T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ALT YÖRÜNGESEL GRAFLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GİZEM DEMİRBAŞ ÇEVİRİCİ

DENİZLİ, HAZİRAN - 2020

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ALT YÖRÜNGESEL GRAFLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GİZEM DEMİRBAŞ ÇEVİRİCİ

DENİZLİ, HAZİRAN - 2020

Bu tez çalışması Pamukkale Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından 2019FEBE044 nolu proje ile desteklenmiştir.

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

GİZEM DEMİRBAŞ ÇEVİRİCİ

ÖZET

ALT YÖRÜNGESEL GRAFLAR
YÜKSEK LİSANS TEZİ
GİZEM DEMİRBAŞ ÇEVİRİCİ
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI:DOÇ. DR. MURAT BEŞENK)

DENİZLİ, HAZİRAN - 2020

Bu çalışmada Modüler grubun özel bir kongrüans alt grubu olan $\Gamma^0(n)$ grubu için sıfır bloğu üzerinde alt yörüngesel graflar incelendi.

Birinci bölümde konuyla ilgili olarak Topolojik Gruplar, Hiperbolik Geometri, Riemann Yüzeyleri, Möbius Dönüşümleri ve Graf Teori ile ilgili genel kavramlar ve açıklayıcı örnekler verildi.

İkinci bölümde $\Gamma^0(n)$ grubunun alt yörüngesel graflarında kenar olma şartları ve kendisiyle eşleşmiş kenar olma durumları araştırıldı. Ayrıca alt yörüngesel grafların bir devre içermesi için gerek ve yeterli şartlar elde edildi.

ANAHTAR KELİMELER: Modüler Grup, İmpirimitif hareket, Grup hareketi, Alt yörüngesel graflar, Farey Grafı

ABSTRACT

SUB ORBITAL GRAPHS
MASTER THESIS
GİZEM DEMİRBAŞ ÇEVİRİCİ
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS

(SUPERVISOR:DOÇ. DR. MURAT BEŞENK)

DENİZLİ, JUNE 2020

In this study suborbital graphs on the zero block for the $\Gamma^0(n)$ group, a special congruence subgroup of the Modular group are investigated.

In the first chapter, about the subject general concepts and revealing examples dealing with Topological Groups, Hyperbolic Geometry, Riemann Surfaces, Möbius Transformations and Graph Theory are given.

In the second chapter, edge conditions in suborbital graphs of the congrence subgroup $\Gamma^0(n)$ and cases for being self paired edge are investigated. Also necessary and sufficient conditions for the suborbital graphs to contain a circuit are obtained.

KEYWORDS: Modular Group, Impirimitive action, Group action, Suborbital graphs, Farey Graph

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

<u>Sayfa</u>

SEMBOL LİSTESİ

Gx	:	x noktasının G yörüngesi
G_x	:	x noktasının G grubundaki sabitleyeni
Γ	:	Modüler grup
$\Gamma^0(n)$	:	Modüler grubun $b \equiv 0 (\mathrm{mod}\, n)$ olan alt grubu
$\mathbb{Q}$	:	Rasyonel sayılar kümesi
$\widehat{\mathbb{Q}}$	:	Genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{H}$	:	Üst yarı düzlem
$\mathbb{Z}$	:	Tam sayılar kümesi
∞	:	sonsuz
Γ_0	:	0 noktasının Modüler gruptaki sabitleyeni
$PSL(2,\mathbb{R})$	:	Reel katsayılı lineer kesirli dönüşümlerin grubu
$PSL(2,\mathbb{Z})$	:	Katsayıları tamsayı olan lineer kesirli dönüşümlerin grubu
$[\alpha]$	:	α bloğu
F	:	Farey grafı
F_m	:	Farey dizisi
$O(a,b)$	:	(a,b) ikilisinin yörüngesi
$\mathcal{G}_{n,u}$	:	$O(n,u)$ alt yörüngeye karşılık gelen alt yörüngesel graf
$Z_{n,u}$	:	Köşeleri sıfır bloğu üzerinde olan alt yörüngesel graf

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans programında hazırlanmıştır.

Bu tezin konusunun belirlenmesinde, çalışmanın planlanmasında ve çalışma süresince desteklerini esirgemeyen değerli hocam Sayın Doç. Dr. Murat BEŞENK'e teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Ayrıca tüm eğitim hayatım boyunca desteğini esirgemeyen aileme, eşime ve değerli hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

GİZEM DEMİRBAŞ ÇEVİRİCİ

1. GENEL BİLGİLER

1.1 Giriş

Matematik tarihi incelendiğinde grup kavramı geometrik şekillerin simetri özelliklerinin araştırılmasında ve cebirsel denklemlerin köklerinin belirlenmesinde ortaya çıkmıştır. Açıkça her geometrik şekle bir simetri grubu ve her cebirsel denklemin köklerine de bir Galois grubu karşılık gelir. Matematik tarihine bakıldığında grup kavramının ilk izleri J. L. Lagrange (1736-1813) tarafından yapılan cebirsel denklemler üzerindeki çalışmalarına kadar gider.

Grup teorisinin tarihi gelişimi dört temel alan üzerine kurulmaktadır:

(a) Cebir (J. L. Lagrange, 1770)
(b) Sayılar Teorisi (C. F. Gauss, 1801)
(c) Geometri (F. Klein, 1874)
(d) Analiz (S. Lie,1874; H. Poincare ve F. Klein, 1876)

XIX. yüzyılda özellikle geometri alanı genişlik ve derinlik anlamında büyümüş ve Projektif geometri, Euclid olmayan geometriler, Diferansiyel geometri, Cebirsel geometri, n-boyutlu geometri gibi yeni geometriler ortaya çıkmış ve bunlar arasında bağıntıların nasıl kurulacağı sorusu ortaya çıkmıştır. Felix Klein daha sonra Erlangen Programı adı verilen yaptığı ünlü çalışmasında geometrilerin karakterizasyonu ve sınıflandırılmasının grup teorisiyle olan ilişkisini ortaya koymuş, geometrinin dönüşüm grupları altında invaryant kalan özelliklere göre tasnif edileceğini belirlemiştir. Aslında bu düşüncenin temeli Cayley-Sylvester İnvaryant Teorisidir. Ayrıca Lie, Abel ve Galois cebirsel denklemler için yaptıkları çalışmaları diferansiyel denklemlere uygulamışlardır. Böylece klasik metotlarla elde edilen hemen hemen tüm diferansiyel denklemlerin sürekli gruplar altında değişmez kaldığı gözlemlenmiştir. Dolayısıyla diferansiyel denklemlerin bir sürekli grup altında değişmezlerini koruyan ve verilen bu grubun bilinen özelliklerinden çıkan sonuçlara göre bu denklemleri olası basitleştirmelere indirgenmesini düşünmeye önderlik edilmiştir. Bu düşünceler daha sonraları Lie grupları ve topolojik dönüşüm gruplarına önderlik etmiştir. Ayrıca H. Poincare bu düşüncelerden faydalanarak, Fuchsian grupları adını verdiği ve geliştirdiği ayrık grupların invaryant bıraktığı otomorf fonksiyonları tanımlayıp incelemiştir. Bu fonksiyonlardan yararlanılarak cebirsel eğrilerin parametrizasyon problemi çözülmüştür. Böylelikle eliptik fonksiyonlar teorisinin de temeli atılmıştır.

Sonuç olarak bu alanlarda kullanılan dönüşüm gruplarının elemanlarının en genel formu z-kompleks bir değişken olmak üzere

$$\frac{az+b}{cz+d};\ a,b,c,d\in\mathbb{C};\ ad-bc\neq 0$$

biçiminde dönüşümlerdir. Katsayıların kompleks, reel, tamsayı olmasına göre bir çok durumlar vardır. En bilinenleri $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$, $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, $\mathbb{P}$ Picard grubu ve $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ Modüler grup ile bu grubun kongrüans alt gruplarıdır.

Grup teorisi üzerine yüz yıldan fazla süreyle yapılan çeşitli çalışmalar birçok teorilere yol açmıştır. Bunlardan bazıları Somut Grup Teorisi (Cayley, Jordan-Holder, Feit-Thompson, 1963), Grup Temsilleri (Kombinatoryal Grup Teorisi), Sonsuz Abel Grup Teoremi (Profer, Baer, Ulm, 1920-1930), Schreier's Grup Genişleme Teorisi (1926), Cebirsel Gruplar (Borel, Chevalley 1940), Topolojik Gruplar (Schreier, Corton, Gelfand,Van Neuman, 1920-1930) dir.

Von Dyck tarafından 1882 yılında ortaya konulan soyut grup tanımı, üreteçler ile aralarındaki bağıntılar yardımıyla verildi. Bu düşünceden yola çıkarak düşük mertebeli gruplar, simetrik ve alterne gruplar, sonlu üretilmiş gruplar, lineer kesirli gruplar ve yansımalar tarafından üretilmiş gruplar için çalışmalar yapıldı. 1970 yılında David Singerman sonlu üretilmiş Fuchsian gruplarının üreteçler, bağıntılar ve geometrik invaryantlarını içeren bir gösterimlere sahip olduğunu gösterdi. Bu gösterime simge adı verilir. 1991 yılında ise G.A. Jones, D. Singerman ve K. Wicks Modüler grubu kombinatorik yöntemle incelemenin bir yolu olarak ilk kez C. C. Sims tarafından ortaya atılan alt yörüngesel grafları çalışmalarında kullandılar. Yine benzer bir yaklaşım R. Kulkarni tarafından da yapıldı. Üreteçler ve aralarındaki bağıntıyı ortaya koymak için yörüngesel graflardan yararlanmak kombinatoryal grup teorisinde kullanılan bir yöntemdir.

1.2 Gruplar ve Topolojik Gruplar

Tanım 1.2.1: $G \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $\circ: G \times G \to G$, $(g_1, g_2) \to g_1 \circ g_2$ şeklinde tanımlanan her fonksiyona G kümesi üzerinde bir ikili işlem denir. Üzerinde en az bir ikili işlem tanımlanmış ve boş olmayan bir kümeye de cebirsel yapı denir ve $(G,\circ)$ ikilisi ile gösterilir.

Tanım 1.2.2: "$\circ$" işlemi $G \neq \emptyset$ kümesi üzerinde tanımlanmış bir ikili işlem olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $(G,\circ)$ ikilisine bir grup adı verilir:

I. $\forall a, b \in G$ için $a \circ b \in G$ (kapalılık özelliği)
II. $\forall a, b, c \in G$ için $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ (birleşme özelliği)
III. $\exists\, e \in G$ öyle ki $\forall a \in G$ için $e \circ a = a \circ e = a$ (birim eleman özelliği)
IV. $\forall a \in G$ için $\exists a' \in G$ öyle ki $a \circ a' = a' \circ a = e$ (ters eleman özelliği)

Burada $a \circ b$ yerine kısaca ab yazılacaktır.

Tanım 1.2.3: G bir grup, $\emptyset \neq H \subset G$ olsun. Eğer H, G üzerinde tanımlanan ikili işleme göre bir grup ise H ye G nin bir alt grubu denir ve $H \leq G$ ile gösterilir. Açıkça $H \leq G$ ise $e_G \in H$ dir. Dolayısıyla $\{e\}$ ve G, G grubunun alt gruplarıdır. Bu alt gruplara aşikar alt gruplar adı veilir. Bir grubun aşikar gruptan farklı alt gruplarına ise öz alt grup denir.

Önerme 1.2.1: G bir grup ve $\emptyset \neq H \leq G$ olsun. Bu durumda $H \leq G \Leftrightarrow \forall h_1, h_2 \in H$ için

I. $h_1 h_2 \in H$
II. ${h_1}^{-1} \in H$ dır.

Önerme1.2.2 : G bir grup ve $\emptyset \neq H \leq G$ olsun. Buradan $H \leq G \Leftrightarrow \forall h_1, h_2 \in H$ için $h_1 h_2^{-1} \in H$ dır.

Tanım 1.2.4: G bir grup ve A ile B ise G grubunun alt grupları olsun. Bu takdirde $A = gBg^{-1}$ olan bir $g \in G$ varsa A ve B alt gruplarına eşlenik alt gruplar denir.

Tanım 1.2.5: G bir grup $H \leq G$ olsun. Ayrıca G grubu üzerinde bir " $\equiv$ " bağıntısı $a \equiv b(H) \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$ olarak tanımlansın. Bu durumda tanımlanan bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır ve bir a elemanının denklik sınıfı $\bar{a} = \{ah : h \in H\} = aH$ alt kümesidir. aH alt kümesine $a \in G$ elemanının sol yan sınıfı denir. Benzer şekilde bir b elemanının denklik sınıfı $\bar{b} = \{hb : h \in H\} = Hb$ alt kümesidir. Hb alt kümesine $b \in G$ elemanın sağ yan sınıfı denir.

Tanım 1.2.6: G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Bu takdirde $H \leq G$ alt grubuna göre sağ ve sol yan sınıflarının sayısı birbirine eşittir. Bu sayıya H alt grubunun G grubu içindeki indeksi denir ve $|H : G|$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.7: G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Eğer H alt grubunun G grubundaki bütün sağ ve sol kümeleri birbirine eşitse, yani $\forall x \in G$ için $xH = Hx$ oluyorsa H alt grubuna G grubunun normal alt grubu adı verilir.

Teorem1.2.1 : G bir grup ve $H \leq G$ alt grubu verilsin. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

I. $\forall g \in G$ ve $\forall h \in H$ için $ghg^{-1} \in H$
II. $\forall g \in G$ için $ghg^{-1} \subset H$
III. $\forall g \in G$ için $ghg^{-1} = H$
IV. $\forall g \in G$ için $gH = Hg$

Tanım 1.2.8: $X \neq \emptyset$ verilen herhangi bir küme ve $\wp(X)$, X kümesinin güç kümesi olmak üzere $\tau \subset \wp(X)$ olsun. Bu takdirde τ ailesine aşaıdaki şartları sağlanıyor ise X üzerinde bir topoloji adı verilir:

I. $\emptyset \in \tau$ ve $X \in \tau$
II. $\forall U, V \in \tau$ için $U \cap V \in \tau$
III. $\forall \{O_i\}_{i \in I}$ için $O_i \in \tau$

Ayrıca (X, τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir.

Tanım 1.2.9: $(G, \circ)$ ikilisi bir grup ve aynı zamanda bir topolojik uzay olsun. Eğer,

I. $M : G \times G \to G,\ M(g, h) = g \circ h$

II. $m: G \to G,\ m(g) = g^{-1}$

dönüşümleri sürekli ise bu durumda G ye bir topolojik grup denir.

Örnek 1.2.1:

i. $(\mathbb{R}, +)$ ikilisi bir topolojik gruptur. M ve m dönüşümlerinin sürekli olduğu kolaylıkla gösterilebilir.
ii. N herhangi bir grup olsun. Eğer N grubu üzerinde bir ayrık topoloji varsa bu takdirde N topolojik bir gruptur.
iii. $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ kümesini alalım. Bu küme üzerinde yapılan kompleks sayıların çarpma işlemine göre bir topolojik grup oluşur yani $(S^1, \cdot)$ bir topolojik gruptur.

Tanım 1.2.10: G bir topolojik grup ve Δ herhangi bir topolojik uzay olsun. Eğer

$\xi: G \times \Delta \to \Delta$, $\xi(g, x) = gx$ şeklinde tanımlanan ξ dönüşümü sürekli ve $\forall x \in \Delta$, $\forall g_1, g_2 \in G$ için

I. $g_1(g_2 x) = (g_1 g_2)x$
II. $e\,\xi x = x$

koşulları sağlanıyor ise (G, Δ, ξ) üçlüsüne bir topolojik dönüşüm grubu denir. Bu durumda G topolojik grubuna Δ üzerinde hareket ediyor veya G topolojik grubu Δ üzerinde bir hareket grubudur denir. Kolaylık olması açısndan (G, Δ, ξ) yerine kısaca $[G, \Delta]$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.11: $[G, X]$ ikilisi bir topolojik dönüşüm grubu ve $x, y \in X$ olsun. Bu durumda $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G : y = gx$ olarak tanımlanırsa "$\sim$" bağıntısı X kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Bu "$\sim$" denklik bağıntısının her bir denklik sınıfına hareketin yörüngeleri adı verilir. Ayrıca $x \in X$ noktasını içeren yörüngeye x noktasının yörüngesi denir ve Gx ile gösterilir. Açık olarak $Gx = \{gx : g \in G\}$ dir.

Tanım 1.2.12: G grubu X kümesi üzerinde hareket etsin ve $x, y \in X$ keyfi iki nokta olsun. Bu takdirde $gx = y$ olacak şekilde bir $g \in G$ elemanı varsa G grubuna X kümesi üzerinde geçişli (transitif) olarak hareket eder denir.

Tanım 1.2.13: G grubu X kümesi üzerinde hareket etsin ve $x \in X$ keyfi bir nokta olsun. $G_x = \{g \in G : gx = x\}$ kümesine x noktasının G grubundaki sabitleyeni denir.

Lemma 1.2.1: $[G, X]$ bir topolojik dönüşüm grubu ve X bir Hausdorff uzayı olsun. Bu takdirde $G_x = \{g \in G : gx = x\}$ sabitleyeni G grubunun kapalı bir alt grubudur.

İspat: Öncelikle $G_x \leq G$ olduğunu gösterelim. $G_x \leq G \Leftrightarrow \forall g_1, g_2 \in G_x$ için $g_1 g_2^{-1} \in G_x$ şeklindedir. Buradan $\forall g_1, g_2 \in G_x$ için $g_1 x = x$, $g_2 x = x$ olup $g_2^{-1} x = x$ ve $g_1 g_2^{-1} x = g_1(g_2^{-1} x) = g_1 x = x \Rightarrow g_1 g_2^{-1} \in G_x$ elde edilir. Şimdi G_x sabitleyeninin G grubunun bir kapalı alt kümesi olduğunu gösterelim. $x \in X$ keyfi fakat sabit bir nokta olsun. Bu durumda $T_0 : G \to X$, $T_0(g) = gx$ dönüşümü sürekli ve X Hausdorff uzayı olduğundan $T_0^{-1}(\{x\}) = G_x$ kapalıdır. Böylece $G_x \leq G$ ve G_x sabitleyeni kapalıdır.

