam durumu ile ilgili çoklu modellerin inşasını ve ilişkilendirilmesini, matematiksel modelden elde edilen sonuçların gerçek yaşam durumunda yorumlanmasını ve çözümün doğrulanmasını içermektedir (Akgün, Çiltaş, Deniz ve Işık, 2013; Berry ve Houston, 1995; Borromeo-Ferri, 2007; Hıdıroğlu, 2012; Hıdıroğlu ve Bukova-Güzel, 2017; Peter Koop, 2004). Blum ve Niss (1991), matematiksel modellemenin bireyin bilgisi, niyeti ve çıkarlarına bağlı olarak bir gerçeklik parçasını yapılandırdığını ifade etmektedir. Lingefjärd (2012) ve Borromeo-Ferri (2007), matematiksel modelleme sürecinin karmaşık bir süreç olduğunu vurgulamakta ve modelleme etkinliğinin matematiksel yeterlikleri geliştirmenin bir yolu olduğunu dile getirmektedir.

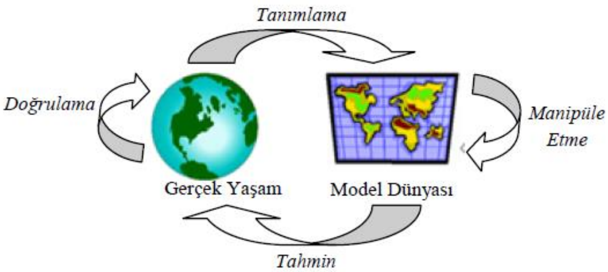
Matematiksel modelleme süreci karmaşık bir zihinsel süreci içerdiği için farklı araştırmacılar onu farklı süreç modelleri ile ele almışlardır. Örneğin; Galbraith, Stillman, Brown ve Edwards (2007) ve Lesh ve English (2005) matematiksel modelleme sürecinde formüle etme, çözme, yorumlama ve değerlendirmeyi içeren temel basamaklardan bahsetmektedir. Lesh ve Doerr (2003) matematiksel modellemeyi bir gerçek yaşam durum ifadesinin fiziksel, sembolik ya da soyut modelini oluşturma süreci olarak ifade etmektedir. Maaß’a (2006) göre, matematiksel modelleme problemleri gerçekle ilgili, özgün, karmaşık ve açık uçlu problemlerdir ve bu problemleri çözerken geleneksel kapalı uçlu ve rutin problemlerden farklı düşünme becerilerinin de kullanılması gerekmektedir. Bilişsel bakış açısından değerlendirilirse matematiksel modellemenin odağı, modelleme sürecindeki zihinsel eylemler yoluyla ifade edilebilen düşünme süreçlerine dayanmaktadır (Borromeo-Ferri, 2007).

Matematiksel modelleme sürecine ilişkin önemli araştırmalar incelendiğinde, Blum (1985) modelleme döngüsünü matematik ve gerçek yaşam arasındaki ilişkiyi içeren dört temel basamak ve dört temel bileşenden oluşan bir süreç olarak açıklamaktadır (bkz. Şekil 1). Blum (1985) dört bileşeni gerçek durum, gerçek model, matematiksel model ve matematiksel sonuçlar olarak ifade etmektedir. Modelleme sürecinde dört temel basamak ise (1) basitleştirme, yapılandırma, ayrıntıları belirleme, (2) matematikselleştirme, (3) matematiksel süreç, (4) geriye doğru yorumlama ve uygulamadır (Blum, 1985).



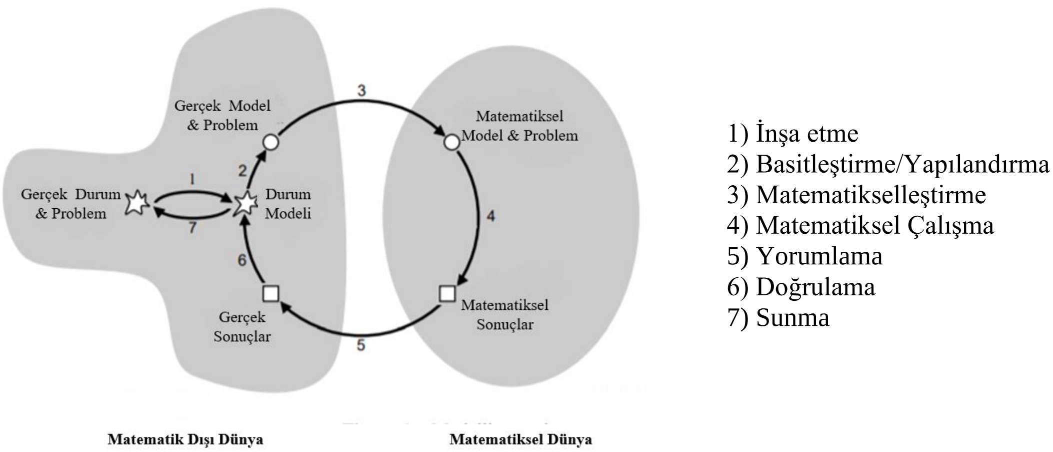
Şekil 1. Blum'un (1985) modelleme döngüsü (akt. Hıdıroğlu, 2015: 24)

Lesh ve Doerr (2003) modelleme sürecini gerçek yaşam ve model dünyası olarak iki evrenin ilişki içerisinde bulunduğu bir süreç olarak açıklamaktadır. Lesh ve Doerr'e (2003) göre, doğrulama gerçek yaşam evreninde, tanımlama gerçek yaşamdan model dünyasına geçerken, manipüle etme model dünyasında, tahmin ise model dünyasından gerçek yaşam evrenine geçerken gerçekleşen temel basamaklardır (bkz. Şekil 2).



Şekil 2. Lesh ve Doerr'in (2003) modelleme döngüsü (akt. Hıdıroğlu, 2015: 36)

Modelleme sürecini Blum'un (1985) modelini temel alarak geliştirmiş Blum ve Borromeo-Ferri (2009), basamak ve bileşen ilişkisini dikkate alarak süreci yedi temel bileşen ve yedi temel basamak ile ele almaktadır (bkz. Şekil 3). Blum ve Borromeo-Ferri (2009) modelleme sürecinde 1. ve 2. temel basamakta yardımcı bileşen olarak ekstra matematiksel bilgilerden bahsetmektedir. Burada ekstra matematiksel bilgilerden kastedilen şey çözücülerin matematiksel bilgilerinin dışında sürece yön veren matematik dışı bilgileridir. Bu matematik dışı bilgiler çözümde etkili olmakta ve gerçek yaşam ve eski problem çözme deneyimlerinden kaynaklanan bilgiler olarak karşımıza çıkabilmektedir. Disiplinler arası problemler dikkate alındığında bu bilgiler matematik dışı disiplinlere ilişkin bilgiler de olabilmektedir (Hıdıroğlu ve Özkan-Hıdıroğlu, 2016). Blum ve Borromeo-Ferri (2009) modelleme sürecindeki iki dünyayı matematik ve matematik dışı dünya olarak ikiye ayırmaktadır.

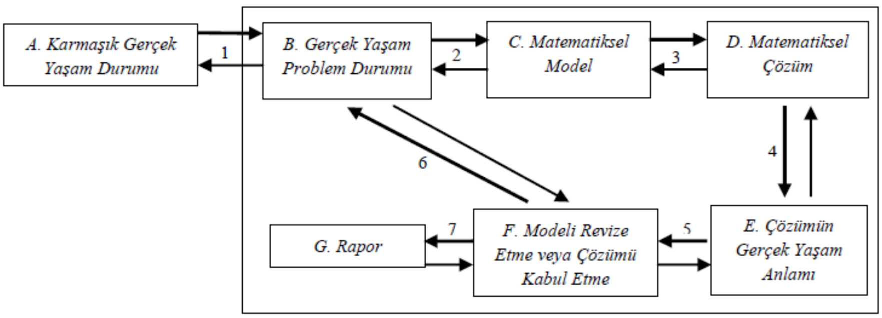


Şekil 3. Modelleme döngüsü (Blum ve Borromeo-Ferri, 2009:46)

Matematikteki temel becerilerin gelişiminde teknoloji destekli matematik öğretiminin de önemli bir rolü vardır. MEB (2018a, 2018b) matematik dersi öğretim programları incelendiğinde, ilkokul, ortaokul ve lise düzeyindeki temel yetkinliklerden olan matematiksel yetkinlikler, bilim/teknolojideki temel yetkinlikler, dijital yetkinlikler ve inisiyatif alma/girişimcilik yetkinliklerinde özellikle matematiksel kavramların ve becerilerin var olan teknoloji ile ilişkilendirilerek günümüze entegrasyonunun önemine vurgu yapılmaktadır. Bu da teknoloji ile matematiksel modellemenin entegrasyonunun öğretim programlarının anlayışına hizmet eden önemli bir yaklaşım olduğunu göstermektedir.

1.2. Matematik Öğretiminde Teknoloji Destekli Matematiksel Modelleme

Çağın değişimlerine ayak uydurabilmek için gerçek hayattaki matematiği kullanabilen ve gerçek yaşam durumlarını açıklarken teknolojiden en verimli şekilde yararlanabilen bireylere ihtiyaç duyulmaktadır (Hıdıroğlu, 2015, Hıdıroğlu ve Özkan-Hıdıroğlu, 2017). Farklı kaynaklarda (Ang, 2010; Baki, 2008; Chua ve Wu, 2005; Galbraith ve diğerleri, 2007; NCTM, 2000) 21. yy.de teknoloji ile zenginleştirilmiş matematik öğretiminin önemi vurgulanmaktadır. Teknolojinin eğitimde yeni öğrenme yaklaşımlarına fırsat vermesi ve kısa sürede çoklu deneme ve araştırma kolaylıkları sağlaması ile matematiğin içeriğini ve uğraş alanlarını genişlettiği düşünülmektedir (Baki, 2002). Hıdıroğlu ve Bukova-Güzel (2017) ve Lingefjärd (2012), öğrencilerin matematiksel modellemede matematiksel modelleri kurarken teknoloji yardımı ile matematiksel bilgilerini kullandıklarını ve teknolojinin onların farklı stratejiler geliştirmelerini desteklediğini ifade etmektedir. Türkiye'de MEB (2009a, 2009b, 2015a, 2015b, 2018a, 2018b), matematik dersi öğretim programlarında sorgulama-keşfetme, verileri gözlemleme-sınıflandırma-analiz etme-yorumlama, bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanma, modelleri problem çözme sürecinde aktif kullanmayı gerektiren öğrenme ortamlarının önemli olduğundan bahsetmektedir. Teknoloji ile desteklenmiş öğrenme süreçleri öğrencilerin teknoloji becerilerini geliştirdiği gibi diğer becerilerini de açığa çıkaracak ve geliştirecek zengin problem çözme ortamları sağlamaktadır (Hıdıroğlu, 2015). Hıdıroğlu ve Özkan-Hıdıroğlu'na (2016) göre teknoloji, matematik öğreniminde kavramsal öğrenme sürecindeki en önemli araçlardan birisidir. Teknolojinin olmadığı öğrenme süreçlerindeki zorluklar değil, teknoloji destekli öğrenme ortamlarında ortaya çıkan zorluklar dikkate alınarak öğrenme süreci planlanmalıdır (Hıdıroğlu ve Özkan-Hıdıroğlu, 2016). Teknoloji destekli matematiksel modelleme sürecini detaylı olarak açıklayan alanyazında iki süreç modeli (Hıdıroğlu, 2015; Stillman, Galbraith, Brown ve Edward, 2007) ile karşılaşılmaktadır. Hıdıroğlu (2015) ve Stillman, Galbraith, Brown ve Edward (2007) modelleme sürecinde temel basamak ve bileşenler düzeyinde teknolojinin doğrudan etkisinden bahsetmemişler; bunun yanı sıra alt basamaklarda teknolojinin modelleme sürecini zenginleştirdiğine vurgu yapmışlardır. Stillman ve diğerleri (2007) modelleme sürecini yedi temel basamak ve yedi temel bileşen ile açıklamışlardır (bkz. Şekil 4). Stillman ve diğerlerinin (2007) süreç modeli Galbraith ve Stillman'ın (2006) kuramsal çerçevesine dayanmaktadır. Galbraith ve Stillman'ın (2006) modelleme sürecinde 31 alt basamaktan bahsedilmektedir. Bu alt basamakların bazıları teknoloji ve modelleme entegrasyonu ile ortaya çıkan zihinsel süreçleri açıklamaktadır.



