T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MORREY UZAYLARINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ RIESZ POTANSİYELİNİN SPANNE VE ADAMS TİPİ SINIRLILIKLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HÜSEYİN ALTUNBAŞ

DENİZLİ, OCAK-2023

T.C.

PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MORREY UZAYLARINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ RIESZ POTANSİYELİNİN SPANNE VE ADAMS TİPİ SINIRLILIKLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HÜSEYİN ALTUNBAŞ

DENİZLİ, OCAK-2023

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

HÜSEYİN ALTUNBAŞ

ÖZET

MORREY UZAYLARINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ RIESZ POTANSİYELİNİN SPANNE VE ADAMS TİPİ SINIRLILIKLARI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
HÜSEYİN ALTUNBAŞ
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. ABDULHAMİT KÜÇÜKASLAN
DENİZLİ, OCAK-2023

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. Bu kısımda Morrey uzayları ve genelleştirilmiş Riesz potansiyelinin tarihçesine yer verilmiştir. İkinci bölümde temel tanım, lemma ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde Morrey uzaylarının cebirsel ve topolojik yapıları incelenmiştir. Dörtüncü bölümde Morrey uzaylarında Riesz potansiyelinin sınırlılığı incelenmiştir. Beşinci bölümde Morrey uzaylarında genelleştirilmiş Riesz potansiyelinin Spanne ve Adams tipi sınırlılıkları incelenmiştir. Teoremlerin ispatları lokal eşitsizlikler yardımıyla yapılmıştır. Bu lokal eşitsizlikler sayesinde kullanmış olduğumuz fonksiyonların monoton özelliğine ihtiyaç duyulmadan yapılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Morrey Uzayı, Genelleştirilmiş Riesz potansiyeli, Spanne-tipi sınırlılık, Adams-tipi sınırlılık.

ABSTRACT

THE SPANNE AND ADAMS TYPE BOUNDEDNESS OF GENERALIZED RIESZ POTENTIAL IN MORREY SPACES
MSC THESIS
HÜSEYİN ALTUNBAŞ
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR.ABDULHAMİT KÜÇÜKASLAN)
DENİZLİ, JANUARY-2023

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In this section, the history of Morrey spaces and the generalized Riesz potential are given. In the second chapter, basic definitions, lemmas and theorems are given. In the third chapter, algebraic and topological structures of Morrey spaces are examined. In the fourth chapter, the boundedness of the Riesz potential in Morrey spaces is examined. In the fifth chapter, the Spanne and Adams type boundedness of the generalized Riesz potential in Morrey spaces are examined. Local inequalities are used in the proof of our theorems. Thanks to these local inequalities, it is done without the need for the monotonous feature of the functions we have used.

KEYWORDS: Morrey space, Generalized Riesz potential operator, Spanne-type boundedness, Adams-type boundedness.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{R}^n$	:	n boyutlu Öklid uzayı
$B(u,r)$	:	u merkezli r yarıçaplı yuvar
$\|B(u,r)\|$	:	$B(u,r)$ yuvarının Lebesue ölçüsü
$I_\alpha f$	:	Riesz potansiyeli
I_α	:	Riesz potansiyel operatörü
I_ρ	:	Genelleştirilmiş Riesz potansiyel operatörü
Mf	:	Maksimal fonksiyon
M	:	Maksimal operatör
M_α	:	Kesirli maksimal operatör
M_ρ	:	Genelleştirilmiş Kesirli Maksimal Operatörü
L_p	:	Lebesgue uzayı
L_p^{loc}	:	p. kuvvetten lokal integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L_{p,\lambda}$	:	Morrey uzayı
$WL_{p,\lambda}$	:	Zayıf Morrey uzayı
$A \hookrightarrow B$	:	A, B‘ye gömülüdür.

ÖNSÖZ

Çalışma konumun belirlemesinde ve çalışma sürecim boyunca her daim tecrübesini, biligisini ve sabırlı bir şekilde desteğini esirgemeyen takıldığım kısımlarda cevap bulmama yardımcı olan çok değerli danışman hocam Doç. Dr. Abdulhamit KÜÇÜKASLAN'a minneti bir borç bilirim.

Eğitim hayatım süresince sürekli yanımda hissettiğim aileme sonsuz teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

1938'de Morrey uzayları C.B. Morrey tarafından varyasyonlar hesabında görülen düzgünlük problemlerini araştırmak ve lokal düzgünlüğün Lebesgue uzaylarından daha kesin olduğunu göstermek gayesiyle ortaya çıkarılmıştır.

Morrey uzayı aşağıdaki gibi tanımlıdır;

$0 \leq \lambda \leq n, 1 \leq p < \infty$ ve $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|f\|_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\substack{t>0 \\ u\in\mathbb{R}^n}} t^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L_p(B(u,t))} < \infty$$

olan bütün f fonksiyonlarının sınıfına Morrey uzayı denir. Bu fonksiyonlar sınıfı $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ile ifade edilir (Morrey 1938).

Morrey uzaylarının Schrödinger ve Navier-Stokes denklemlerinde, süreksiz katsayılı eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinde ve potansiyel teorisinde birçok çalışma mevcuttur (Ruiz 1989, Taylor 1992, Guliyev ve diğ. 2020, Adams 2004, Bennet ve Sharpley 1988, Burenkov 2004, Guliyev ve Omarova 2018, Ragusa 2012, Küçükaslan 2022).

Bu alanda ilk çalışmalar 1920 yılında Hardy ve Littlewood tarafından Riesz potansiyelinin Lebesgue uzaylarındaki sınırlılığı olarak gerçekleştirilmiştir. Sobolev tarafından 1930 yılında bu çalışma geliştirilmiştir. Riesz potansiyeli için literatürde çokça uygulama alanı olan eşitsizliklerden biri Hardy-Littlewood-Sobolev eşitsizliğidir. 1969'da Spanne, Morrey uzaylarında Riesz potansiyelinin sınırlılığını ispatlamıştır. Adams, Riesz potansiyelinin sınırlılığı için 1975'te kullanışlı ve daha iyi bir sonuç elde etmiştir. 1987'de Chiarenza ve Frasca bu sonuç ile yeni bir ispat ile yöntemi ispatlamıştır.

Gunawan (2003), çalışmasında genelleştirilmiş Riesz potansiyelinin genelleştirilmiş Morrey uzaylarında sınırlılığını kanıtlamıştır.

Eridani ve arkadaşları (2004), genelleştirilmiş Riesz potansiyelinin ve bu potansiyelin modifiye versiyonlarının sırasıyla Morrey uzayları ve Companato uzayları üzerindeki sınırlılığını kanıtlamışlardır. Eridani ve arkadaşları Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu ve Young fonksiyonları yardımıyla ispatlarını yapmışlardır.

Guliyev (2009), çalışmasında Morrey tipi norm tanımlanan $W(x, r)$ genel fonksiyonu ile $M_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayını dikkate almıştır. $M_{1,w}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WM_{1,w_2}(\mathbb{R}^n$ zayıf uzayına ve $1 < p < \infty$ $M_{p,w_1}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayından $M_{p,w_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına Calderon Zygmund singüler integral operatörleri ve maximal operatörlerin sınrlılığını garanti eden (w_1, w_2) çifti üzerinde koşullar bulmuştur. I_α potansiyel operatörleri için Sobolev Adams tipi $M_{p,w_1}(\mathbb{R}^n) \to M_{q,w_2}(\mathbb{R}^n)$ teoremini kanıtlamıştır. Sınırlılık için koşulların tüm durumlarında (w_1, w_2) üzerinde Zygmund tipi integral eşitsizliklerin terimleri verilmiştir ki bu da r'de w_1, w_2 nin monotonluğu üzerinde herhangi Zygmund tipi varsayımı kabul etmez. Uygulamalar olarak ters Hölder sınıfina ait olan bazı negatif olmayan potansiyellerle ilgili genelleştirilmiş Morrey uzayları üzerinde çeşitli operatörlerin sınırlılığını kanıtlamıştır.

Guliyev (2011), makalesinde Morrey uzaylarında I_α Riesz potansiyel operatörünün sınırlılığı için gerek ve yeter koşulları verdi ve M maksimal operatörünün sınırlılığını kanıtlamıştır.

Guliyev ve arkadaşları (2015), çalışmasında genelleştirilmiş lokal Morrey uzaylarında genelleştirilmiş Riesz potansiyel operatörünü incelemişler ve burada Lorentz Zygmund-tipi integral eşitsizliklerini kullanarak Spanne ve Adams-tipi sınırlılığı ispatlamışlardır.

Nakamura (2016), genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayları ve klasik operatörler üzerine yaptığı çalışmasında Hardy–Littlewood maksimal operatörü, genelleştirilmiş kesirli maksimal operatörler, genelleştirilmiş Riesz potansiyeli operatörü (genelleştirilmiş kesirli integral operatörü) ve singüler integral operatörler gibi bu alanlardaki bazı operatörlerin sınırlılığını araştırmış ve aynı zamanda vektör değerli alanlarda sınırlılıklarını da incelemiştir.

Guliyev ve arkadaşları (2020), $M^{loc}_{p,q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ lokal Morrey Lorent uzaylarında I_α Riesz potansiyelinin sınırlılığı için bulduğu gerek ve yeter koşullar $M^{loc}_{p,q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ lokal Morrey Lorentz uzaylarında bazı analitik yarı grupların kesirli maksimal operatör, kesirli Marcinkiewicz operatör ve kesirli kuvvetler gibi özel operatörlerin sınırlılığına uygulandı.

Küçükaslan ve arkadaşları (2020), M_ρ genelleştirilmiş kesirli maksimal operatörünün sınırlılığını genelleştirilmiş lokal Morrey uzaylarında ve genelleştirilmiş Morrey uzaylarında incelemişlerdir.

Küçükaslan (2020), bu makalede zayıf yaklaşımları içeren $M^{\{x_0\}}_{p,\varphi}(w^p)$ genelleştirilmiş ağırlıklı lokal Morrey uzayları ve $M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(w)$ genelleştirlmiş ağırlıklı Morrey uzayları üzerinde M_ρ genelleştirilmiş kesirli maksimal operatörü süreklilik özelliği için Spanne ve Adams tipi yaklaşımlar olan iki tip yaklaşım çalışmıştır. $1 \leq p < q < \infty$ için $M^{\{x_0\}}_{p,\varphi}(w^p)$ genelleştirilmiş ağırlıklı lokal Morrey uzaylarından $WM^{\{x_0\}}_{q,\varphi_2}(w^q)$ ağırlıklı zayıf uzaya ve $w^q \in A_{1+\frac{q}{p'}}$ ile $1 < p < q < \infty$ için $M^{x_0}_{p,\varphi_1}(w^p)$ den diğer uzay $M^{\frac{1}{p}}_{p,\varphi}(w^q)$' ya M_ρ genelleştirilmiş kesirli maksimal operatörün Spanne tipi sınırlılığı kanıtlanmıştır. $1 \leq p < q < \infty$ için $M_{p,\varphi^{\frac{1}{q}}}(w)$ genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarından $WM_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(w)$ ağırlıklı zayıf uzayına ve $w \in A_{p,q}$ ile $1 < p < q < \infty$ için $M_{p,\varphi^{\frac{1}{p}}}(w)$' dan $M_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}(w)$' ya M_ρ genelleştirilmiş kesirli maksimal operatörün Adams tipi sınırlılığı kanıtlanmıştır. Tüm ağırlıklı fonksiyonlar $A_{p,q}$ Muckenhoupt-Weeden sınıfına aittir. Tüm durumlarda M_ρ operatörünün sınırlılığı için koşullar r' de $\varphi_1(x,r), \varphi_2(x,r)$, ve $\varphi(x,r)$ nin monotonluğu üzerinde herhangi varsayıma ihtiyaç duyulmadan tüm φ fonksiyonları ve r üzerinde supremal-tip integral eşitsizlikleri açısından verilmiştir.

Mizuta ve arkadaşları (2021), çalışmasında Morrey uzaylarından Morrey-tipi uzaylarına gömülme olduğunu araştırmışlardır. Morrey-tipi uzaylarda Riesz potansiyelleri için Sobolev tipi eşitsizlikler ile ilgilenmişlerdir.

Küçükaslan (2021), bu çalışmasında fonksiyonların yeni bir sınıfı olan $L_{p,q,\lambda}(\mathbb{R})$ Morrey-tipi uzaylarında M_α kesirli maksimal operatör için gerek ve yeter koşulları kanıtlamış ve Mf maksimal fonksiyonu için sınırlılık koşullarını elde etmiştir. Elde edilen kesin tekrar düzenlenen yaklaşımları kullanarak elde etmiştir. Elde edilen sonuçlar $L_{p,q,\lambda}(\mathbb{R})$ Lorentz Morrey uzaylarında $V^\gamma\nabla(-\delta + V)^{-\beta}$ ve $V^\gamma(-\delta + V)^{-\beta}$ Schrödinger tipi operatörler ve B_r^δ Bochner-Riesz operatörü gibi özel operatörlerin sınırlılığı için uygulandı, burada negatif olmayan V potansiyeli $B_\infty(\mathbb{R}^n)$ ters Hölder sınıfına aittir.