Lemma 1.2.2: $[G, X]$ ikilisi bir topolojik dönüşüm grubu ve $y_0 \in G_x$ keyfi fakat sabit bir nokta olsun. Bu durumda $D = \{g \in G : y_0 = gx\}$ kümesi G_x sabitleyenin bir yan sınıfıdır.

İspat: $y_0 \in G_x$ olduğundan $\exists g_0 \in G : y_0 = g_0 x$ şeklindedir. Buradan yola çıkarak $g_0 G_x = D$ olduğunu gösterelim. $a \in g_0 G_x$ keyfi bir nokta olsun. Böylece $a = g_0 g_1$ olacak şekilde $g_1 \in G_x$ mevcuttur. Açıkça $ax = g_0 g_1 x = g_0 x = y_0$ dir. Dolayısıyla bu durum $a \in D$olduğunu gösterir. Buradan $g_0 G_x \subset D$ dır. Şimdi $g \in D$ alalım. Bu ise $gx = y_0$ olur. Böylelikle $gx = y_0 = g_0 x \Rightarrow g_0^{-1} gx = x \Rightarrow g_0^{-1} g \in G_x$ olup açıkça $g \in g_0 G_x$ elde edilir. Yani $D \subset g_0 G_x$ olur. O halde sonuç olarak $g_0 G_x \subset D$ ve $D \subset g_0 G_x$ olduğundan $D = g_0 G_x$ bulunur.

Lemma 1.2.3: $[G, X]$ ikilisi bir topolojik dönüşüm grubu olsun. Bu durumda $x \in X$ keyfi fakat sabit bir nokta olmak üzere $\tau : G/G_x \to Gx$, $\tau(gG_x) = Gx$ dönüşümü birebir ve örtendir.

İspat: Önce $\tau : G/G_x \to Gx$, $\tau(gG_x) = Gx$ dönüşümün birebir olduğunu gösterelim. Cebirden biliyoruz ki iki yan sınıf ya çakışır ya da ayrık iki küme biçimindedir. $\tau(g_1 G_x) = \tau(g_2 G_x)$ olsun. Buradan $g_1 x = g_2 x \Rightarrow g_1^{-1} g_2 x = x \Rightarrow g_1^{-1} g_2 \in G_x$ olup $g_2 \in g_1 G_x$ dir. Böylece $g_2 \in g_2 G_x$ ise $g_1 G_x = g_2 G_x$ elde edilir. $a \in G_x$ ve $a \in G_y \Rightarrow G_x = G_y$ eşitliği elde edilir.

Şimdi τ dönüşümünün örten bir dönüşüm olduğunu gösterelim. $h \in G_x$ keyfi olsun. Bu durumda $\exists g_0 \in G : h = g_0 x$ dir. $\tau(g_0 G_x) = g_0 x = h \in G_x \Rightarrow g_0 G_x \in G / G_x$ olup τ dönüşümü örtendir.

Lemma 1.2.4: $[G, X]$ ikilisi bir topolojik dönüşüm grubu ve $y = gx$ keyfi bir nokta olsun. Bu takdirde $G_y = gG_x g^{-1}$ dir. Yani, bir yörüngedeki farklı iki elemanın sabitleyenleri eşlenik alt gruplardır.

İspat: $g_0 \in G_y$ keyfi bir nokta olsun. Bu durumda $G_y = \{g \in G: gy = y\}$ şeklinde olduğundan $g_0 y = y$ dir. Böylece $y = gx$ ifadesinden $g_0 gx = gx \Rightarrow g^{-1} g_0 gx = x$ olup $g^{-1} g_0 g \in G_x \Rightarrow g_0 g \in gG_x$ elde edilir. Yani $g_0 \in gG_x g^{-1}$ olup $G_y \subset gG_x g^{-1}$ dir. Tersine $h \in gG_x g^{-1}$ olsun. Buradan $\exists g_0 \in G_x : h = gg_0 g^{-1}$ yazılabilir. Şimdi hy ifadesini açalım. $hy = gg_0 g^{-1} y = gg_0 x = gx = y \Rightarrow h \in G_y$ bulunur. Dolayısıyla $gG_x g^{-1} \subset G_y$ elde edilir. Sonuç olarak $G_y = gG_x g^{-1}$ dir.

Topolojik dönüşüm gruplarına ait örnekler:

Örnek 1.2.2:

1) G herhangi bir topolojik grup olsun. $[G, X]$ çifti $\forall g \in G$ ve $\forall x \in X$ için aşağıdaki gibi üç değişik şekilde bir topolojik dönüşüm grubu olarak tanımlanabilir:

i. $g \wedge x = gx$ (sol gösterim)
ii. $g \wedge x = xg^{-1}$ (sağ gösterim)
iii. $gx = gxg^{-1}$ (birleşik gösterim)

2) G herhangibir topolojik grup ve $H \leq G$ kapalı bir alt grup olsun. Bu takdirde,

i. $[G, H]$ çifti $h \wedge g = hg$ kuralı ile bir topolojik dönüşüm grubudur.

Özel olarak $G = (\mathbb{C}, +)$ ve $H = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ için $[H, G]$ topolojik dönüşüm grubudur.

ii. $[G, G / H]$, $g_1 \wedge g_2 H = g_1 g_2 H$ ile bir topolojik dönüşüm grubudur.

3) $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{C}_\infty$ Riemann küresi verilsin. $\mathbb{C}_\infty$ üzerindeki Euclid topolojisiyle birlikte sonsuzun bütün komşulukları kompleks düzlemdeki tüm kompakt alt kümelerin bütünleyenlerini oluştururlar.

Fonksiyonlarının bileşke işlemine göre $\mathbb{C}_\infty$ uzayından $\mathbb{C}_\infty$ uzayına tanımlanan $G = \left\{ \frac{az+b}{cz+d} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ ve } ad - bc \neq 0 \right\}$ grubu otomorfizmlerin bir grubudur ve $PGL(2, \mathbb{C})$ ile gösterilir. G üzerindeki topoloji $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ kompleks sayıları ile tanımlanır. Yani G grubunun her bir elemanı $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ olarak göz önüne alınırsa ve ayrıca burada $(-a, -b, -c, -d)$ ile (a, b, c, d) elemanları birbirleriyle denkleştirilirse G üzerinde özdeşleştirme ile bir topoloji tanımlanabilir. Bu durumda $[PGL(2, \mathbb{C}), \mathbb{C}_\infty]$ bir topolojik dönüşüm grubudur.

Tanım 1.2.14: $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme ve $S(X) = \{f \mid f{:}X \to X \text{ birebir ve örten}\}$ olsun. $(S(x), \circ)$ bileşke işlemine göre açıkça bir gruptur ve bu grubun elemanlarına permütasyonlar denir. $(S(x), \circ)$ grubunun alt gruplarına permütasyon grubu adı verilir.

G grubu X kümesi üzerinde bir permütasyon grubu olsun. Bu takdirde G grubu X üzerinde hareket eder. Gerçekten $g \in G$ ise bu durumda $g{:}\, X \to X$ birebir ve örten bir dönüşümdür. Böylece $gx = g(x)$ olarak alınırsa buradan açıkça görülebilir ki $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$ ve $1x = x$ olur. Dolayısıyla bu harekete G grubunun X kümesi üzerindeki doğal hareketi adı verilir. Böylelikle "(G, X) permütasyon grubu" ifadesi kullanılır. Ayrıca G grubu X kümesi üzerinde geçişli olarak hareket ediyorsa "(G, X) transitif permütasyon grubu" ifadesi kullanılır.

Tanım 1.2.15: $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için $1 \leq a < n$ ve $(a, n) = 1$ olan tamsayılarının sayısı $\varphi(n)$ ile gösterilir. Bu fonksiyona Euler fonksiyonu adı verilir.

Eğer $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} p_3^{r_3} \ldots p_s^{r_s}$ ise bu takdirde $\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right)$ dir.

1.3 Hiperbolik Geometri

Hiperbolik Geometrinin ortaya çıkış esasına bakıldığında Euclid'in beş temel postulatının beşincisine dayandığı görülmektedir. Bu postulatlar şunlardır:

1) İki noktadan sadece bir doğru geçer.
2) Doğru parçalarının her iki ucu sonsuza kadar aynı yönde bir doğru boyunca uzatılabilir.
3) Merkezi ve yarıçapı verildiğinde bir çember çizilebilir.
4) Düzlemdeki tüm dik açılar birbirine denktir.
5) Bir doğruya dışındaki bir noktadan bir tek paralel doğru çizilebilir.

İlk dört postulat verildiği zaman, açıkça beşincisinin aşağıda verilen paralellik postulatına denk olduğu kolaylıkla görülmektedir. Beşinci postulat deyimi yerine sıklıkla paralellik postulatı da kullanılmaktadır.

Paralellik Postulatı: Düzlemde bir nokta ve bu noktayı üzerinde bulundurmayan bir doğru verildiği zaman, bu noktadan geçen ve verilen doğruya paralel bir tek doğru geçer.

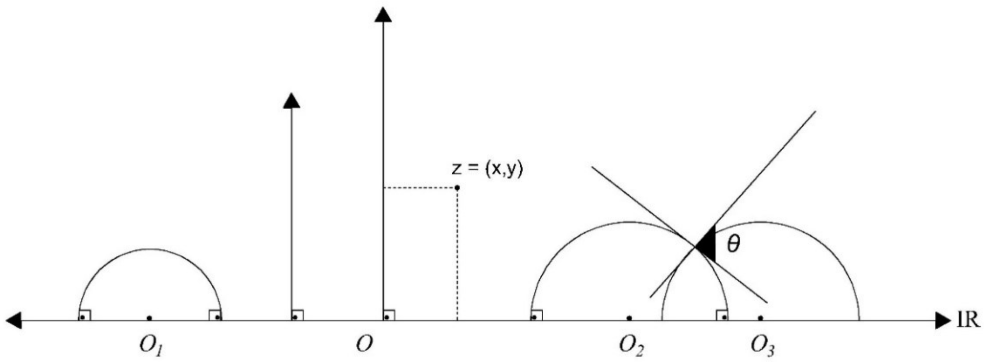
İki bin yıldan fazla süre boyunca matematikçiler ilk dört postulattan beşinci postulatı elde etmeye çalışmışlardır. Bunun için her bir duruma ilave postulatlar yaparak beşinci postulata indirgemeye çalışmışlar ve sonuçta bunların beşinci postulata denk olduğu kanaatine varmışlardır. Bilim adamları XIX. yüzyılda bu konu üzerine oldukça yoğun çalışmalar yapmış ve beşinci postulatı değişik bir açıdan incelemeye çalışmışlardır. " Euclid'in paralellik aksiyomu diğer aksiyomlardan bağımsızdır" sonucunu ortaya koyan Gauss, konuyla ilgili olarak Euclid geometrisinin evrensel sayılan gerçeklerini yıkıyordu. Çünkü paralellik aksiyomu değiştirilirse örneğin; "bir doğruya dışındaki bir noktadan sonsuz çoklukta paralel doğrular çizilebilir" denilirse Euclid'in diğer aksiyomları ile birlikte çelişkisiz bir sistem oluşur. Ama bu sistemin oluşturduğu geometri Euclid geometrisinden farklı bir geometri olur, diyerek yeni bir geometrinin ortaya çıkmasına temel teşkil etmiştir. Böylece Gauss'un deyimiyle "Euclid olmayan bir geometri" ortaya çıkar. Gauss bu kadarla yetinmeyip evrenin hem Euclid geometrisi ile hem de Euclid olmayan bir geometri ile temsil edilebileceğini söyledi. Bunun anlamı şudur: bir geometri, içinde yaşadığımız uzay hakkındaki doğruları değil, kurumsal olarak mümkün uzaylar hakkındaki gerçekleri inceler. Farklı iki geometrinin aynı evreni temsil etmemesi için de hiç bir neden yoktur. Euclid olmayan geometriler kendi sistemlerinin içindeki değerleriyle birlikte evrenin değişik amaçları için temsil etme yetenekleri yanında ayrıca matematiğe yeni bir bakış açısı da sunmuşlardır.

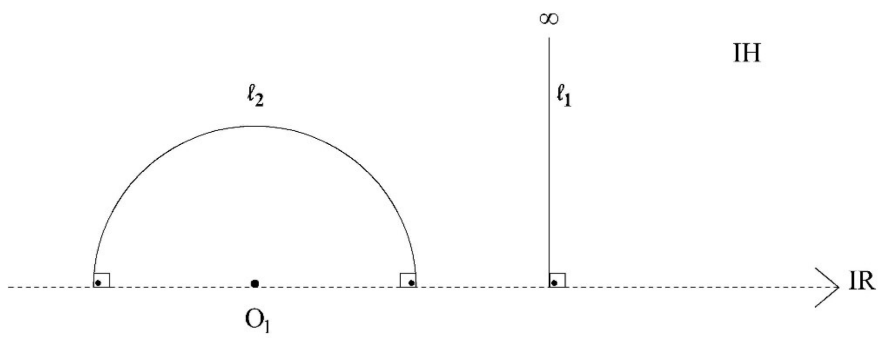
Euclid olmayan geometrilerden ilki Eliptik geometridir. Bu geometride "bir doğruya dışındaki bir noktadan hiç bir paralel çizilemez" şeklinde paralellik aksiyomu vardır. Bir diğeri ise "bir doğruya dışındaki bir noktadan sonsuz çoklukta paralel doğru çizilebilir" şeklindeki paralellik aksiyomunu kullanan Hiperbolik geometridir. Matematikte tasarlanan her geometri kendisine uygun çalışma alanı olması açısından modeller seçer. Hiperbolik geometri de kendisine paralellik aksiyomu nedeniyle pek çok model edinmiştir. Bu modeller arasında en çok kullanılan kompleks üst yarı düzlem modeli ve Poincare daire modelidir.

1.3.1 Hiperbolik Geometrinin Üst Yarı Düzlem Modeli

Tanım 1.3.1.1: $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ kümesine üst yarı düzlem denir.

Bu çalışmamızda hiperbolik geometri için üst yarı düzlem modelini kullanacağız.

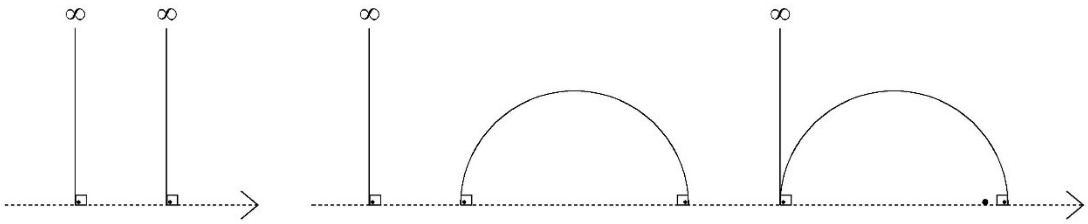




Şekil 1.3. 1 : Üst yarı düzlemde hiperbolik doğrular

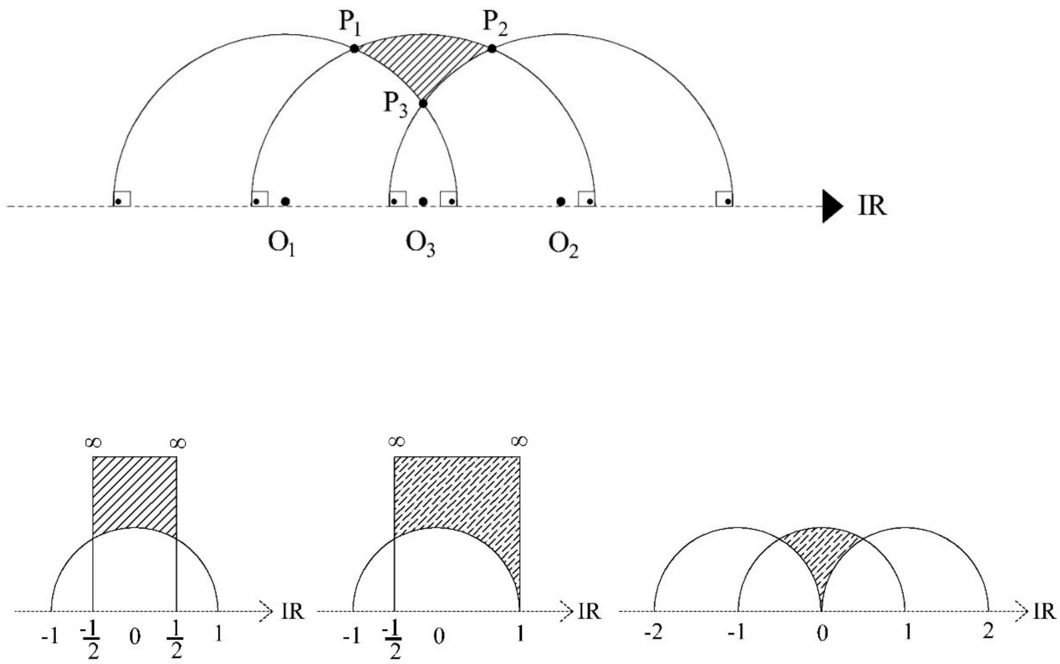
Tanım1.3.1.2: $\mathbb{C}$ kompleks düzlemde $\mathbb{R}$ reel eksene dik Euclid doğrularının $\mathbb{H}$ üst yarı düzlemle ile arakesiti olan yarı Euclid doğrularına ve $\mathbb{R}$ reel eksene dik bilinen Euclid çemberlerinin $\mathbb{H}$ üst yarı düzlemle ile arakesitlerine hiperbolik doğrular adı verilir. Kısaca $\mathbb{R}$ eksenine dik olan çemberlerin $\mathbb{H}$ üst yarı düzlemde kalan yay parçalarına hiperbolik doğrular adı verilir. Burada reel eksene dik $\mathbb{H}$ üst yarı düzlemde kalan yarı doğruları sonsuz yarıçaplı çemberler veya merkezi sonsuzda olan çemberler olarak alınmaktadır.