1- Anlama, yapılandırma, basitleştirme, içeriği yorumlama.
2- Varsayımda bulunma, formüle etme, matematikselleştirme.
3- Matematiksel çalışma yapma.
4- Matematiksel çıktıları yorumlama.
5- Birleştirme, eleştirme, doğrulama.
6- İletişim, çözümü savunma (eğer model tatmin ediciyse)
7- Modelleme sürecinin tekrar edilmesi (eğer model tatmin edici değilse)

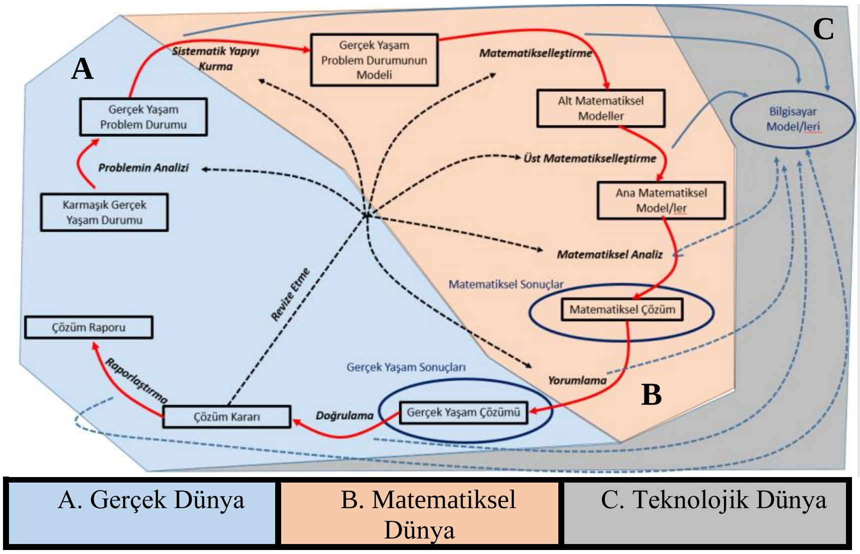
Şekil 4. Modelleme süreci (Stillman ve diğerleri, 2007:690)

Teknolojinin matematiğe entegrasyonunda güncel teknolojinin sağladığı imkânlarla tasarlanan dinamik geometri ve matematik yazılımları önemli birer araç konumundadır. Bu teknolojik yazılımlar ile öğrenciler, geometrik ve cebirsel temsiller arasındaki ilişkileri karşılaştırma fırsatı bulabilmekte; çoklu temsiller yolu ile matematiksel veya fiziksel kavramları inceleyebilmekte; tablo, cebir ve geometri penceresi arasında etkileşim sağlayabilmekte ve geometri, cebir ve analiz arasında köprü işlevi görerek farklı alanlar arasında zihinsel geçişler yapabilmektedir (Baki, 2002; Hıdıroğlu ve Bukova-Güzel, 2014). GeoGebra, geometrik ve cebirsel ifadelerin arasındaki ilişkinin incelenmesinde etkili, ücretsiz ve dili Türkçe olan dinamik matematik ve geometri yazılımıdır. GeoGebra içerisinde bulunan geometri, cebir ve tablo pencereleri sayesinde değişkenlerin arasındaki ilişkiyi inceleme fırsatı verilmektedir ve bu durum da öğrencilerin matematiksel modellerin farklı gösterimleri arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarabilecekleri önemli fırsatlar sağlamaktadır (Hıdıroğlu ve Bukova-Güzel, 2014).

1.3. Kuramsal Çerçeve

Matematiksel modelleme sürecinin yapılandırılmasına ilişkin farklı süreç modelleriyle (Ang, 2010; Berry ve Davies, 1996; Berry ve Houston, 1995; Blum, 1985, 2011; Borromeo-Ferri 2006; Doerr, 1997; Galbraith ve Stillman, 2006; Hıdıroğlu, 2012, 2015; Kaiser-Meßmer, 1986; Mason, 1988; Müller ve Wittmann, 1984; Saeki ve Matsuzaki, 2013; Siller ve Greefrad, 2010) karşılaşılmaktadır. Çalışmada, Hıdıroğlu (2015) tarafından geliştirilen teknoloji destekli matematiksel modelleme süreci kuramsal çerçeve olarak ele alınmıştır (bkz. Şekil 5). Bu kuramsal çerçevenin seçilmesinin nedenleri; süreç modelinin GeoGebra destekli matematiksel modelleme sürecini içeren bir kuram oluşturma veri analizi sonucunda elde edilmesi, teknolojiyi sürece dâhil eden matematiksel modelleme sürecini açıklaması, alanyazında matematiksel modelleme sürecini açıklayan en kapsamlı süreç modeli olmasıdır. İlgili kuramsal çerçeve, süreci 3 temel dünya, 9 temel basamak, 9 temel bileşen, 3 yardımcı bileşen, 55 alt basamak ve 22 üst bilişsel eylem ile açıklamaktadır. Bununla birlikte çerçeve, alanyazında güncel olması ve günümüz teknolojisinin öğrenmeye etkisini daha gerçekçi yansıtması açısından önemli görülmektedir. Hıdıroğlu (2015), süreci dokuz temel bileşen (*karmaşık gerçek yaşam durumu, gerçek yaşam problem durumu, gerçek yaşam problem durumunun modeli, yardımcı matematiksel model/ler, ana matematiksel model, matematiksel çözüm, gerçek yaşam çözümü, çözüm kararı, çözüm raporu*), bu bileşenler arasında geçişleri açıklayan dokuz temel basamak (*problemin analizi, sistematik yapıyı kurma, matematikselleştirme, üst matematikselleştirme, matematiksel analiz, yorumlama, doğrulma, revize etme, raporlaştırma*) ve bu temel basamaklara ilişkin 55 alt basamak ile açıklamaktadır.

Çalışmada Merdiven Problemi'nin çözümü Hıdıroğlu'nun (2015) teknoloji destekli matematiksel modelleme süreci dikkate alınarak örneklenmiş ve GeoGebra'nın modelleme sürecindeki kullanımı ve sürece etkisi vurgulanmıştır. Hıdıroğlu'nun (2015) süreç modeli incelendiğinde sistematik yapıyı kurma basamağından sonra zihinsel süreçlerde matematiksel dünyanın baskın olduğu (*gerçek dünya ve teknoloji dünyasının arka planda süreci zenginleştirdiği*); sürecin ileriki aşamalarında ise gerçek dünyanın baskın olduğu (*matematiksel dünya ve teknoloji dünyasının arka planda süreci zenginleştirdiği*) görülmektedir. Süreç boyunca gerçek dünya, matematiksel dünya ve teknolojik dünya sürekli etkileşim içerisindedir. Modelleme sürecinde dünyalar arası etkileşim ne kadar fazla ise zihinsel zenginlik o kadar fazla olmaktadır (Hıdıroğlu ve Bukova-Güzel, 2017). Hıdıroğlu (2015) süreç modelinde temel bileşenler dışında yardımcı bileşenlerden de bahsetmektedir. Hıdıroğlu'na (2015) göre, modelleme sürecinde zihinsel aktiviteleri destekleyen yardımcı bileşenler sistematik yapıyı kurma ve yorumlama basamağında *zihinsel model*ler, matematiksel çözüm dışındaki çıktıları da açıklayan *matematiksel sonuç*lar (matematiksel analiz basamağında), gerçek yaşam çözümü dışındaki çıktıları da açıklayan *gerçek yaşam sonuç*ları (yorumlama basamağında) ve bilgisayar modelleridir.



Şekil 5. Teknoloji destekli matematiksel modelleme süreci (Hıdıroğlu, 2015)

1.4. Çalışmanın Önemi

NCTM'ye (2000) göre, öğrencilerin problem çözme becerilerinin geliştirilmesi ciddi önem taşımaktadır. Matematiksel modelleme problemleri ile öğrencilere yaratıcı gündelik hayat problemleri sunulabilmektedir. Bununla birlikte, NCTM (2000) sadece teknolojinin matematiksel öğrenmeyi en iyi şekilde nasıl destekleyebileceğinin değil, aynı zamanda öğrencilerin matematiksel güçlerine, farklı düşünmelerine ve kavramsal becerilerine teknolojinin varlığının ne şekilde etki edeceğinin ortaya çıkarılması gerektiğini vurgulamaktadır. Çalışma ile detaylı bir kuramsal çerçeve dikkate alınarak dinamik bir yazılımın karmaşık bir gerçek yaşam probleminin çözümünde üstlenebileceği roller gösterilecektir. Bu anlamda teknoloji destekli matematiksel modelleme sürecinde olası öğretmen beklentileri ortaya koyularak süreçteki zihinsel eylemler örneklendirilecektir.

PISA, TIMSS ve ABİDE uygulamaları düzeylere göre incelendiğinde, bu tarz problemlerin öğrencilerin üst düzey zihinsel aktivitelerinin gelişmesine yardım edeceği düşünülmektedir. PISA yeterlik düzeyleri incelendiğinde, altı düzey göze çarpmaktadır. OECD ülkelerindeki öğrencilerin %3,1'i istenen seviye olan 6. düzeyde performans göstermektedir (MEB, 2011). MEB (2011: 11) 6. düzeyi aşağıdaki gibi açıklamaktadır.

> Altıncı düzeye erişmiş olan öğrenciler, kendi araştırmaları ve modelleme çalışmalarından elde ettikleri bilgilere dayalı olarak karmaşık problem durumlarıyla ilgili kavramlar oluşturabilir, genellemeler yapabilir ve bunları kullanabilirler. Farklı bilgi kaynakları ve gösterim biçimleri arasında bağlantı kurabilir ve bunların birinden ötekine kolaylıkla geçiş yapabilirler. Bu öğrenciler ileri düzeylerde matematiksel düşünme ve muhakeme örnekleri ortaya koyabilirler. Bu becerileri ile sembolik ve formal matematiksel işlem ve bağıntılar üzerinde sağlamış oldukları hâkimiyet sayesinde, ilk kez karşılaştıkları durumlarda yeni strateji ve yaklaşımlar geliştirebilirler. Bu düzeye erişmiş olan öğrenciler kendi buluşları, yorumları ve görüşleri ile bunların verilen durumlara uygunluğuna ilişkin düşüncelerini formüle edebilir ve başkalarına tam olarak anlatabilirler.

Lesh ve Doerr (2003) iyi bir modellemecinin sahip olması gereken becerilerin neler olduğu sorusuna kabul edilebilir bir yanıt verebilmek için modelleme sürecindeki safhaların net ve ayrıntılı olarak tanımlanmasının ve açıklanmasının gerekli olduğunu ifade etmektedir. COM^2 Projesi'nde nitelikli bir matematiksel modelleme becerisinin, belli bir bağlamda ele alınan problemin çözümünde modelleme sürecinin tüm yönleriyle bağımsız ve anlaşılır bir şekilde gerçekleştirilmesi olduğunu ifade etmektedir. Genel olarak bakıldığında öğretmen adaylarının günlük hayattan verilen bir örneği matematik diline aktarmada zorlandıkları görülmektedir. Matematiği günlük hayatla ilişkilendirmede önemli bir rolü olan matematiksel modellemenin daha iyi uygulanabilmesi ve öğretmen adaylarının eksiklerini giderebilmeleri için matematiksel modelleme sürecinin farklı bağlamlarla detaylı örneklendirilmesine ihtiyaç duyulmaktadır (Deniz-Yılmaz ve Akgün, 2018). Bu sayede matematiksel modellemeyi bilen ve uygulayabilen öğretmenler yetiştirilebilecektir.

Teknoloji destekli bilişsel modelleme yaklaşımını temel alan çalışmalar incelendiğinde, Galbraith ve Stillman'ın (2006) ve Hıdıroğlu'nun (2012, 2015) çalışmalarının modellemede alt basamaklara indiği görülmektedir. Galbraith ve Stillman (2006) süreç modelini beş temel basamak, altı temel bileşen ve 31 alt basamak; Hıdıroğlu (2012) yedi temel basamak, sekiz temel bileşen ve 47 alt basamak ile ayrıntılandırmaktadır. Hıdıroğlu'nun (2015) teknoloji

(GeoGebra) destekli matematiksel modelleme süreç modeli ise en kapsamlı açıklamayı sunmaktadır. Uluslararası alanyazına bakıldığında, GeoGebra'nın matematiksel modelleme sürecindeki rolünü açıklamaya yönelik çok az çalışma (Lingefjärd, 2012; Hıdıroğlu, 2012, 2015; Hıdıroğlu & Bukova-Güzel, 2013, 2015, 2016, 2017) ile karşılaşılmaktadır. GeoGebra ile gerçekleştirilecek bu tür modelleme süreçleri ile öğrencilerde problemleri bilgisayar ve diğer araçlarla da çözmeye uygun olacak şekilde formüle etme, verileri mantıksal düzenleme ve analiz etme, verileri model ve simülasyon gibi soyutlamalarla gösterme, algoritmik düşünme ile sonuçlar üretme, olası çözümleri gösterme, analiz etme ve uygulama, problem çözme süreçlerini pek çok alandaki problemlerin çözümüne genelleme ve aktarmayı da sağladığı için bilgi işlemsel düşünme için de önemli bir uygulama olduğu görülmektedir. GeoGebra'nın öğrencilerin modelleme becerilerinin ortaya çıkarılmasına ve geliştirilmesine katkı sağladığı ve kavramsal anlamayı desteklediği düşünülmektedir (Lingefjärd, 2012; Hıdıroğlu, 2015). Bu yüzden çalışmada GeoGebra'nın kullanılması tercih edilmiştir. Çalışmada, dinamik matematik yazılımı olan GeoGebra yardımıyla matematiksel modelleme problemlerinin yapısı dikkate alınarak tasarlanan bir problemin olası çözüm yaklaşımları ve stratejileri sergilenmektedir. Çalışma, GeoGebra'nın sürece nerede ve nasıl etki ettiğinin bir örneğini sunmasının yanında, matematiksel modelleme sürecine dair ayrıntılı ve farklı bir bakış sağlanmayı da amaçlamaktadır. Bu sayede, öğretmenlere ders içi ve ders dışı uygulamalarda farklı matematiksel modelleme problemlerinin teknolojiyle desteklenmiş bir ortamda nasıl kullanılabileceğine, problem çözen kişiye hangi fırsatları sağlayacağına dair zengin bir bakış açısı sağlayacak ve bu doğrultuda daha etkili, amacına uygun bir teknoloji-matematik öğretimi entegrasyonu sağlamasına zemin hazırlayacaktır. Ayrıca çalışma ele aldığı Merdiven Problemi'nin çözümünün Hıdıroğlu'nun (2015) kuramsal çerçevesi doğrultusunda detaylı örneklendirilmesi ile alanyazında özgün bir çalışma olduğu da öngörülmektedir.