Mustafayev ve Küçükaslan (2021), çalışmasında v Muckenhoupt A_∞ sınıfına ait olduğunda genelleştirilmiş ağırlıklı lokal Morrey uzayları $M_{p,w}(\mathbb{R}^n, v)$ ve $M_{p,w}(\mathbb{R}^n, v)$ genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaykarında kesirli maksimal fonksiyon ve Riesz potansiyelinin normlarının denkliğini garanti eden v ağırlığı ve w fonksiyonu üzerine koşulları bulmuşlar.

Küçükaslan (2021), genelleştirilmiş Riesz potansiyelinin Adam-tipi ve Spanne-tipi sınırlılıklarını genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında ispatlamıştır.

Küçükaslan (2022), Genelleştirilmiş Riesz potansiyelinin lokal ve global Morrey uzaylarında sınırlılığını ispatlamıştır.

Son yıllarda harmonik analizin klasik operatörlerinden olan Riesz potansiyelinin Morrey-tipi uzaylarda davranışı ile ilgili birçok çalışma yapılmış ve bu çalışmalar bilimsel dergi ve kitaplarda yayımlanmıştır.

Bu çalışmada kullanılmış Riesz potansiyeli aşağıdaki gibi tanımlanmış

$$(I_\alpha f)(u) = C_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(v)}{|u - v|^{n-\alpha}} dv, 0 < \alpha < n \tag{1.1}$$

burada $C_\alpha = \pi^{\frac{n}{2}} 2^\beta \frac{\Gamma(\frac{\beta}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} - \frac{\beta}{2})}$ şeklinde tanımlıdır. Yukarıdaki integral ile tanımlı operatör ilk defa Riesz tarafından incelenmiştir (Riesz 1949).

Riesz potansiyelinin bu şekilde yazılışından bu integralin f fonksiyonu ve $|u|^{\alpha-n}$ çekirdeğinin konvolüsyonu olduğu görülmektedir. Bu f'nin bir K çekirdeği ile konvolüsyonu $f * K$ biçiminde gösterilir. Konvolüsyon aşağıdaki gibi tanımlıdır;

$$(f * K)(u) = \int_{\mathbb{R}^n} f(v)K(u-v)dv \tag{1.2}$$

dir (Stein 1970). Diğer bir deyişle; Riesz potansiyeli (1.1)' de tanımlanan operatörler sınıfının özel bir durumudur. Bu operatörler sınıfı singüler (tekil) integralleri de içerir. Riesz potansiyelinin çekirdeği $K(u) = |u|^{\alpha-n}$ fonksiyonun koordinat başlangıcında zayıf (kaldırılabilir) singülerliği mevcuttur.

$K(u) = |u|^{\alpha-n}$ çekirdekli konvolüsyonlar singüler integraller olarak da adlandırılır. Diğer bir ifadeyle; potansiyellerden farklı olarak singüler (tekil) integrallerin çekirdeklerinin integrallenemeyen singülerlikleri mevcuttur. Bunların tümü (1.2) konvolüsyon operatörünün çekirdeğinin integrallenemeyen singülerliği olduğunda buna singüler, zayıf (integrallenebilen) singülerliği olduğunda da potansiyel olarak ifade edilmiştir (Stein 1970, Landkoff 1972).

Singüler integral ve potansiyel teorisinde sıklıkla uygulanan Fourier dönüşümüdür. $\tilde{f}$:$L_1(\mathbb{R}^n) \rightarrow f$ nin Fourier dönüşümü $\tilde{f}$ veya Ff olarak ifade edilir,

$$Ff(u) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(u,v)} f(v)dv$$

şeklinde tanımlıdır, (u, v) n-boyutlu $u = (u_1, ..., u_n)$ ve $v = (v_1, ..., v_n)$ vektörlerinin iç çarpımıdır, $dv = dv_1...dv_n$ $\mathbb{R}^n$ de Lebesgue ölçüsüdür (Stein 1970). $\tilde{f}(-u)$'e ters Fourier dönüşümü denir. Bu dönüşüm $F^{-1}f$ şeklinde de gösterilir.

Laplace operaörü aşağıdaki gibi tanımlıdır

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial u_n^2}$$

ve

$$F\Delta f(u) = -4\pi^2 |u|^2 Ff(u)$$

olduğu görülür. Buradan

$$F(-\Delta)f(u) = 4\pi^2 |u|^2 Ff(u)$$

dir. Stein 1971'de Laplace operatörü için yazılan formülün aslında bu operatörün keyfi kuvvetleri için de var olduğunu göstermiştir. Yani

$$F(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} = 2\pi|u|^{\beta}Ff(u)$$

dir. Aynı çalışmada $-n < \beta < 0$ halinde Laplace operatörünün kesirli kuvvetleri (1.1) formu ile Riesz çekirdeğinin kuvvetleri aynı olduğu görülüyor ((1.2) dekleminin $\alpha = -\beta$ için yazıldığını belirtelim).

Riesz potansiyellerinin Fourier dönüşümü ve Laplace operatörü arasındaki ilişkileri bu potansiyellerin matematiğin pek çok dalında uygulanan önemli bir operatördür.

Yukarıdaki ifadelerden konvolüsyon operatörleri sınıfında Riesz potansiyeli iyi analiz edilmiş bir operatördür. Bu operatörlerin sayesinde fonksiyonlar teorisine potansiyel uzayları kazandırmıştır (Stein 1970 ve Gadijev 1988).

$\rho : (0,\infty) \to (0,\infty)$ ölçülebilir bir fonksiyon, I_ρ genelleştirilmiş Riesz potansiyeli (genelleştirilmiş kesirli integral operatörü) ve M_ρ genelleştirilmiş kesirli maksimal operatörü $\mathbb{R}^n$ de tanımlı herhangi bir f fonksiyonu için

$$I_\rho f(u) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho(|u-v|)}{|u-v|^n} f(v)dv$$

$$M_\rho f(u) = sup_{t>0} \frac{\rho(t)}{t^n} \int_{B(u,t)} |f(v)|dv$$

ile tanımlıdır. $\rho(t) = t^\alpha$ ise, bu takdirde $M_\alpha = M_{t^\alpha}$ kesirli maksimal operatördür ve $I_\alpha = I_{t^\alpha}$ Riesz potansiyelidir.

Ayrıca,

$$M_\rho f(u) = sup_{t>0} \frac{\rho(t)}{t^n} \int_{B(u,t)} |f(v)|dv \leq sup_{t>0} \int_{B(u,t)} \frac{\rho(|u-v|)}{|u-v|^n} |f(v)|dv$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho(|u-v|)}{|u-v|^n} |f(v)|dv = I_\rho(|f|)(u)$$

olacak şekilde M_ρ ve I_ρ operatörleri arasında yakın ve güçlü bir bağıntı vardır (Küçükaslan 2020).

Teorem (Spanne) Kabul edelim ki $0 < \alpha < n$, $0 < \lambda < n - \alpha$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ ve $\mu = \frac{n\lambda}{(n-\lambda)}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ve $\frac{\lambda}{p} = \frac{\mu}{q}$ olsun. O halde

$$||I_\alpha f||_{L_{q,\mu}(\mathbb{R}^n)} \leq C||f||_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Teorem (Adams) Kabul edelim ki $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $0 < \lambda < n - \alpha p$ olsun. Bu takdirde

$$||I_\alpha f||_{L_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leq C||f||_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}$$

olur, burada $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n-\lambda}$ dir ve C sadece n, λ, p, α'ya bağlıdır.

Biz bu tezimizde, yukarıda verilen Spanne ve Adams teoremlerinin genelleştirilmesi olan ve Küçükaslan (2015) tarafından doktora tez çalışmasında yapmış olduğu genelleştirilmiş Riesz potansiyelinin Morrey uzaylarında Spanne ve Adams tipi sınırlılıklarını inceleyeceğiz.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1 Temel Kavramlar

2.1.1 Tanım A topolojik Hausdorff uzay olsun. $A \times A$ ve $\mathbb{C} \times A \to A$ uzayına $(u, v) \to u+v$ ve $(c, u) \to cu$ dönüşümleri sürekli ise bu taktirde A'ya topolojik lineer uzay adı verilir. $\mathbb{C}$, Öklidyen metriği ile verilen doğal topolojiye sahiptir (Adams ve Fournier 2003).

2.1.2 Tanım A lineer uzayında tanımlı skaler-değerli bir f fonksiyonu fonksiyonel olarak tanımlanır. $u, v \in A$ ve $c, d \in \mathbb{C}$,

$$f(cu + dv) = cf(u) + df(v)$$

ise, bu durumda f lineerdir. A bir topolojik lineer uzay olsun. $f : A \to \mathbb{C}$ fonksiyoneli sürekli ise, A'da sürekli fonksiyonel adı verilir (Grafakos 2008).

2.1.3 Tanım Bir A topolojik lineer uzayda tüm sürekli, lineer fonksiyonellerin kümesi A'nın dual uzayı olarak isimlendirilir ve A' şeklinde ifade edilir. Noktasal toplama ve skaler ile çarpma işleminde A' bir lineer uzaydır. A' dual uzayı için iyi bir topoloji belirlenir ise, bu takdirde A' bir topolojik lineer uzay olarak elde edilir (Grafakos 2008).

2.1.4 Tanım Kabul edelim ki A bir $\mathbf{K}$ cisminde lineer uzay olsun.

$$\|\cdot\| : A \to \mathbb{R}, u \to \| u\|$$

dönüşümü $\forall v, u \in A$, $\forall a \in \mathbf{K}$ için

$$(N1)\, ||u|| \geq 0 \quad , \quad \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \theta,$$

$$(N2)\, ||au|| = |a| \, \|u\| \, ,$$

$$(N3)\ \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|\,,$$

koşullarını sağlıyor ise, A'da norm denir. $(A, \|\cdot\|)$ ikilisine normlu lineer uzay adı verilir. $(A, \|\cdot\|)$ normlu uzayı kısaca A şeklinde ifade edilir .

2.1.5 Tanım Yukarıda verilen $(N3)$'de $\|u+v\| \leq C(\|u\| + \|v\|)\,, C > 0$ durumundaki dönüşüme quasi-norm adı verilir.

2.1.6 Tanım A normlu uzayında her Cauchy dizisi A'da limite yakınsıyorsa bu uzaya Banach uzayı denir (Grafakos 2008).

2.1.7 Tanım T operatörü aşağıda verilen özellikleri sağlar ise T'ye lineer operatör adı verilir.
(i) T operatörünün $D(T)$ tanım bölgesi lineer uzay olduğundan $R(T)$ değer bölgesi, aynı cisimde lineer veuzaydır.
(ii) $\forall\, u, v \in D(T)$ *ve* a skaleri için,

$$T(u+v) = Tu + Tv$$

$$T(au) = aTu$$

sağlanır.

2.1.8 Tanım A,B normlu uzaylar $D(T) \subset A$, $T : D(T) \to B$ lineer operatör olsun. $\forall u \in D(T)$ için, $\|Tu\| \leq C\|u\|$ olacak biçimde $C > 0$ gerçel sayısı var ise, bu durumda T ye sınırlı operatör adı verilir. T nin normu

$$\| T \| = \sup_{\substack{u \in D(T) \\ u \neq 0}} \frac{\|Tu\|}{\|u\|}$$

biçiminde gösterilir (Kreyszig 1989).

2.1.9 Tanım Kabul edelim ki A,B normlu uzaylar, $D(T) \subset B$, $T : D(T) \to B$ ve $u_0 \in D(T)$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\|u - u_0\| < \delta$ şartını sağlayan $\forall u \in D(T)$ için, $\|Tu - Tu_0\| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ var ise T'ye u_0'da sürekli operatör adı verilir.

2.1.1 Teorem A ve B normlu uzaylar $D(T) \subset A$, $T : D(T) \to B$ lineer operatör olsun. O halde
T süreklidir $\Leftrightarrow$ T sınırlıdır (Kreyszig 1989).

2.1.2 Teorem Y bir küme olmak üzere, Y'nin alt kümelerinin bir Σ sınıfı aşağıda verilen şartları sağlıyor ise, bu takdirde Σ sınıfına Y'de cebir adı verilir.
(i) $Y \in \Sigma$,
(ii) $\forall A \in \Sigma$ için $A^c = Y|A \in \Sigma$,
(iii) $j = 1, 2, ...n$ için $A_j \in \Sigma$ ise $\cup_{j=1}^{n} \in \Sigma$.
Eğer (iii) ifadesi yerine " $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_j \in \Sigma \Rightarrow \cup_{j=1}^{n} A_n \in \Sigma$"
koşulu yazılırsa Σ cebirine σ-cebir denir.