Tanım 1.3.1.3: l_1 ve l_2 iki hiperbolik doğru olsun. Eğer $l_1 \cap l_2 = \emptyset$ ise bu takdirde l_1 ve l_2 hiperbolik doğrularına paralel hiperbolik doğrular denir. Bu durum $l_1 // l_2$ ile gösterilir.



Şekil 1.3. 2 : Üst yarı düzlemde paralel hiperbolik doğrular

Tanım 1.3.1.4: $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ genişletilmiş kompleks düzlem olmak üzere n tane hiperbolik doğru parçası tarafından sınırlanan ve $\mathbb{H}$ üst yarı düzlemin $\mathbb{C}_\infty$ uzayındaki kapanışında bulunan bir kapalı kümeye n kenarlı hiperbolik bir poligon adı verilir. Üç kenarlı poligonlara hiperbolik üçgen denir. Eğer bir hiperbolik poligonda herhangi iki hiperbolik doğru parçası kesişiyorsa bu kesim noktasına köşe adı verilir. Aşağıda bir hiperbolik üçgenin köşe noktaları ile çeşitli hiperbolik üçgenler gösterilmiştir.



Şekil 1.3. 3 : Hiperbolik üçgenler

Örnek 1.3.1.1: $PSL(2,\mathbb{R}) = \left\{T: z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d} \;\middle|\; a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad-bc=1\right\}$ bileşke işlemine göre bir gruptur. $PSL(2,\mathbb{R})$ kümesi $\mathbb{R}^4$ uzayının bir alt kümesi olarak düşünebilir. Dolayısıyla $T: z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$ ise açıkça bu dönüşümün katsayıları reel olup $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ şeklindedir. Buradan $(a,b,c,d) \sim (-a,-b,-c,-d)$ alınırsa yani bir özdeşlik kurulursa bu durumda $PSL(2,\mathbb{R})$ üzerindeki topolojiyi bir bölüm topolojisi olarak $\{a,b,c,d \in \mathbb{R}^4: ad-bc=1\} \,/\, \sim$ üzerindeki topoloji şeklinde tanımlanabilir. Böylece bu topolojiyle birlikte $PSL(2,\mathbb{R})$ bir topolojik gruptur. Ayrıca üst yarı düzlem düşünülürse $\mathbb{H}=\{a+ib: a,b\in\mathbb{R}, b>0\}$ için $[PSL(2,\mathbb{R}),\mathbb{H}]$ ikilisi de bir topolojik dönüşüm grubu oluşturur.

Yukarıda $[PSL(2,\mathbb{R}),\mathbb{H}]$ ikilisinin bir topolojik dönüşüm grubu olduğunu ifade edildi. Buradan $PSL(2,\mathbb{R})$ grubunun herhangi bir elemanının $\mathbb{H}$ üst yarı düzlemi $\mathbb{H}$ üst yarı düzleme resmettiğini göstermemiz gerekir. Bunun için öncelikle bir dönüşüm alalım. z noktası $\mathbb{H}$ üst yarı düzlemde herhangi bir nokta ve $T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ keyfi olsun. O halde

$$T(z)=\frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2}=\frac{ac|z|^2+a\,dz+bc\bar{z}+b\,d}{|cz+d|}$$

ifadesi sanal ve reel kısımlara ayrıldığında üst yarı düzlem için sadece sanal kısmını incelenirse

$$\mathrm{Im}\big(T(z)\big)=\frac{(a\,d-bc)y}{|cz+d|^2}=\frac{y}{|cz+d|^2}>0$$

olduğu ortaya çıkar. Çünkü $z=x+iy\in\mathbb{H}$ ise $y>0$ dır.

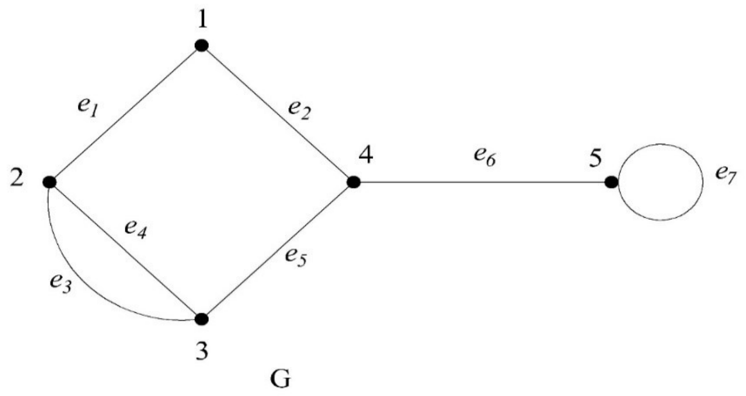
Böylece her bir $T\in PSL(2,\mathbb{R})$ dönüşümü $\mathbb{H}$ üst yarı düzlemi $\mathbb{H}$ üst yarı düzlem üzerine resmeder.

1.4 Graf Teori

Tanım 1.4.1: Elemanları nokta olarak adlandırılan sonlu ve ayrıca boş olmayan bir $V=\{1,2,\dots,n\}$ nokta kümesi ile elemanları kenar olarak adlandırılan sonlu sayıda bir E kenarlar kümesinden oluşan (V,E) ikili yapıya graf adı verilir. Genel olarak graf $\mathrm{G}=(V,E)$ ya da kısaca G ile gösterilir.

Burada $E=\big\{\{i,j\}: i,j\in V\big\}$ şeklinde tanımlıdır. Ayrıca her $i,j\in V$ için E kümesinin i ve j noktalarına karşılık gelen elemanları e_i ile gösterilir.

Örnek 1.4.1:



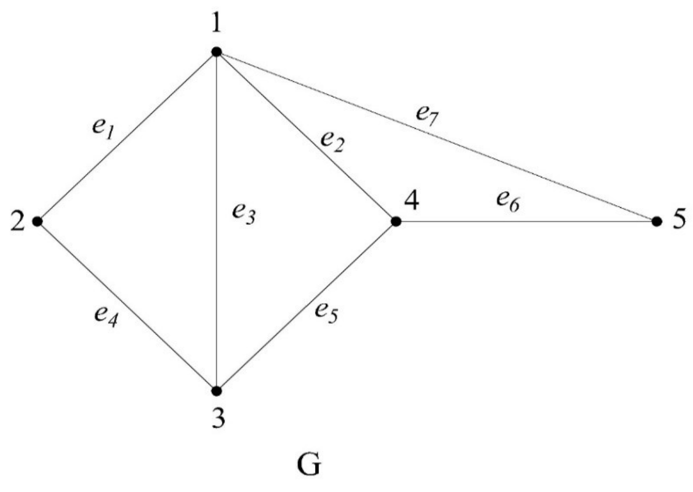
Şekil 1.4. 1 : Bir grafta kenar ve köşeler

G grafının noktalar kümesi ve kenarlar kümesi sırasıyla $V = \{1,2,3,4,5\}$

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ dir.

Tanım 1.4.2: $\mathrm{G} = (V, E)$ ikilisi bir graf olmak üzere, G grafının herhangi bir i ve j noktaları arasında en az bir kenar bulunuyorsa i ve j noktalarına komşudur denir ve $i \sim j$ ile gösterilir. Bir i noktasına komşu olan noktaların kümesine i noktasının komşuluklar kümesi denir ve N_i ile gösterilir.

Örnek 1.4.2:

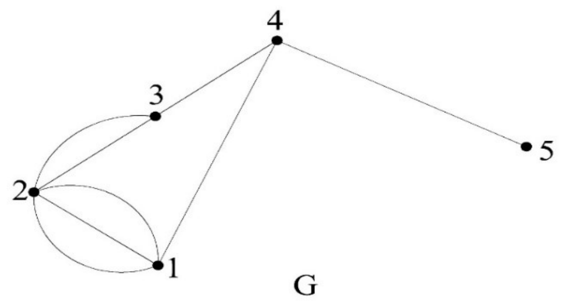


Şekil 1.4. 2 : Bir grafta kenar ve köşeler

G grafının tüm komşuluklardan oluşan kümeleri N_1={2,3,4,5}, N_2={1,3}, N_3={1,2,4}, N_4={1,3,5}, N_5={1,4} dir.

Tanım 1.4.3: $\mathrm{G} = (V, E)$ grafının herhangi bir i noktasına bağlı kenar sayısına i noktasının derecesi denir ve $d_G(i)$ ya da kısaca d_i ile gösterilir.

Örnek 1.4.3:



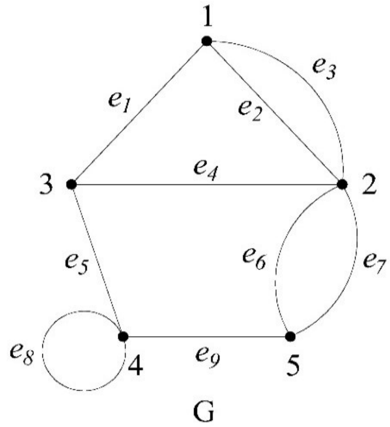
Şekil 1.4. 3 : Bir grafın derecesi

$d_G(1)$=4 , $d_G(2)$=5 , $d_G(3)$=3 , $d_G(4) = 3$, $d_G(5) = 1$

Tanım 1.4.4: Başlangıç ve bitiş noktası aynı olan kenara düğüm adı verilir.

Tanım 1.4.5: Grafın herhangi iki noktası arasında birden fazla kenar bulunuyorsa bu kenarlara katlı kenar veya paralelkenar denir.

Örnek 1.4.4:

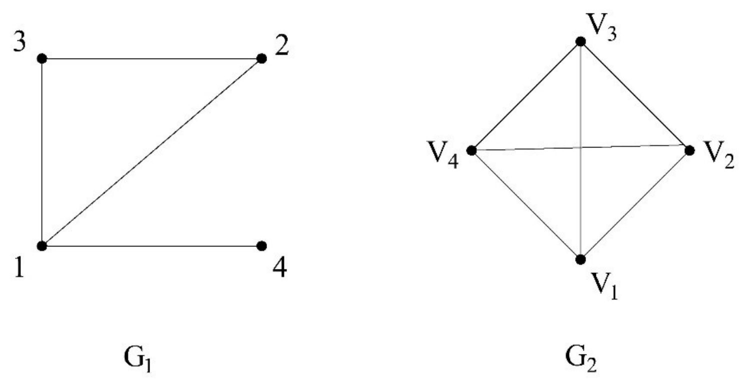


Şekil 1.4. 4 : Bir grafta paralelkenar ve düğüm

G grafında e_2 ile e_3 , e_6 ile e_7 paralelkenardır. e_8 ise bir düğümdür.

Tanım 1.4.6: Herhangi iki noktası arasında en fazla bir kenar bulunan ve düğüm içermeyen grafa basit graf denir.

Örnek 1.4.5:

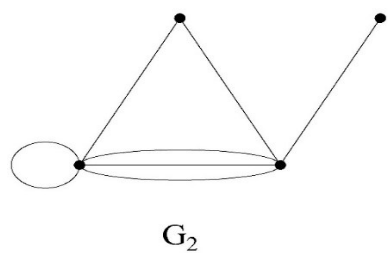


Şekil 1.4. 5 : Basit graf

Tanım 1.4.7: Herhangi iki noktası arasında birden fazla kenar bulunan yani katlı kenar içeren grafa çoklu graf denir.

Tanım 1.4.8: Katlı kenar ve düğüm içeren grafa pseudo graf denir.

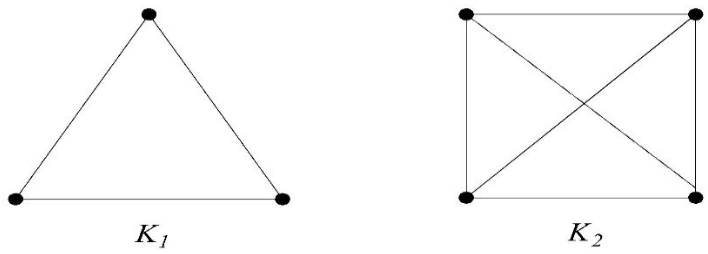
Örnek 1.4.6:



Şekil 1.4. 6 : Pseudo graf

Tanım 1.4.9: Basit bir grafın herhangi iki noktası arasında bir kenar bulunuyorsa yani her bir nokta çifti bağlantılı ise bu grafa tam graf denir ve n noktalı bir tam graf K_n ile gösterilir.

Örnek 1.4.7:



Şekil 1.4. 7 : Tam graf

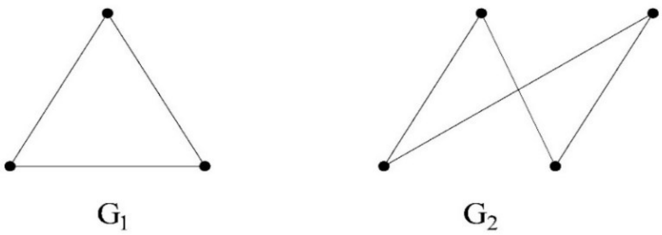
Tanım 1.4.10: Yalnızca izole nokta içeren grafa boş graf denir ve n noktalı bir boş graf N_n ile gösterilir. Boş grafın kenarlar kümesi boştur.

Örnek 1.4.8:

Şekil 1.4. 8 : Boş graf

Tanım 1.4.11: Her bir noktası aynı dereceye sahip olan grafa regüler graf denir. Özel olarak her bir noktası r dereceye sahip olan grafa r-dereceli regüler graf denir.

Örnek 1.4.9:



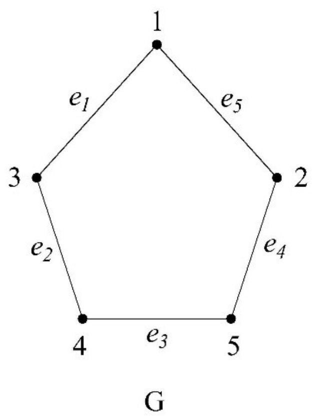
Şekil 1.4. 9 : İki dereceli regüler graf

Tanım 1.4.12: Bir grafın sonlu sayıda birbiriyle bağlantılı noktalarından ve kenarlarından oluşan dizisine yürüyüş denir ve W ile gösterilir.

Tanım 1.4.13: Her bir kenarın ve noktanın en fazla bir kez kullanıldığı yürüyüşe yol denir ve P ile gösterilir.

Tanım 1.4.14: Başlangıç ve bitiş noktası aynı olan yola devre denir ve n noktalı bir devre C_n ile gösterilir.

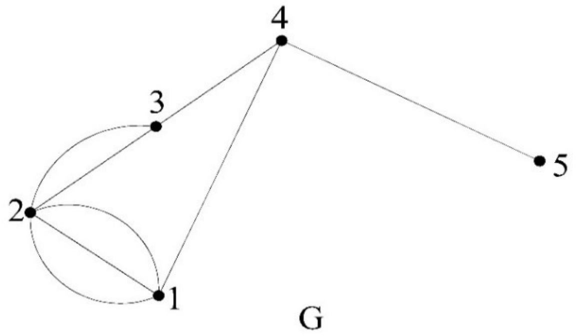
Örnek 1.4.10:



Şekil 1.4. 10 : $\boldsymbol{C_5}$ devre

Tanım 1.4.15: Herhangi iki noktası arasında bir yol bulunan grafa bağlantılı graf denir.

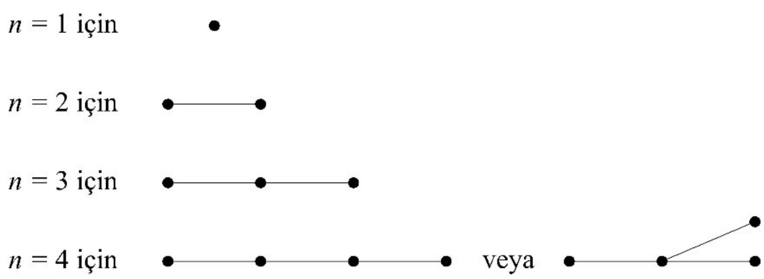
Örnek 1.4.11:



Şekil 1.4. 11 : Bağlantılı graf

Tanım 1.4.16: İçinde devre bulundurmayan bağlantılı grafa ağaç graf veya kısaca ağaç denir. n noktalı bir ağaç T_n ile gösterilir.

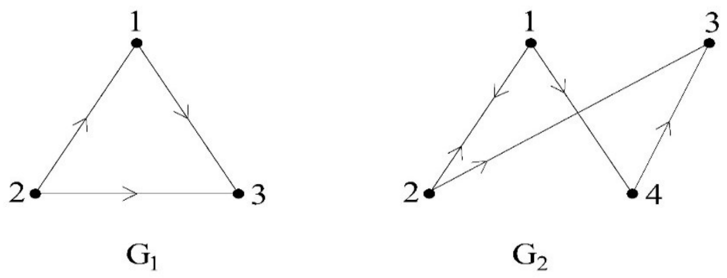
Örnek 1.4.12:



Şekil 1.4. 12 : Ağaç graf

Tanım 1.4.17: Her bir kenarına yön verilerek oluşturulan grafa yönlü graf denir. Yönlü grafta yön, kenarın başlangıç noktasından bitim noktasına doğru verilir.

Örnek 1.4.13:



Şekil 1.4. 13 : Yönlü graf

1.5 Genel Möbius Grubu

Tanım 1.5.1: $PGL(2,\mathbb{C}) = \{M: \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty | M(z) = \frac{az+b}{cz+d}; a,b,c,d \in \mathbb{C}, ad-bc \neq 0\}$ kümesi bileşke işlemine göre bir gruptur ve bu gruba genel Möbius grubu adı verilir.

Sonuç 1.5.1: Burada $ad - bc \neq 0$ ifadesi yerine $ad - bc = 1$ alınabilir.

İspat: $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ için $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ Möbius dönüşümünü keyfi alalım.