1.5. Çalışmanın Amacı ve Problem Cümlesi

Çalışmanın amacı, 21. yüzyılda matematik öğretiminde önemli bir araç olan GeoGebra'nın matematiksel modelleme sürecinde nasıl kullanılabileceğini ve sürece olası etkilerini "Merdiven Problemi" çerçevesinde örneklendirmektir. Araştırma problemi ise, "Merdiven Problemi çerçevesinde GeoGebra destekli matematiksel modelleme çözüm süreci nasıl gerçekleşmektedir?" şeklinde ifade edilmiştir.

1.6. Çalışmada Ele Alınan Matematiksel Modelleme Problemi: Merdiven Problemi

Çalışmada kullanılacak matematiksel modelleme problemi belirlenirken problem ifadesinin açık ve anlaşılır olmasına (Schoenfeld, 1994), günlük yaşamdan olmasına (Blum ve Niss, 1989; English, 2009), içerisinde birden fazla stratejik etkeni (*değişken, parametre, sabit*) ve matematiksel kavramı barındırmasına (Berry ve Houston, 1995; Schoenfeld, 1994), farklı gösterim şekillerinin oluşturulmasına ve ilişkilendirilmesine zemin hazırlayan karmaşık bir problem olmasına (Schoenfeld, 1994), çözümde teknoloji ve matematik bilgi/becerilerini ve bunlar arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarmasına (Ang, 2010; Baki, 2002; Barbosa, 2003) dikkat edilmiştir. Bu doğrultuda çalışmada "Merdiven Problemi" kullanılmış ve bu problemin çözüm sürecine odaklanılmıştır (bkz. Şekil 6).

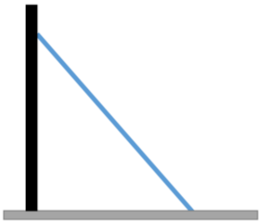
Merdiven Problemi

Duvara dayalı bir şekilde hareketsiz duran bir merdiven kayıyor ve yere düşüyor. Kayarken merdivenin hareketini matematiksel olarak açıklayınız. Düşüncelerinizi gerekçelendiriniz.

Şekil 6. Merdiven Problemi (Bukova-Güzel, Tekin-Dede, Hıdıroğlu, Kula-Ünver ve Özaltun-Çelik'in (2016) çalışmasından uyarlanmıştır.)

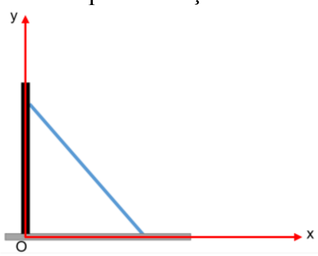
2. Merdiven Problemi'nin GeoGebra Destekli Olası Bir Çözümü

Problemin analizi aşamasında Merdiven Probleminin ifadesi çözücüler tarafından okunur. Problem ifadesinde duvara dayalı bir merdivenin olduğu ve bu merdivenin kaydığı ifade ediliyor. Merdivenin kayarken hareketinin matematiksel olarak ifade edilmesi isteniyor. Burada problemin çözümü ile ilgili herhangi bir sayısal veri verilmemiştir. Burada önemli stratejik etkenlere ilişkin tahminlerin önemli olduğunu söylenebilir. Duvarın şekli, merdivenin türü, boyu, duvara nasıl dayalı olduğu, zeminin durumu gibi detaylı bilgiler verilmemiştir. Burada ilk olarak geçmiş problem çözme ve gerçek yaşam deneyimleri ile basit varsayımlarda bulunulur. İlk algılayışta düz bir merdiven, zemine dik bir duvar, pürüzsüz yüzeyler, duvarın merdivene göre yeterince uzun olması düşünülebilir (bkz. Şekil 7). Algısal olarak düz bir merdiven hayal edildiği için hareketin de doğru boyunca olabileceği düşünülebilir. Bunlar ilk ve basit varsayımlar olarak bu basamakta karşımıza çıkar. Burada çözücü, problem durumunu zihninde tam olarak algılamaya, detaylandırmaya ve ilişkilendirmeye çalışma aşamasındadır.



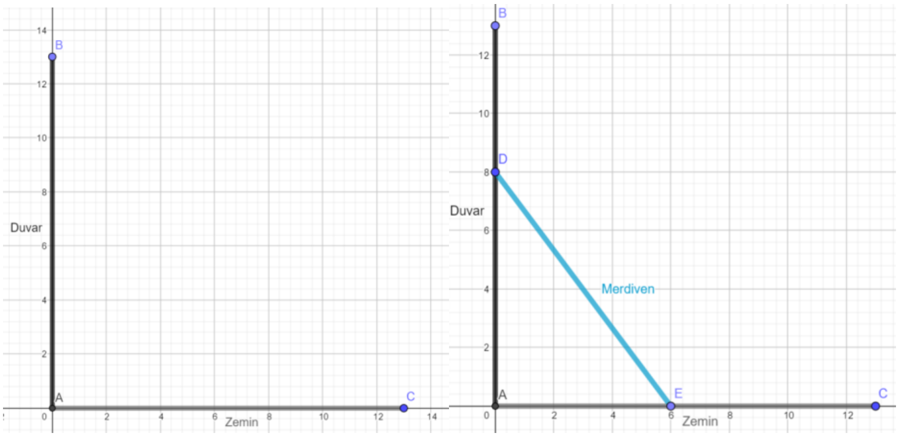
Şekil 7. Zihinde ilk oluşabilecek zihinsel modelin bir örneği

Sistematik yapıyı kurma basamağında emin olunamayan değişkenler hakkında daha net ve gerekçeli ifadelerin ortaya çıktığı görülür. Çözücü bu aşamada zihninde daha detaylı zihinsel yapılar kurar. Stratejik etkenleri kendi içerisinde önemli-önemsiz olarak gruplandırır. Gereksiz etkenleri ayıklar ve bunu gerekçelendirir. Bu aşamada gerçek yaşam durumundan matematiksel stratejilere de geçişler gerçekleşmeye başlar. Örneğin, Merdiven Problemi'nde öncelikle bu hareketin geometrik bir hareket olduğu ve bu geometrik hareketi cebirsel olarak anlamlı bir hale getirebilmek için şeklin analitik düzleme taşınmasının önemli olacağı iyi bir stratejidir. Analitik düzlemden kasıt Öklid geometrisindeki xy düzlemidir ($\mathbb{R}^2$). Burada duvarı zemine dik olarak düşünmek, merdivenin ilk hali düşünüldüğünde belli bir açıyla duvara yaslanmış olduğu varsaymak ve bu açıyı da stratejik etken olarak ele almak düşünülebilir. Ayrıca duvar ve zemin dik kabul edilir. Ardından merdivenin kaymaya başladığı düşünülür. Merdiven deyince akla ilk klasik tahta merdiven geleceği düşünülmektedir ve kayacağı belirtildiği için üst ucunun duvara değdiği düşünülmektedir (bkz. Şekil 8). Bu zihinsel yapı ise analitik düzlem ile ilişkilendirilir. Uygulamada merdivenin ağırlığının, merdiven ile duvarın arasında oluşan sürtünme kuvvetlerinin ve hareket hızının önemsiz olduğu düşünülür. Bunlar daha çok fizik alanının arayacağı cevaplarken matematik alanında ise daha çok hareketin nasıl olacağı üzerine odaklanılmalıdır ve problemden istenen de budur. Düşünüldüğünde merdivenin boyu ve açı önemli değişkenler gibi görülmektedir. Gerçek yaşam problem durumu modelinin son halinde, duvar y ekseni, zemini ise x ekseni olarak düşünülebilir. O zaman duvar ve zeminin birleştiği nokta da orijin olacaktır. Analitik düzlemde bu şekilde bir yerleşim sayesinde ileriki aşamada oluşturulacak matematiksel modeller daha sade ve anlaşılır olacaktır. Bu strateji, deneyimli modelleme problemi çözücülerinden beklenilen bir stratejidir.



Şekil 8. Analitik düzleme yerleştirilmiş zihinsel modelin bir örneği

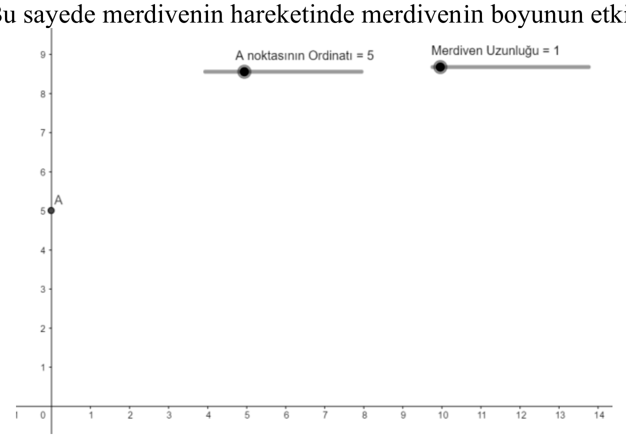
GeoGebra gibi teknolojik yazılımlar özellikle gerçek yaşam problem durumunun modeli yapılandırılırken sürece entegre olmaya başlar. Çözücüler sistematik yapıyı kurma basamağında bir yerden de GeoGebra'yı bilgi ve deneyimleri ile sürece nasıl entegre edebileceklerini düşünür ve genel çözüm stratejilerini buna göre yapılandırırlar. Şimdi ise GeoGebra'da belli bir uzunlukta merdiven oluşturulur; çünkü merdivenin uzunluğu hareket boyunca sabit kalacaktır. Daha sonra farklı boylardaki merdiven için problem tekrar çözülüp sonuçlar karşılaştırılabilir. Fakat merdivenin boyunun hareketi etkilemeyeceği düşünülmektedir (Öğrenci ilerideki kısımda merdivenin boyunun hareketi (elips ailesi) değil de hareketin (elips ailesinin) cebirsel ifadesini değiştireceğini fark edecektir.). Diğer aşamada GeoGebra'da gerçek yaşam problem durumunun modeli oluşturulur (bkz. Şekil 9). Sistematik yapıyı kurma aşamasında genel çözüm stratejisinde GeoGebra bir araç ise; bu aşamadan itibaren öğrenci sürece aktif olarak GeoGebra'yı dâhil edecektir.



Şekil 9. GeoGebra'da oluşturulmuş ilk modelin örneği

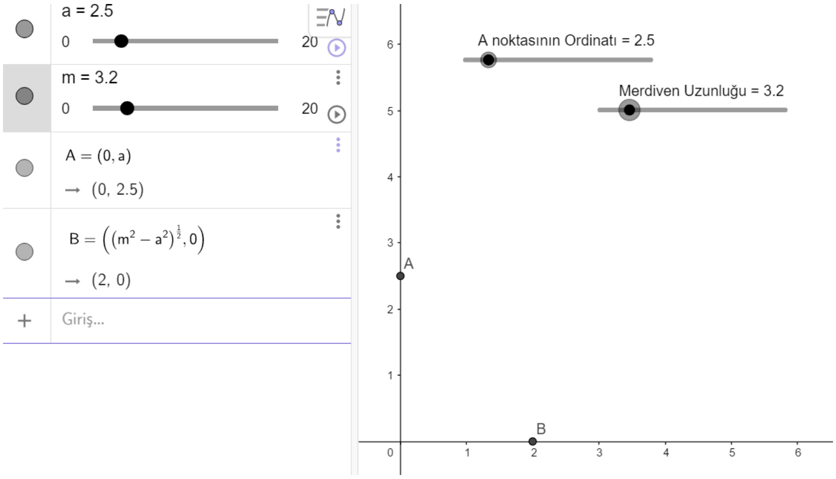
GeoGebra'da yukarıdaki şekli oluşturan öğrenciler daha sonra hareketi uygun bir şekilde oluşturmaya çalışacaklardır. Fakat ilk şekilde bütün nokta ve şekiller birbirinden bağımsız olarak oluşturulduğu için ilk deneme başarısız olabilir. Bundan sonraki süreçte, matematiksel dünya süreci zihinsel eylemleri baskın bir şekilde kontrol etmeye başlar ve zihinsel eylemlerde teknolojik dünya da süreçte belirginleşir ve gerçek yaşam matematiksel dünyadan daha pasif bir rol alır.

Bu aşamada noktaların ve doğru parçalarının birbirlerine bağımlı oldukları ve bunun da GeoGebra'da ifade edilmesi gerektiği ortaya çıkar. Burada bağımlı ve bağımsız değişkenlerin belirlenmesi ve teknolojik yapının kurulması gerekir. Burada kurulan yapı zihinsel farklılıklara bağlı olarak bazı değişimler gösterebilir. Farklı bağımlı ve bağımsız şekiller seçilebilir. Şekil 9'da görüldüğü gibi, istenen hareketin sağlanması için D noktasının y ekseni üzerinde, E noktasının ise x ekseni üzerinde hareket etmesi ve hareket boyunca merdivenin uzunluğunun sabit kalması sağlanmalıdır. Buna göre GeoGebra'daki çizimler tekrardan yapılandırılır. Merdivenin hareketi analitik düzlemde 1. bölgede gerçekleşecektir. Bunun için y ekseni üzerinde bir A noktası alınır ve bu A noktasının ordinatına sürgü atanır. Ayrıca farklı merdivenlerin olabileceği düşünülerek merdiven uzunluğu için de bir başka sürgü atanır (bkz. Şekil 10). Bu sayede merdivenin hareketinde merdivenin boyunun etkisi gözlemlenebilmektedir.