2.1.10 Tanım $u = (u_1, \ldots u_n)$ ve $v = (v_1, \ldots v_n)$, $\mathbb{R}^n$ uzayında vektörler, $\mathbb{R}^n$, n-boyutlu Euclidean uzayı $(u, v) = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j$ iç çarpımıyla tanımlanan $\mathbb{R}^n$, n-boyutlu reel uzayıdır.

2.1.11 Tanım Kabul edelim ki A bir küme Σ, A kümesinde σ-cebir olsun. O halde (A, Σ)'ya ölçülebilir uzay denir. Σ'daki her kümeye Σ-ölçülebilir küme adı verilir. Kısa olarak ölçülebilir küme denir.

2.1.12 Tanım (A, Σ) ölçülebilir uzay olsun. $\eta : \Sigma \to [-\infty, \infty]$ tanımlanan fonksiyon
(i) $\eta(\emptyset) = 0$
(ii) $\forall A \in \Sigma$ için $\eta(A) \geq 0$
(iii) Ayrık $\forall(A_n)$ dizisi $\eta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} An\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta(A_n)$ koşullarını sağlıyor ise bu fonksiyona ölçü fonksiyonu denir. $\forall A \in \Sigma$ için $\eta(A) < \infty$ ise η'ya sonlu ölçü adı verilir.

2.1.13 Tanım Kabul edelim ki Y küme ve $P(Y)$, Y'nin kuvvet kümesi ve $\eta^* : P(Y) \to [-\infty, \infty]$ tanımlanan fonksiyon
(i) $\eta^*(\emptyset) = 0$
(ii) $\forall A \in P(Y)$ için $\eta^*(A) \geq 0$,

(iii) $A \subset B \subset Y$ için $\eta^*(A) \leq \eta^*(B)$,

(iv) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in P(Y)$ ise $\eta^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \eta^*(A_n)$ koşullarını sağlar ise η^* fonksiyonuna Y üzerinde bir dış ölçü adı verilir.

2.1.14 Tanım Kabul edelim ki (I_k), $\mathbb{R}$'nin sınırlı ve açık alt aralıklarının bir dizisi

$$\tau_A = \left\{(I_k) : A \subset \bigcup I_k\right\}$$

olsun. $\mathbb{R}$'nin kuvvet kümesinde yani; $P(\mathbb{R})$'de

$$m^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) : (I_k) \in \tau_A\right\}$$

şeklinde tanımlı m^* bir dış ölçüdür. Buna Lebesgue dış ölçüsü adı verilir. Lebesgue dış ölçüsü $\mathbb{R}$'nin her bir alt aralığını $\mathbb{R}$'nin uzunluğuna eşler. $\mathbb{R}^n$ uzayında Lebesgue dış ölçüsünü tarif etmek için

$$I = \{u : c_j < u_j < d_j, j = 1, \ldots n\}$$

n boyutlu kapalı aralıklarını göz önünde bulunduralım. Bu aralıkların hacimleri

$$\zeta(I) = \prod_{j=1}^{n} (d_j - c_j)$$

şeklindedir. Herhangi bir $D \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin Lebesgue dış ölçüsü

$$m^*(D) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) : D \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, I_k \text{ bir aralık}\right\}$$

olarak verilir. $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ için

$$m^*(A) = m^*(A \cap D) + m^*(A \cap (\mathbb{R}^n - D))$$

bu takdirde D'ye Lebesgue ölçülebilir küme adı verilir.

2.1.15 Tanım Kabul edelim ki $M(\mathbb{R}, m^*)$, m^* dış ölçüsüne göre ölçülebilen $\mathbb{R}$ uzayının alt kümelerinin sınıfı olsun. m^* Lebesgue dış ölçüsünün $M(\mathbb{R}, m^*)$, m^* sınıfına da $B(\mathbb{R})$ Borel sınıfına kısıtlamasına Lebesgue ölçüsü adı verilir, m şeklinde ifade edilir.

2.1.16 Tanım Kabul edelim ki (A, Σ) ölçülebilir uzay , $f : A \to \mathbb{R}$ olsun. $\forall a \in \mathbb{R}$ için

$$f^{-1}(]a, +\infty[) = \{u \in A : f(u) > \alpha\} \in \Sigma$$

oluyor ise f fonksiyonuna ölçülebilir fonksiyon adı verilir. A'deki ölçülebilir fonksiyonların ailesi $M(A, \Sigma)$ şeklinde ifade edilir. Ayrıca (A, Σ) ölçülebilir uzay , A uzayında negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların kümesi $M^+(A, \Sigma)$ ile ifade edilir.

2.1.17 Tanım (A, Σ, μ) ölçü uzayı olsun. Bir önermenin ölçüsü sıfır olan bir küme dışında doğruysa, önermeye hemen her yerde doğru adı verilir.

Bu bölümden sonraki kısımlarda hemen her yerde tabirini kısa bir şekilde h.h.y olarak ifade edeceğiz.

2.1.18 Tanım $f(u) \neq 0$ koşulunu sağlayan u noktalarının kümesinin kapanışına f'nin desteği adı verilir.

$$\mathit{supp} f = \overline{\{u : f(u) \neq 0\}}$$

ile gösterilir.

2.1.19 Tanım Kabul edelim ki $A \subset \mathbb{R}^n$ olsun.

$$\chi_A = \begin{cases} 1, u \in A \\ 0, u \notin A \end{cases}$$

olarak tanımlı χ_A fonksiyonuna A kümesinin karakteristik fonksiyonu adı verilir (Grafakos 2008).

2.1.20 Tanım (A, Σ, μ) ölçü uzayı olsun. $0 < p < \infty$,

$$L_p(A) = \{f \in M(A, \Sigma) : \int_A |f|^p \, d\mu < \infty\}$$

kümesine p-inci kuvvetten mutlak integrallenebilen fonksiyonlar sınıfına L_p uzayı adı verilir. L_p uzayında f'nin normu

$$\|f\|_{L_p(A)} = \begin{cases} \left(\int_A |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty \\ ess \sup |f(u)|, p = \infty \\ u \in A \end{cases}$$

şeklinde gösterilir (Grafakos 2008).

2.1.21 Tanım f ölçülebilir fonksiyon olsun. $\forall K$ kompakt kümesinde

$$\int_K |f|\, d\mu < \infty$$

ise f lokal integrallenebilir fonksiyon olarak adlandırılır (Grafakos 2008).

2.1.1 Lemma Kabul edelim ki $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $h \in L_q(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu takdirde $fh \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|fh\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \|h\|_{L_q(\mathbb{R}^n)}$$

gerçeklenir. Buna Hölder eşitsizliği adı verilir (Sadosky 1979).

2.1.3 Teorem $v \geq 0, \eta \geq 0$, (A, η) ve (B, v) ölçü uzayları ve $\eta \otimes v$, $A \times B$'de tanımlı çarpım ölçüsü olsun. O halde $G(u, v)$, $\eta \otimes v$-integrallenebilir ise

$$\begin{aligned} \iint_{A\times B} G(u,v)\, d\eta \otimes v &= \int_A \left(\int_B G(u,v)\, d\eta \right) dv \\ &= \int_B \left(\int_A G(u,v)\, dv \right) d\eta \end{aligned}$$

gerçeklenir. Burada $A = B = \mathbb{R}$ ise $\eta = v$ Lebesgue ölçüsüdür. $\mathbb{R}^2$ de $\eta \otimes v = du_1 du_2$ dir (Sadosky 1979).

2.1.22 Tanım g ve h ölçülebilir fonksiyonlar olmak üzere, $\mathbb{R}^n$ uzayında g ve h nin konvolüsyonu

$$(g * h)(u) = \int_{\mathbb{R}^n} g(v)\, h(u - v)\, dv$$

şeklinde tanımlanır (Neri 1971).

$\mathbb{R}^n$ uzayında $du = du_1, \ldots du_n$ ile Lebesgue ölçüsünü ifade eder. $\mathbb{R}^n$ uzayında g'nin Lebesgue integrali

$$\int g(u)\, du = \int \ldots \int g(u_1, \ldots u_n)\, du_1 \ldots du_n$$

şeklinde ifade edilir. Yukarıda verilen integralin kutupsal koordinatlarda ifade edilmesi kullanışlıdır. $r = |u|$ olsun ve $S^{n-1} = \{u : |u| = 1\}$ ile birim kürenin yüzeyi olarak ifade edelim. $\int_{\mathbb{R}^n} g(|u|)du$ integralinin hesabı için; $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta_1, \ldots \theta_{n-2} \leq \pi$, $0 \leq \theta_{n-1} \leq 2\pi$ olmak üzere

$u_1 = r\cos\theta_1$

$u_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2$

$u_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3$

...

$u_n = r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-1}$

dönüşümü uygulanır. Uygulanan dönüşümün Jakobiyeni

$$J(r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1}) = r^{n-1}\prod_{j=1}^{n-1}(\sin\theta_j)^{n-1-j}$$

şeklinde hesap edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} g(|u|)\,du &= \int_0^\infty\int_0^\pi\int_{0\ldots}^\pi\int_0^{2\pi} g(r)\,J(r,\theta)\,d\theta_1\ldots d\theta_{n-1}dr \\ &= \int_0^\infty r^{n-1}g(r)dr\int_0^\pi\int_0^\pi\ldots\int_0^{2\pi}\prod_{j=1}^{n-1}(\sin\theta_j)^{n-1-j}d\theta_1\ldots d\theta_{n-1} \\ &= \omega_{n-1}\int_0^\infty g(r)\,r^{n-1}dr\end{aligned}$$

olur. w_{n-1}, birim kürenin yüzey alanını göstermektedir. Genellikle

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} g(|u|)\,du &= \int_0^\infty\int_{S^{n-1}} g(r\sin\theta_1,\ldots,r\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{n-1})\,r^{n-1}drd\theta_1\ldots d\theta_{n-1} \\ &= \int_0^\infty\int_{S^{n-1}} g(r,\theta)\,r^{n-1}d\sigma dr\end{aligned}$$

olarak yazılır. du hacim elemanı, $du = r^{n-1}drd\sigma$ dir. Burada $d\sigma$, S^{n-1}'de du ile belirlenen yüzey ölçüsüdür. Örnek olarak, $\mathbb{R}^n$'de küresel koordinatlara geçilirse, bu durumda Laplace operatörü iki bölümden oluşur. Birincisi radyal (yani yarıçapa bağlı) bölüm ikincisi küresel bölüm (yani açılara bağlı kısım) (Sadosky 1979).

2.1.7 Teorem Kabul edelimki $A \subset \mathbb{R}^n, |A| < \infty$. $t < s$ ise, $L_s(A) \subset L_t(A)$ gerçeklenir (Neri 1971).

2.1.8 Teorem $1 \leq p < \infty$ ise $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayındaki basit fonksiyonların kümesi $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayında yoğun denir (Adams ve Fournier 2003).

2.1.23 Tanım $1 \leq p, q \leq \infty$,

$$T : L_p\left(\mathbb{R}^n\right) \to L_q\left(\mathbb{R}^n\right)$$

olsun. Her $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için

$$||Tf||_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq C||f||_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

olacak şekilde f fonksiyonundan bağımsız $C > 0$ sabiti var ise T kuvvetli (p, q) tipli adı verilir. η bir ölçü, $\forall\beta > 0$ için

$$\eta\{u : |Tf(u)| > \beta\} \leq \left(\frac{C||f||_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{\beta}\right)^q, q < \infty$$

olacak biçimde β ve f den bağımsız C sabiti var ise T dönüşümüne zayıf (p, q) tipli adı verilir (Sadosky 1979).

2.1.24 Tanım (Banach Uzayı) N normlu lineer uzay olmak üzere, N metrik uzayı tam ise N normlu uzayına Banach uzay adı verilir.

2.1.4 Lemma (Hardy Eşitsizliği) Kabul edelim ki $1 \leq p \leq q \leq \infty$, v ve ω ölçülebilir, $(0, \infty)$'da azalan ve pozitif iki fonksiyon olsun. O halde C, φ'den bağımsız sabit olmak üzere

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \varphi(s)ds\right)^q w(t)dt\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_0^\infty \varphi(t)^p v(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.1}$$

gerçeklenmesi için gerek ve yeter şart

$$K = \sup_{r>0}\left(\int_r^\infty \omega(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^r v(t)^{1-p'}dt\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty \tag{2.2}$$

olmasıdır, $p + p' = pp'$ dir. Ayrıca (2.1) i sağlayan C sabiti

$$K \leq C \leq k\left(p, q\right) K \tag{2.3}$$

şeklindedir. (2.3) deki $k(p, q)$ sabiti

$$k\left(p, q\right) = p^{\frac{1}{q}}\left(p'\right)^{\frac{1}{p'}}, k\left(p, q\right) = q^{\frac{1}{q}}\left(q'\right)^{\frac{1}{p'}} \text{ veya} k\left(p, q\right) = \left(1 + \frac{q}{p'}\right)^{\frac{1}{q}}\left(1 + \frac{p'}{q}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

olarak farklı şekillerde gösterilebilir (Mazya 1985).