$ad - bc \neq 0$ olduğuna göre $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$ olacak şekilde $\lambda = \frac{1}{\sqrt{ad-bc}}$ seçilirse;

$$M(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\lambda(az+b)}{\lambda(cz+d)} = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d} = \frac{\frac{a}{\sqrt{ad-bc}}z + \frac{b}{\sqrt{ad-bc}}}{\frac{c}{\sqrt{ad-bc}}z + \frac{d}{\sqrt{ad-bc}}}$$

elde edilir. Bu dönüşümün determinantı;

$$\frac{a}{\sqrt{ad-bc}}\frac{d}{\sqrt{ad-bc}} - \frac{b}{\sqrt{ad-bc}}\frac{c}{\sqrt{ad-bc}} = \frac{ad-bc}{ad-bc} = 1$$

olur. Dolayısıyla kolaylık olması açısından Möbius dönüşümünün tanımında olan $ad - bc \neq 0$ yerine $ad - bc = 1$ alınabilir.

Tanım 1.5.2: $\alpha \in \mathbb{C}$ olmak üzere $M: \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, $M(z) = \begin{cases} z+\alpha \ , & z \neq \infty \\ \infty \ , & z = \infty \end{cases}$ olarak tanımlanan $M(z)$ dönüşümüne öteleme dönüşümü adı verilir.

Tanım 1.5.3: $M: \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, $\begin{cases} \frac{1}{z} \ , & z \neq \infty \\ 0 \ , & z = \infty \\ \infty \ , & z = 0 \end{cases}$ olarak tanımlanan $M(z)$ dönüşümüne tersleme dönüşümü adı verilir. Açıkça bu dönüşüm bir homeomorfizmadır.

Tanım 1.5.4: $\alpha \in \mathbb{C}$ olmak üzere $M: \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, $M(z) = \begin{cases} \alpha z \ , & z \neq \infty \\ \infty \ , & z = \infty \end{cases}$ olarak tanımlanan $M(z)$ dönüşümüne çarpım dönüşümü adı verilir.

Teorem 1.5.1: Her $M \in PGL(2, \mathbb{C})$ olan $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ Möbius dönüşümü öteleme, terslme ve çarpım dönüşümlerinin bileşkesi olarak yazılır.

İspat: Önce $c = 0$ olsun. Bu durumda $M(z) = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ ve $ad - bc \neq 0$ olduğundan dolayı $ad \neq 0$ olur. Buradan $M_1 = \frac{a}{d}z$ ve $M_2 = z + \frac{b}{d}$ olarak alınırsa, $M(z) = (M_2 \circ M_1)(z) = M_2\left(\frac{a}{d}z\right) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ elde edilir. Eğer $c \neq 0$ ise bu takdirde $M_1(z) = z + \frac{a}{c}$, $M_2(z) = z + \frac{d}{c}$, $M_3(z) = \frac{1}{z}$, $M_4(z) = \frac{bc-ad}{c^2}z$ olarak seçilirse açıkça $M = M_1 \circ M_4 \circ M_3 \circ M_2$ bileşkeleri şeklindedir. Gerçekten,

$$M(z) = (M_1 \circ M_4 \circ M_3 \circ M_2)(z) = (M_1 \circ M_4 \circ M_3)\left(z + \frac{d}{c}\right) = (M_1 \circ M_4)\left(\frac{1}{z + \frac{d}{c}}\right)$$

$$= M_1\left(\frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z+\frac{d}{c}}\right) = \frac{bc-ad}{c^2}\frac{c}{cz+d} + \frac{a}{c} = \frac{bc-a\,d}{c(cz+d)} + \frac{a}{c} = \frac{az+b}{cz+d}$$ elde edilir. Ayrıca $z = -\frac{d}{c}$ olmak üzere $M\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$ olur. Gerçekten,

$$M(z) = (M_1 \circ M_4 \circ M_3 \circ M_2)(z) = (M_1 \circ M_4 \circ M_3 \circ M_2)\left(-\frac{d}{c}\right)$$

$$= (M_1 \circ M_4 \circ M_3)(0)$$

$$= (M_1 \circ M_4)(\infty) = M_1(\infty) = \infty$$

elde edilir. Böylece $z \in \mathbb{C}_\infty$ için $M = M_1 \circ M_4 \circ M_3 \circ M_2$ dir.

Teorem 1.5.2: $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ üç farklı sabit nokta olsun. Bu takdirde $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = 1$, ve $T(z_3) = \infty$ olacak şekilde tek bir Möbius dönüşümü vardır. Bu dönüşüm $T(z) = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$ şeklindedir.

Teorem 1.5.3: $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ şeklinde üç farklı noktayı $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_\infty$ gibi üç farklı noktaya resmeden bir tek Möbius dönüşümü vardır.

Sonuç 1.5.1: $PSL(2,\mathbb{R}) = \{M: \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty \mid M(z) = \frac{az+b}{cz+d}, ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ kümesi katsayıları reel olup $PGL(2,\mathbb{C})$ grubunun bir alt grubudur.

Tanım 1.5.5: $M \in PSL(2,\mathbb{R})$ ve $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc = 1$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere $M(z) = z$ denklemini sağlayan noktalara M dönüşümünün sabit noktaları denir. Dolayısıyla $M(z) \neq I(z)$ olmak üzere $\frac{az+b}{cz+d} = z$ eşitliğinden $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ denklemi elde edilir. Buradaki M dönüşümünün en fazla iki sabit noktası vardır. Bu noktalar:

$$\Delta = (d-a)^2 + 4bc = d^2 + a^2 - 2ad + 4bc = d^2 + a^2 - 2(ad - bc) + 2bc$$

$$= d^2 + a^2 - 2 + 2bc = d^2 + a^2 - 2 + 2(ad - 1) = d^2 + a^2 + 2ad - 4$$

$= (a+d)^2 - 4$ olmak üzere

$$z_{1,2} = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c} = \frac{(a-d) \pm \sqrt{|a+d|^2 - 4}}{2c}$$

olur. Böylece üç durum söz konusudur:

I. $|a+d| = 2$ ise M dönüşümünün tek bir sabit noktası vardır ve bu sabit nokta ∞ veya bir reel sayıdır.

II. $|a+d| > 2$ ise M dönüşümünün farklı iki reel sayı olan iki sabit noktası vardır.

III. $|a+d| < 2$ ise M dönüşümünün iki kompleks eşlenik sabit noktası vardır.

Tanım 1.5.6: $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}, ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

I. $|a + d| = 2$ ise M dönüşümüne parabolik dönüşüm,
II. $|a + d| > 2$ ise M dönüşümüne hiperbolik dönüşüm,
III. $|a + d| < 2$ ise M dönüşümüne eliptik dönüşüm adı verilir.

Sonuç 1.5.2: $PSL(2, \mathbb{R})$ dönüşüm grubu

I. $\mathbb{H}$ üst yarı düzlemi $\mathbb{H}$ üst yarı düzlem üzerine,
II. Geodezikleri yine geodeziklere,
III. Çemberleri çemberlere resmederler.

Tanım 1.5.7: $\Lambda \leq PSL(2, \mathbb{R})$ alt grubu olmak üzere $U \cap \Lambda = \{I\}$ şartını sağlayan bir U komşuluğu varsa Λ alt grubuna $PSL(2, \mathbb{R})$ grubunun bir ayrık alt grubu denir.

Tanım 1.5.8: X bağlantılı bir Hausdorff topolojik uzayı olsun. $U \subset X$ açık alt kümesi ve $\zeta: U \to V \subset \mathbb{C}$ homeomorfizmasından meydana gelen (U, ζ) ikilisine X kümesinin bir koordinat komşuluğu adı verilir.

Tanım 1.5.9: X bağlantılı bir Hausdorff topolojik uzayı olsun. $U_1 \subset X, U_2 \subset X$ olmak üzere eğer $\zeta_1 \circ \zeta_2^{-1}: \zeta_2(U_1 \cap U_2) \to \zeta_1(U_1 \cap U_2)$ dönüşümü analitik ise (U_1, ζ_1) ve (U_2, ζ_2) koordinat komşuluklarına uyumludur denir.

Tanım 1.5.10: Herhangi bir bağlantılı Hausdorff topolojik uzayına bir kompleks yapıyla birlikte bir Riemann yüzeyi adı verilir.

Açıkça bağlantılı bir Hausdorff uzayının her noktasının bir komşuluğu $\mathbb{R}^2$ uzayının bir açık alt kümesine homeomorf olduğundan bir Riemann yüzeyi oluşturur. Benzer şekilde eliptik eleman içermeyen keyfi bir Λ ayrık alt grubu da $PSL(2, \mathbb{R})$ grubunun bir alt grubu olarak $\mathbb{H}$ üst yarı düzlem üzerinde hareket eder ve bölüm topolojisi ile meydana gelen bölüm uzayı yine bir Riemann yüzeyidir. Ayrıca $\mathbb{H}$ üst yarı düzlemdeki kompleks yapı eğer $\mathbb{H}/_{\Lambda}$ yüzeyine transfer edilirse bir Riemann yüzeyi elde edilir. Sonuç olarak Λ eliptik eleman içeriyorsa bir Riemann yüzeyidir, ancak bu durumda $\mathbb{H} \to \mathbb{H}/_{\Lambda}$ izdüşümü dallanmıştır. Fakat oluşan yüzey kompakt değildir. Kompaktlığı sağlamak için $\mathbb{H}$ üst yarı düzlem yerine $\mathbb{H} \cup \{\infty\}$ alınır.

Teorem 1.5.4: Her basit yapılı Riemann yüzeyi aşağıdakilerden birine konform olarak eşdeğerdir:

I. $\mathbb{C}_\infty$ Riemann küresi
II. $\mathbb{C}$ kompleks düzlem
III. $\mathbb{H}$ üst yarı düzlem

Bu Riemann yüzeylerinin otomorfizm grupları aşağıdaki gibidir.

Teorem 1.5.5:

I. $Aut(\mathbb{C}_\infty) = PSL(2, \mathbb{C})$
II. $Aut(\mathbb{C}) = \{z \to az + b : a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$
III. $Aut(\mathbb{H}) = PSL(2, \mathbb{R})$

Tanım 1.5.11: Λ bir ayrık alt grup olsun. $r \in \widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ rasyonel noktası keyfi verildiğinde $\gamma(r) = r$ olacak şekilde bir $\gamma \in \Lambda$ parabolik elemanı varsa, bu noktaya Λ ayrık alt grubunun bir parabolik noktası veya cusp noktası adı verilir.

Lemma 1.5.1: $\{T: z \to \frac{az+b}{cz+d} | a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ve $ad - bc = 1\}$ kümesi $PSL(2, \mathbb{R})$ grubunun bir alt grubudur.

Önerme 1.5.1:

i. $PSL(2, \mathbb{R})$ grubu $\mathbb{H}$ üst yarı düzleminde geçişli olarak hareket eder.
ii. $PSL(2, \mathbb{R})$ grubu $\mathbb{R}_\infty$ genişletilmiş reel eksen üzerinde ikili transitiftir.

İspat:

i. $a > 0$ için $ai + b \in \mathbb{H}$ keyfi olmak üzere, $M(z) = \frac{\frac{a}{\sqrt{a}}z + \frac{b}{\sqrt{a}}}{\frac{1}{\sqrt{a}}}$ olarak tanımlayalım. $M \in PSL(2, \mathbb{R})$ olduğu açıktır. Böylece $M(i) = ai + b$ olur. Dolayısıyla i noktasının yörüngesi bütün $\mathbb{H}$ üst yarı düzleme eşittir. Yani $PSL(2, \mathbb{R})$ grubunun $\mathbb{H}$ üzerindeki hareketi transitiftir.

ii. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a > b$ olsun. $K(z) = \frac{z-a}{z-b}$ olacak şekilde bir dönüşüm tanımlayalım. $K \in PSL(2, \mathbb{R})$ olduğu açıktır. Çünkü normalleştirme işlemi yapılırsa $K(z) = \frac{\frac{z}{\sqrt{a-b}} - \frac{a}{\sqrt{a-b}}}{\frac{z}{\sqrt{a-b}} - \frac{b}{\sqrt{a-b}}}$ olur. Böylece K dönüşümü (a, b) çiftini $(0, \infty)$ çiftine resmeder. Ayrıca $z \to -\frac{1}{z}$ dönüşümü de yine $PSL(2, \mathbb{R})$ grubunun elemanıdır ve $(0, \infty)$ çiftini $(\infty, 0)$ çiftine resmeder. Benzer şekilde $z \to z + b$ dönüşümü de $PSL(2, \mathbb{R})$ grubunun elemanıdır ve $(0, \infty)$ ikilisini (b, ∞) ikilisine resmeder. Buradan $(0, \infty)$ ikilisinin yörüngesi $PSL(2, \mathbb{R})$ grubunun hareketi altında $a, b \in \mathbb{R}_\infty, a \neq b$ olmak üzere (a, b) ikililerinden meydana gelir. Dolayısıyla $PSL(2, \mathbb{R})$ grubu $\mathbb{R}_\infty$ genişletilmiş reel eksen üzerinde ikili transitiftir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1 Modüler Grup

Tanım 2.1.1: $\Gamma = \{T \mid T: \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty, T(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ ve $ad - bc = 1\}$ grubuna Modüler grup adı verilir.

Katsayıları reel sayı olan $PSL(2,\mathbb{R})$ grubunun üzerinde en çok çalışılan alt grubu olan Modüler grubunu göz önüne alalım. Modüler grup ayrıca $PSL(2,\mathbb{Z})$ ile gösterilir. Bu grup aşağıdaki gibi 2×2 lik tamsayılar matrisiyle de temsil edilebilir:

$$K = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, detK = 1$$

Dolayısıyla K ve $-K$ matrisleri aynı dönüşümü temsil ettiğinden söz konusu olan K matrisi negatifi ile eş alınır. Çünkü gruptaki bileşke işlemiyle matrislerdeki çarpma işlemi arasında sıkı bir bağ vardır. Böylece matris ve dönüşüm arasında bir ayrım yapmaya gerek yoktur.

Teorem 2.1.1: $\Gamma = PSL(2,\mathbb{Z})$ Modüler grubu $T^2 = S^3 = I$ bağıntısı ile verilen $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ matris elemanları tarafından üretilir. Açıkça $\Gamma = \langle T, S \rangle$ dir. Burada I birim dönüşümdür.

Şimdi Modüler grubun sabit noktalarını inceleyelim. $PSL(2,\mathbb{Z})$ grubunun cusp yani parabolik nokta kümesi genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi olan $\widehat{\mathbb{Q}}$ dır. Gerçekten;

$A \in PSL(2,\mathbb{Z})$ olmak üzere A elemanının sabit noktaları $\frac{az+b}{cz+d} = z$ denkleminden $z_{1,2} = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c} = \frac{(a-d) \pm \sqrt{|a+d|^2 - 4}}{2c}$ şeklindedir. Parabolik dönüşümde $|a+d| = 2$ olduğundan $z = \frac{a-d}{2c}$ dir. Buradan $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ olduğundan $z = \frac{a-d}{2c} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ olduğu açıktır.

2.1.1 $PSL(2,\mathbb{Z})$ Modüler Grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ Üzerindeki Hareketi

$x, y \in \mathbb{Z}$ ve $(x, y) = 1$ olmak üzere $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ genişletilmiş rasyonel sayılar kümesinden alınan her bir eleman $\frac{x}{y}$ indirgenmiş kesri olarak yazılabilir. Dolayısıyla $\frac{x}{y} = \frac{-x}{-y}$ olduğundan verilen bu gösterim tek türlü değildir. Ayrıca sonsuz ifadesini $\infty = \frac{1}{0} = \frac{-1}{0}$ şeklinde temsil edeceğiz.

$PSL(2,\mathbb{Z})$ grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \frac{x}{y} \to \frac{ax+by}{cx+dy}$ şeklindedir. Burada $A \in PSL(2,\mathbb{Z})$ olmak üzere;

$$A\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{a \cdot \frac{x}{y} + b}{c \cdot \frac{x}{y} + d} = \frac{\frac{ax+by}{y}}{\frac{cx+dy}{y}} = \frac{ax+by}{cx+dy} \quad \text{ve} \quad A\left(\frac{-x}{-y}\right) = \frac{a \cdot \frac{-x}{-y} + b}{c \cdot \frac{-x}{-y} + d} = \frac{\frac{-ax-by}{y}}{\frac{-cx-dy}{y}} = \frac{-ax-by}{-cx-dy} = \frac{ax+by}{cx+dy}$$

olduğundan $A\left(\frac{x}{y}\right) = A\left(\frac{-x}{-y}\right)$ dir. Buradan $PSL(2,\mathbb{Z})$ Modüler grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketinin iyi tanımlı olduğunu söyleyebiliriz.

$(x, y) = 1$ ve $ad - bc = 1$ alınırsa $\frac{ax+by}{cx+dy}$ şeklindeki kesir indirgenmiş formdadır. Bunu göstermek için aksini varsayalım. Yani $\frac{ax+by}{cx+dy}$ indirgenmiş formda olmasın. Böylece $n | ax + by$ ve $n | cx + dy$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}$ tam sayı elemanı vardır. Bu durumda $k, l \in \mathbb{Z}$ tam sayıları için

$ax + by = kn$ ve $cx + dy = ln$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitliğin birincisi *d* ile ve ikincisi *–b* ile çarpıldığında $adx + bdy = knd$ve $-bcx - \ bdy = -bln$ eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa, $(ad - bc)x = (kd - bl)n$ bulunur. Buradan

$$(ad - bc)x = (kd - bl)n \xRightarrow{ad-bc=1} x = (kd - bl)n$$

elde edilir. Yine verilen eşitliklerde birinci olan eşitlik eşitliğinin *–c* ile ve ikinci olan eşitlik a ile çarpıldığında $-acx - bcy = -knc$ ve $acx + a\,dy = aln$ eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$(ad - bc)y = (al - ck)n \xRightarrow{ad-bc=1} y = (al - ck)n$$

elde edilir. Böylece son eşitliklerden $n|x$ ve $n|y$ olduğu görülür. Bu ise çelişkidir. Bu çelişki $(ax+by,\ cx+dy)=n>1$ olduğunu varsaymamızdan kaynaklanır. Böylece varsayım yanlıştır, yani $(ax+by, cx+dy)=1$ olmak zorundadır.