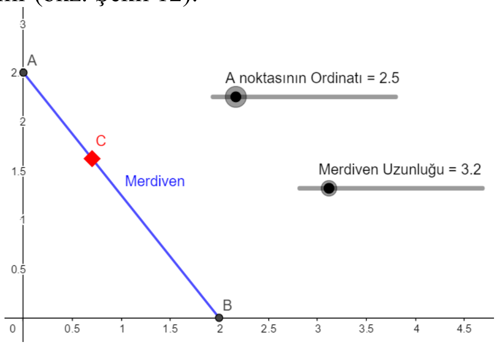
Şekil 10. A noktası ve merdiven uzunluğu için sürgü atanması

Merdivenin en üst noktası A noktasıdır ve merdiven uzunluğuna bağlı olarak x ekseni üzerinde bir B noktası tanımlanır. B noktası merdivenin en alt noktası olacaktır. B noktası, A noktasına bağımlı bir değişken nokta olarak tanımlanmalıdır. B'nin koordinatları Pisagor Teoremi yardımıyla Şekil 11'deki gibi yazılabilir.



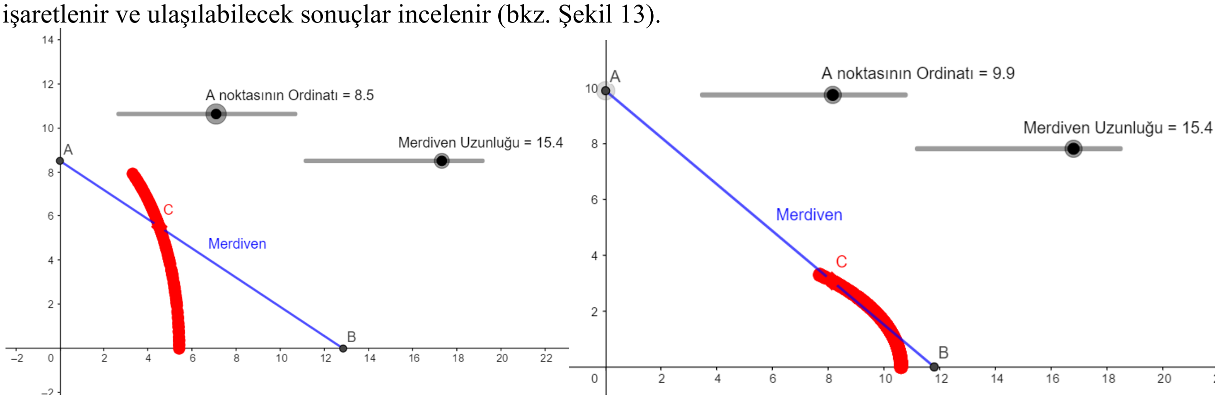
Şekil 11. B noktasının A noktasına bağlı olarak oluşturulması

Merdivenin uç noktalarını temsil eden A ve B noktaları oluşturulduğuna göre sonraki aşamada merdiveni temsil edecek doğru parçası GeoGebra'da oluşturulabilir. B noktasının A noktasına bağımlı olarak yazılması ile hareket sırasında merdivenin boyunun sabit kalması sağlanmış olur. Sonraki adımda merdivenin üzerinde çözüm için önemli olan değişken C noktası tanımlanabilir (bkz. Şekil 12).



Şekil 12. Merdivenin doğru parçası ile gösterimi ve merdiven üzerinde C noktasını tanımlama

İdeal merdiven ve hareketi olası varsayımlara uygun bir şekilde GeoGebra'da oluşturulmuştur. Hareketin nasıl oluşabileceği ile ilgili tahminleri güçlendirmek amacıyla GeoGebra'da C noktası için "*izi göster*" seçeneği işaretlenir ve ulaşılabilecek sonuçlar incelenir (bkz. Şekil 13).

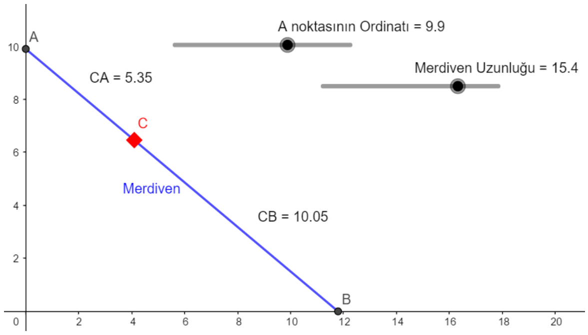


Şekil 13. İzi açılan C noktasının iki farklı noktada merdiven kayarken hareketinin simülasyonu

Burada fark edilecek şeylerden birisi merdiven üzerindeki C noktasının konumu (*merdiven üzerinde seçilen noktalar*) değiştikçe farklı bir eğri hareketi oluştuğudur. En azından iki deneme çözücüye bunu sorgulatabilir ve

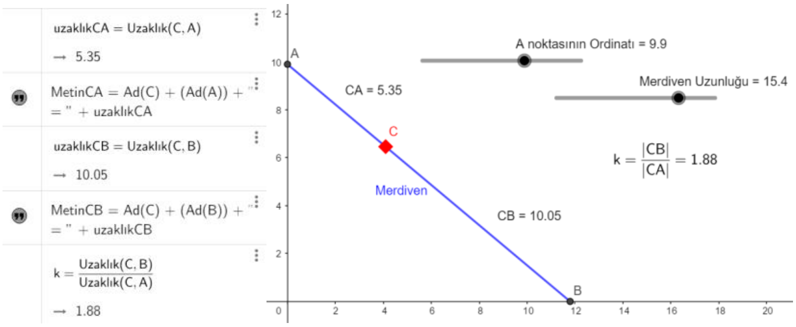
GeoGebra çözücüye kısa sürede sayısız farklı deneme şansı verir. Fakat bu koşullarda, teorik olarak bu eğrilerin ne olduğu hakkında net bir fikir oluşmamaktadır. Bu amaçla C noktasından hareketle aşağıdaki adımlar izlenebilir.

Merdiven üzerindeki C noktası değiştikçe eğriler de değişmektedir. Bu durum C noktasının konumunun eğri denklemine ulaşmak için önemli bir stratejik etken olduğunu göstermektedir. C'nin merdiven üzerindeki farklı konumlarını anlamlandırmak için C noktasının A ve B noktalarına olan uzaklığı GeoGebra'da tanımlanabilir (bkz. Şekil 14).



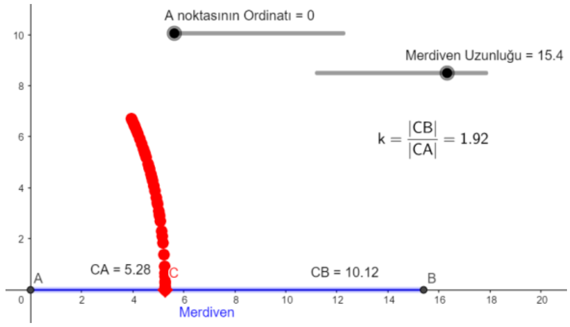
Şekil 14. C noktasının A ve B noktalarına olan uzaklıklarının tanımlanması

$[CA]$ ve $[CB]$ doğru parçalarının uzunluklarına sahip olunduğuna göre $[CB]$ uzunluğunun $[CA]$ uzunluğunun kaç katı olduğu gösterilebilir. Bu sayede çözüm süreci sırasındaki "k" değeri bulunmuş olur (bkz. Şekil 15). Ayrıca C noktasının merdiven üzerindeki konumu değiştikçe çözücü $[CA]$ ve $[CB]$ doğru parçalarının uzunluklarını anlık olarak gözlemleyebilir.

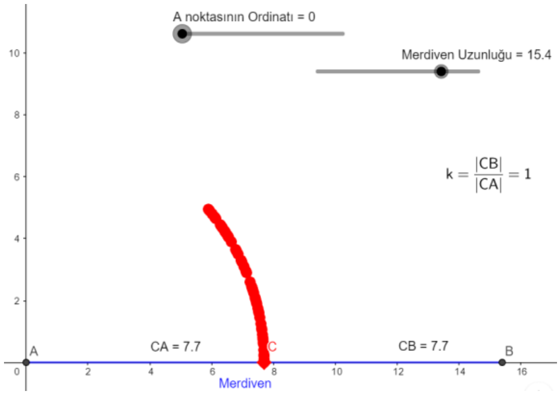


Şekil 15. $[CA]$ ve $[CB]$ doğru parçalarının uzunlukluları arasındaki oranın tanımlanması

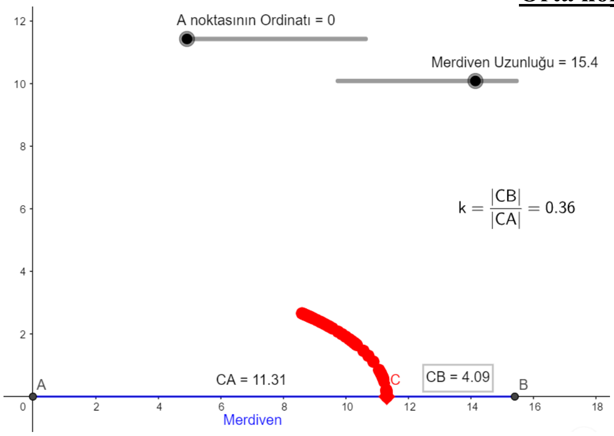
GeoGebra yardımıyla "k" ifadesinin kritik değerlerini inceleyerek oluşabilecek muhtemel eğrilerin görüntüleri C noktasının izi açılarak oluşturulabilir. Çözücüler merdiven kayarken seçtikleri farklı noktaların hareketi ile oluşan farklı eğrileri anlık olarak inceleyebilir. Çözücüler bu süreçte, GeoGebra yardımıyla merdivenin tam orta noktasının bir çember parçasına benzer olduğunu, merdivenin orta noktasının üzerindeki herhangi bir noktanın y eksenine, merdivenin orta noktasının altındaki herhangi bir noktanın da x eksenine doğru basıklığının arttığını ve C noktasının orta noktanın dışındaki kısımlardayken oluşturduğu eğrilerin çembere benzemediklerini fark edebilirler (bkz. Şekil 16).



Orta noktanın üzerinde bir nokta için



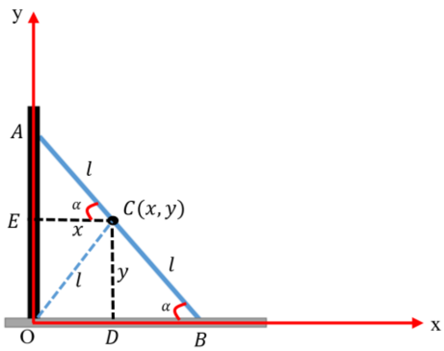
Orta nokta için



Orta noktanın altında bir nokta için

Şekil 16. k'nin farklı değerleri için oluşan farklı eğriler

Merdivenin orta noktası ($k = 1$ olduğu zaman), merdivenin hareketinde özel bir durumu çözücülere sunmaktadır. Çözücü orta noktanın hareketini tanımlarken merdivenin hareketi boyunca bu noktanın orijine olan uzaklığının merdiven boyunun yarısı kadar olduğunu ve değişmediğini fark edecektir. Şekil 17 incelendiğinde, merdiven kayarken orta noktasının hareketinin bir çember parçası olduğuna ve bu çemberin cebirsel gösterimine ulaşılabilir.



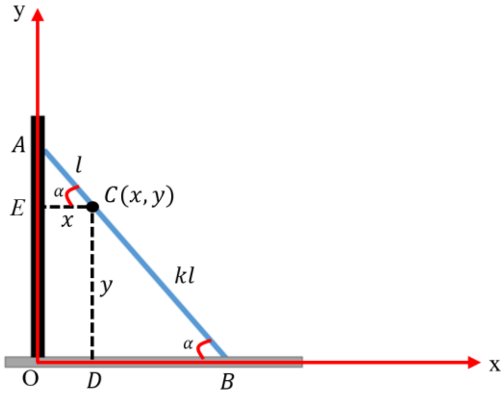
Merdiven kayarken C noktasının hareketi merkezi (0,0), yarıçapı l br olan çember parçasıdır. Çizilen görsel modelden hareketle, çember parçasının matematiksel ifadesi şu şekilde olabilir.

$x \epsilon R^+$ ve $y = \sqrt{l^2 - x^2}$ ifadesi çemberin 1. bölgedeki çember parçasını tanımlamaktadır. Problemi çözen burada merdivenin zemin ile yaptığı açının (α) da bu hareketi temsil eden çember parçasının uzunluğunda önemli olduğunu GeoGebra yardımıyla fark edecektir.

Şekil 17. Merdiven hareketinde C orta noktası için yardımcı matematiksel modelin inşası

Şekil 17 çözücüye sadece bir durumu sunmaktadır. Bazı çözücüler merdivenin ağırlık merkezinin orta noktası olduğunu düşünerek merdivenin hareketinin çember parçası şeklinde olacağını ifade ederler ve yanlış bir genellemeye gidebilirler. Burada sadece $k = 1$ için bir cebirsel ifadeye ulaşılmaktadır. Fakat tam bir çözüm için k'nin farklı değerleri için de farklı yardımcı matematiksel modellere [YMM] ulaşmalıdır. Süreçte elde edilmiş olan ana matematiksel model [AMM] yardımcı matematiksel modeller yardımıyla elde edilmelidir. Çözümde birçok

YMM oluşmaktadır. Daha sonra “k” ve “l” cinsinden değerleri GeoGebra’ya cebirsel olarak girilmelidir (bkz. Şekil 18). Oluşan eğriler veya C noktasının izlediği yollar karşılaştırılmalıdır.