2.1.5 Lemma (Hardy Eşitsizliği) $1 \leq p \leq q \leq \infty$, v ve ω ölçülebilir, $(0, \infty)$ aralığında pozitif ve azalan iki fonksiyon olsun. O halde C, φ'den bağımsız bir sabit olmak üzere

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_t^\infty \varphi(s)\,ds\right)^q \omega(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_0^\infty \varphi(t)^p\, v(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.4}$$

sağlanması için $\Leftrightarrow$

$$K_1 = \sup_{r>0}\left(\int_0^r \omega(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_r^\infty v(t)^{1-p'}\,dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

(2.4)'ü gerçekleyen en iyi C sabiti $K_1 \leq C \leq k(p,q)\,K_1$ sağlanır (Mazya 1985).

2.1.11 Teorem (Lebesgue yakınsaklık) (A, Σ, μ) bir ölçü uzayı, $h : A \to [0, \infty]$ integrallenebilen bir fonksiyon ve $f, f_1, f_2 \ldots A$ da Σ-ölçülebilir gerçel değerli fonksiyonlar olsun. Hemen her u için

$$\lim_{n\to\infty} f_n(u) = f(u)$$

ve $\forall n \in N$ için

$$|f_n(u)| \leq h(u)$$

ise, f ve f_n integrallenebilirdir,

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu$$

dır (Grafakos 2008).

2.1.12.Teorem (Monoton Yakınsaklık) Kabul edelim ki (A, Σ, μ) bir ölçü uzayı ve (f_n) ise negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların kümesi olan $M^+(A, \Sigma)$ daki fonksiyonların monoton artan bir dizisi olsun. (f_n) dizisi f fonksiyonuna yakınsar ise

$$\int_A f d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu$$

dir (Grafakos 2008).

3. LEBESGUE UZAYLARINDA I_α RIESZ POTANSİYELİNİN VARLIĞI VE SINIRLILIĞI

Bu bölümde öncelikle I_α Riesz potansiyelinin Lebesgue uzayında sınırlılığı ve I_α Riesz potansiyelinin Morrey uzayında sınırlılığı araştıracağız. Bunun için lokal eşitsizliklerden yararlanacağız.

3.1 I_α Riesz Potansiyelinin Lebesgue Uzaylarında Varlığı

Öncelikle I_α Riesz potansiyeli için en temel uzay olan Lebesgue uzayında sınırlılığını garantilemek amacıyla konulan aşağıdaki koşullar biribirine denktir: en az bir $u_0 \in \mathbb{R}^n$ için

$$\int_{|v-u_0|>1} f(v)\frac{dv}{|u_0-v|^{n-\alpha}} < \infty \tag{3.1}$$

ve her $u \in \mathbb{R}^n$ için

$$\int_{|v-u|>1} f(v)\frac{dv}{|v-u|^{n-\alpha}} < \infty \tag{3.2}$$

koşulu birbirine denktir. Bu denkliği sağlayan Lemma 3.1.1 ve Lemma 3.1.2'nin ispatı aşağıda verilmiştir.

3.1.1 Lemma $u_0 \in \mathbb{R}^n$ belirli bir nokta olmak üzere

$$\int_{|v-u_0|>1} f(v)\frac{dv}{|v-u|^{n-\alpha}} < \infty \tag{3.3}$$

ile tanımlı Riesz potansiyeli hemen her u için sonludur.

İspat $r > 0$ bir sayı olmak üzere

$$\int_{|u-u_0|\le r} (I_\alpha f)(u)du \tag{3.4}$$

integralini ele alalım. Bu durumda

$$|(I_\alpha f)(u)du| \le \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(v)}{|v-u|^{n-\alpha}}dv \tag{3.5}$$

dir. Buna göre sağ taraftaki integralin sonlu olduğu cümlelerde $I_\alpha f$ sonludur. Bu da şunu gösterir. Bu lemmayı negatif olmayan f ler için ispatlamak yeterlidir. Bundan dolayı f' yi negatif olmayan ve $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ de olan bir fonksiyon olarak kabul edeceğiz.

$$\int_{|u-u_0|\leq r}(I_\alpha f)(u)du = \int_{|u-u_0|\leq r} du \int_{|v-u_0|\leq 1+r} \frac{f(v)}{|u-v|^{n-\alpha}}dv$$
$$+\int_{|u-u_0|\leq r} du \int_{|v-u_0|>1+r} \frac{f(v)}{|u-v|^{n-\alpha}}dv$$
$$= I_1 + I_2.$$

Şimdi I_1 ve I_2 yi heseplayalım. Önce I_1 ifadesinin integrallenme bölgesini ele alalım. Gördüğümüz gibi I_1 in integrallenme bölgesi

$$(u,v) = \{|u-u_0|\leq r, |v-v_0|\leq 1+r\}$$

dir. Bu durumda bu bölgede olan her (u,v) için şunu yazabiliriz,

$$|v| \leq |v-u_0| + |u_0| \leq 1+r+u_0$$

$$\Rightarrow \{|u-u_0|, |v-u_0|\leq 1+r\} \subset \{(u,v) : |u-u_0|\leq r, |v|\leq 1+r+|u_0|\}$$
$$\Rightarrow I_1 \leq \int_{|v|\leq 1+r+|u_0|}\left(\int_{|u-u_0|}\frac{du}{|v-u|^{n-\alpha}}\right)$$

$|u-u_0|, |v-u_0| \leq 1+r$ ise bu durumda $|v-u|\leq |v-u_0|+|u-u_0|\leq 1+2r$ dir.

$$\leq \int_{|v|\leq 1+r+|u_0|} f(v)\left(\int_{|u-v|\leq 1+2r}\frac{du}{|v-u|^n-\alpha}\right)dv$$

$$\leq \int_{|v|\leq 1+r+|u_0|} f(v)\left(\omega_{n-1}\int_0^{1+2r}\frac{t^{n-1}}{t^{n-\alpha}}\right)dv.$$

Burada ω_{n-1} birim kürenin yüzey alanıdır.

$$u_1 = v_1 + tcos\theta_1$$

$$u_2 = v_2 + tsin\theta_1 cos\theta_2$$

$$\ldots$$

$$u_n = v_n + tsin\theta_1 sin\theta_2..sin\theta_{n-1}$$

Jakobiyen $=t^{n-1}\Omega(\theta)dtd\theta$ dır. $\Omega(\theta)$' nın integrali birim kürenin yüzey integralini verir.

$$\{(u,v) : |u-u_0| \leq r, |v-u| \leq 1+r\} \subset \{(u,v) : |u-v| \leq 1+2r, |v| \leq 1+r+|u_0|\}$$

$$\Big\{ \int_{|u|\leq r} \frac{1}{|u|^\alpha} du = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^\pi ... \int_0^\pi t^{n-1} \frac{1}{t^\alpha} dt d\theta_1 ... d\theta_{n-1} \Big\}$$

$$\leq c \int_{|v|\leq 1+r+|u_0|} f(v)dv \left(f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \text{olduğundan} < \infty \right) \tag{3.6}$$

$$\Rightarrow I_1 \text{sonludur.}$$

$$I_2 = \int_{|u-u_0|\leq r} du \int_{|v-u_0|>1+r} \frac{f(v)}{|v-u|^{n-\alpha}} dv$$

$$|v-u| = |(v-u_0)-(u-u_0)| \geq |v-u_0| - |u-u_0| = |v-u_0| \Big(1 - \frac{|u-u_0|}{|v-u_0|} \Big)$$

$$\geq |v-u_0| \Big(1 - \frac{r}{r+1} \Big) = |v-u_0| \frac{1}{1+r}$$

$$\leq \int_{|u-u_0|\leq r} du \Big(\int_{|v-u_0|>1+r} \frac{f(v)}{|v-u_0| \frac{1}{(1+r)^{n-\alpha}}} dv \Big)$$

$$= (1+r)^{n-\alpha} \int_{|u-u_0|\leq r} du \left(\int_{|v-u_0|>1+r} \frac{f(v)}{|v-u_0|^{n-\alpha}} dv \right)$$

$$\leq c \int_{|v-u_0|>1} \frac{f(v)}{|v-u_0|^{n-\alpha}} dv < \infty \textit{((3.3)'ten)} \tag{3.7}$$

(3.6) ve (3.7) ifadelerini (3.3)'te kullanırsak

$$\int_{|u-u_0|} (I_\alpha f)(u) du < \infty$$

elde edilir. Dolayısıyla I_α hemen her u için sonludur.

3.1.2 Lemma $f \in L^1_{loc}$ negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere Lemma 3.1.1'deki (3.3) koşulu ile aşağıdaki koşul denktir. Her $u \in \mathbb{R}^n$ için

$$\int_{|v-u|>1} \frac{f(v)}{|v-u|^{n-\alpha}} dv \tag{3.8}$$

dir.

İspat

$$\int_{|v-u|>1} \frac{f(v)}{|v-u|^{n-\alpha}} dv$$

$$= \int_{(|v-u|>1)\cap(|v-u_0|\leq 1)} + \int_{(|v-u|>1)\cap(|v-u_0|>1)}$$

$$\leq \int_{|v-u_0|\leq 1} f(v)dv + \int_{(|v-u|>1)\cap(|v-u_0|>1)} \frac{f(v)}{|v-u_0|^{n-\alpha}} \Big(\frac{|v-u_0|}{v-u}\Big)^{n-\alpha} dv, (|v-u|>1)$$

$$\leq \int_{|v-u_0|\leq 1} f(v)dv + \int_{(|v-u|>1)\cap(|v-u_0|>1)} \frac{f(v)}{|v-u_0|^{n-\alpha}} \Big(\frac{|v-u|+|u-u_0|}{v-u}\Big)^{n-\alpha} dv$$

$$\leq \int_{|v-u_0|\leq 1} f(v)dv + \int_{(|v-u|>1)\cap(|v-u_0|>1)} \frac{f(v)}{|v-u_0|^{n-\alpha}} (1+|u-u_0|)^{n-\alpha} dv$$

$$= \int_{|v-u_0|\leq 1} f(v)dv + (1+|u-u_0|)^{n-\alpha} \int_{|v-u_0|>1} \frac{f(v)}{|v-u_0|^{n-\alpha}} dv$$

dır. Bu da ispatı tamamlar.

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|v|)^{\alpha-n} f(v)dv < \infty.$$

$$(I_\alpha f)(u) = \int_{\mathbb{R}^n} f(v)\frac{dv}{|u-v|^{n-\alpha}}, 0<\alpha<n, u\in\mathbb{R}^n. \tag{3.9}$$

Gösterdik ki, en az bir $u_0 \in \mathbb{R}^n$ için

$$\int_{|v-u_0|>1} f(v)\frac{dv}{|u_0-v|^{n-\alpha}} < \infty. \tag{3.10}$$

$\forall u \in \mathbb{R}^n$ için

$$\int_{|v-u|>1} f(v)\frac{dv}{|v-u|^{n-\alpha}} < \infty \tag{3.11}$$

koşulları denktir. Yani

$$(3.10) \Leftrightarrow (3.11)$$

dır.

3.1.3 Lemma f, negatif olmayan lokal integrallenebilir fonksiyon olmak üzere (3.2) koşulu aşağıdaki koşula denktir.

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(v)\frac{dv}{|1+|v||^{n-\alpha}} < \infty. \tag{3.12}$$

İspat

$$\int_{|v-u_0|>1} f(v)\frac{dv}{|1+|v||^{n-\alpha}} < \infty + \int_{|v-u|>1} f(v)\frac{dv}{|1+|v||^{n-\alpha}} < \infty$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(v)\frac{dv}{|1+|v||^{n-\alpha}} < \infty.$$

Yukarda solda tanımlı iki integral sonlu ve bunların toplamıda sonludur ve bu toplamda sağ taraftaki integrali verir bu integralde sonludur. Böylece Lemma sonludur. Böylece Lemmanın ispatı tamamlanmış olur.

3.2 I_α Riesz Potansiyelinin Lebesgue Uzaylarında Sınırlılığı

Bildiğimiz gibi lokal integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı integrallenebilir fonksiyonların en geniş sınıfıdır ve f bu sınıftan olduğundan

$$(I_\alpha f)(u) = \int_{\mathbb{R}^n} f(v)\frac{dv}{|u-v|^{n-\alpha}}, 0 < \alpha < n, u \in \mathbb{R}^n \tag{3.13}$$

Şimdi f nin sınıfını daraltarak daha ince sonuçların elde edilebileceğini göstereceğiz. Bunun için $p > 1$ olmak üzere f yi L_p sınıfının elemanı olarak ele alacağız. Önce $p, q > 1$ sayılar olmak üzere (3.4) formülü ile tanımlı Riesz potansiyeli

$$L_p(\mathbb{R}^n) \to L_q(\mathbb{R}^n)$$

dönüşümünü yapsın. Bu durumda α, p, q sayıları arasındaki ilişkiyi bulalım. Bu dönüşüme göre,

$$||I_\alpha f||_q \leq c||f||_p$$

olmalıdır. Bu normu açık şekilde yazacak olursak,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(v)}{|v-u|^{n-\alpha}}dv\right|^q du\right)^{\frac{1}{q}} \leq c\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(u)|^p du\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.14}$$

dir. Amacımız (2.2) nin sağlandığını kabul edip p, q ve α sayıları arasında nasıl bir ilişki olduğunu görmektir. Hipoteze göre her $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için (2.2) sağlanır.