Teorem 2.1.1.1: $\Gamma = PSL(2,\mathbb{Z})$ Modüler grubunun genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi üzerindeki grup hareketi geçişlidir.

İspat: $v=\frac{a}{b},\ w=\frac{c}{d}\in\widehat{\mathbb{Q}}$ keyfi iki eleman olsun. Bu takdirde $A\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{c}{d}$ olan $A\in PSL(2,\mathbb{Z})$ dönüşümünün varlığı gösterilmelidir. Buradan her $v=\frac{a}{b}$ elemanının $\Gamma(\infty)=\{g(\alpha): g\in\Gamma\}$ yörüngesinde olduğunu göstermemiz yeterlidir. Çünkü $k(\infty)=\frac{a}{b}$ ve $l(\infty)=\frac{c}{d}$ olan $k,l\in PSL(2,\mathbb{Z})$ elemanları mevcut ise $T=lk^{-1}$ ile $T\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{c}{d}$ dir. $v=\frac{a}{b}\in\widehat{\mathbb{Q}}$ olsun. Bu durumda $(a,b)=1$ olduğundan $\exists x,y\in\mathbb{Z}$ öyle ki $ax-by=1$ dir. Böylelikle $g=\begin{pmatrix} a & x\\ b & y\end{pmatrix}\in PSL(2,\mathbb{Z})$ elde edilir. Ayrıca $\begin{pmatrix} a & x\\ b & y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ olduğundan $g(\infty)=\frac{a}{b}$ dir. Dolayısıyla $\frac{a}{b}$ elemanı sonsuzun yörüngesindedir. Yani Modüler grubun genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi üzerindeki grup hareketi geçişlidir.

Teorem 2.1.1.2: $\widehat{\mathbb{Q}}$ genişletilmiş rasyonel sayılar kümesinin herhangi bir noktasının sabitleyeni sonsuz devirli bir gruptur.

İspat: $\widehat{\mathbb{Q}}$ genişletilmiş rasyonel sayılar kümesinin herhangi iki elemanının sabitleyenleri $PSL(2,\mathbb{Z})$ grubunda eşlenik olduklarından sonsuzun sabitleyeni olan Γ_∞ grubunu göz önüne almak yeterlidir. $\Gamma_\infty=\left\{\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}: b\in\mathbb{Z}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\rangle$ dır. Gerçekten; $T=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_\infty$ olsun. Buradan $T(\infty)=\infty$ olur. $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow a=1$ ve $c=0$ dır ve ayrıca $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_\infty\subset PSL(2,\mathbb{Z})$ olduğundan $ad-bc=1$ dir. $1\cdot d-b\cdot 0=1\Rightarrow d=1$ dir. O halde $T=\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}, b\in\mathbb{Z}$ formundadır. Böylece $\Gamma_\infty=\left\{\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}: b\in\mathbb{Z}\right\}$ dir. Sonuç olarak Γ_∞ $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ elemanı ile üretilen sonsuz devirli bir gruptur. Dolayısıyla $\widehat{\mathbb{Q}}$ da herhangi bir noktanın sabitleyeni sonsuz devirli bir grup olur.

2.1.2 $PSL(2,\mathbb{Z})$ Modüler Grubun Kongrüans Alt Grupları

Tanım 2.1.2.1: n pozitif bir tamsayı olmak üzere Γ Modüler grubun önemli bir alt grubu olan $\Gamma(n) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid a \equiv d \equiv 1(\operatorname{mod} n),\ b \equiv c \equiv 0(\operatorname{mod} n)\right\}$ alt grubuna temel kongrüans alt grubu adı verilir. Γ Modüler grubunun $\Gamma(n)$ temel kongrüans alt grubunu içeren herhangi bir alt grubuna ise kongrüans alt grubu denir. Üzerinde en çok çalışılan bazı kongrüans alt grupları aşağıdaki gibidir:

$$\Gamma_1(n) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid a \equiv d \equiv 1(\operatorname{mod} n), c \equiv 0(\operatorname{mod} n)\right\}$$

$$\Gamma^1(n) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid a \equiv d \equiv 1(\operatorname{mod} n), b \equiv 0(\operatorname{mod} n)\right\}$$

$$\Gamma_0(n) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid c \equiv 0(\operatorname{mod} n)\right\}$$

$$\Gamma^0(n) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid b \equiv 0(\operatorname{mod} n)\right\}$$

$$\Gamma_0^0(n) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid b \equiv c \equiv 0(\operatorname{mod} n)\right\}$$

şeklindedir. Bu gruplar arasındaki ilişki ise,

$\Gamma(n) \leq \Gamma_1(n) \leq \Gamma_0^0(n) \leq \Gamma_0(n) \leq \Gamma$ ve $\Gamma(n) \leq \Gamma^1(n) \leq \Gamma_0^0(n) \leq \Gamma^0(n) \leq \Gamma$ biçimindedir. Ayrıca $\Gamma(n) \lhd \Gamma$ dır. Dolayısıyla $\Gamma(n), \Gamma_0(n)$ ve $\Gamma_1(n)$ gruplarının da normal alt grubu olur. Ayrıca $\Gamma_1(n) \lhd \Gamma_0(n)$ dır. Buna göre indeksler $n > 2$ için;

$$|\Gamma : \Gamma_0(n)| = \psi(n) = n \prod_{p_{ln}} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

$$|\Gamma : \Gamma_1(n)| = \psi(n) = \frac{n^2}{2} \prod_{p_{ln}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

$$|\Gamma : \Gamma(n)| = \psi(n) = \frac{n^3}{2} \prod_{p_{ln}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$ dir.

$\Gamma_0(n), \Gamma_1(n)$ ve $\Gamma(n)$ gruplarının da cusp kümesi $\hat{\mathbb{Q}}$ dır. Çünkü bu gruplar Γ Modüler grubunun sonlu indeksli alt gruplarıdır.

2.1.3 $\boldsymbol{\Gamma^0(n)}$ Kongrüans Alt Grubu

Bu bölümde $\Gamma^0(n)$ kongrüans alt grubu ile ilgili teoremler verilecektir.

Teorem 2.1.3.1: $\Gamma^0(n) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid b \equiv 0 \ (mod n)\right\}$ grubunun genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi üzerindeki hareketi geçişli değildir.

İspat: $\begin{pmatrix} a & bn \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma^0(n)$ keyfi olsun. Bu durumda $\begin{pmatrix} a & bn \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{an+bn}{cn+d} = \frac{(a+b)n}{cn+d}$ indirgenmiş biçimdedir ve böylece n değeri $\Gamma^0(n)$ grubu altında $n+1$ değerine resmedilemez.

Şimdi $\Gamma^0(n)$ kongrüans alt grubunun transitif olduğu $\hat{\mathbb{Q}}$ kümesinin bir maksimal alt kümesini bulalım:

Lemma 2.1.3.1: $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ ve $(\alpha, \beta) = 1$ olsun. Bu takdirde $\eta \in \mathbb{Z}$ ve $\eta \neq 0$ olmak üzere $(\alpha + \beta x, \eta) = 1$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{Z}$ tamsayısı vardır.

İspat: η sayısının her bir asal böleni α sayısını bölüyorsa $(x, \eta) = 1$ şartını sağlayan $x \in \mathbb{Z}$ için $(\alpha + \beta x, \eta) = 1$ koşulunu sağlar.

Ayrıca $p|\eta$ ve $p \nmid \alpha$ olan bir p asal sayısı mevcut olsun. Eğer

$$x := \prod_{\substack{p|\eta \\ p\nmid\alpha}} p$$

olarak alınırsa $(\alpha + \beta x, \eta) = 1$ olduğu açıktır.

Teorem 2.1.3.2: $(k, s) = 1$ olmak üzere $\frac{k}{s}$ keyfi rasyonel sayısı verilsin. Bu durumda $M\left(\frac{k}{s}\right) = M\left(\frac{k_1}{s_1}\right)$ ve $k_1 = (k, n)$ olacak şekilde bir $M \in \Gamma^0(n)$ vardır.

İspat: $k_1 = (k,n)$ olsun. Bu durumda $(k,ns) = k_1$ ve dolayısıyla $\left(\frac{ns}{k_1}, \frac{k}{k_1}\right) = 1$ dir. Buradan $\frac{k}{k_1}a_0 + \frac{ns}{k_1}b_0 = 1$ olacak biçimde $a_0, b_0 \in \mathbb{Z}$ tam sayıları vardır. Açıkça $\left(\frac{ns}{k_1}, a_0\right) = 1$ dir. Yukarıda verilen lemmaya göre $\left(a_0 - \frac{ns}{k_1}m, n\right) = 1$ olacak biçimde $m \in \mathbb{Z}$ vardır. Eğer $a = a_0 - \frac{ns}{k_1}$ ve $b = b_0 + \frac{k}{k_1}m$ olarak alınırsa $\frac{k}{k_1}a + \frac{ns}{k_1}b = 1$ elde edilir. Çünkü $\frac{ns}{k_1}\left(b_0 + \frac{k}{k_1}m\right) + \frac{k}{k_1}\left(a_0 - \frac{ns}{k_1}m\right) = \frac{ns}{k_1}b_0 + \frac{k}{k_1}a_0 = \frac{1}{k_1}(nsb_0 + ka_0) = 1$ dir. Böylece $(a,n) = 1$ ve $(b,a) = 1$ olduğundan $(bn,a) = 1$ olur. Dolayısıyla $ad - bcn = 1$ olacak biçimde $c, d \in \mathbb{Z}$ tam sayıları vardır. Böylece $M = \begin{pmatrix} a & bn \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma^0(n)$ ve $M\left(\frac{k}{s}\right) = M\left(\frac{k_1}{s_1}\right)$ bulunur.

Teorem 2.1.3.3: $a_1 | n$ ve $(a_1, d_1) = (a_1, d_2) = 1$ olsun. Bu takdirde $\frac{a_1}{d_1}$ ve $\frac{a_1}{d_2}$, $\Gamma^0(n)$ kongrüans grubu altında eşleniktir $\Leftrightarrow$ $t = \left(a_1, \frac{n}{a_1}\right)$ için $d_1 \equiv d_2 (\operatorname{mod} t)$ tir.

İspat: $\Rightarrow$ $\frac{a_1}{d_1}$ ve $\frac{a_1}{d_2}$ elemanları $\Gamma^0(n)$ grubu altında eşlenik olsunlar. Buradan $A(z) = \frac{az+bn}{cz+d}$ ve $ad - bcn = 1$ olmak üzere $A\left(\frac{a_1}{d_1}\right) = \frac{a_1}{d_2}$ olacak şekilde $A \in \Gamma^0(n)$ elemanı vardır. Dolayısıyla $\begin{pmatrix} a & bn \\ c & d \end{pmatrix}\left(\frac{a_1}{d_1}\right) = \frac{aa_1 + bnd_1}{ca_1 + dd_1} = \frac{a_1}{d_2}$ bulunur. Böylece,

$aa_1 + bnd_1 = \theta a_1$ ve $ca_1 + dd_1 = \theta d_2$ olacak şekilde $\theta \in \{-1,1\}$ vardır. $aa_1 + bnd_1 = \theta a_1$ olduğundan $\frac{aa_1}{a_1} + \frac{bnd_1}{a_1} = \frac{\theta a_1}{a_1}$ olup $a \equiv \theta (\operatorname{mod} t)$ ve $ad - bcn = 1$ denkleminden $ad \equiv 1 (\operatorname{mod} t)$ bulunur. Buradan $d\theta \equiv 1 (mo\, dt)$ bulunur. $\theta \in \{-1,1\}$ olduğundan $d \equiv \theta (\operatorname{mod} t)$, $ca_1 + dd_1 = \theta d_2$ ve $t = \left(a_1, \frac{n}{a_1}\right)$ olduğundan $dd_1 \equiv \theta d_2 (\operatorname{mod} t)$ bulunur. Böylece $d \equiv \theta (\operatorname{mod} t)$ denkleminden açıkça $d_1 \equiv d_2 (\operatorname{mod} t)$ elde edilir.

$\Leftarrow$ $m = \frac{n}{a_1}$ keyfi olsun. $t = (m, a_1)$ ve $(dd_2, a_1) = 1$ olduğu dikkate alınırsa $(md_1d_2, a_1) = t$ olduğu görülür. Diğer taraftan $d_1 \equiv d_2 (\operatorname{mod} t)$ denkleminden $t | (d_2 - d_1)$ olup $md_1d_2x + a_1y = d_2 - d_1$ denklemi bir çözüme sahiptir. Şimdi $k, s \in \mathbb{Z}$ bir çözüm olsun. Buna göre $md_1d_2k + d_1 + a_1s = d_2$ yazılabilir. Böylece $d_1(md_2k + 1) + a_1s = d_2$ elde edilir. $b = ma_1k$ ve $a = 1 - md_1k$ alınırsa bu takdirde $bd_1 + aa_1 = a_1$ ve $n|b$ sağlanır. Ayrıca $d = 1 + md_2k$ ve $c = s$ seçilirse $dd_1 + ca_1 = d_2$ olur. Böylece kolaylıkla yazılabilir ki $A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ olmak üzere $\det A = ad - bc = d(1 - md_1k) - mk(dd_1 + ca_1) = d - md_2k = 1$ dir. $n|b$ olduğundan $A \in \Gamma^0(n)$ ve $A\left(\frac{a_1}{d_1}\right) = \frac{a_1}{d_2}$ elde edilir.

Yukarıdaki iki teoremden $\Gamma^0(n)$ kongrüans alt grubunun yörüngelerinin kümesi aşağıdaki gibi verilir:

Teorem 2.1.3.4: $a|n$ olsun. Bu takdirde $\frac{a}{b}$ rasyonel değerin $\Gamma^0(n)$ kongrüans alt grubu ile hareketiyle oluşan yörünge $\left(\frac{a}{b}\right) = \left\{\frac{x}{y} \in \hat{\mathbb{Q}} : (n, x) = a\,, b \equiv y\frac{x}{a} \bmod \left(a, \frac{n}{a}\right)\right\}$ kümesidir. Üstelik $\Gamma^0(n)$ altında bu yörüngelerin sayısı φ −Euler fonksiyonu olmak üzere $\varphi\left(a, \frac{n}{a}\right)$ dır.

Sonuç 2.1.3.1: Eğer p asal bir sayı ise bu durumda $\Gamma^0(p)$ kongrüans alt grubunun yörüngeleri $\binom{1}{1}$ ve $\binom{p}{1}$ dir.

2.1.4 İmpirimitif Hareket

Tanım 2.1.4.1: G, Ω kümesi üzerinde bir transitif hareket grubu ise bu durumda (G, Ω) ikilisine bir transitif permütasyon grubu denir.

Tanım 2.1.4.2: (G, Ω) ikilisi bir transitif permütasyon grubu ve $\approx$ Ω kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Eğer $\alpha, \beta \in \Omega$ için $\alpha \approx \beta$ olduğunda, $\forall g \in G$ için $g(\alpha) \approx g(\beta)$ oluyorsa $\approx$ denklik bağıntısına Ω kümesi üzerinde G invaryant denklik bağıntısı adı verilir. Ayrıca $\approx$ denklik bağıntısının denklik sınıflarına ise blok denir.

Bu tanıma göre açıkça;

i. Özdeşlik Bağıntısı : “$\forall \alpha, \beta \in \Omega$ için $\alpha \approx \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$ ”
ii. Evrensel Bağıntı : “$\forall \alpha, \beta \in \Omega$ için $\alpha \approx \beta$”

bağıntıları G invaryant denklik bağıntılarıdır. Bu bağıntılara aşikar bağıntılar denir. Eğer Ω üzerinde özdeşlik bağıntısından ve evrensel bağıntıdan farklı bir G invaryant denklik bağıntısı varsa G grubunun Ω üzerindeki hareketine impirimitif hareket, sadece Ω üzerinde özdeşlik bağıntısı ve evrensel bağıntı varsa bu durumda oluşan grup hareketine primitif hareket denir.

Önerme 2.1.4.1: (G,Ω) ikilisi bir transitif permütasyon grubu olsun. Bu durumda, (G,Ω) primitiftir $\Leftrightarrow$ $\forall\alpha \in \Omega$ için $G_\alpha = \{g \in G : g\alpha = \alpha\}$ sabitleyeni G grubunun bir maksimal alt grubudur.

Önerme 2.1.4.2: (G,Ω) ikilisi bir transitif permütasyon grubu olsun. Bu takdirde, (G,Ω) grubu impirimitiftir $\Leftrightarrow$ $\exists\alpha \in \Omega$ ve $H < G$ öyle ki $G_\alpha \subsetneqq H \subsetneqq G$ dir.

İspat: "$\Rightarrow$" Açıktır.

"$\Leftarrow$" $G_\alpha \subsetneqq H \subsetneqq G$ olsun. G grubu Ω kümesi üzerinde geçişli olarak hareket ettiğinden Ω kümesinin her elemanı bir $g \in G$ için $g(\alpha)$ biçimindedir. Dolayısıyla $\Omega = \{g(\alpha) : g \in G\} = [\alpha]$ biçimindedir yani tek bir yörünge vardır. Gerçekten, G grubu Ω kümesi üzerinde geçişli olarak hareket ettiğinden $\forall\alpha,\beta \in \Omega$ için $\exists g \in G$ öyle ki $g(\alpha) = \beta$ dır. Açıkça $\beta \in [\alpha]$ olup buradan $\Omega \subset [\alpha]$ şeklindedir. Tersine $[\alpha] \subset \Omega$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Çünkü $s : Gx\Omega \to \Omega, s(g,\alpha) = g\alpha = g(\alpha)$ dır. Yani $\forall g \in G$ için $g(\alpha) \in \Omega$ dır. Böylece $[\alpha] \subset \Omega$ bulunur.

Sonuç olarak $\Omega = [\alpha] = \{g(\alpha) : g \in G\}$ dir.