Şekil 18. C noktasının k parametresine bağlanması

Şekil 18 incelendiğinde AEC ve CDB üçgenlerinin benzer üçgenler oldukları görülür. Bu benzerlik oranı ise k’dir. Şimdi bu düşüncelerden yola çıkılarak YMMler yardımıyla AMM elde edilebilir.

$$\overset{\Delta}{AEC} \sim \overset{\Delta}{CDB}$$

$$\sin\alpha = \frac{y}{kl} = \frac{\sqrt{l^2-x^2}}{l}$$

$$k^2(l^2-x^2) = y^2$$

$$k^2l^2 - k^2x^2 = y^2$$

$$x^2 + \frac{y^2}{k^2} = l^2$$

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{k^2l^2} = 1$$

YMM 1: $\sin\alpha = \frac{y}{kl}$

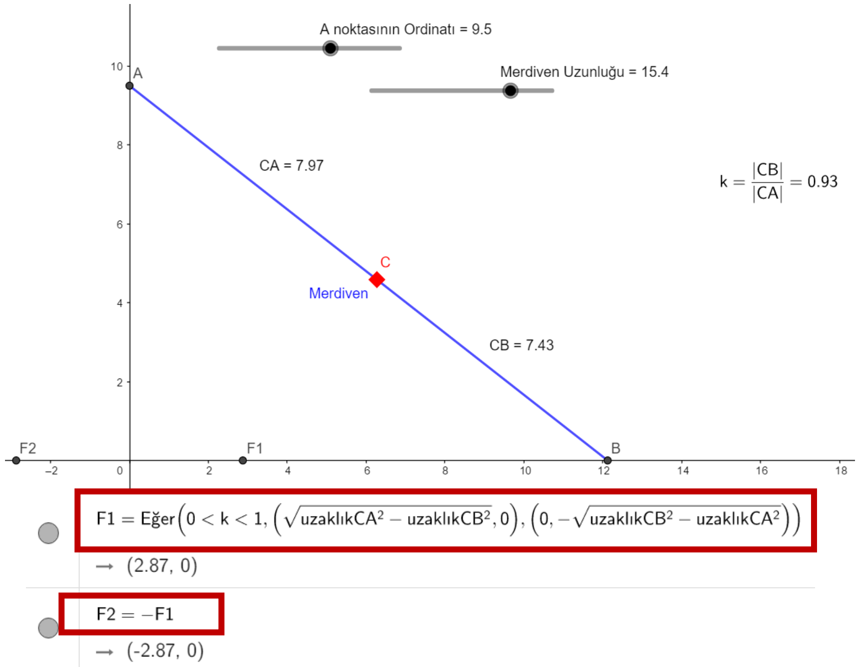
YMM 2: $\sin\alpha = \frac{\sqrt{l^2-x^2}}{l}$

YMM 3: $|AE| = \sqrt{l^2-x^2}$

AMM

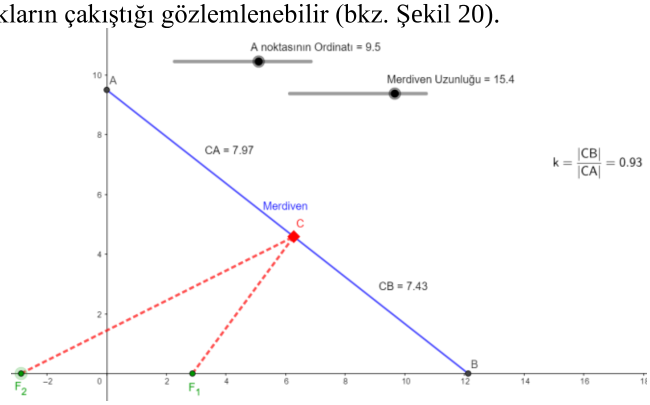
Yukarıda birçok YMM birlikte kullanılarak AMM elde edilmektedir. Bu AMM varsayımlar ve önemli stratejik etkenler doğrultusunda yapılandırılmaktadır. Farklı varsayımlar (*örneğin duvarın zemine dik olmama ihtimali, merdiven ve duvarın konumunun farklı olması, merdivenin farklı olması gibi*) elde edilen AMMnin yapısını değiştirmektedir. Ayrıca yukarıda elde edilen AMM bazı yönleriyle eksiktir. Bu AMM daha ideal hale getirebilir. Burada $x, y \epsilon R^+$ ve α açısı da dikkate alınarak asıl izlenen eğri parçası elde edilmelidir.

Elde edilen AMM’nin, merkezi orijin olan bir elips ailesini temsil ettiği söylenebilir. Şimdi GeoGebra’da oluşacak elipslerin odaklarını tanımlayabilmek için elde edilen AMM’den yararlanılabilir. Buradan; oluşacak şeklin odaklarının analitik gösterimleri $F_1(c,0)$ ve $F_2(-c,0)$ [*merkez orijin olduğu için*] şeklinde ifade edilirse; $c^2 = |(kl)^2 - l^2|$ matematiksel ifadesi elde edilir. Elde edilen matematiksel ifade, $0 < k < 1$ için GeoGebra’ya girilmesi gerekmektedir (bkz. Şekil 19). GeoGebra yardımıyla aşağıdaki kod dizisi oluşturulabilir.



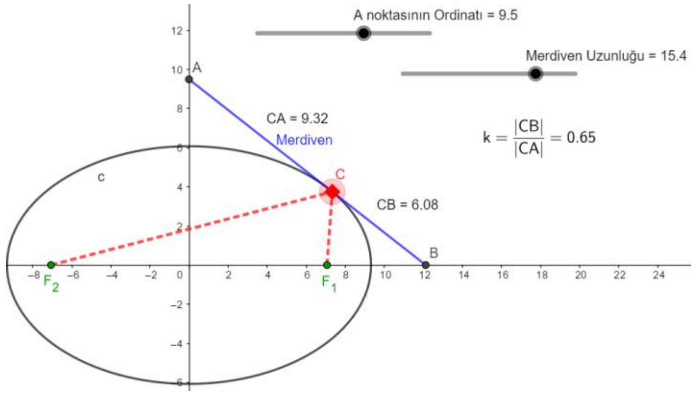
Şekil 19. GeoGebra'da k'nin farklı değerleri için algoritmanın oluşturulması

Şekil 19'da $0 < k < 1$ özel durumu çözücüye C'nin merdivenin orta noktasının altında; $k > 1$ özel durumu ise C'nin merdivenin orta noktasının üstünde olan durumlarını sunacaktır. Buradaki karşılaşılan zihinsel zorluk/güçlük şudur: $0 < k < 1$ asal eksen x iken; $k > 1$ olduğu durumda asal eksen y olacaktır. Yukarıdaki kod dizisi bu fark dikkate alınarak oluşturulmuştur. Şekil 18'de C noktasının merdiven kayarken hareketinin elips eğrisi olduğu bilgisiyle odak noktaları belirlenmiştir. GeoGebra'daki anlık değerlendirmelerde k, 1'e yaklaşırken odakların yaklaştığı ve $k = 1$ için odakların çakıştığı gözlemlenebilir (bkz. Şekil 20).



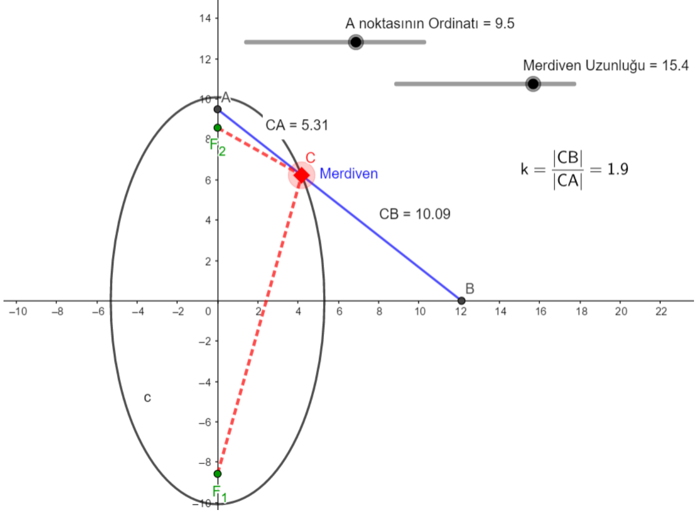
Şekil 20. GeoGebra'da $0 < k < 1$ için odakların x eksenindeki konumu

GeoGebra'dan elde edilen formül ve teorik çözüm GeoGebra'da odak noktalarının tanımlanmasına fırsat verir. Görüldüğü gibi çözümde hem matematiksel dünya hem de teknolojik dünya aktif rol almaktadır. Ama sürecin ilerlemesi matematiksel dünyanın etkisi ile olduğundan ve teknolojik dünya matematiksel dünyadan beslendiğinden dolayı süreçte baskın olan dünya matematiksel dünyadır. Bu şu şekilde de açıklanabilmektedir: Teknolojik dünya çözücüye matematiksel dünyada farklı kapılar açmaktadır ve birçok önemli beceriyi açığa çıkararak geliştirme fırsatı sunmuştur. Fakat matematiksiz bu süreç ilerlemez ama teknoloji olmadan da elbette bir çözüm gerçekleştirilebilir. Çözüme devam edilirse, odakları ve üzerindeki bir nokta bilinen elips, GeoGebra oluşturulabilmektedir. Şimdi ise C değiştikçe odakları değişen farklı elipsleri anında izleme, cebirsel ve geometrik değişimler arasındaki ilişkiyi anlık gözlemleme olanağına sahip olunabilmektedir (bkz. Şekil 21 ve Şekil 22).



Şekil 21. Merdiven hareketinde $0 < k < 1$ *için* C*'nin konumuna göre odaklar ve asal eksen*

Bu kısımda şöyle bir öneride bulunulabilir: Bu çalışma holistik (bütüncül) bir anlayışla süreci baştan sona resmetmektedir. Fakat öğrenme sürecinde problem ve GeoGebra'da oluşturulan bu teknolojik yapı (*matematiksel modeli temsil eden bilgisayar modeli*) öğrencilere direkt olarak verilerek onlardan matematiksel sonuçlar çıkarmaları istenebilir. Bu teknolojik olarak oluşturulmuş grafiklerin ve cebirsel ifadelerin çoklu gösterimlerle yorumlanmasını sağlayacaktır. Ayrıca teknolojik simülasyonlar sayesinde kısa sürede anlık değişimleri gözlemleme şansı olmaktadır. Çözücüler teknolojinin olmadığı ortamlarda bu şansı yakalayamaz. Bu durum hem cebirsel ve geometrik temsiller arasındaki ilişkiyi daha iyi kurabilen analitik düşünme becerisine sahip bireyler yetiştirilmesine fırsat sağlayacak hem de bireylerin bu aşamada verilerin yorumlanması ve değerlendirilmesi amacıyla detaylı bir matematiksel analiz sürecinin içerisinde aktif yer almasına fırsat verecektir. Yukarıda ifade edilen nedenlerden dolayı istenirse modelleme süreci atomistik anlayışla ele alınarak uygulama öğrenme sürecine uygulanabilir. Atomistik anlayış matematiksel analiz ve sonrasındaki zihinsel becerileri geliştirilebilir ve zamandan tasarruf edebilir. Ayrıca öğrenci direkt atomistik süreçle baş başa bırakılarak bilişsel yükü daha az bir şekilde süreçte aktif olabilir.



Şekil 22. Merdiven hareketinde $k > 1$ *için* C*'nin konumuna göre odaklar ve asal eksen*

Elde edilen AMM'de x ve y değişkenler, k ve l ise parametreler olarak düşünülebilir. Hareket sırasında merdivenin uzunluğu değişmeyeceği için sabit olarak yorumlanabilir. Fakat bu çalışmada merdiven uzunluğunun da eğriye etkisini gözlemleyebilmek için parametre olarak ele alınmıştır. AMM, merdivenin hareketinin bir elips ailesi üzerinde eğriler oluşturduğunu söylemektedir. Bir başka ifadeyle, merdiven hareket ederken tüm noktalar farklı bir elips eğrisi üzerinde hareket etmektedir.

Elde edilen cebirsel ve grafiksel gösterimlerden çıkarılacak sonuçlara göre $l \geq 0$ ve $k \geq 0$ olabilir. l'nin ve k'nin 0 olma durumlarını önce matematiksel dünya çerçevesinde ele alınmaktadır. Daha sonra ise gerçek yaşamdaki anlamı ortaya çıkarılmaktadır (*Bu gerçek yaşam sonuçları ve matematiksel sonuçlar arasındaki ilişkiyi ve ayrımı göstermektedir.*). Eğer $k = 0$ alınırsa, değişken nokta B noktası olur. Merdiven kayarken seçilen noktanın hareketi x ekseni üzerinde bir doğru boyunca olacaktır. Bir elips üzerinde hareket değildir. Bu yüzden elde edilen elips denklemi $k = 0$ değeri için tanımsızdır. Literatürde bu doğru "*dejenere konik*" olarak ifade edilir. Zaten AMM'de $k = 0$ için de tanımsızlık ortaya çıkar. Gerçek yaşam varsayımları doğrultusunda k'nın sıfır olma durumu merdivenin en alt noktasının hareketinin zemin boyunca olacağını gösterir. Benzer şekilde $l = 0$ için değişken nokta A noktası olur. Merdiven kayarken seçilen noktanın hareketi y ekseni üzerinde bir doğru boyunca olacaktır. Bu yüzden bir elips denklemi değildir. Elde edilen elips denklemi $l = 0$ değeri için tanımsızdır. Bu da "*dejenere konik*" olarak ifade edilir. Zaten AMM'de $l = 0$ tanımsızlık ortaya çıkarır. Gerçek yaşamda da varsayımlar doğrultusunda l'nin sıfır olma durumu incelendiğinde merdivenin kayarken en üst noktasının hareketinin duvar boyunca (doğru boyunca) olacağı görülebilir. Burada ortaya çıkan sonuçlardan birisi de k sonsuza giderken elde edilen durum ile $l = 0$ iken elde edilen durumun ve çıktılarının aynı olmasıdır. Çözücü bu durumu GeoGebra ile kolaylıkla gözlemleyebilir.