Bu durumda (2.2) eşitsizliği $\lambda > 0$ pozitif sayısı için $f(\lambda u)$ fonksiyonu içinde sağlanacaktır. Yani

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}\Big|\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(\lambda v)}{|v-u|^{n-\alpha}}dv\Big|^q du\right)^{\frac{1}{q}} \leq c\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(\lambda u)|^p du\right)^{\frac{1}{p}}$$

yazabiliriz. İntegralde

$$v \to \frac{v}{\lambda} \Rightarrow dv \to \frac{dv}{\lambda^n}, u \to \frac{u}{\lambda} \Rightarrow du \to \frac{du}{\lambda^n}$$

yazalım. Bu durumda

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}\Big|\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(v)}{|\frac{v}{\lambda}-\frac{u}{\lambda}|^{n-\alpha}}\frac{dv}{\lambda^n}\Big|^q\frac{du}{\lambda^n}\right)^{\frac{1}{q}} \leq c\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(u)|^p\frac{du}{\lambda^n}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \lambda^{-\alpha-\frac{n}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\Big|\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(v)}{|v-u|^{n-\alpha}}dv\Big|^q du\right)^{\frac{1}{q}} \leq c\lambda^{\frac{-n}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(u)|^p du\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$||I_\alpha f||_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq c\lambda^{\alpha-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}||f||_{L_p(\mathbb{R}^n)} \tag{3.15}$$

elde edilir. Buna göre üç durum söz konusudur:

$1.durum$:λ nın kuvveti pozitiftir.

$2.durum$:λ nın kuvveti negatiftir.

$3.durum$:λ nın kuvveti sıfırdır.

λ parametresini kendimiz ($\lambda > 0$) seçmiştik. Buna göre bu üç durumu inceleyelim. $1.durum$: Farzedelimki λ nın kuvveti pozitif olsun. Bu durumda (3.6) eşitliğinde $\lambda \to 0$ iken limite geçersek

$$||I_\alpha f||_{L_q(\mathbb{R}^n)} = 0, \forall f \in L_p(\mathbb{R}^n)$$

olur.

$2.durum$:λ nın kuvveti negatif ise (3.6) eşitliğinde $\lambda \to \infty$ iken limit alınırsa

$$||I_\alpha f||_{L_q(\mathbb{R}^n)} = 0, \forall f \in L_p(\mathbb{R}^n)$$

olur. Bu ise şu anlama gelir: I_α Riesz potansiyeli $L_p(\mathbb{R}^n)$ den olan her fonksiyon için h.h.y sıfırdır. Bu ise olamaz ve bu nedenle (3.6) eşitsizliğinin anlamlı olması için $3.durum$ geçerli olmak zorundadır. $3.durum$: λ nın kuvveti sıfır ise

$$\alpha - n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) = 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{n} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$$

eşitliği sağlanmalıdır. (3.6) da $0 < \alpha < n$ ifadesinde görüldüğü gibi α ve f pozitif sayılardır. Buna göre $\frac{\alpha}{n} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} > 0$ dır. Bu da gösteriyor ki $q > p$ olmalıdır. Dolayısıyla I_α Riesz potansiyeli $L_p(\mathbb{R}^n)$ den $L_q(\mathbb{R}^n)$ ya dönüşüm yapıyorsa bu durumda mutlaka $q > p$ ve $\frac{\alpha}{n} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ eşitliği sağlanmalıdır. Buradan da $p = q = 1$ ve $p = q = \infty$ olamaz. Çünkü $0 < \alpha < n$ dir. Özetlemek gerekirse

$$I_\alpha f : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_q(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \frac{\alpha}{n} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, q > p.$$

Şimdi bu ispatı yaparken biz I_α Riesz potansiyelinin $L_p(\mathbb{R}^n)$ de olan tüm f fonksiyonları için h.h.y sıfır olmayacağını gösterdik. Şimdi buna bir örnek verelim: Farzedelim $|u| < 1$ olsun.

$$f(v) = \begin{cases} 1 + |v|, & |v| \le 2 \\ 0, & \text{d.durumlarda} \end{cases}$$

tanımlayalım. Önce $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ de yani $||f||_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \infty$ olduğunu gösterelim . Bu durumda

$$I_\alpha f(u) \ge \int_{|v-u|\le 1} f(v)\frac{v}{|u-v|^{n-\alpha}} \ge \int_{|v-u|\le 1} f(v)dv$$

$|v-u| \le 1$ olduğunda açıktır ki $|v| \le |v-u| + |u| \le 2$ dir. Dolayısıyla integral altında $f(v)$ yerine $1 + |v|$ yazılabilir. Buna göre

$$\int_{|v-u|\le 1} (1+|v|)dv \ge \int_{|v-u|\le 1} dv = \omega_{n-1}.$$

Bu örnek gösteriyor ki I_α Riesz potansiyeli $L_p(\mathbb{R}^n)$ deki tüm fonksiyonlar için h.h.y sıfır olamaz. Gösterdik ki $I_\alpha : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_q(\mathbb{R}^n)$ dönüşüm yapıyorsa $q > p$ ve $\frac{\alpha}{n} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ olmalıdır. İspatladığımız bu sonuç I_α Riesz potansiyelinin $L_p(\mathbb{R}^n)$ den $L_q(\mathbb{R}^n)$ ya dönüşüm yapması için bir yeter koşuldur. Şimdi de bu koşulların I_α

Riesz potansiyelinin $L_p(\mathbb{R}^n)$ den $L_q(\mathbb{R}^n)$ ya dönüşüm yapması için gerekli olduğunu gösterelim. Bunun için öncelikle aşağıdaki lemmayı ispatlayalım.

3.2.1 Lemma Farzedelim ki $1 < p < \infty$, $\frac{\alpha}{n} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ ve $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu taktirde $I_\alpha f$ Riesz potansiyeli h.h.y mutlak yakınsaktır.

İspat. Açıktır ki

$$(I_\alpha f)(u) = \int_{\mathbb{R}^n} f(u+v)\frac{dv}{|v|^{n-\alpha}}$$

$$= \int_{|v|\le\mu} f(u+v)\frac{dv}{|v|^{n-\alpha}} + \int_{|v|>\mu} f(u+v)\frac{dv}{|v|^{n-\alpha}}$$

$$= (I_{\alpha,1}f)(u) + (I_{\alpha,2}f)(u). \tag{3.16}$$

Burada μ herhangi bir pozitif sayıdır. $I_{\alpha,1}f$ ve $I_{\alpha,2}f$ yi ayrı ayrı ele alalım. $I_{\alpha,1}f$ için şunu yazabiliriz:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |(I_{\alpha,1}f)(u)|^p du\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Big| \int_{|v|\le\mu} f(u+v)\frac{dv}{|v|^{n-\alpha}}\Big|^p du\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \int_{|v|\le\mu} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Big|f(u+v)\Big|^p \frac{1}{|v|^{(n-\alpha)p}} du\right)^{\frac{1}{p}} dv$$

$$= \int_{|v|\le\mu} \frac{dv}{|v|^{n-\alpha}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Big|f(u+v)\Big|^p du\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le ||f||_{L_p(\mathbb{R}^n)} \int_{|v|\le\mu} \frac{dv}{|v|^{n-\alpha}} = ||f||_{L_p(\mathbb{R}^n)}\omega_{n-1} \int_0^\mu \rho^{n-1-n+\alpha} d\rho$$

$$= C||f||_{L_p(\mathbb{R}^n)}\mu^\alpha.$$

Burada gösterdik ki $I_{\alpha,1}f$ h.h.y yakınsaktır.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big|(I_{\alpha,1}f)(u)\Big|^p du \le C||f||_{L_p(\mathbb{R}^n)}\mu^{\alpha p} \tag{3.17}$$

bulunur. Şimdi $I_{\alpha,2}f$ yi ele alalım:

$$|(I_{\alpha,2}f(u)| \le \int_{|v|\ge\mu} f(u+v)\frac{dv}{|v|^{n-\alpha}} \le ||f||_{L_p(\mathbb{R}^n)} \left(\int_{|v|>\mu} \frac{dv}{|v|^{(n-\alpha)p'}}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Burada bu eşitsizliğin sağında parantez içinde verilen integralin yakınsaklığı için $(n-\alpha)p' > n$ olmalıdır. Buradan aşağıdaki eşitsizlik

$$(n-\alpha)p' = n(1-\frac{\alpha}{n})p' = n(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})p' = n(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q})p' = n(1+\frac{p'}{q}) > n$$

$$= ||f||_{L_p(\mathbb{R}^n)}\left(\omega_{n-1}\int_{\mu}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{t^{(n-1)p}}dt\right)^{\frac{1}{p}} = ||f||_{L_p(\mathbb{R}^n)}(c\omega_{n-1}\mu^{n-(n-\alpha)p})^{\frac{1}{p}}$$

$\{\frac{n}{p}-(n-\alpha) = n(\frac{1}{p}-1+\frac{\alpha}{n}) = n(\frac{1}{p}-1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}) = \frac{-n}{q}\}$

$$\leq C||f||_{L_p(\mathbb{R}^n)}\mu^{\frac{-n}{q}}$$

$$|(I_{\alpha,2}f)(u)| \leq C||f||_{L_p(\mathbb{R}^n)}\mu^{\frac{-n}{q}} \tag{3.18}$$

bulunur. Böylece gerek koşul ispatlanmış olur.

3.2.1 Teorem $1 < p < \infty$, $\frac{\alpha}{n} = \frac{1}{p}-\frac{1}{q}$, $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için $I_\alpha f$ Riesz potansiyeli zayıf (p,q) tipli operatördür. Yani keyfi pozitif δ için

$$|\{u \in \mathbb{R}^n : |(I_\alpha f)(u)| > \delta\}| \leq c_{p,q}\left(\frac{||f||_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{\delta}\right)^q$$

dır (Stein 1970).

İspat. (3.7) den

$\{x : |(I_\alpha f)(u)| > \delta \subset \{u : |(I_{\alpha,1}f)(u)| > \frac{\delta}{2}\} \cup \{u : |(I_{\alpha,2}f)(u)| > \frac{\delta}{2}\}$ dir. Bu durumda yukarıdaki kümelerin ölçüsü için

$$|A+B| \leq |A|+|B| \tag{3.19}$$

dir. Şimdi ise yukarıda verdiğimiz kümelerin ölçüsünü ayrı ayrı hesaplayalım. (3.8)'in kullanılmasıyla

$$|\{u : |(I_{\alpha,1}f)(u) > \frac{\delta}{2}|\}| = \int_{|\{u:|(I_{\alpha,1}f)(u)>\frac{\delta}{2}\}|} du$$

$$\leq \int_{|\{u:|(I_{\alpha,1}f)(u)>\frac{\delta}{2}\}|}\left|\frac{2(I_{\alpha,1}(u)}{\delta}\right|^p du$$

$$\leq \frac{2^p}{\delta^p}\int_{\mathbb{R}^n}|(I_{\alpha,1}f)(u)|^p du, \{u : |(I_{\alpha,1}f)(u)| > \frac{\delta}{2}\} \subset \mathbb{R}^n$$

$$\leq C||f||^p_{L_p(\mathbb{R}^n)}\mu^{\alpha p}\frac{2^p}{\delta^p}.$$

Böylelikle

$$|\{u : |(I_{\alpha,1}f)(u)| > \frac{\delta}{2}\}| \leq C\left(\frac{\mu^{\alpha}}{\delta}||f||_{L_p(\mathbb{R}^n)}\right)^p \tag{3.20}$$

dir. $I_{\alpha,2}f$ için (3.9) eşitsizliği mevcuttur. $\mu > 0$ sayısı keyfi olduğundan μ yü

$$C||f||_{L_p(\mathbb{R}^n)}\mu^{-\frac{n}{q}} = \frac{\delta}{2}$$

şeklinde alabiliriz. Bu taktirde

$$|\{u : |(I_{\alpha,1}f)(u) > \frac{\delta}{2}\}| = 0 \tag{3.21}$$

bulunur. Bu taktirde

$$\mu^{-\frac{n}{q}} = \frac{\delta}{2C||f||_{L_p(\mathbb{R}^n)}}$$

$$\mu = \left(\frac{\delta}{2C||f||_{L_p(\mathbb{R}^n)}}\right)^{\frac{q}{n}} \tag{3.22}$$

elde edilir. Bu verilen değerler aşağıdaki ifadede yazılacak olursa: (3.21) ve (3.22)'den

$$\begin{aligned}
\Big|\{u : |(I_{\alpha}f)(u)| > \delta\}\Big| &\leq \Big|\{u : |(I_{\alpha,1}f)(u)| > \frac{\delta}{2}\}\Big| + \Big|\{u : |(I_{\alpha,2}f)(u)| > \frac{\delta}{2}\}\Big| \\
&\leq C\left(\frac{\mu^{\alpha}}{\delta}||f||_{L_p(\mathbb{R}^n)}\right)^p \\
&= C\left(\frac{||f||_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{\delta}\right)^p\left(\frac{2C||f||_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{\delta}\right)^{\alpha.\frac{q}{n}.p} \\
&= C_{p,q}\frac{||f||^p_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{\delta^p}\left(\frac{||f||_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{\delta}\right)^{q-p}, \frac{\alpha}{n} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \\
&= C_{p,q}\left(\frac{||f||_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{\delta}\right)^q
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

3.2.1 Sonuç $p = 1$, $\frac{\alpha}{n} = 1 - \frac{1}{q}$ için $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise $I_{\alpha}f$ Riesz potansiyeli zayıf $(1, q)$ tiplidir (Stein 1970).