Ω kümesi üzerinde $g(\alpha) \approx h(\alpha) \Leftrightarrow h \in gH$ biçiminde tanımlanan " $\approx$ " denklik bağıntısı iyi tanımlı bir G invaryant denklik bağıntısıdır. Gerçekten,

i. $H < G$ olduğundan $e_G \in H$ vardır. $\forall g \in G$ için $g = ge_G$ olup ve buradan $g \in gH \Leftrightarrow g(\alpha) \approx g(\alpha)$ sağlanır.
ii. $g(\alpha) \approx h(\alpha) \Leftrightarrow h \in gH \Leftrightarrow h = gH$ olan $\exists k \in H \xLeftrightarrow{H<G,k^{-1}\in H} g = hk^{-1} \Leftrightarrow$ $g \in hH \Leftrightarrow h(\alpha) \approx g(\alpha)$ elde edilir.
iii. $g(\alpha) \approx h(\alpha)$ ve $h(\alpha) \approx m(\alpha)$ olsun. $g(\alpha) \approx m(\alpha)$ olduğu gösterilebilir:

$g(\alpha) \approx h(\alpha) \Leftrightarrow h \in gH \Leftrightarrow h = gH$ olan bir $k \in H$ elemanı vardır. Dolayısıyla

$h(\alpha) \approx m(\alpha) \Leftrightarrow m \in hH \Leftrightarrow m = hl$ olacak şekilde bir l için $l \in H \overset{h=gH}{\Longleftrightarrow} m = gkl$ $\overset{H<G,k,l\in H}{\Longleftrightarrow} m \in gH \Leftrightarrow g(\alpha) \approx m(\alpha)$ dır. Böylece (i), (ii), (iii) ifadelerinden " $\approx$ " bir denklik bağıntısıdır. Şimdi gösterelim ki; " $\approx$ " bir G invaryant denklik bağıntısıdır.

$g(\alpha) \approx h(\alpha) \Leftrightarrow h \in gH \Leftrightarrow \forall m \in G$ için açıkça $mh \in mgH \Leftrightarrow mg(\alpha) \approx mh(\alpha) \Leftrightarrow m\big(g(\alpha)\big) \approx m\big(h(\alpha)\big)$ elde edilir. Dolayısıyla " $\approx$ " denklik bağıntısının iyi tanımlı bir G invaryant denklik bağıntısı olduğu gösterildi. Şimdi de " $\approx$ " denklik bağıntısının özdeşlik bağıntısı ve evrensel bağıntı olmadığını gösterelim:

Aksini varsayalım, yani " $\approx$ " denklik bağıntısı evrensel bağıntı olsun. Buradan $H \subsetneqq G$ olduğundan $\exists h_0 \in G: h_0 \notin H$ dır. Ayrıca " $\approx$ " evrensel bağıntı olduğundan dolayı e birim elemanı için $e(\alpha) \approx h_0(\alpha)$ yazılabilir. Böylece $h_0 \in eH = H$ dır. Bu ise bir çelişki olup" $\approx$ " bağıntısı bir evrensel bağıntı olamaz.

Benzer şekilde varsayalım ki " $\approx$ " denklik bağıntısı özdeşlik bağıntısı olsun. Bu takdirde $g(\alpha) \approx h(\alpha) \Leftrightarrow g(\alpha) \approx h(\alpha)$ dır. $\Leftrightarrow g^{-1}h(\alpha) = g^{-1}h(\alpha) \Leftrightarrow g^{-1}h \in G_\alpha \Leftrightarrow h \in gG_\alpha$ elde edilir. $G_\alpha \subsetneqq H$ olduğundan dolayı $\exists h_0 \in H$ öyle ki $h_0 \notin G_\alpha$ dır. Yani $h_0(\alpha) \neq \alpha = e(\alpha)$ bulunur. Diğer yandan $h_0 \in eH = H$ olduğundan $e(\alpha) \approx h_0(\alpha)$ dır. Bu ise yine bir çelişkidir. Bu çelişki " $\approx$ " denklik bağıntısının bir özdeşlik bağıntısı olamayacağını gösterir. Sonuç olarak G grubunun Ω nokta kümesi üzerindeki hareketi impirimitiftir.

Şimdi burada G grubu yerine $\Gamma = PSL(2,\mathbb{Z})$ Modüler grubunu, Ω nokta kümesi yerine ise $\widehat{\mathbb{Q}}$ genişletilmiş rasyonel sayılar kümesini alalım. Burada sıfır noktasının sabitleyeni $\Gamma_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ grubudur. Gerçekten $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2,\mathbb{Z})$ olsun. Dolayısıyla $T(0) = T\left(\frac{0}{1}\right) = 0$ olmak zorundadır. Buradan $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dir. Bu ise $b = 0$ ve $d = 1$ olduğunu gösterir. Yine $T \in \Gamma$ olduğundan $ad - bc = 1$ olup $a = 1$ ve $c \in \mathbb{Z}$ dir. Böylece $\Gamma_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{Z} \right\} \leq PSL(2,\mathbb{Z})$ dır. Açıkça sıfır noktasının sabitleyeni $\Gamma_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ grubudur. Γ_0 grubu sonsuz devirli bir gruptur. Bu durumda $\widehat{\mathbb{Q}}$ genişletilmiş rasyonel sayılar kümesini üzerinde bir Γ invaryant denklik bağıntısını aşağıdaki şekilde elde edebiliriz:

Biliyoruz ki $\Gamma^0(n)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\Gamma : b\equiv 0(\operatorname{mod} n)\right\}$ kongrüans alt grubu alındığında $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\Gamma_0<\Gamma^0(n)\leq\Gamma$ ve $n>1$ ise $\Gamma_0<\Gamma^0(n)<\Gamma$ dır. Böylece Γ grubu $\widehat{\mathbb{Q}}$ genişletilmiş rasyonel sayılar kümesini üzerinde impirimitif olarak hareket eder. Şimdi $v=\frac{r}{s}, w=\frac{x}{y}\in\widehat{\mathbb{Q}}$ iki eleman olmak üzere, $v=g(0)$ ve $w=h(0)$ olan $g,h\in PSL(2,\mathbb{Z})$ vardır. Dolayısıyla bu iki eleman $g=\begin{pmatrix} r_0 & r \\ s_0 & s \end{pmatrix}$ ve $h=\begin{pmatrix} x_0 & x \\ y_0 & y \end{pmatrix}$ biçimindedirler. Böylece $\frac{r}{s}\approx\frac{x}{y}\Leftrightarrow g^{-1}h\in\Gamma^0(n)$ olmalıdır. Yani açıkça belirtilirse $g^{-1}h=\begin{pmatrix} s & -r \\ -s_0 & r_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 & x \\ y_0 & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} sx_0-ry_0 & sx-ry \\ r_0y_0-s_0x_0 & r_0y-s_0x \end{pmatrix}\in\Gamma^0(n)\Leftrightarrow ry-sx\equiv 0(mod\ n)$ olup $\frac{r}{s}\approx\frac{x}{y}\Leftrightarrow ry-sx\equiv 0(mod\ n)$ elde edilir.

2.1.5 Alt Yörüngesel Graflar

(G,Ω) ikilisi bir transitif permütasyon grubu olsun. Bu durumda G grubu kartezyen çarpım olan $\Omega\times\Omega=\Omega^2$ kümesi üzerinde $g:(a,b)\to\big(g(a),g(b)\big)$ ile hareket eder. Bu hareketin yörüngelerine G grubunun alt yörüngeleri adı verilir ve (a,b) çiftini içeren alt yörünge $O(a,b)$ ile gösterilir. $O(a,b)$ alt yörüngesinden bir $\mathcal{G}(a,b)$ alt yörüngesel grafını aşağıdaki gibi elde edebiliriz:

- Grafın köşeleri Ω kümesinin elemanlarıdır.
- $(\gamma,\delta)\in O(a,b)$ ise bu durumda γ dan δ ya yönlendirilmiş bir kenar vardır denir ve $\gamma\to\delta$ ile gösterilir.

Açık olarak $O(a,b)$ ile $O(b,a)$ alt yörüngeleri ya eşittir ya da ayrıktırlar. Eğer bu alt yörüngeler ayrık iseler $\mathcal{G}(b,a)$ alt yörüngesel grafı $\mathcal{G}(a,b)$ alt yörüngesel grafının sadece ters yönlendirilmiş hali olur. Böylece $\mathcal{G}(a,b)$ ile $\mathcal{G}(b,a)$ graflara eşleşmiş alt yörüngesel graflar adı verilir. Eğer $O(a,b)$ ile $O(b,a)$ alt yörüngeleri eşit ise bu takdirde $\mathcal{G}(a,b)=\mathcal{G}(b,a)$ alt yörüngesel grafı çift taraflı yönlendirilmiş kenarlardan meydana gelir. Bu durumda bu alt yörüngesel grafa kendisiyle eşleşmiştir denir.

Tanım 2.1.5.1: Bir grafta $m\geq 3$ olmak üzere $v_1,v_2,\dots,v_m$ farklı köşeler için $v_1\to v_2\to\cdots\to v_m\to v_1$ ise bu durumda bu köşelerin oluşturduğu yapıya yönlendirilmiş devre denir. Özel olarak,

$m = 3$ ise $v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_1$ bir üçgen devre, $m = 2$ ise $v_1 \to v_2 \to v_1$ kendisi ile eşleşmiş kenardır denir. Hiçbir devre içermeyen grafa ise bir orman adı verilir.

Önerme 2.1.5.1: (G, Ω) transitif permütasyon grubu için $\mathcal{G}$ bir alt yörüngesel graf olsun. Bu takdirde,

i. G grubu $\mathcal{G}$ grafının otomorfizmalarının bir grubu olarak hareket eder.
ii. G grubu $\mathcal{G}$ grafının köşeleri üzerinde transitif olarak hareket eder.
iii. $\mathcal{G}$ kendisiyle eşleşmiş bir graf ise bu durumda G grubu $\mathcal{G}$ grafının ardışık köşelerinin sıralı çiftleri üzerinde transitif olarak hareket eder.
iv. G grubu $\mathcal{G}$ grafının kenarları üzerinde transitif olarak hareket eder.

İspat:

i. $g \in G$ olmak üzere $f_g : \mathcal{G}(a,b) \to \mathcal{G}(a,b),\quad f_g(x \to y) = g(x) \to g(y)$

dönüşümünün bir otomorfizma olduğu gösterilirse bu durumda G grubunun $\mathcal{G}$ alt yörüngesel grafının otomorfizmalarının bir grubu olarak hareket ettiği gösterilir.

$x \to y$, $u \to v \in \mathcal{G}(a,b)$ kenarları için $f_g(x \to y) = f_g(u \to v)$ olsun. Böylece $g(x) \to g(y) = g(u) \to g(v)$ dir. G grup olduğundan $\exists g^{-1} \in G$ öyleki $g^{-1}g(x) \to g^{-1}g(y) = g^{-1}g(u) \to g^{-1}g(v)$ elde edilir. Dolayısıyla $x \to y = u \to v$ dir. Yani f_g birebirdir.

Her $x \to y \in \mathcal{G}(a,b)$ kenarı için $g^{-1}(x) \to g^{-1}(y) \in \mathcal{G}(a,b)$ kenarı vardır öyle ki $f_g\left(g^{-1}(x) \to g^{-1}(y)\right) = g(g^{-1}(x)) \to g(g^{-1}(y)) = x \to y$ dir. Böylece f_g dönüşümü örtendir.

$x \to y$ kenarı $\mathcal{G}(a,b)$ alt yörüngesel grafında bir kenar olsun. $(x,y) \in O(a,b)$ dır. $O(a,b) = \{g(a,b) : g \in G\}$ olduğundan $\exists h \in G$ öyle ki $(x,y) = h(a,b)$ dır. Diğer yandan $g \in G$ olmak üzere $g(x,y) = g\big(h(a,b)\big) = gh(a,b)$ ve böylece $gh(a,b) = g(x,y) = \big(g(x), g(y)\big)$ elde edilir, yani $g(x) \to g(y)$ $\mathcal{G}(a,b)$ grafında bir kenardır. Dolayısıyla f_g dönüşümü yapı koruyan bir dönüşümdür.

ii. (G, Ω) çiftinin bir geçişli permütasyon grubu olduğu kolaylıkla görülür.
iii. $\mathcal{G}(a,b)$ grafı kendisi ile eşleşmiş olsun. Bu durumda $O(a,b) = O(b,a)$ dır.

x ile y ardışık köşeler olsun. Bu durumda (x, y) veya $(y, x) \in O(a, b)$ dir. Dolayısıyla x ile y ve u ile v ardışık köşeler ise $(x, y) \in O(a, b)$ ve $(u, v) \in O(a, b)$ olduğunu kabul edebiliriz. Buradan $O(a, b) = \{g(x, y): g \in G\}$ olduğundan $\exists g_1, g_2 \in G$ öyle ki (x, y)=$g_1(a, b)$ ve $(u, v) = g_2(a, b)$ şeklindedir. Sonuç olarak $g_1^{-1}(x, y)$=(a, b) olur. Açıkça (u, v)=$g_2 g_1^{-1}(x, y)$ ve G grup olduğundan dolayı $h = g_2 g_1^{-1} g \in G$ elde edilir. Böylece G grubu $\mathcal{G}(a, b)$ alt yörüngesel grafının ardışık köşeleri üzerinde geçişli olarak hareket eder.

iv. $x \to y$ ve $a \to b$ $\mathcal{G}(a, b)$ alt yörüngesel grafında keyfi iki kenar olsun. Bu durumda $(x, y) \in O(a, b)$ ve $(u, v) \in O(a, b)$ olduğundan $S_1(a, b) = (x, y)$ ve $S_2(a, b) = (u, v)$ olacak şekilde $S_1, S_2 \in G$ vardır. Böylelikle $S_1^{-1}(x, y)$=$S_2^{-1}(u, v)$ elde edilir. Buradan $S_2(S_1(x, y)) = (u, v)$ sonucuna ulaşılır. Böylece G grubu $\mathcal{G}(a, b)$ alt yörüngesel grafının kenarları üzerinde geçişli olarak hareket eder.

Örnek 2.1.5.1: $O(a, a) = \{(k, k): k \in \Omega\}$ kümesi $\Omega \times \Omega$ kartezyen çarpımın köşegenini oluşturur. Bu köşegene karşılık gelen grafa aşikar graf adı verilir ve $\mathcal{G}(a, a)$ alt yörüngesel grafıdır. Bu graf aslında her bir $k \in \Omega$ köşesine bağlı olan bir düğümden meydana gelir.

2.1.6 Farey Grafı

Farey grafı en temel graflardan birisidir. $v \in \widehat{\mathbb{Q}}$ olmak üzere $g(a, b) = (\infty, v)$ olan bir $g \in G$ vardır. Böylece her bir $O(a, b)$ alt yörüngesi bir (∞, v) ikilisini içerir. Yörüngeler ya eşit ya da ayrık olduklarından dolayı $O(a, b)$ ile $O(\infty, v)$ aynı yörüngeyi temsil eder. Açıkça $O(a, b) = O(\infty, v)$ şeklindedir. Burada $n > 0$ için $v = \frac{u}{n}$ ve $(u, n) = 1$ biçimindedir. $O(\infty, v) = O\left(\frac{1}{0}, \frac{u}{n}\right)$ alt yörüngesini kısaca $O(u, n)$ ile ve bu alt yörüngeye karşılık gelen alt yörüngesel grafı ise $\mathcal{G}(u, n) = \mathcal{G}_{u,n}$ ile gösterilir. Buradan özel olarak $u = n = 1$ alınırsa $\mathcal{G}_{1,1}$ grafı elde edilir. Bu grafın köşeleri $\widehat{\mathbb{Q}}$ kümesinden oluşur ve kendisiyle eşleşmiş yönlendirilmemiş bir graftır. Ayrıca $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$ köşeleri komşu köşelerdir $\Leftrightarrow$ $ry - sx = \mp 1$ dir. Örneğin sonsuza komşu olan köşeler tamsayılardır. $PSL(2, \mathbb{Z})$ Modüler grubu köşeler ve kenarlar üzerinde geçişli olarak hareket eden $\mathcal{G}_{1,1}$ grafın otomorfizmalarının bir grubudur.

Dolayısıyla $Aut\ \mathcal{G}_{1,1}$ grubu $ad - bc = \mp 1$ şartını sağlayan elemanların oluşturduğu $PGL(2, \mathbb{Z})$ genişletilmiş Modüler gruptur. $PGL(2, \mathbb{Z})$ grubunda $ad - bc \neq 0$ dır.

$\mathcal{G}_{1,1}$ alt yörüngesel grafına Farey dizileriyle olan bağlantısından dolayı Farey grafı denir ve F ile gösterilir. $m \geq 1$ için m mertebeli F_m Farey dizisi, $|y| \leq m$ olmak üzere kesin artan bir biçimde sıralanan bütün $\frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ genişletilmiş rasyonel sayılar kümesinin elemanlarından oluşur. Örneğin $m = 4$ için

$$F_4: \ldots -\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots$$

dir. Hesaplamalarda kolaylık olması açısından F_m Farey dizisinin elemanları $[0,1]$ veya $[-m, m] \subset \mathbb{R}$ kapalı aralıklarına kısıtlanabilir. Ayrıca gösterilebilir ki Farey dizileri alt küme bağıntısını da sağlar. Yani $\mathrm{F}_1 \subset \mathrm{F}_2 \subset \mathrm{F}_3 \subset \ldots$ şeklinde olup

$$\bigcup_{\mathrm{m} \geq 1} \mathrm{F}_{\mathrm{m}} = \mathbb{Q}$$

elde edilir.