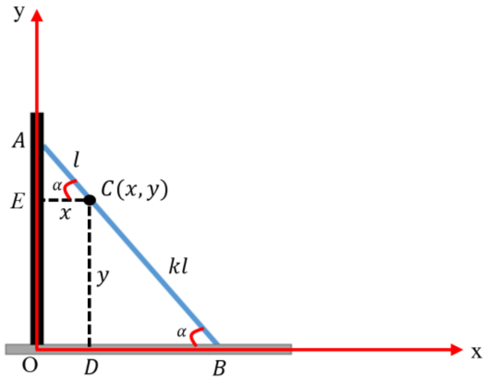
Farklı özel durumlardan birisi de $k = 1$ durumudur ve bu şekilde merdivenin orta noktası alınmış olur. Bu durumun incelenmesi ve diğer durumlarla karşılaştırılması çember ve elips arasındaki kavramsal ilişkinin çözücü tarafından fark edilmesinde önemlidir. $k = 1$ için özel bir elips oluşmaktadır: Çember. Çember iki odağın merkezde çakıştığı bir elipstir. $k = 1$ durumunu sağlayan orta nokta merdiven kayarken çember üzerinde bir hareket gerçekleştirir.

$$k = 1 \text{ için,}$$
$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{k^2 l^2} = 1$$
$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1$$
$$x^2 + y^2 = l^2$$

(Merkezi orijin ve yarıçapı l olan çember üzerinde hareket gerçekleşir.)

Diğer durumlar incelendiğinde; $0 < k < 1$ arasında bir değer alınırsa, kl uzunluğu merdivenin uzunluğunun yarısından daha kısa bir değer alır. Merdiven üzerinde seçilecek bu şartları sağlayan noktalar merdivenin orta noktasının altında olacaktır. AMM, merdivenin bu bölgesindeki noktaların hareketinde elips ailesinin asal ekseninin x ekseni, yedek ekseninin ise y ekseni üzerinde olacağını gösterir. Farklı diğer durum olan $k > 1$ deki değerler alınırsa, kl uzunluğu merdivenin uzunluğunun yarısından daha uzun bir değer alır. Merdiven üzerinde seçilecek bu şartları sağlayan noktalar merdivenin orta noktasının üzerinde olacaktır. AMM, buralarda oluşacak elips ailesinin asal ekseninin y ekseni, yedek ekseninin ise x ekseni üzerinde olacağını gösterir. Bunların yanında odaklar incelenirse, odaklar merkeze yaklaştıkça elips dolgunlaşır, yani çembere yaklaşır. Odak merkezden uzaklaştıkça ise elips incelir ve odaklar sonsuza giderse elips doğruya (*dejenere elips*) dönüşür.

Matematiksel modellemede elde edilen AMMlerden daha iyi sonuçlar elde etmeyi sağlayan daha ideal AMMlere ulaşmak mümkündür. Yukarıdaki çözümde elde edilen gerçek yaşam sonuçlarına AMM yardımıyla elde edilen matematiksel sonuçlardan ulaşılmıştır. Oluşturulan AMM'de değişkenler $x, y \epsilon R^+ \cup \{0\}$ şeklinde tanımlanmaktadır. Bu nedenle elde edilen AMMlerin geometrik gösterimi merkezi orijinde olan elips ailelerinin 1. bölgedeki bir kısımlık parçalarıdır. Merdivenin hareketinde oluşan bu eğriler dörtte birlik parçadan daha kısadır ve bu değer a açısına ve C noktasının konumuna bağlı olarak değişmektedir. Bu durum, elde edilen AMM'den daha ideal olacak bir AMM elde edilebileceğini ve bunun için elde edilen en son AMM'deki stratejik etkenlerin daha da sınırlandırılması gerektiği göstermektedir (bkz. Şekil 23). Peki, AMM'de bu sınırlandırma nasıl yapılabilir?



Şekil 23. a açısının matematiksel olarak dikkate alınması ve AMM'nin revize edilmesi

Şekil 23' den hareketle,

$$\frac{x^2}{l^2}+\frac{y^2}{k^2l^2}=1$$

C'nin ilk konumu için x ve y incelenirse,

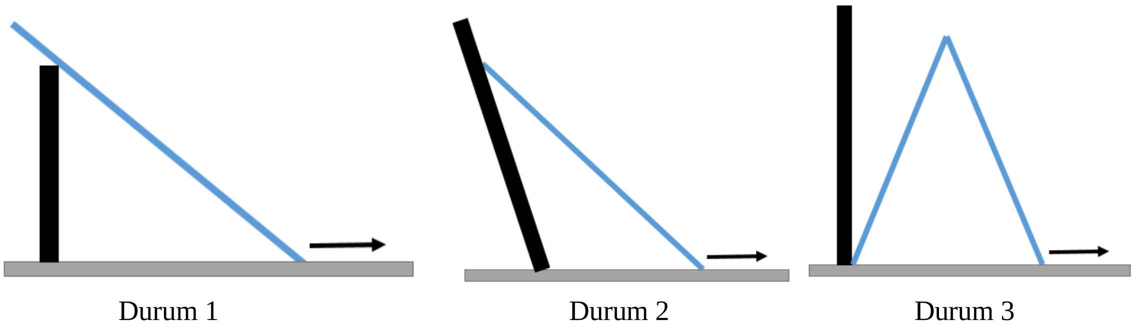
$$\sin a=\frac{y}{kl}$$
$$y=kl\sin a$$
$$\frac{x^2}{l^2}+\frac{(kl\sin a)^2}{k^2l^2}=1$$
$$x=l\cos a$$

C'nin son konumu incelenirse $a=0^o$ için $y=0\; ve\; x=l$ olacaktır. Bir başka ifadeyle, hareket boyunca x ile y'nin aralıkları $0<y<kl\sin a$ ve $l\cos a\;<x<l$ şeklinde olmalıdır. Bu nedenle AMM'ye ait noktalar kümesi şöyle yazılabilir:

$$AMM=\left\{(x,y)|\;\frac{x^2}{l^2}+\frac{y^2}{k^2l^2}=1,0<y<kl\sin a,l\cos a<x<l\; ve\; x,y,k,l,a\,\epsilon\, R^+\cup\;\{0\}\right\}$$

Elde edilen üst düzey matematiksel model daha ideal veya karmaşık hale getirilebilir. Varsayımlar değiştirilerek geliştirilebilir veya genellenebilir. Doğrulama ve revize etme basamaklarında, ilk başta tanımlanan AMM'nin değişkenlerinin daha da sınırlandırılmasına dikkat edilmiştir ve merdivenin ilk konumu, son konumu ve a açısı yardımıyla merdiven üzerindeki noktaların hareket boyunca sınırlandığı eğri ailesi tam olarak belirtilmiştir. Bir başka ifade ile doğrulama aşamasında gerçek yaşam çözümlerinde fazla noktalar olduğu belirlenmiş ve revize etme basamağında da çözümdeki eksikliğin kaynağı belirlenerek sürece tekrar girilmiştir ve daha ideal bir AMM oluşturulmuştur.

Merdiven Problemi ifadesi dikkatlice okunursa aslında varsayımların daha detaylı ve karmaşık olarak seçilmesi de mümkündür. Örneğin, problem ifadesinde duvarın zemine dik olma şartı yoktur (bkz. Şekil 24 - Durum 2); fakat yukarıda verilen çözümde problemi daha sade hale getirmek için duvarın zemine dik olduğu varsayılmıştır. Öğrencilerle yapılacak ileri düzey etkinlikte duvarın zemine dik olmayabilme durumu dikkate alınarak çözüme zemin ve duvar arasındaki açı da değişken olarak eklenebilir. Böylece AMM daha da detaylandırılmış olur. Farklı bir durum olarak (bkz. Şekil 24 - Durum 1) ilk konumda merdiven duvarın arka tarafına geçmiş olarak da düşünülebilir. Bu da hareketi farklılaştıracaktır. Bir başka durum olarak da Durum 3'teki gibi bir merdiven de duvara dayalı olarak durabilir (bkz. Şekil 24). Bu durum da farklı AMM'nin tasarlanmasına neden olacaktır. Bu gibi zengin durumlar öğretmenler tarafından fark edilirse ileri düzey matematiksel modeller olan emergent veya hypothetico-deductive matematiksel modellerin ortaya çıkarılması için uygun zihinsel ortamlar yaratılabilir.



Şekil 24. Merdiven Problemi'nde ele alınabilecek farklı varsayımlar

3. Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Çalışma, bir matematiksel modelleme problemi olan Merdiven Probleminin teknoloji destekli matematiksel modelleme süreci çerçevesinde GeoGebra destekli örnek bir çözümünü ortaya koymaktadır. Bu sayede hem modelleme sürecindeki temel bileşenler ve basamaklar hem de modelleme sürecinde GeoGebra'nın olası rolleri örneklendirilmekte ve teknolojinin bir öğrenme kaynağı olarak nasıl kullanabileceği gösterilmektedir. Ayrıca çalışma ile Merdiven Probleminin olası çözüm stratejilerine ve öğrenme sürecinde bu problemi kullanacak öğretmenlere sürece ilişkin detaylı açıklamalar getirilmektedir.

Hem matematik öğretmenlerinin hem de öğrencilerin (*lisans, lise, ortaokul düzeyi*) matematiksel modelleme problemleriyle baş başa bırakılmaları ve modelleme becerilerini geliştirmeleri sağlanmalıdır (Ang, 2010; Hıdıroğlu, 2015; Maaß, 2006). Çalışmanın, Merdiven Probleminin olası sınıf içi uygulamalarının niteliğinin arttırılmasına katkı sağlayacağı ve modelleme sürecinde ortaya çıkabilecek olası alt basamaklara ilişkin açıklamalar getireceği düşünülmektedir. Alanyazında öğrencilerin ve öğretmenlerin teknoloji destekli matematiksel modelleme sürecinde özellikle sıkıntı yaşadıkları basamaklara ilişkin desteklemek için bütüncül yaklaşımın yanında parçalı (atomistik) yaklaşım ile modelleme becerilerinin geliştirilmesi (Brand, 2014; Flegg, Mallet ve Lupton, 2013) önerilmektedir. Bu çalışmada da verilen bütüncül çözümün istenilen bir parçası ele alınarak atomistik bir anlayış ile öğrenme süreci yapılandırılabilir. Örneğin, atomistik bir yaklaşımla matematiksel modelleme sürecinin ilk iki basamağındaki (problemin analizi ve sistematik yapıyı kurma) zihinsel becerileri geliştirmek amacıyla problem ifadesi şu şekilde ele alınabilir: "Duvara dayalı bir şekilde hareketsiz duran bir merdiven kayıyor ve yere düşüyor. Kayarken merdivenin hareketini teknoloji destekli ortamda simüle ediniz. Düşüncelerinizi gerekçelendiriniz." Bu atomistik problem kapsamında matematikselleştirme basamağına geçmeden ilk iki basamaktaki bilişsel zorlukların üstesinden gelinmesi amaçlanabilir.

Hıdıroğlu (2015) ve Hıdıroğlu, Özaltun-Çelik, Kula-Ünver ve Bukova-Güzel'in (2018) ifade ettiği gibi çözücülerin modelleme sürecinde ileriki basamaklarda uygun yaklaşımlar sergilemeleri için önceki temel basamaklardaki her alt basamakta uygun yaklaşım sergilemelerinin gerekmediği söylenebilir. Modelleme süreci öğrencilerin ne kadar çok alt basamağa ilişkin düşüncelerini destekleyici bir rol üstlenirse öğrencilerin sahip olacakları modelleme yeterliklerinin de nitelikli ve üst düzeyde olması beklenebilir. Örneğin çalışmada daha ideal bir AMM sürecinin oluşturulmasında doğrulama ve revize etme basamağındaki alt basamaklar önemli olmuştur. Merdiven Problemi çözüm sürecinde ele alınan strateji ve yaklaşımlar incelendiğinde, gerçek yaşamdan matematiksel dünyaya geçilen sistematik yapıyı kurma basamağında teknolojik dünya destekli bir çözüm süreci matematiksel dünyadaki ve ileriki basamaklarda da (*yorumlama, doğrulama, revize etme (gerekirse) ve raporlaştırma*) gerçek yaşamdaki zihinsel yapıyı genişletmekte ve daha zengin zihinsel eylemleri açığa çıkarmaktadır.