4. MORREY UZAYLARINDA I_α RIESZ POTANSİYELİNİN SINIRLILIĞI

Bu bölümde $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzaylarında I_α Riesz potansiyelinin Spanne-tipi ve Adams-tipi sınırlılıkları ispatlanacaktır. Bu ispatlar verilen lokal eşitsizlikler yardımıyla yapılacaktır. Öncelikle Morrey uzayının tanımını verelim.

4.1 Tanım $0 \leq \lambda \leq n, 1 \leq p < \infty$ ve $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|f\|_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\substack{r>0 \\ u\in\mathbb{R}^n}} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L_p(B(u,r))} < \infty$$

olan her f fonksiyonlarının sınıfına Morrey uzayı denir. Bu fonksiyonların sınıfı $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ şeklinde ifade edilir (Morrey 1938).

Yukarıdaki şartlarla tanımlanan norm ile $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ bir Banach uzaydır. $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı cebirsel özellikleri ile alakalı bazı temel sonuçlar aşağıda verilmiştir.

(i) $\lambda = 0$ ise

$$L_{p,0}(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n)$$

bilinen Lebesgue uzayıdır. Gerçekten,

$$\begin{aligned}\|f\|_{L_{p,0}(\mathbb{R}^n)} &= \sup_{\substack{r>0 \\ u\in\mathbb{R}^n}} r^{-\frac{0}{p}} \|f\|_{L_p(B(u,r))} \\ &= \sup_{\substack{r>0 \\ u\in\mathbb{R}^n}} \|f\|_{L_p(B(u,r))} \\ &= \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

olur.

(ii) $\lambda = n$ ise

$$L_{p,n}(\mathbb{R}^n) = L_\infty(\mathbb{R}^n)$$

$WL_p(\mathbb{R}^n)$ zayıf $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayı ve

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} = \omega_n^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_{p,n}(\mathbb{R}^n)}$$

gerçekleşir. $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu takdirde,

$$\left(r^{-n}\int_{B(u,r)}|f(v)|^p dv\right)^{\frac{1}{p}} \leq \omega_n^{\frac{1}{p}}|f|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}$$

olur. Buradan $f \in L_{p,n}(\mathbb{R}^n)$ bulunur ve

$$|f|_{L_{p,n}(\mathbb{R}^n)} \leq w_n^{\frac{1}{p}}|f|_{L_\infty}(\mathbb{R}^n)$$

sağlanır. $f \in L_{p,n}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Temel Lebesgue Teoremi yardımıyla

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{m(B(u,r))}\int_{B(u,r)}|f(v)|^p\, dv = |f(u)|^p .$$

O halde,

$$|f(u)| = \left(\lim_{r\to 0}\frac{1}{m(B(u,r))}\int_{B(u,r)}|f(v)|^p\, dv\right)^{\frac{1}{p}} \leq \omega_n^{-\frac{1}{p}}||f||_{L_{p,n}}$$

olur. Dolayısıyla $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ dir.

(iii) $\lambda < 0$ veya $\lambda > n$ iken $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \Theta$'dır, Θ $\mathbb{R}^n$ de 0'a denk fonksiyonların kümesini göstermektedir (Stein 1970).

Üstelik $1 \leq p < \infty$, $f \in WL_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere zayıf Morrey uzayı $WL_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$

$$\|f\|_{WL_{p,\lambda}}(\mathbb{R}^n) = \sup_{\substack{r>0\\ u\in\mathbb{R}^n}} r^{\frac{-\lambda}{p}}\,\|f\|_{WL_p(B(u,r))} < \infty$$

olacak biçimdeki fonksiyonların kümesini belirtmektedir. Burada $WL_{p,\lambda(B(u,r))}$,

$$\begin{aligned}\|f\|_{L_p(B(u,r))} &\equiv \|f\chi_{B(u,r)}\|_{WL_p(\mathbb{R}^n)}\\ &= \sup_{\substack{r>0\\ u\in\mathbb{R}^n}}\left|\{v \in B(u,r) : |f(v)| > r\}\right|^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

şartını sağlayan zayıf $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayında ölçülebilir fonksiyonların uzayıdır. Üstelik,

$$WL_p(\mathbb{R}^n) = WL_{p,0}(\mathbb{R}^n)$$

eşitliği de sağlanır. $Y \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\|f\|_{WL_{p,\lambda(Y)}} \leq \|f\|_{L_{p,\lambda(Y)}}$ ve böylece $L_{p,\lambda}(Y) \subset WL_{p,\lambda}(Y)$ sağlanır.

4.1 Teorem $1 \leq p < \infty, \lambda, \mu \geq 0$ ve $\frac{\lambda-n}{p} \leq \frac{\mu-n}{q}$ olsun. Bu takdirde, $Y \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$L_{q,\mu}(Y) \hookrightarrow L_{p,\lambda}(Y)$$

gömülmesi gerçeklenir.

İspat $\frac{1}{p/q}$ ile $\frac{1}{1-p/q}$ eşlenik olmak üzere Hölder eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
\int_{B(u,r)} |f(v)|^p dv &= \left(\int_{B(u,r)} dv\right)^{1-\frac{p}{q}} \left(\int_{B(u,r)} |f(v)|^q dv\right)^{\frac{p}{q}} \\
&\leq (\alpha_n r^n)^{1-\frac{p}{q}} \left(\int_{B(u,r)} |f(v)|^q dv\right)^{\frac{p}{q}} \\
&= (\alpha_n)^{1-\frac{p}{q}}\, r^{n(1-\frac{p}{q})+\mu\frac{p}{q}} \left(r^{-\mu} \int_{B(u,r)} |f(v)|^q\, dv\right)^{\frac{p}{q}}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$\frac{\lambda-n}{p} \leq \frac{\mu-n}{q} \Leftrightarrow \lambda \leq n\left(1-\frac{p}{q}\right) + \mu\frac{p}{q}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \left(\frac{\alpha}{d}\right)^{n\left(1-\frac{p}{q}\right)+\mu\frac{p}{q}} \leq \left(\frac{\alpha}{d}\right)^{\lambda} \\
&\Rightarrow \alpha^{n\left(1-\frac{p}{q}\right)+\mu\frac{p}{q}} \leq \alpha^{\lambda} d^{n\left(1-\frac{p}{q}\right)+\mu\frac{p}{q}-\lambda}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadeleri yerine yazdığımızda

$$\left(r^{-\lambda} \int_{B(u,r)} |f\,(v)\,|^p dv\right)^{\frac{1}{p}} \lesssim \left(r^{-\mu} \int_{B(u,r)} |f\,(v)\,|^q dv\right)^{\frac{1}{q}}$$

bu eşitsizlik bulunur. Böylece $\|f\|_{L_{p,\lambda}(B(u,r))} \lesssim \|f\|_{L_{q,\mu}(B(u,r))}$ bulduğumuz eşitsizlik sağlanır.

4.2 Teorem $1 \leq p < \infty, 0 \leq \lambda < n - \alpha p$ ve $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$||I_\alpha f||_{L_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \lesssim ||f||_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitlikten $I_\alpha : L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \to L_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ya sınırlıdır (Chiarenza ve Frasca 1987).

4.1 Riesz Potansiyelinin Morrey Uzaylarında Spanne-Tipi Sınırlılığı

Öncelikle Spanne-tipi sınırlılık için aşağıdaki lemmayı verelim.

4.1.1 Lemma $1 < p < \infty, 0 < \alpha < \frac{n}{p}, \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ve $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu takdirde

$$||I_\alpha f||_{L_q(B(u,r))} \leq C r^{\frac{n}{q}} \int_r^\infty t^{-\frac{n}{q}-1} ||f||_{L_p(B(u,t))} dt$$

eşitsizliği gerçekleşir (Guliyev 2009).

İspat. Kabulden $1 < p < \infty$ olsun. f fonksiyonu $f = f_1 + f_2, f_1(v) = f(v)\chi_{B(u,2r)}(v), f_2(v) = f(v)\chi_{B^c(u,2r)}(v), r > 0$ şeklinde belirlenirse

$$I_\alpha f(u) = I_\alpha f_1(u) + I_\alpha f_2(u)$$

olur. Hardy-Littlewood-Sobolev Teoremi eşitsizliği:

$||I_\alpha f||_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq C_{p,q} ||f||_{L_p(\mathbb{R}^n)}$ dir.

$1 < p < \infty, 0 < \alpha < \frac{n}{p}, \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ kabulünden ve C sabit olmak üzere yukarıdaki Hardy-Littlewood- Sobolev eşitsizliğinden

$$||I_\alpha f_1||_{L_q(B(u,r))} \leq ||I_\alpha f_1||_{L_q(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq C||f_1||_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

$$= C||f||_{L_p(B(u,2r))}$$

bulunur. Ayrıca,

$$||f||_{L_p(B(u,2r))} \leq C r^{\frac{n}{q}} \int_{2r}^\infty t^{-\frac{n}{q}-1} ||f||_{L_p(B(u,t))} dt$$

olduğu dikkate alınırsa

$$||I_\alpha f_1||_{L_q(B(u,r))} \leq C r^{\frac{n}{q}} \int_{2r}^\infty t^{-\frac{n}{q}-1} ||f||_{L_p(B(u,t))} dt \qquad (4.1)$$

bulunur. $|u - z| \leq r, |z - v| \geq 2r$ olduğunda $|u - z| \leq r \leq \frac{|z-v|}{2}$ dir. O halde

$$|u - v| = |u - z + z - v|$$

$$\leq |u-z| + |z-v|$$

$$\leq r + |z-v|$$

$$\leq \frac{3}{2}|z-v|$$

ve

$$|z-v| = |z-u+u-v|$$

$$\leq |z-u| + |u-v|$$

$$\leq r + |u-v|$$

$$\leq \frac{|z-v|}{2} + |u-v|$$

$$\Rightarrow \frac{|z-v|}{2} \leq |u-v|.$$

Bunun sonucunda,

$$\frac{1}{2}|z-v| \leq |u-v| \leq \frac{3}{2}|z-v|$$

bulunur. Dolayısıyla

$$||I_\alpha f_2||_{L_q(B(u,t))} \leq \Big|\Big| \int_{B^c(u,2t)} \frac{f(v)}{|z-v|^{n-\alpha}} dv \Big|\Big|_{L_q(B(u,t))}$$

$$\leq C \int_{B^c(u,2t)} \frac{|f(v)|}{|u-v|^{n-\alpha}} dv ||\chi_{(B(u,t))}||_{L_q(\mathbb{R}^n)}$$

olur. $\beta > \frac{n}{q}$ seçerek , Hölder eşitsizliğini kullanarak

$\int_{B^c(u,2r)} \frac{|f(v)|}{|u-v|^{n-\alpha}} dv$

$$= \beta \int_{B^c(u,2r)} |u-v|^{\alpha-n+\beta} |f(v)| \left(\int_{|u-v|}^{\infty} t^{-\beta-1} dt \right) dv$$

$$= \beta \int_{2r}^{\infty} t^{-\beta-1} \left(\int_{\{v \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |u-v| \leq t\}} |u-v|^{\alpha-n+\beta} |f(v)| dv \right) dt$$

$$\leq C \int_{2r}^{\infty} t^{-\beta-1} ||f||_{L_p(B(u,t))} \Big|\Big| |u-v|^{\alpha-n+\beta} \Big|\Big|_{L_p(B(u,t))} dt$$

$$= C \int_{2r}^{\infty} t^{-\beta-1} ||f||_{L_p(B(u,t))} \left(\int_{2t \leq |u-v| \leq t} \left(\frac{1}{|u-v|^{n-\alpha-\beta}} \right)^p dv \right)^{\frac{1}{p}} dt$$

$$= C\int_{2r}^{\infty} t^{-\beta-1}||f||_{L_p(B(u,t))}\left(\int_{t^{n-1}}\int_{2t}^{t}\frac{t^{n-1}}{t^{(n-\alpha-\beta)p}}dtdv\right)^{\frac{1}{p}}dt$$

$$\leq C\int_{2r}^{\infty} t^{-\beta-1}||f||_{L_p(B(u,t))}(t^{n-(n-\alpha-\beta)^p})^{\frac{1}{p}}dt$$

$$= C\int_{2r}^{\infty} t^{-\beta-1}t^{-\frac{n}{p}}t^{\alpha+\beta}||f||_{L_p(B(u,t))}dt$$

$$= C\int_{2r}^{\infty} t^{\alpha-\frac{n}{p}-1}||f||_{L_p(B(u,t))}dt \qquad (4.2)$$

bulunur. Diğer taraftan $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ise $\frac{n}{q} = \frac{n}{p} - \alpha$ dır. Bu ifade (4.3) da yerine yazılırsa,

$$||I_\alpha f_2||_{L_q(B(u,r)} \leq C\int_{2r}^{\infty} t^{\alpha-(\frac{n}{q}+\alpha)-1}||f||_{L_p(B(u,t))}dt$$

$$= C\int_{2r}^{\infty} t^{-\frac{n}{q}-1}||f||_{L_p(B(u,t))}dt$$

$$\leq Cr^{\frac{n}{q}}\int_{2r}^{\infty} t^{-\frac{n}{q}-1}||f||_{L_p(B(u,t))}dt \qquad (4.3)$$

olur. Bunun sonucunda (4.2) ve (4.3) den Lemma $(4.1.1)$ ispatlanır.