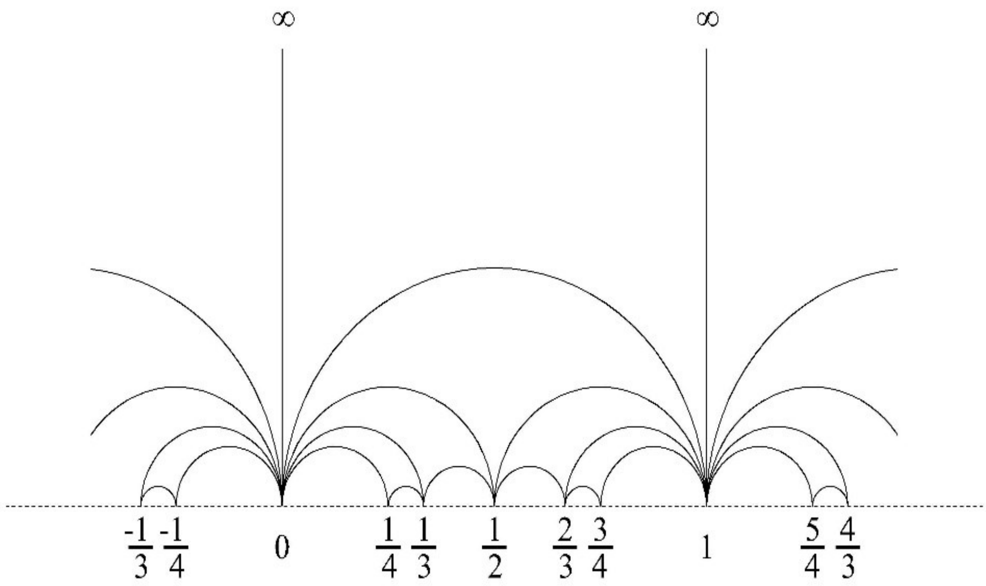
Lemma 2.1.6.1: $\frac{r}{s}, \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ indirgenmiş biçimde iki rasyonel sayı olsun. Bu durumda aşağıdaki üç koşul birbirine denktir:

i. $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$ F Farey grafında komşu iki köşelerdir.

ii. $ry - sx = \mp 1$

iii. Bir $m \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$ F_m dizisinde komşu terimlerdir.

Şimdi F grafının basit bir yapısı incelenirse açıkça her bir terimine hemen öncesindeki ve sonrasındaki terimleri ekleyerek, her bir F_m iki değerli bir ağaç olduğu görülür. Dolayısıyla buradaki ağaçların birleşimi F grafının $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi üzerinde indirgenmiş bir alt grafıdır. Böylece ∞ ile işaretlenmiş bir köşe ekleyerek ve bu köşeyi tamsayılar ile birleştirerek F grafı elde edilir. Sonuç olarak çizilen şekil kenarların ∞ ile ortak olduğunu veya F_4 Farey dizisinin elemanlarının birleşmesiyle meydana geldiğini gösterir. Farey grafı periyodik olup bir periyotludur. Kısaca, $x \to y$ $[0,1]$ aralığında ise $\forall m \in \mathbb{Z}$ için $x + m \to y + m$ $[m, m+1]$ aralığındadır.

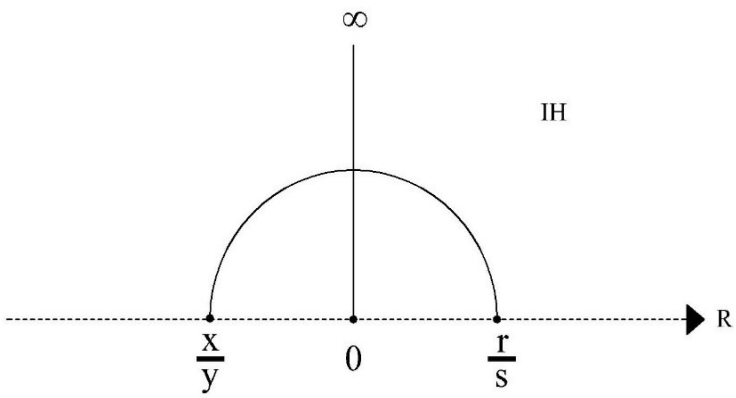


Şekil 2.1.6. 1 : Farey grafı

Görsel uygunluk açısından F grafının kenarlarını ℍ üst yarı düzlemindeki Euclid yarı çemberleri veya reel eksene dik olan Euclid yarı doğruları şeklinde hiperbolik geodezikler olarak görülmektedir. Burada yarı doğruları "∞ ile birleşmiş" olarak kabul edilir. Dolayısıyla ℍ üst yarı düzlemin hiperbolik izometrilerinin bir grubu olarak, Γ Modüler grup ile grup hareketi tanımlanabilir. Bu hareket altında geodezikler geodeziklere resmedilir. Böylece ℍ üst yarı düzlemdeki F gösterimi Γ Modüler grup altında invaryanttır.

Teorem 2.1.6.1: F Farey grafının kenarları $\mathbb{H}=\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Im}(z) > 0\}$ üst yarı düzlemde kesişmezler.

İspat: $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y} \in$ F kenarı verilsin. Açıkça $ry - sx = \mp 1$ dir. Varsayalım ki 0 ile ∞ noktasını birleştiren $\operatorname{Re}(z) = 0$ doğrusu $\frac{r}{s}$ köşesini $\frac{x}{y}$ köşesine birleştiren hiperbolik doğruyu üst yarı düzlemde kessin. Bu durumda $\frac{x}{y} < 0 < \frac{r}{s}$ alınırsa böylece $ry - sx = 1$ bulunur. Buradaki tam sayılar için $x < 0$ ve $r, s, y > 0$ olduğundan $1 = ry - sx \geq 2$ çelişkisi elde edilir. Bu çelişkiden F Farey grafının kenarlarının hiçbirinin ℍ üst yarı düzlemde kesişmedikleri sonucuna varılır.



Şekil 2.1.6. 2 : Üst yarı düzlemde kesişen doğrular

Şimdi Γ Modüler grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi üzerindeki hareketi ile oluşan alt yörüngesel grafları inceleyelim:

Γ Modüler grubu, $\widehat{\mathbb{Q}}$ genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden dolayı $v \in \widehat{\mathbb{Q}}$ olmak üzere $g(a,b) = (0,v) = \left(\frac{0}{1}, v\right)$ olan bir $g \in G$ mevcuttur. Dolayısıyla her bir $O(a,b)$ alt yörüngesi bir $(0,v)$ ikilisini içerir. Böylece $O(a,b)$ ile $O\left(\frac{0}{1}, v\right)$ aynı yörüngeyi temsil eder. Yani $O(a,b) = O\left(\frac{0}{1}, v\right)$ elde edilir. Yine $v \in \widehat{\mathbb{Q}}$ olduğundan $v = \frac{n}{u}, n > 0, (u,n) = 1$ biçimindedir. Buradan hareketle $O\left(\frac{0}{1}, v\right) = O\left(\frac{0}{1}, \frac{n}{u}\right)$ alt yörüngesini kısaca kolaylık olması açısından $O(n,u)$ ile ve buna karşılık gelen alt yörüngesel grafı ise $\mathcal{G}(n,u)$ ile gösterelim.

Teorem 2.1.6.2: $v, w \in \widehat{\mathbb{Q}}$ iki eleman olmak üzere $O\left(\frac{0}{1}, v\right) = O\left(\frac{0}{1}, w\right) \Leftrightarrow v$ ve w elemanları Γ_0 grubunun aynı yörüngesindedir.

İspat: $O\left(\frac{0}{1}, v\right) = O\left(\frac{0}{1}, w\right)$ keyfi olsun. $\left(\frac{0}{1}, w\right) \in O\left(\frac{0}{1}, w\right) = O\left(\frac{0}{1}, v\right)$ olduğundan dolayı $O\left(\frac{0}{1}, v\right) = \left\{g\left(\frac{0}{1}, v\right) : g \in \Gamma\right\}$ olup buradan $\exists g \in \Gamma$ öyle ki $g\left(\frac{0}{1}, v\right) = \left(\frac{0}{1}, w\right)$ dir. Böylece, $\left(g\left(\frac{0}{1}\right), g(v)\right) = \left(\frac{0}{1}, w\right)$ ifadesinden $g\left(\frac{0}{1}\right) = 0$ ve $g(v) = w$ elde edilir. Dolayısıyla $g = \mp\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{Z}$ şeklindedir. Böylelikle $g \in \Gamma_0$ dır. Yani v ve w elemanları Γ_0 grubunun aynı yörüngesindedir.

Tersine, $v, w \in \widehat{\mathbb{Q}}$ keyfi elemanları Γ_0 grubunun aynı yörüngesinde olsunlar. Bu duruda $\exists g \in \Gamma_0$ öyle ki $g\left(\frac{0}{1}\right) = 0$ dır. Böylece $g\left(\frac{0}{1}, v\right) = (\frac{0}{1}, w)$ olan $g \in \Gamma_0$ vardır. Dolayısıyla $O\left(\frac{0}{1}, v\right) = O(\frac{0}{1}, w)$ dır.

Sonuç 2.1.6.1: $O\left(\frac{0}{1}, \frac{n}{u}\right) = O\left(\frac{0}{1}, \frac{m}{v}\right) \Leftrightarrow u \equiv v(\operatorname{mod} n)$ ve $n = m$ dir.

İspat:$w_1, w_2 \in \widehat{\mathbb{Q}}$ iki nokta olmak üzere $w_1 = \frac{n}{u}, n > 0$, $(u, n) = 1$ ve $w_2 = \frac{m}{v}$, $m > 0$, $(v, m) = 1$olsun. Buradan $g \in \Gamma_0 = \langle\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\rangle$=$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{Z}\right\}$ olduğundan $k \in \mathbb{Z}$ için $g(w_1) = w_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ v \end{pmatrix} \Leftrightarrow n = m$ ve $kn + u = v$ elde edilir. Böylece kolaylıkla görülebilir ki $u \equiv v(\operatorname{mod} n)$ ve $n = m$ bulunur. Dolayısıyla $O\left(\frac{0}{1}, \frac{n}{u}\right)$ ve $O\left(\frac{0}{1}, \frac{m}{v}\right)$ alt yörüngelerine karşılık gelen $\mathcal{G}_{n,u}$ ve $\mathcal{G}_{m,v}$ alt yörüngesel grafları için $\forall n > 1$ olmak üzere $\mathcal{G}_{n,u}$=$\mathcal{G}_{m,v} \Leftrightarrow u \equiv v(\operatorname{mod} n)$ ve $n = m$ dir.

Teorem 2.1.6.3: $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y}$ yönlü kenarı $\mathcal{G}_{n,u}$ grafında bir kenarlıdır $\Leftrightarrow$

(a) $x \equiv ur(\operatorname{mod} n),\ y \equiv us(\operatorname{mod} n), ry - sx = -n$ veya
(b) $x \equiv -ur(\operatorname{mod} n),\ y \equiv -us(\operatorname{mod} n), ry - sx = n$

İspat: $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y}$ yönlü kenarı $\mathcal{G}_{n,u}$ grafında bir kenar olsun. Buradan $\left(\frac{r}{s}, \frac{x}{y}\right) \in O_{n,u}$ alt yörüngesindedir. Böylece $\exists g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : g\left(\frac{0}{1}\right) = \frac{r}{s}$ ve $g\left(\frac{n}{u}\right) = \frac{x}{y}$ dir. Bu ise aşağıdaki matris eşitliklerinden birini verir:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & n \\ 1 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & x \\ s & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & n \\ 1 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & -x \\ -s & -y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & n \\ 1 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & n \\ 1 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & -x \\ s & -y \end{pmatrix}$$

İlk matris eşitliğinden $\begin{pmatrix} b & an + bu \\ d & cn + du \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & x \\ s & y \end{pmatrix}$ olup $b = r, d = s, an + bu = x$, $cn + du = y$ dir. $an + ru = x$ ve $cn + su = y$ olup buradan $x \equiv ur(\operatorname{mod} n)$ ve $y \equiv us(\operatorname{mod} n)$ elde edilir. Ayrıca verilen matris eşitliğin her iki tarafının determinantı alınırsa $(ad - bc).(-n) = ry - sx \xRightarrow{ad-bc=1} ry - sx = -n$ bulunur.

Benzer şekilde $\begin{pmatrix} b & an+bu \\ d & cn+du \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & -x \\ -s & -y \end{pmatrix}$ matris eşitliği hesaplanırsa kolaylıkla $x \equiv ur(\mathrm{mod}\, n), y \equiv us(\mathrm{mod}\, n)$ ve $ry - sx = -n$ elde edilir.

Şimdi $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & n \\ 1 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix}$ matris eşitliğini ele alalım. Kolay bir hesap ile

$\begin{pmatrix} b & an+bu \\ d & cn+du \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix} \Rightarrow b = -r, d = -s, an + bu = x, cn + du = y \Rightarrow an - bu = x, cn - su = y \Rightarrow x \equiv -ur(\mathrm{mod}\, n)$, $y \equiv -us(\mathrm{mod}\, n)$ denklemleri bulunur. Ayrıca matris eşitliğin her iki tarafının determinantı hesaplanırsa $(ad - bc).(-n) = -ry + sx \xRightarrow{ad-bc=1} ry - sx = n$ elde edilir. Benzer işlemler $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & n \\ 1 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & -x \\ s & -y \end{pmatrix}$ matris eşitliği için yapılırsa $x \equiv -ur(\mathrm{mod}\, n), y \equiv -us(\mathrm{mod}\, n)$ ve $ry - sx = n$ ifadesine ulaşılır. Sonuç olarak bu dört durumda gösteriyor ki (a) veya (b) sağlanır.

Tersine olarak varsayalım ki (a) durumu sağlansın, yani $x \equiv ur(\mathrm{mod}\, n)$, $y \equiv us(\mathrm{mod}\, n), ry - sx = -n$ olsun. Bu takdirde $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ yönlü kenarının $\mathcal{G}_{n,u}$ grafında bir kenar olduğunu kısaca $\left(\frac{r}{s}, \frac{x}{y}\right) \in O_{n,u}$ olduğunu gösterelim. Sayılar teorisinden

$x \equiv ur(\mathrm{mod}\, n) \Rightarrow \exists a \in \mathbb{Z}: x = ur + an$ ve

$y \equiv us(\mathrm{mod}\, n) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{Z}: y = us + cn$ dir.

Şimdi $g\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & r \\ c & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$, $g\begin{pmatrix} n \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & r \\ c & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} an + ur \\ cn + us \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ve $ry - sx = -n$ denkleminden $ry - sx = r(cn + us) - s(an + ur) = -n$ dir. Dolayısıyla $rcn + rus - san - sur = -n \Rightarrow rcn - san = -n \Rightarrow rc - sa = -1$ olup açıkça $g = \begin{pmatrix} a & r \\ c & s \end{pmatrix} \in \Gamma$ elde edilir.

Benzer şekilde (b) durumunun sağlandığı varsayılıp $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ yönlü kenarının $\mathcal{G}_{n,u}$ grafında bir kenar olduğu gösterilebilir.

Teorem 2.1.6.4: $uv \equiv -1(mod\ n)$ kongrüans denklemi sağlansın. Bu takdirde

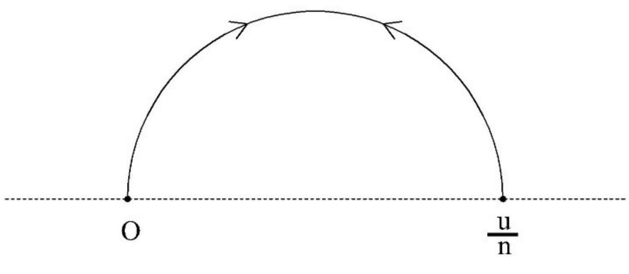
$\mathcal{G}_{n,u}$ grafı ile $\mathcal{G}_{n,v}$ grafı eşleşmiştir.

İspat: $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ yönlü kenarı $\mathcal{G}_{n,u}$ grafında bir kenar olsun. Bu durumda $x \equiv ur(\mathrm{mod}\, n)$, $y \equiv us(\mathrm{mod}\, n)$ ve $ry - sx = -n$ olduğunu düşünelim. Buradan $r \equiv 0(\mathrm{mod}\, n)$ olup $vx \equiv vur(\mathrm{mod}\, n) \;\Rightarrow\; r \equiv -vx(\mathrm{mod}\, n)$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $x \equiv 0(\mathrm{mod}\, n)$ ve $vy \equiv uvs(\mathrm{mod}\, n) \;\Rightarrow\; s = -vy(\mathrm{mod}\, n)$ dir. Ayrıca $ry - sx = -n$ olduğundan $\frac{x}{y} \to \frac{r}{s} \in \mathcal{G}_{n,v}$ elde edilir. Benzer şekilde diğer durum da gösterilebilir. Sonuç olaak $\mathcal{G}_{n,u}$ grafı ile $\mathcal{G}_{n,v}$ grafı eşleşmiş yörüngesel alt graflardır.

Teorem 2.1.6.5: $\mathcal{G}_{n,u}$ alt yörüngesel grafı kendisiyle eşleşmiş graftır ancak ve ancak $u^2 \equiv -1(mod\ n)$ dir.

İspat: $\mathcal{G}_{n,u}$ alt yörüngesel grafı kendisi ile eşleşmiş olsun. Bu takdirde $\left(0, \frac{n}{u}\right) \to \left(\frac{n}{u}, 0\right)$ olacak şekilde bir $T \in \Gamma$ vardır. Dolayısıyla $A = \begin{pmatrix} u & -n \\ c & -u \end{pmatrix}$ matrisi için determinant değeri $\det A = 1$ olduğundan $-u^2 + cn = 1$ olup $u^2 \equiv -1(mod\ n)$ dir.

Tersine $u^2 \equiv -1(mod\ n)$ olsun. Bu durumda sayılar teorisinden biliyoruz ki $u^2 + cn = -1$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{Z}$ tamsayısı vardır. Açıkça $B = \begin{pmatrix} u & -n \\ c & -u \end{pmatrix} \in \Gamma$ olan bir dönüşüm mevcuttur. Bu dönüşüm ile $B(0) = \frac{n}{u}$, $B\left(\frac{n}{u}\right) = 0$ dır. Yani $0 \to \frac{n}{u} \to 0$ dır. Dolayısıyla $\mathcal{G}_{n,u}$ alt yörüngesel grafı kendisiyle eşleşmiş bir graftır.