Çalışma ile çözümde oluşturulan ilk AMM'den elde edilen gerçek yaşam çözümlerinin yetersizliğine ilişkin karara varılmış, revize etme basamağında çözümdeki eksikliklerin kaynağı belirlenmiş ve sürece tekrar girilmiştir. Bu sayede matematiksel model bir üst düzeye taşınmış ve daha ideal bir AMM'ye ulaşılmıştır. Alanyazında normal süreçte üst düzey farkındalığa ve zihinsel sürece çözücüleri sürükleyen üst düzey matematiksel modeller olan gelişen (emergent) (Gravemeijer, 1999; Hıdıroğlu ve Özkan-Hıdıroğlu, 2016) veya hipoteze dayalı tümdengelimci (hypothetico-deductive) matematiksel modeller (Hıdıroğlu ve Özkan-Hıdıroğlu, 2016) elde edilir. Nitelikli çözücülerden matematiksel modellemede üst düzeyde olan bu tür matematiksel modeller elde etmeleri beklenir. Hıdıroğlu ve Özkan-Hıdıroğlu'na (2016) göre, bu matematiksel modeller süreçte bireyin veya grubun zihinsel aktivitelerinde daha profesyonel olarak oluşturulmakta ve yeni Bloom taksonomisindeki son basamak olan "*yeni ürün/model ortaya çıkarma*" basamağındaki zihinsel becerileri ortaya çıkarmaktadır. Bu anlamda bu örnek çözümün olası bir uygulamada sergilenebilecek zihinsel aktivitelere ilişkin bir farkındalık sağlayacağı ve üst düzey düşünme yaklaşımlarında çözücüleri destekleyeceği düşünülmektedir.

Çalışmada Hıdıroğlu'nun (2015) matematiksel modellemede ifade ettiği üstbilişsel değerlendirme eylemlerinden birisi olan "*farklı şekillerde ulaştığı sonuçları karşılaştırma*" alt basamağı ortaya çıkmış ve AMM'den elde edilen gerçek yaşam sonuçlarından bazılarının hareket alanının dışında noktalar olduğu belirlenmiştir. Çözücüler düşünsel çıktılarını düzenledikleri, izledikleri ve sorguladıkları zaman üst bilişsel eylemler ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle de çözümde AMM'nin stratejik etkenlerinin daha da sınırlanması gerektiği ve sonucuna ulaşılmıştır. Herhangi bir gerçek yaşam olgu/olayı, tam olarak (mükemmel bir şekilde) onu temsil edecek bir matematiksel modelin elde edilemeyeceği kadar karmaşık olabilir. Ama bu durum daima daha iyi bir çözümün olabileceğini çözücülere göstermektedir. Hıdıroğlu ve Özkan-Hıdıroğlu'nun (2016) dediği gibi öğrencileri belli seviyede ilk oluşturdukları ilkel AMM ile bırakmamak ve onların ilkel AMM'lerini daha iyi hale getirmelerine fırsat sağlayacak düşünsel eylemlere zaman ayırmalarını sağlamak önemlidir. Bu sayede daha iyi bir matematiksel modeli/çözümü olanaklı kılmakta ve eleştirel, yaratıcı ve yenilikçi becerilerin ortaya çıkmasına ve gelişmesine fırsat sağlamaktadır. Çalışma ile Merdiven Probleminin olası bir çözümünde GeoGebra'nın sürece etkisi ortaya koyulmuştur. Ang (2010) ve Hıdıroğlu'nun (2015) ifade ettiği gibi bu çalışmada da teknoloji ile modelleme süreci gerçek yaşam, matematiksel dünya ve teknolojik dünya olmak üzere üç farklı boyutun entegrasyonunu içermektedir.

Teknolojideki hızlı gelişimle paralel olarak teknolojinin eğitime entegrasyon düzeyinin arttırılması (Hohenwarter, Hohenwarter, Kreis ve Lavicza, 2008) ve daha nitelikli, yeni dinamik matematik ve geometri yazılımlarının geliştirilmesi teknolojinin matematiksel modelleme sürecine olan etkisine yönelik araştırmaların önemini daha da arttırmaktadır (Hıdıroğlu, 2015). Merdiven Problemi çözümü ile GeoGebra'nın dinamik yapısının etkisi rahatlıkla görülebilmektedir. Örneğin, çözümde oluşturulan ana matematiksel modelde yanlışlık varsa veya daha ideal bir hale getirilecekse GeoGebra bunun anında görülebilmesinde ve çözücünün sürecini geliştirmesinde etkili olmaktadır.

GeoGebra, matematiksel modelleme sürecini yeniden düzenleyici ve yükseltici bir rol üstlenmektedir. GeoGebra yükseltici rolünde düşünceleri daha üst düzeye çekerek bireye çözmesi gereken yeni problemler de üretmesine fırsat vermektedir. Örneğin Merdiven Probleminde, bireyin merdivenin GeoGebra'daki simülasyonunu yaratabilmesi için Pisagor Teoremi'nden yararlanarak birbirine bağımlı noktalar elde etmesi gerekmektedir. Bu problem sadece kâğıt ve kalem kullanarak çözülseydi, çözücü Pisagor Teoremiyle ele almayabilir ve süreci dinamik olarak gözlemlemeyebilirdi. Bu anlamda matematiksel kavramlar arasındaki ilişkilendirme sınırlı kalabilirdi. Dinamik yazılımların bu yönü düşünüldüğünde, GeoGebra dışında farklı yazılımların modelleme sürecindeki zihinsel eylemlere etkisi araştırılabilir. Günümüzde öne çıkan sanal gerçeklikler de önemli bir araç olarak kullanılabilir. Sanal gerçekliklerin modelleme sürecine olumlu veya olumsuz etkileri bir araştırma konusu olarak ele alınabilir.

Ang (2010) teknoloji destekli matematiksel modellemedeki davranışların ve olası eğilimlerin belirlenmesinde teknolojinin büyük önemi olduğunu vurgulamaktadır. Bu çalışmada da GeoGebra matematiksel modellerin davranışlarının ve eğilimlerinin incelenebileceği zengin ortamlar sağlamaktadır. Çalışmada GeoGebra yardımıyla Merdiven hareketinin doğrusal değil eğrisel oluşu, noktaya göre eğrinin değişimi, orta noktaya yaklaştıkça hareketin çembere yakın olması, ilk konum ve son konum ile eğrinin uzunluğunu etkileyen faktörlerin belirlenmesi vb. durumlar gerekçeli ön tahminlerde elde edilmekte ve GeoGebra nitelikli varsayımlar oluşturmada nitelikli zihinsel ortamlar sağlamaktadır. Hıdıroğlu ve Bukova-Güzel (2015) benzer şekilde GeoGebra'nın matematiksel modelleme sürecindeki üstbilişsel eylemlerden "*çözüme başlamadan önce temel büyük düşüncenin ilerleyişine ve stratejik etkenlere yönelik tahminlerde bulunma*" zihinsel eyleminin ortaya çıkmasına ve niteliğine GeoGebra'nın olumlu anlamda katkı sağladığını ifade etmektedir. Bu tür teknoloji destekli ortamlar öğrencilerin iyi birer problem çözücü olarak olaylara farklı açılardan yaklaşmalarına ve hızlı gelişen teknoloji dünyasına uygun ve verimli bir şekilde adapte olmalarına olanak sağlayacaktır. Çalışmada kullanılan çerçeve dışında teknoloji destekli matematiksel modelleme sürecini açıklayan benzer çalışmalarla (Ang, 2010; Galbraith ve diğerleri, 2007) da süreç analizi çalışmaları yürütülebilir. Bu kuramsal çerçeveler, matematiksel modellemedeki zihinsel yaklaşımları ve düşünme süreçlerini farklı açılardan ele almakta ve sağladıkları zengin bakış açısıyla süreci inceleme fırsatı sunmaktadır.

Bu tür öğrenme ortamlarının daha önemli hale gelmesinde veli ve öğrenci anlayışı önem taşımaktadır. Bu nedenle ölçme değerlendirme araçlarının 21. yy. becerilerini ve bu tür ortamların önemini desteklemesi gerekmektedir. Bu durum, ulusal sınavlarda uluslararası PISA sınavındaki sorulara benzer sorulara geçiş yapılmasıyla sağlanabilecektir. İleride online sınavlarla teknoloji destekli grafikler verilerek bu tür öğrenme ortamlarının daha da önemli bir hale geleceği düşünülmektedir. GeoGebra destekli matematiksel modelleme süreci ile Merdiven Problemi çözümünde önemli matematiksel kavramlar olan üçgen, benzerlik, trigonometri, fonksiyon, denklem, eşitsizlik, çember ve elips kavramlarının gerçek yaşam problemlerinin uygulamasına fırsat vermektedir. 2023 Eğitim Vizyonu, öğrenme sürecinde teknolojik yazılımların öğrenme sürecine etkili bir entegrasyonu için dijital becerileri ön plana taşımaktadır. Bu anlamda öğretmenlerin dijital ve programlama becerilerini geliştirecek bu tür ortamlar önemli olmaktadır. Mishra ve Koehler (2006) öğretmen yeterliklerini açıklarken belirli bir konu alanındaki öğretime teknolojiyi entegre etmede gereksinim duyulan bilgi olarak teknolojik pedagojik alan bilgisini ortaya koymaktadır. Çalışmanın ortaya çıkardığı zihinsel süreçlerin öğretmen ve öğretmen adaylarının teknolojik pedagojik alan bilgi ve becerilerini beklenilen düzeye çıkarmada etkili olacağı düşünülmektedir.

Merdiven Problemi'nin çözüm sürecinde GeoGebra'da sistematik yapı kurulurken gerekli ve gereksiz değişkenlerin belirlenmesi, zihinsel modelin analitik düzleme indirgenmesi, değişkenlerin uygun aralıklarda tanımlanması, matematiksel bir ifadenin GeoGebra diline uygun bir şekilde düzenlemesi, bağımlı-bağımsız değişkenlerin belirlenerek matematiksel modelin ona göre kurulması, ana matematiksel model yetersizse revize edilmesi ile daha ideal bir ana matematiksel modelin elde edilmesi gibi zihinsel eylemlerle ISTE'nin (2015) bilgi işlemsel düşünme çerçevesindeki soyutlama, algoritmik düşünme, ayrıştırma ve değerlendirme becerilerinin açığa çıktığı görülmektedir. Teknoloji destekli modelleme sürecinin bu anlamda bilgi işlemsel düşünme süreçleri üzerine çalışacak araştırmacılara da farklı ve derin bir bakış açısı getireceği düşünülmektedir.

OECD (2013) matematiksel okuryazarlığı farklı bağlamları matematiksel formüllerle açıklama kapasitesi olarak açıklanmaktadır. Matematiksel modellemenin bu tür ortamlar sağladığı gibi GeoGebra ile daha zengin bir zihinsel süreci oluşturarak matematiksel okuryazarlık becerilerini geliştiren ortamlara fırsat sağlayacağı söylenebilir. Kabael (2019) matematiksel okuryazarlıkta aktif problem çözücülerin dâhil olacağı üç zihinsel sürece (*formüle etme, kullanma, yorumlama*) vurgu yapmaktadır. Merdiven Problemi çözümünde ise matematikselleştirme ve üst matematikselleştirme aşaması formüle etme sürecini, matematiksel analiz aşaması kullanma sürecini açıklamakta ve modellemedeki yorumlama aşaması da yorumlama süreci ile doğrudan ilgili olmaktadır.

Çalışmada ele alınan örnek çözüm süreci STEM+A (Science-Technology-Engineering-Mathematics+Art) anlayışına da hizmet eden bir öğrenme sürecini açığa çıkarmaktadır. Matematiksel modelleme problemlerinin gerçek yaşamdaki durum veya olaylardan beslenmesi/bağlama sahip olması, grup çalışmaları ile gerçekleştirilebilmesi, disiplinler arası doğaya sahip olması ve GeoGebra vb. yazılımlarla teknoloji ile desteklenebilmesi onu STEM+A yaklaşımında önemli bir araç haline getirebilmektedir. Örneğin, Merdiven

Problemi'nin çözümünde sürtünme kuvveti, merdivenin ağırlık merkezi, merdivenin kayma hızı, kaymasını etkileyen faktörler gibi fizik disiplinini ilgilendiren bilgiler probleme dahil edilerek daha derin disiplinlerarası matematiksel modeller elde edilebilir. Kapsamlı bir STEM+A etkinliğinde ele alınabilecek bir gerçek yaşam durumu/olayı detaylı matematiksel modeller ile açıklanabilmektedir. Örneğin, Salıncak Probleminde (Hıdıroğlu, 2012) salıncakta sallanan bir kişinin potansiyel enerjisinin hesaplanması matematik ve fizik disiplinlerini ilgilendiren bir gerçek yaşam bağlamı olup, çemberin analitik gösterimi, fonksiyon ve potansiyel enerji formülü yardımıyla modellenebilmektedir. Bu nedenle, çemberin analitik gösterimini, fonksiyonları ve potansiyel enerji kavramının kavramsal olarak öğrenilebilmesi için bu tür problemler etkili öğrenme materyalleridir. Kapsamlı bir STEM+A etkinliğinde bir gerçek hayat durumu/olayının detaylı özellikleri matematiksel modeller yardımıyla açıklanmaktadır. Bununla birlikte teknoloji destekli matematiksel modelleme STEM+A'nın daha geniş bir alanına hizmet edebilmektedir. Bu anlamda çalışmada ele alınan GeoGebra destekli Merdiven Problemi örnek çözümünün STEM+A anlayışına hizmet eden etkili bir öğrenme sürecinin ortaya çıkarılmasında katkı sağlayacağı söylenebilir.

4. Etik Beyanı

Bu araştırma etik konular dikkate alınarak ve etik kurallara uygun olarak yürütülmüştür.

5. Çıkar ve Katkı Beyanı

Yazarlar çalışmaya eşit oranda katkı sağlamıştır. Bu çalışmada herhangi bir potansiyel çıkar çatışması bulunmamaktadır.