4.1.2 Teorem (Spanne) Kabul edelim ki $0 < \alpha < n, 0 < \lambda < n-\alpha, 1 < p < \frac{n}{\alpha}$ olsun. $\mu = \frac{n\lambda}{(n-\lambda)}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ve $\frac{\lambda}{p} = \frac{\mu}{q}$ diyelim. Bu takdirde

$$||I_\alpha f||_{L_{q,\mu}(\mathbb{R}^n)} \leq C||f||_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat. Lemma 4.1.1 den ve $\frac{\lambda}{p} = \frac{\mu}{q}$ eşitliği kullanılarak

$$||I_\alpha f||_{L_{q,\mu}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\substack{u\in\mathbb{R}^n\\ r>0}} r^{-\frac{\mu}{q}}||I_\alpha f||_{L_q(B(u,r))}$$

$$\leq C\sup_{\substack{u\in\mathbb{R}^n\\ r>0}} r^{\frac{-\mu}{q}}r^{\frac{n}{q}}\int_{r}^{\infty} t^{\frac{-n}{q}-1}||f||_{L_p(B(u,t))}dt$$

$$\leq C\sup_{\substack{u\in\mathbb{R}^n\\ r>0}} r^{\frac{n-\mu}{q}}||f||_{L_{p,\lambda(\mathbb{R}^n)}}\int_{r}^{\infty} t^{-\frac{n}{q}-1}t^{\frac{\lambda}{p}}dt$$

$$\leq C\sup_{\substack{u\in\mathbb{R}^n\\ r>0}} r^{\frac{n-\mu}{q}}||f||_{L_{p,\lambda(\mathbb{R}^n)}}\lim_{a\to\infty}\frac{1}{\frac{\lambda}{p}-\frac{n}{q}}\{r^{\frac{\lambda}{p}-\frac{n}{q}}\Big|_r^a\}$$

$$\leq C\sup_{\substack{u\in\mathbb{R}^n\\ r>0}} r^{\frac{n-\mu}{q}}||f||_{L_{p,\lambda(\mathbb{R}^n)}}r^{\frac{\lambda}{p}-\frac{n}{q}}$$

$$= C \sup_{\substack{u \in \mathbb{R}^n \\ r>0}} r^{\frac{n-\mu}{q}} ||f||_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} r^{\frac{\mu}{q}-\frac{n}{q}}$$

$$= C||f||_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}$$

olur. Sonuç olarak ispat tamamlanmış olur.

4.2 Riesz Potansiyelinin Morrey Uzaylarında Adams-Tipi Sınırlılığı

Öncelikle Adams-tipi sınırlılık için aşağıdaki lemmayı verelim.

4.2.1 Lemma Kabul edelim ki $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$ ve $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu takdirde C; f, u *ve* r fonksiyonlarından bağımsız olarak

$$|I_\alpha f| \le C r^\alpha Mf(u) + C \int_r^\infty t^{\alpha-\frac{n}{p}-1} ||f||_{L_p(B(u,t))} dt$$

eşitsizliği gerçeklenir (Guliyev 2009).

İspat. $1 < p < \infty$ olsun. f fonksiyonu $f = f_1 + f_2, f_1(v) = f(v)\chi_{B(u,2r)}(v), f_2(v) = f(v)\chi_{B^c(u,2r)}(v), r > 0$ şeklinde ele alınırsa

$$I_\alpha f(u) = I_\alpha f_1(u) + I_\alpha f_2(u)$$

olur.

$|I_\alpha f_1(u)| \le C r^\alpha Mf(u)$ eşitsizliği 1972'de Hedberg tarafından gösterilmiştir. $I_\alpha f_2$ için Hölder eşitsizliği ile,

$$I_\alpha f_2(u) \le \int_{B^c(u,2r)} |u-v|^{\alpha-n} |f(v)| dv$$

$$\le C \int_{B^c(u,2r)} |f(v)| dv \int_{|u-v|}^\infty t^{\alpha-n-1} dt$$

$$\le C \int_{2r}^\infty \left(\int_{2t<|u-v|<t} |f(v)| dv \right) t^{\alpha-n-1} dt$$

$$\le C \int_t^\infty ||f||_{L_p(B(u,t))} \left(\int_{2t<|u-v|<t} 1 du \right)^{\frac{1}{p}} t^{\alpha-n-1} dt$$

$$= C \int_r^\infty ||f||_{L_p(B(u,t))} \left(\int_{\mathbf{S}^{n-1}} \int_t^{2t} a^{n-1} da ds \right)^{\frac{1}{p} t^{\alpha-n-1}} dt$$

$$\leq C\int_r^\infty ||f||_{L_p(B(u,t))}t^{n(1-\frac{1}{p})}t^{\alpha-n-1}dt$$
$$= C\int_r^\infty t^{\alpha-\frac{n}{p}-1}||f||_{L_p(B(u,t))}dt$$

dir. Böylece (3.18) ispatlanır.

4.2.1 Teorem (Adams) $0<\alpha<n$, $1<p<\frac{n}{\alpha}$, $0<\lambda<n-\alpha p$ olsun. Bu takdirde

$$||I_\alpha f||_{L_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leq C||f||_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}$$

sağlanır, $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n-\lambda}$ dir ve C sadece n,λ,p,α ya bağlıdır.

İspat. $r^\alpha r^{\frac{\lambda-n}{p}} \leq C\left(r^{\frac{\lambda-n}{p}}\right)^{\frac{p}{q}}$ den, $r>0$ olmak üzere $r^{\frac{\lambda-n}{p}}=\frac{Mf(u)}{||f||_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}}$ seçilirse ve $B(u,r), u$ merkezli r yarıçaplı açık yuvar olmak üzere Lemma 4.2.1'den

$$||I_\alpha f||_{L_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\substack{u\in\mathbb{R}^n\\ r>0}}\left(\frac{1}{r^\lambda}\int_{B(u,r)}|I_\alpha f(v)|^q dv\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \sup_{\substack{u\in\mathbb{R}^n\\ r>0}} r^{-\frac{\lambda}{q}}\left(\int_{B(u,r)}|I_\alpha f(v)|^q dv\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \sup_{\substack{u\in\mathbb{R}^n\\ r>0}} r^{-\frac{\lambda}{q}}\left(\int_{B(u,r)}\left(Cr^\alpha Mf(u)+C\int_r^\infty t^{\alpha-\frac{n}{p}-1}||f||_{L_{p(B(u,t))}}dt\right)^q dv\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \sup_{\substack{u\in\mathbb{R}^n\\ r>0}} r^{-\frac{\lambda}{q}}\left(\int_{B(u,r)}\left(Cr^\alpha Mf(u)+C||f||_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}\int_r^\infty t^\alpha t^{\frac{\lambda-n}{p}}\frac{dt}{t}\right)^q dv\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \sup_{\substack{u\in\mathbb{R}^n\\ r>0}} r^{-\frac{\lambda}{q}}\left(\int_{B(u,r)}\left(C(r^{\frac{\lambda-n}{p}})^{\frac{p}{q}-1}Mf(u)+C(r^{\frac{\lambda-n}{p}})^{\frac{p}{q}}||f||_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}\right)^q dv\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \sup_{\substack{u\in\mathbb{R}^n\\ r>0}} r^{-\frac{\lambda}{q}}\left(\int_{B(u,r)}\left(C\left(\frac{Mf(u)}{||f||_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}}\right)^{\frac{p}{q}-1}Mf(u)+C\left(\frac{Mf(u)}{||f||_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}}\right)^{\frac{p}{q}}||f||_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}\right)^q dv\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \sup_{\substack{u\in\mathbb{R}^n\\ r>0}} r^{-\frac{\lambda}{q}}\left(\int_{B(u,r)}\left(C(Mf(u))^{\frac{p}{q}}||f||^{1-\frac{p}{q}}_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}\right)^q dv\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= C||f||^{1-\frac{p}{q}}_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}\sup_{\substack{u\in\mathbb{R}^n\\ r>0}} r^{-\frac{\lambda}{q}}||Mf||^{\frac{p}{q}}_{L_{p(B(u,r))}}$$

$$= C||f||^{1-\frac{p}{q}}_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leq ||Mf||^{\frac{p}{q}}_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}$$

$1 < p < \infty$ ve $0 < \lambda < n$ olmak üzere $||Mf||_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leq C||f||_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}$ bu teoremden

$$\leq C||f||^{1-\frac{p}{q}}_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}||f||^{\frac{p}{q}}_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}$$
$$= C||f||_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

5. MORREY UZAYLARINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ RIESZ POTANSİYELİNİN SPANNE VE ADAMS TİPİ SINIRLILIKLARI

Bu bölüm içinde, Morrey uzaylarında I_ρ genelleştirilmiş Riesz potansiyelinin Adams-tipi ve Spanne-tipi sınırlılıkları ρ fonksiyonu için uygun şartlar konularak lokal eşitsizlikler ile kanıtlanmıştır. $\rho : (0,\infty) \to (0,\infty)$ fonksiyonu

$$\lim_{r\to 0} \rho(r) = 0, \lim_{r\to\infty} \rho(r) = \infty$$

koşullarını sağlayan pozitif ölçülebilir bir fonksiyon olan I_ρ genelleştirilmiş Riesz potansiyeli

$$I_\rho f(u) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho(|u-v|)}{|u-v|^n} f(v)dv$$

şeklinde ifade edilir. Aşağıdaki lemma, I_ρ genelleştirlimiş Riesz potansiyel operatörünün $L_p(\mathbb{R}^n)$ Lebesgue uzaylarında ve $WL_p(\mathbb{R}^n)$ zayıf Lebesgue uzaylarında sınırlılığı için gerek ve yeter koşulları ifade eden bir eşitsizliktir.

5.1 Lemma (i) $1 < p < q < \infty$ olsun. Bu takdirde $I_\rho : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_q(\mathbb{R}^n)$ sınırlı olması için $\Longleftrightarrow \forall r > 0$ için

$$\rho(r) \leq C r^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}}$$

gerçekleyen pozitif C sabitinin bulunmasıdır.

(ii) $1 < q < \infty$ olsun. Bu takdirde $I_\rho : L_1(\mathbb{R}^n) \to WL_q(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlı olması için $\Longleftrightarrow \forall r > 0$ için

$$\rho(r) \leq C r^{n-\frac{n}{q}}$$

şartını karşılayan pozitif C sabitinin bulunmasıdır (Nakai vd. 2014). Aşağıda verilen lemma geçerli kalır.

5.2 Lemma $\forall r > 0$ için ρ fonksiyonu

$$\sup_{t\in(r,2r)} \frac{\rho(t)}{t^n} \lesssim \int_r^\infty \frac{\rho(t)}{t^n}\frac{dt}{t} < \infty$$

eşitsizliğini sağlar (Küçükaslan Doktora Tezi 2015).

5.1 Genelleştirilmiş Riesz Potansiyelinin Morrey Uzaylarında Spanne-Tipi Sınırlılığı

Bu alt bölümde, I_ρ genelleştirilmiş Riesz potansiyel operatörlerinin $L_{p,\lambda}$ Morrey uzaylarında Spanne-tipi sınırlılığı lokal eşitsizlikler yardımıyla ispatlanacaktır.

Aşağıdaki lemma I_ρ genelleştirilmiş Riesz potansiyeli için lokal eşitsizliğinin genelleştirilmiş versiyondur.