Şekil 2.1.6. 3 : Kendisiyle eşleşmiş graf

2.1.7 $Z_{n,u}$ Alt Yörüngesel Grafı

Bu kısımda $Z\left(\frac{0}{1},\frac{n}{u}\right)$ ifadesiyle köşeleri $[0] = \left\{\frac{x}{y} : (x,y) = 1 \text{ ve } x \equiv 0\ (mod n)\right\}$ bloğunun elemanlarından oluşan $\mathcal{G}\left(0,\frac{n}{u}\right)$ alt yörüngesel grafının alt grafını gösterelim. $Z\left(\frac{0}{1},\frac{n}{u}\right) = Z\left(0,\frac{n}{u}\right)$ yerine kısaca kolaylık olması açısından $Z_{n,u}$ yazılır. Buna göre Teorem 2.1.6.3 ifadesinden aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 2.1.7.1: $\frac{r}{s},\frac{x}{y} \in [0]$ iki köşe olsun. Bu takdirde $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ yönlü kenarı $Z_{n,u}$ alt yörüngesel grafında bir kenardır ⟺

- **i.** $y \equiv us(\text{mod}\, n)\,, ry - sx = -n$ veya
- **ii.** $y \equiv -us(\text{mod}\, n)\,, ry - sx = n$ dir.

Teorem 2.1.7.2: $\Gamma^0(n)$ kongrüans alt grubu $Z_{n,u}$ grafının köşelerini ve kenarlarını geçişli olarak permüte eder.

İspat: $v,w \in [0]$ olmak üzere v ve w $Z_{n,u}$ alt yörüngesel grafında iki köşe olsun. $\Gamma^0(n)$ kongrüans alt grubu $[0]$ bloğu üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden $h(u) = v$ olacak şekilde bir $h \in \Gamma^0(n)$ elemanı vardır. $u \approx 0$ ve $\approx$ denklik bağıntısı bir invaryant denklik bağıntısı olduğundan $h(u) \approx h(0)$ dır, yani $v \approx h(0)$ dır. Dolaysıyla $h(0) \in [0]$ olup $h \in \Gamma^0(n)$ dır. Buradan $\Gamma^0(n)$ kongrüans grubu $Z_{n,u}$ alt yörüngesel grafının köşelerini geçişli olarak permüte eder.

Şimdi $v,w \in [0]$ iki keyfi nokta olmak üzere $v \to w$ ve $x \to y$ $Z_{n,u}$ alt yörüngesel grafında iki kenar olsun. Bu durumda $(v,w) \in O_{n,u}$ ve $(x,y) \epsilon\, O_{n,u}$ dir. Böylece $A,B \in \Gamma^0(n)$ için $A(0) = v,\ A\left(\frac{n}{u}\right) = w$ ve $B(0) = x,\ B\left(\frac{n}{u}\right) = y$ dir. Buradan $A(0), B(0) \in [0]$ olduğundan $A,B \in \Gamma^0(n)$ dir. Ayrıca $BA^{-1}(v) = x$ ve $BA^{-1}(w) = y$ olur yani $BA^{-1} \in \Gamma^0(n)$ dir. Dolayısıyla $\Gamma^0(n)$ grubu $Z_{n,u}$ alt yörüngesel grafının kenarlarını geçişli olarak permüte eder.

Lemma 2.1.7.1: $\frac{r}{s},\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ rasyonel sayıları verilsin. Ayrıca $s \geq 1, y \geq 1$ olmak üzere $\frac{r}{s} - \frac{x}{y} = -1$ olsun. Bu takdirde $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$ sayıları arasında hiçbir tam sayı bulunmaz.

İspat: Varsayalım ki $\frac{r}{s} < m < \frac{x}{y}$ şartını sağlayan bir $m \in \mathbb{Z}$ tam sayısı var olsun. Bu durumda $r < ms$ ve $my < x$ dir. Bu ise $1 = sx - ry > sx - smy = s(x - my) \geq s$ çelişkisini verir. O halde varsayım doğru değildir. $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$ rasyonel sayıları arasında hiçbir tam sayı bulunmaz.

Teorem 2.1.7.3: $Z_{n,u}$ alt yörüngesel grafının kenarları $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}: \mathrm{Im}(z) > 0\}$ üst yarı düzlemi üzerinde asla kesişmezler.

İspat: Genellikten bir şey kaybetmeden üst yarı düzlemdeki kenarları $0 \to \frac{n}{u}, \frac{x_1 n}{1+y_1 n} \to \frac{x_2 n}{1+y_2 n}$ ve $\frac{x_1 n}{1+y_1 n} < \frac{n}{u} < \frac{x_2 n}{1+y_2 n}$ alalım. Burada $x_1, x_2, y_1, y_2, n, u \in \mathbb{Z}^+$ dir. Buradan $\frac{1+y_1 n}{x_1} < u < \frac{1+y_2 n}{x_2}$ dir. Diğer taraftan kenar şartlarından $x_1 - x_2 + n(x_1 y_2 - x_2 y_1) = 1$ olup yukarıdaki lemma ile istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 2.1.7.4: $Z_{n,u}$ alt yörüngesel grafının kendisiyle eşleşmiş bir kenar içermesi için gerek ve yeter şart $u^2 \equiv -1(\mathrm{mod}\, n)$ olmasıdır.

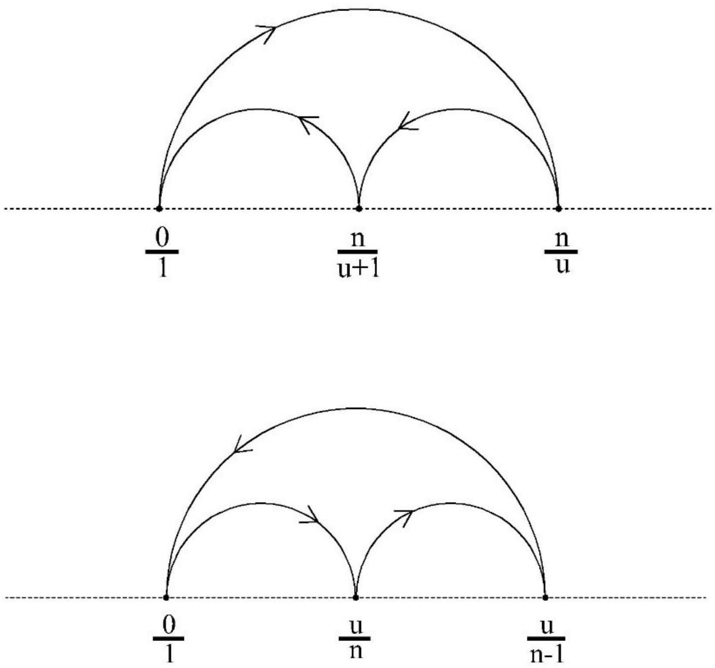
İspat: $\Gamma^0(n)$ kongrüans alt grubu transitif olarak hareket ettiğinden dolayı kendisiyle eşleşmiş olan kenarı $\frac{0}{1} \to \frac{n}{u} \to \frac{0}{1}$ biçiminde alınabilir. Yukarıda verilen Teorem 2.1.7.1 den $u^2 \equiv -1(\mathrm{mod}\, n)$ bulunur. Gerek şart kısmı yine benzer şekilde yapılır.

Teorem 2.1.7.5: $Z_{n,u}$ alt yörüngesel grafının yönlendirilmiş üçgen devre içermesi için gerek ve yeter şart $u^2 \mp u + 1 \equiv 0(\mathrm{mod}\, n)$ denklemi sağlanır.

İspat: $Z_{n,u}$ alt yörüngesel grafında yönlendirilmiş bir üçgen devre $\frac{a}{b} \to \frac{c}{d} \to \frac{k}{l} \to \frac{a}{b}$ şeklindedir. $\Gamma^0(n)$ kongrüans alt grubu $Z_{n,u}$ alt yörüngesel grafının kenarlarını geçişli olarak permüte ettiğinden söz konusu olan üçgen devreyi $\frac{0}{1} \to \frac{n}{u} \to \frac{x}{y} \to \frac{0}{1}$ olarak alınabilir. $\frac{x}{y} \to \frac{0}{1}$ yönlü kenarı için Teorem 2.1.7.1 den $1 \equiv uy(\mathrm{mod}\, n)$ ve $x = -n$ bulunur. Yine $\frac{n}{u} \to \frac{x}{y}$ olduğundan $\frac{n}{u} \to \frac{-n}{y}$ yazılabilir. Şimdi $\frac{n}{u} \overset{>}{\to} \frac{x}{y}$ olsun. Bu durumda

$y = -u - 1$ ve $y \equiv u^2 (\text{mod}\, n)$ olup $u^2 + u + 1 \equiv 0 (\text{mod}\, n)$ kongrüans denklemi bulunur. Eğer $\frac{n}{u} \overset{<}{\rightarrow} \frac{x}{y}$ durumu alınırsa $y = 1 - u$ ve $y \equiv -u^2 (\text{mod}\, n)$ olduğunda dolayı $u^2 - u + 1 \equiv 0 (\text{mod}\, n)$ denklemi elde edilir. Böylece her iki durum sonucunda $u^2 \mp u + 1 \equiv 0 (\text{mod}\, n)$ denklemi elde edilir.

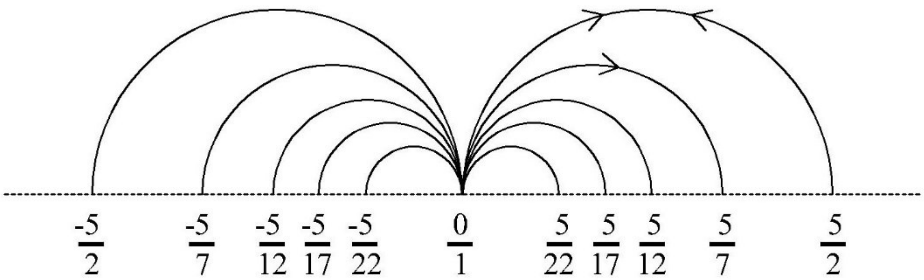
Şimdi tersine $u^2 \mp u + 1 \equiv 0 (\text{mod}\, n)$ denklemi sağlansın. Bu durumda verilen denklem $\mp u + 1 \equiv -u^2 (\text{mod}\, n)$ şeklinde yazılabilir. Önce $u + 1 \equiv -u^2 (\text{mod}\, n)$ incelenirse $\frac{n}{u} > \frac{n}{u+1}$ olmak üzere $\frac{n}{u} \rightarrow \frac{n}{u+1}$ yönlü kenarı elde edilir. Yani $\frac{0}{1} \rightarrow \frac{n}{u} \rightarrow \frac{n}{u+1} \rightarrow \frac{0}{1}$ üçgen devre bulunur. Diğer $-u + 1 \equiv -u^2 (\text{mod}\, n)$ durumunda ise $u + 1 \equiv u^2 (\text{mod}\, n)$ olup buradan $\frac{n}{u} < \frac{n}{u+1}$ olmak üzere $\frac{n}{u} \rightarrow \frac{n}{u-1}$ yönlü kenarı bulunur. Böylelikle $\frac{0}{1} \rightarrow \frac{n}{u} \rightarrow \frac{n}{u-1} \rightarrow \frac{0}{1}$ üçgen devre elde edilir. Sonuç olarak her iki durumda birleştirilirse $u^2 \mp u + 1 \equiv 0 (\text{mod}\, n)$ ise $\frac{0}{1} \rightarrow \frac{n}{u} \rightarrow \frac{n}{u \mp 1} \rightarrow \frac{0}{1}$ yönlü üçgen devreler meydana gelir.



Şekil 2.1.7. 1 : Üçgen devreler

Örnek 2.1.7.1: $n = 5$ olsun. $\varphi(5) = \prod_{p \mid n} p\left(1 - \frac{1}{P}\right) = 5\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 4$ olduğundan

$u = 1, 2, 3, 4$ olur. Dolayısıyla $u^2 \equiv -1(\mathrm{mod}\, n) \Rightarrow u^2 \equiv -1(\mathrm{mod}\, 5) \Rightarrow u = 2$ ve $u = 3$ olup sadece bu değerler için $Z_{5,2}$ ve $Z_{5,3}$ kendisiyle eşleşmiş alt yörüngesel graflardır.



Şekil 2.1.7. 2 : ***Kendisiyle eşleşmiş alt yörüngesel graflar***

3. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada $\Gamma^0(n)$ kongrüans alt grubu sadece 2. ve 3. mertebeden eliptik elemanlar içermesinden dolayı alt yörüngesel grafında ikigen ve üçgen devreler bulunmuştur. Burada kullanılan alt yörüngesel graflar aslında literatürde mevcut olan simge probleminin çözümü için çok önemli bir yöntemdir. Aslında bu konu ile ilgili yapılan çalışmalarda temel hedef graflardaki kapalı devreler ile ayrık gruplardaki üretici eliptik elemanların mertebeleri arasındaki bağ ilişkisi yardımıyla simge problemini çözmektir. Bu tez çalışması da kısmen bu probleme yöneliktir. Yapılan tez çalışmasında elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir:

- $\Gamma^0(n)$ kongrüans alt grubunun genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi üzerindeki hareketinin transitif olmadığı gösterildi.
- $\mathcal{G}_{n,u}$ alt yörüngesel grafında kenar olma şartları elde edildi.
- $\mathcal{G}_{n,u}$ alt yörüngesel grafının kendisiyle eşleşmiş graf olabilmesi için gerek ve yeter şart verildi.
- $Z_{n,u}$ alt yörüngesel grafında kenar olma şartları verildi.
- $\Gamma^0(n)$ kongrüans alt grubunun $Z_{n,u}$ grafının köşelerini ve kenarlarını transitif olarak permüte ettiği gösterildi.
- $Z_{n,u}$ alt yörüngesel grafının kendisiyle eşleşmiş graf olabilmesi için gerek ve yeter şart verildi.
- $Z_{n,u}$ alt yörüngesel grafının yönlendirilmiş üçgen devre içermesi için gerek ve yeter şart bulundu.

Yapılan çalışmada da görüldüğü üzere impirimitf hareketin durumunu seçilen $\Gamma^0(n)$ kongrüans alt grubu belirlemektedir. Dolayısıyla bu grup yerine farklı bir grup alınarak impirimitif hareketin oluşturacağı yapı incelenebilir. Böylece grup seçimindeki farklılıklar graflardaki devrelerin tipini değiştirebilir veya farklı kongrüans denklemleri ortaya çıkabilir. Elde edilen kongrüans denklemleri sayılar teorisi açısından da önemli olabilir. Ayrıca bulunan tüm sonuçların geometrik görselleri için yüzey döşemeleri açısından da değerlendirilebilir.

4. KAYNAKLAR

Akbaş M. On Suborbital Graphs For The Modular Group, Bull. London Math. Soc. 33, 647-652, 2001

Akbaş M., Singerman D. The Signature of The Normalizer of $\Gamma_0(N)$, Tr. Journal of Math., Tübitak, 20, 379-387, 1996

Beardon A. F., The Geometry of Discrete Groups, Springer Verlag, New York, 1983.

Biggs N. L., White A. T., Permutation Groups and Combinatorial Structures, London Math. Soc. Lecture Notes 33, Cambridge University Pres, Cambridge, 1979

Büyükköse Ş. , Kaya Gök G., Graf Teoriye Giriş , Nobel Akademik Yayıncılık, Mayıs 2018

Güler B.Ö., Beşenk M., Değer A.H. and Kader S., Elliptic Elements and Statistics Vol. 40, No 2, 203-210, 2011

Jones G. A., Singerman D. , Complex Functions an Algebraic and Geometric Viewpoint, Cambridge University Press, Cambridge 1987

Jones G. A., Singerman D. and Wicks K., The Modular Group and Generalized Farey Graphs, London Math. Soc. Lecture Notes, CUP, Cambridge, 160, 316-318, 1991

Keskin R. , Suborbital Graphs for The Normalizer of $\Gamma_0(m)$, Europan Juornal of Combinatorics, Vol 27, No 2, 193-206, 2006

Lehner J., Newman M. , Weierstrass Points of $\Gamma_0(N)$, Annals of Mathematics Vol 79, No 2, March 360-368 , 1964

Neumann P.M., Finite Permutation Groups, Edge-Coloured Graphs and Matrices, Topics in Group Theory and Computation, Academic Press, London 1977

Newman M., The Normalizer of Certain Modular Subgroups, Can. J. Math 8, 29-31 , 1956

Ogg A. P., Modular Functions, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol 37, 1980

Rose H. E., A Course in Number Theory, Oxford University Press, Oxford, 1988

Schoeneberg B., Elliptic Modular Functions, Springer Verlag, Berlin 1974

Shimura G., Introduction to The Arithmetic Theory of Automorphic Functions Princeton Univ. Press, 1971

Sims C. C., Graphs and Finite Permutation Groups, Math Z., 95, 76-86, 1967

Singerman D., Subgroups of Fuchsian Groups and Finite Permutation Groups, Bull. London Math. Soc 2, 319-323, 1970

Tsuzuku T., Finite Groups and Finite Geometries, Cambridge University Pres, Cambridge 1982

Yazıcı N., Modüler Grubun Picard Grubundaki Normalliyeninin Alt Yörüngesel Grafları, Yüksek Lisans Tezi, KTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2013

5. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Gizem DEMİRBAŞ ÇEVİRİCİ
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Denizli – 01/04/1990
Lisans Üniversite	:	Pamukkale Üniversitesi
Elektronik posta	:	gizemdemirbas_90@hotmail.com
İletişim Adresi	:	Fesleğen mh. 992 Sokak No: 59 Daire 3 Pamukkale/DENİZLİ

Konferans listesi :

Gizem Demirbaş "Investigation of The Suborbital Graphs" 2nd International Conference on Mathematical Advances and Applications, May 3-5 ICOMAA-2019 (Yıldız Technical University / Turkey)

Gizem Demirbaş Çevirici "Directed Orbital Graphs on Upper Half Plane" 2nd International Congress of Academic Research, February 17-19 ICAR-2020 (Bolu / Turkey)