Kaynakça

Akgün, L., Çiltaş, A., Deniz, D., Çiftçi, Z. ve Işık, A. (2013). İlköğretim matematik öğretmenlerinin matematiksel modelleme ile ilgili farkındalıkları. *Adıyaman Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, 6*(12), 1-34.

Ang, K. C. (2010). *Teaching and learning mathematical modelling with technology*. 06.022020 tarihinde http://atcm.mathandtech.org/ep2010/invited/3052010_18134.pdf adresinden alınmıştır.

Baki, A. (2002). *Öğrenen ve öğretenler için bilgisayar destekli matematik.* İstanbul: BİTAV-Ceren Yayın Dağıtım.

Baki, A. (2008). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi* (Dördüncü baskı). Ankara: Harf Eğitim Yayıncılığı.

Barbosa, J. C. (2003) What is mathematical modelling?. In S. J. Lamon, W. A. Parker, ve S. K. Houston (Eds.), *Mathematical modelling: A way of life. ICTMA11* (ss. 227–234) içinde. Chichester: Horwood Publishing.

Barr, D., Harrison, J. ve Conery, L. (2011). Computational thinking: A digital age skill for everyone. *Learning & Leading with Technology, 38*(6), 20-23.

Berry, J. ve Davies, A. (1996) Written reports. C. R. Haines ve S. Dunthorne (Eds), *Mathematics learning and assessment: Sharing innovative practices*, (ss. 3.3-3.11) içinde. London: Arnold.

Berry, J. ve Houston K. (1995). *Mathematical modelling*. Bristol: J. W. Arrowsmith Ltd.

Blum, W. (1985). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. *Mathematische Semesterberichte, 32*, 195-232.

Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri ve G. Stillman (Eds), *Trends in the teaching and learning of mathematical modelling - Proceedings of ICTMA14*. (ss. 15-30) içinde. New York: Springer.

Blum, W. ve Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 45-58.

Blum, W. ve Niss, M. (1989). Mathematical Problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – state, trends and issues in mathematics instruction. M. Niss, W. Blum, ve I. Huntley (Eds), *Modelling applications and applied problem solving* (ss. 1-19) içinde. England: Halsted Pres.

Blum, W. ve Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, application, and links to other subjects-state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 37-68.

Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(2), 86-95.

Borromeo-Ferri, R. (2007). Personal experiences and extra-mathematical knowledge as an influence factor on modelling routes of pupils. D. Pitta-Pantazi ve G. Philippou (Eds), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (ss. 2080-2089) içinde. Larnaca: Zypern.

Brand, S. (2014). Effects of a holistic versus an atomistic modeling approach on students' mathematical modeling competencies. P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle, ve D. Allan (Eds), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36*(2), (ss. 185-192) içinde. Vancouver: PME.

Bukova-Güzel, E., Tekin-Dede, A., Hıdıroğlu, Ç. N., Kula-Ünver, S. ve Özaltun-Çelik, A. (2016). *Matematik eğitiminde matematiksel modelleme.* Ankara: Pegem Akademi.

Chua, B. ve Wu, Y. (2005). Designing techology-based mathematics lessons: A pedagogical framework. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *24*(2), 387-402.

Deniz-Yılmaz, D., & Akgün, L. (2018). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel modelleme becerilerinin incelenmesi. *Mediterranean Journal of Educational Research*, *12*, 294-312. https://doi.org/10.29329/mjer.2018.147.16

Doerr, H. M. (1997). Experiment, simulation and analysis: An integrated instructional approach to the concept of force. *International Journal of Science Education*, *19*, 265-282.

English, L. (2009). Promoting interdisciplinarity through mathematical modelling. *ZDM Mathematics Education, 41*, 161-181.

English, L. ve Watters, J. (2004). Mathematical modeling in the early school years. *Mathematics Education Research Journal*, *16*(3), 59–80.

Flegg, J., Mallet, D. ve Lupton, M. (2013). Students' approaches to learning a new mathematical model. *Teaching Mathematics Applications, 32*(1), 28-37.

Galbraith, P. ve Stillman, G. (2006). A Framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(2), 143-162.

Galbraith, P., Stillman, G., Brown, J. ve Edwards I. (2007). Facilitating middle secondary modelling competencies. C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, ve S. Khan (Eds), *Mathematical modelling: ICTMA 12: Education, engineering an economics,* (ss. 130-140) içinde. Chichester: Horwood Publishing.

Gardner, H. (2007). *Geleceği inşa edecek beş zihin* (Çev.: F. Şar ve A. H. Gül). İstanbul: Optimist Yayınları.

Gonzalez, H. B. ve Kuenzi, J. J. (2012). *Science, technology, engineering, and mathematics (STEM) education: A primer*. 05.09.2020 tarihinde https://fas.org/sgp/crs/misc/R42642.pdf adresinden alınmıştır.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning 1*(2), 155-177.

Hıdıroğlu, Ç. N. (2012). *Teknoloji destekli ortamda matematiksel modelleme problemlerinin çözüm süreçlerinin analiz edilmesi: yaklaşım ve düşünme süreçleri üzerine bir açıklama.* Yüksek lisans tezi. Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Hıdıroğlu, Ç. N. (2015). *Teknoloji destekli ortamda matematiksel modelleme problemlerinin çözüm süreçlerinin analizi: Bilişsel ve üstbilişsel yapılar üzerine bir açıklama.* Doktora tezi. Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Hıdıroğlu, Ç. N. ve Bukova-Güzel, E. (2014). Matematiksel modellemede GeoGebra kullanımı: Boy-Ayak uzunluğu problemi. *Pamukkale Üniversitesi, Eğitim Fakültesi Dergisi, 36*(2), 29-44.

Hıdıroğlu, Ç. N. ve Bukova-Güzel, E. (2015). Teknoloji destekli ortamda matematiksel modellemede ortaya çıkan üst bilişsel yapılar. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 6*(2), 179-208.

Hıdıroğlu, Ç. N. ve Bukova-Güzel, E. (2017). The conceptualization of the mathematical modelling process in technology-aided environment. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 24*(1), 17-37.

Hıdıroğlu, Ç. N. ve Özkan-Hıdıroğlu, Y. (2016). Modelleme yaklaşımlarına bütüncül bir bakış ve yeni bir öğrenme modeli önerisi: HTTM modeli ve kuramsal temeli. Ö. Demirel ve S. Dinçer (Ed.), *Eğitim bilimlerinde yenilik ve nitelik arayışı,* (ss. 1109-1142) içinde. Ankara: Pegem Akademi.

Hıdıroğlu, Ç. N., Özaltun-Çelik, A., Kula-Ünver, S. ve Bukova-Güzel, E. (2018). Matematik öğretmeni adaylarının teknoloji destekli matematiksel modelleme süreci çerçevesinde Uzaklık Problemi'ne ilişkin çözümleri. *Erzincan Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 20*(3), 782-809.

Hıdıroğlu, Ç., & Bukova-Güzel, E. (2013). Teknoloji destekli ortamda matematiksel modellemede modelin doğrulanmasındaki yaklaşımların ve düşünme süreçlerinin kavramsallaştırılması. *Educational Sciences: Theory and Practice, 13*(4), 2487-2508. https://doi.org/10.12738/estp.2013.4.1932

Hıdıroğlu, Ç., & Bukova-Güzel, E. (2016). Teknoloji destekli ortamda matematiksel modelleme sürecindeki bilişsel ve üst bilişsel eylemler arasındaki geçişler. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *10*(1), 320-357. https://doi.org/10.17522/nefefmed.15854

Hıdıroğlu, Ç., & Özkan-Hıdıroğlu, Y. (2017). *Altıncı sınıf öğrencilerinin matematiksel modellemede oluşturdukları gerçek yaşam problem durumu modelleri (real world problem situation's models created by 6th grade students in mathematical modelling). 16*, 1702-1731. https://doi.org/10.17051/ilkonline.2017.342986

Hohenwarter, M., Hohenwarter, J., Kreis, Y. ve Lavicza, Z. (2008). *Teaching and learning Calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra*. 20 Ocak 2020 tarihinde https://pdfs.semanticscholar.org/1c8c/9f4765c2ad5080b59b08e3b77b036e780a5f.pdf adresinden alınmıştır.

Hom, E. J. (2014). *What is STEM education*. 3 Eylül 2020 tarihinde https://www.livescience.com/43296-what-is-stem-education.html adresinden erişilmiştir.

International Society for Technology in Education [ISTE] (2011). *Computational thinking: Leadership toolki*t. 01.09.2020 tarihinde https://id.iste.org/docs/ct-documents/ct-leadershipt-toolkit.pdf?sfvrsn=4 adresinden alınmıştır.

International Society for Technology in Education [ISTE]. (2015). *CT leadership toolkit*. https://id.iste.org/docs/ct-documents/ct-leadershipt-toolkit.pdf?sfvrsn=4.

Jin, Y.-G., Chong, L., & Cho, H.-K. (2012). *Designing a robotics-enhanced learning content for STEAM education*. 433-436. https://doi.org/10.1109/URAI.2012.6463032

Kabael, T. (2019). *Matematiksel okuryazarlık ve PISA*. Ankara: Anı Yayıncılık.

Kaiser-Meßmer, G. (1986). *Anwendungen im mathematikunterricht: Theoretische konzeptionen*. Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Lesh, R. ve Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on 3 mathematics teaching, learning, and problem solving. R. Lesh ve H. M. Doerr (Eds), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching*, (ss. 3-34) içinde. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lesh, R. ve English, L. D. (2005). Trends in the evolution of models & modeling perspectives on mathematical learning and problem solving. *The International Journal on Mathematics Education, 37*(6), 487-489.

Lingefjärd, T. (2012). Learning mathematics through mathematical modelling. *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(5), 41-49.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik [ZDM], 38*(2),113-142.

Mason, J., (1988). Modelling: What do we really want pupils to learn?. D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers and children* (ss. 201-215) içinde. London: Hodder & Stoughton.

Millî Eğitim Bakanlığı [MEB] (2009a). *İlköğretim matematik dersi 6-8. sınıflar öğretim programı*. Ankara: Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı.

Millî Eğitim Bakanlığı [MEB] (2009b). *Ortaöğretim matematik dersi 9-12. sınıflar öğretim programı*. Ankara: Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı.

Millî Eğitim Bakanlığı [MEB] (2011). *PISA Türkiye*. Ankara: Eğitek.

Millî Eğitim Bakanlığı [MEB] (2015a). *Ortaokul (5., 6., 7. ve 8. sınıflar için) matematik dersi öğretim programı*. Ankara: Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı.

Millî Eğitim Bakanlığı [MEB] (2015b). *Lise (9., 10., 11. ve 12. sınıflar için) matematik dersi öğretim programı*. Ankara: Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı.

Millî Eğitim Bakanlığı [MEB] (2018a). *Matematik dersi öğretim programı (İlkokul ve ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. sınıflar)*. 21.01.2020 tarihinde http://mufredat.meb.gov.tr/ProgramDetay.aspx?PID=329 adresinden erişilmiştir.

Millî Eğitim Bakanlığı [MEB] (2018b). *Matematik dersi öğretim programı (Lise 9, 10, 11, 12. sınıflar)*. 21.01.2020 tarihinde http://mufredat.meb.gov.tr/ProgramDetay.aspx?PID=343 adresinden erişilmiştir.

Mishra, P. ve Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. Teachers College Record, 108, 1017-1054.

Müller, G. ve Wittmann, E. (1984). *Der mathematikunterricht in der primarstufe*. Braunschweig: Vieweg.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM Publications.

OECD (2013). *PISA 2012 assessment and analytical framework: Mathematics, reading, science, problem solving and finacial literacy*. 19 Ocak 2020 tarihinde https://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/PISA%202012%20framework%20e-book_final.pdf adresinden alınmıştır.

Park N. ve Ko Y. (2012) Computer education's teaching-learning methods using educational programming language based on STEAM education. J.J. Park, A. Zomaya, S.S. Yeo ve S. Sahni (Eds), *Lecture notes in computer science* (ss. 320-327) içinde. Springer, Berlin, Heidelberg.

Peter Koop, A. (2004). Fermi problems in primary mathematics classrooms: pupils' interactive modelling processes. I. Putt, R. Farragher, ve M. McLean (Eds), *Mathematics education for the third millenium: towards 2010 [Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia,* (ss. 454-461) içinde. Townsville, Queensland: MERGA.

Saeki, A. ve Matsuzaki, A. (2013). Dual modelling cycle framework for responding to the diversities of modellers. In G. Stillman, G. Kaiser, W. Blum ve J. Brown (Eds), *Teaching mathematical modelling: connecting to research and practice*, (ss. 89-99) içinde. New York, USA: Springer.

Schoenfeld, A. H. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. A. Schoenfeld, ve H. Hillsdale (Eds), *Mathematical thinking and problem solving* (ss. 53-69) içinde. New York: Routledge.

Siller, H. S. ve Greefrath, G. (2010). Mathematical modelling in class regarding to technology. V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds), *CERME 6 – Proceedings of the sixth congress of the European society for research in mathematics education* (ss. 108-117) içinde. Lyon: Institut national de recherche pédagogique.

Stillman, G., Galbraith, P., Brown, J. ve Edwards, I. (2007). A framework for success in ımplementing mathematical modelling in the secondary classroom. *Mathematics: Essential Research, Essential Practice, 2,* 688-697.

Wing, J. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM, 49*(3), 33–36.

Wing, J. M. (2008). Computational thinking and thinking about computing. *Philosophical Transactions of The Royal Society A Mathematical Physical and Engineering Sciences, 366*(1881), 3717–3725.