5.1.1 Lemma $1 < p < q < \infty$ olacak biçimde ρ için

$$\rho(t) \lesssim t^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}} \tag{5.1}$$

$$\sup_{t\in(r,2r)} \frac{\rho(t)}{t^n} \lesssim \int_r^\infty \frac{\rho(t)}{t^n}\frac{dt}{t} \tag{5.2}$$

koşulları sağlansın. Bu taktirde, $r > 0$ ve $p > 1 \Rightarrow \forall f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için

$$||I_\rho f||_{L_{q(B(u,t))}} \leq ||f||_{L_{p(B(u,2t))}} + t^{\frac{n}{q}} \int_{2t}^\infty r^{\frac{n}{p}-1}\rho(r)||f||_{L_p(B(u,r))}dr. \tag{5.3}$$

$p = 1 \Rightarrow \forall f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için

$$||I_\rho f||_{WL_q(B(u,t))} \leq ||f||_{L_1(B(u,2t))} + t^{\frac{n}{q}} \int_{2t}^\infty r^{-\frac{n}{p}-1}\rho(r)||f||_{L_1(B(u,r))}dr \tag{5.4}$$

eşitsizlikleri sağlanır (Guliyev, İsmayilova, Küçükaslan, Şerbetçi 2015).

İspat $1 < p < \infty$ olacak biçimde f fonksiyonu $f = f_1 + f_2, f_1(v) = f(v)_{\chi_{B(u,2t)}}(v), f_2(v) = f(v)_{\chi_{B^c(u,2t)}}, t > 0$ olarak alınırsa

$$I_\rho f(u) = I_\rho f_1(u) + I_\rho f_2(u)$$

için norm eşitsizliğinden

$$||I_\rho f|| \leq ||I_\rho f_1|| + ||I_\rho f_2||$$

eşitsizliği yazılabilir. $1 < p < \infty$ olmak üzere Teorem 4.1.2'den $I_\rho f_1$ için

$$
\begin{aligned}
||I_\rho f_1||_{L_q(B(u,t))} &\leq ||I_\rho f_1||_{L_q(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim ||f_1||_{L_p(B(u,2t))} \\
&= ||f||_{L_p(B(u,2t))} \qquad (5.5)
\end{aligned}
$$

bulunur. Diğer yandan

$$z \in B(u,t) \Rightarrow |u-z| < t$$

$$v \in B^c(u,2t) \Rightarrow |u-v| \geq 2t$$

$$|u-v| < t + |v-z|$$

$$|u-v| - t < |v-z|$$

$$2t \leq |u-v|$$

$$\Rightarrow t \leq \frac{1}{2}|u-v|$$

$$|u-v| - \frac{1}{2}|u-v| \leq |v-z|$$

$$\frac{1}{2}|u-v| \leq |v-z|$$

$$
\begin{aligned}
|v-z| &\leq |u-z| + |u-z| \\
&\leq t + |u-v| \\
&\leq \frac{1}{2}|u-v| + |u-v| \\
&= \frac{3}{2}|u-v|
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan

$$\frac{1}{2}|u-v| \leq |v-z| \leq \frac{3}{2}|u-v|$$

bulunur. Buna göre

$$\frac{1}{2}t \leq r \leq \frac{3}{2}t$$

yazılır. Üstelik $I_\rho f_2$ için

$$\begin{aligned}
||I_\rho f_2||_{L_q(B(u,t))} &= \Big|\Big| \int_{B^c(u,2t)} \frac{\rho(|v-z|)}{|v-z|^n} f(v)dv \Big|\Big|_{L_q(B(u,t))} \\
&= \left(\int_{B(u,t)} \Big| \int_{B^c(u,2t)} \frac{\rho(|v-z|)}{|v-z|^n} f(v)dv \Big|^q dz \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\int_{B(u,t)} \left(\int_{B^c(u,2t)} \frac{\rho(|v-z|)}{|v-z|^n} |f(v)|dv \right)^q dz \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\approx \left(\int_{B(u,t)} \left(\int_{B^c(u,2t)} \frac{\rho(|u-v|)}{|u-v|^n} |f(v)|dv \right)^q dz \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Genelleştirilmiş Minkowski eşitsizliği ve Lemma 5.2 ile

$$\left(\int_{B(u,t)} \left(\int_{B^c(u,2t)} \frac{\rho(|u-v|)}{|u-v|^n} |f(v)|dv \right)^q dz \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{B^c(u,2t)} \left(\Big| \int_{B(u,t)} \frac{\rho(|u-v|)}{|u-v|^n} |f(v)| \Big|^q dz \right)^{\frac{1}{q}} dv \\
&= \int_{B^c(u,2t)} \frac{\rho(|u-v|)}{|u-v|^n} |f(v)| \left(\int_{B(u,t)} 1dz \right)^{\frac{1}{q}} dv \\
&= |B(u,t)|^{\frac{1}{q}} \int_{B^c(u,2t)} \frac{\rho(|u-v|)}{|u-v|^n} |f(v)|dv \\
&= t^{\frac{n}{q}} \int_{B^c(u,2t)} \frac{\rho(|u-v|)}{|u-v|^n} |f(v)|dv \\
&\lesssim t^{\frac{n}{q}} \int_{B^c(u,2t)} |f(v)| \left(\int_{|u-v|}^{\infty} \frac{\rho(r)}{r^n} \frac{dr}{r} \right) dv
\end{aligned}$$

yazılır ve Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
&= t^{\frac{n}{q}} \int_{2t}^{\infty} \frac{\rho(r)}{r^{n+1}} dr \int_{2t \leq |u-v| < t} |f(v)|dv \\
&\lesssim t^{\frac{n}{q}} \int_{2t}^{\infty} \frac{\rho(r)}{r^{n+1}} ||f||_{L_1(B(u,r))} dr \\
&\lesssim t^{\frac{n}{q}} \int_{2t}^{\infty} \frac{\rho(r)}{r^{n+1}} ||f||_{L_p(B(u,r))} ||1||_{Lq(B(u,r))} dr \\
&= t^{\frac{n}{q}} \int_{2t}^{\infty} \frac{\rho(r)}{r^{n+1}} ||f||_{L_p(B(u,r))} r^{\frac{n}{q}} dr
\end{aligned}$$

$$= t^{\frac{n}{q}} \int_{2t}^{\infty} \frac{\rho(r)}{r^{n(1-\frac{1}{q})+1}} ||f||_{L_p(B(u,r))} dr, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$= t^{\frac{n}{q}} \int_{2t}^{\infty} r^{-\frac{n}{p}-1} \rho(r) ||f||_{L_p(B(u,r))} dr \tag{5.6}$$

bulunur. Böylece (5.2) eşitisizliğinin ispatı tamamlanmış olur. $p = 1$ olsun. I_ρ genelleştirilmiş Riesz potansiyel operatörünün zayıf $(1, q)$ sınırlılığı ve Teorem 4.1 dikkkate alınarak

$$||I_\rho f_1||_{WL_q(B(u,t))} \leq ||I_\rho f_1||_{WL_q(\mathbb{R}^n)} \lesssim ||f_1||_{L_1(\mathbb{R}^n)} = ||f||_{L_1(B(u,2r))} \tag{5.7}$$

olur. Dolayısıyla (5.5) ve (5.6) dan (5.3) bulunur.

Şimdi, aşağıda verilen teoremde lokal eşitsizlikler yardımıyla I_ρ genelleştirilmiş Riesz potansiyeli operatörünün $L_{p,\lambda}$ Morrey uzaylarında Spanne-tipi sınırlılığını göstermeye çalışalım.

5.1.1 Teorem (Spanne-tipi sınırlılık) $1 < p < q < \infty, \lambda \geq 0, \mu = \frac{\lambda q}{p}$ olsun. $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olacak biçimde ρ için

$$\rho(t) \lesssim t^{\frac{n-\lambda}{p} - \frac{n-\mu}{q}} \tag{5.8}$$

ve

$$\sup_{t \in (r,2r)} \frac{\rho(t)}{t^n} \lesssim \int_r^{\infty} \frac{\rho(t)}{t^n} \frac{dt}{t} \tag{5.9}$$

koşulları gerçeklensin. O halde $\forall r > 0$ için

$$||I_\rho f||_{L_{q,\mu}(\mathbb{R}^n)} \lesssim ||f||_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \tag{5.10}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Buna göre $I_\rho : L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \to L_{q,\mu}(\mathbb{R}^n)$ sınırlıdır (Küçükaslan Doktora Tezi 2015).

İspat Kabulden $1 < p < \infty$ olsun. Bu takdirde, (5.8) ve (5.9) şartları ile birlikte Lemma 5.1.1 kullanılarak

$$||I_\rho f||_{L_{q,\mu}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\substack{t>0 \\ u \in \mathbb{R}^n}} t^{\frac{-\mu}{q}} ||I_\rho f||_{L_q(B(u,t))}$$

$$\lesssim \sup_{\substack{t>0 \\ u \in \mathbb{R}^n}} t^{\frac{-\mu}{q}} \left(||f||_{L_{p(B(u,2t))}} + t^{\frac{n}{q}} \int_{2t}^{\infty} r^{-\frac{n}{p}-1} \rho(r) ||f||_{L_{p(B(u,r))}} dr \right)$$

$$\lesssim \sup_{\substack{t>0\\ u\in\mathbb{R}^n}} t^{\frac{-\mu}{q}} \left(\frac{t^{\frac{n}{p}}}{\rho(t)} \int_{2t}^{\infty} r^{-\frac{n}{p}-1}\rho(r)||f||_{L_{p(B(u,r))}}dr + t^{\frac{n}{q}} \int_{2t}^{\infty} r^{-\frac{n}{p}-1}\rho(r)||f||_{L_{p(B(u,r))}}dr \right)$$

$$\approx \sup_{\substack{t>0\\ u\in\mathbb{R}^n}} t^{-\frac{\mu}{q}} \left(t^{\frac{n}{q}} \int_{2t}^{\infty} r^{-\frac{n}{p}-1}\rho(r)||f||_{L_{p(B(u,r))}}dr + t^{\frac{n}{q}} \int_{2t}^{\infty} r^{-\frac{n}{p}-1}\rho(r)||f||_{L_{p(B(u,r))}}dr \right)$$

$$\lesssim \sup_{\substack{t>0\\ u\in\mathbb{R}^n}} t^{-\frac{\mu}{q}} t^{\frac{n}{q}} \int_{2t}^{\infty} r^{-\frac{n}{p}-1}\rho(r)||f||_{L_{p(B(u,r))}}dr$$

$$\lesssim \sup_{\substack{t>0\\ u\in\mathbb{R}^n}} t^{\frac{n-\mu}{q}} ||f||_{L_{p,\lambda(\mathbb{R}^n)}} \int_{2t}^{\infty} r^{-\frac{n}{p}-1} r^{\frac{\lambda}{p}}\rho(r)dr$$

$$\lesssim \sup_{\substack{t>0\\ u\in\mathbb{R}^n}} t^{\frac{n-\mu}{q}} ||f||_{L_{p,\lambda(\mathbb{R}^n)}} t^{\frac{\lambda-n}{p}}\rho(t)$$

$$\lesssim \sup_{\substack{t>0\\ u\in\mathbb{R}^n}} t^{\frac{n-\mu}{q}} ||f||_{L_{p,\lambda(\mathbb{R}^n)}} t^{\frac{\lambda-n}{p}} t^{\frac{n-\lambda}{p}-\frac{n-\mu}{q}}$$

$$= ||f||_{L_{p,\lambda(\mathbb{R}^n)}}$$

bulunur. $p = 1$ olsun. Bu taktirde I_ρ genelleştirilmiş Riesz potansiyeli operatörünün zayıf $(1, q)$ sınırlılığı ve Lemma 5.1 ile

$$||I_\rho f||_{WL_q(B(u,t))} \leq ||I_\rho f||_{WL_q(\mathbb{R}^n)} \lesssim ||f||_{L_1(\mathbb{R}^n)}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.1.1 den $0 < \alpha < n, 1 < p < \frac{n}{\alpha}$ için $\rho(r) = r^\alpha$ alınırsa Riesz potansiyelinin Morrey uzaylarında sınırlılığı olan Spanne teoremi bir sonuç olarak bulunur.

5.1.1 Sonuç $0 < \alpha < n, 1 < p < \frac{n}{\alpha}, 0 < \lambda < n - \alpha p$ olsun. Üstelik $\alpha = \frac{n}{p} - \frac{n}{q}, \frac{\lambda}{p} = \frac{\mu}{q}$ ve $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu taktirde,

$$||I_\alpha f||_{L_{q,\mu}(\mathbb{R}^n)} \lesssim ||f||_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitlikten $I_\alpha : L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \to L_{q,\mu}(\mathbb{R}^n)$ ya sınırlıdır.

5.2 Genelleştirilmiş Riesz Potansiyelinin Morrey Uzaylarında Adams-Tipi Sınırlılığı

Bu kısımda I_ρ genelleştirlmiş Riesz potansiyeli operatörlerinin $L_{p,\lambda}$ Morrey uzaylarında Adams-tipi sınırlılığını lokal eşitsizlikler ile ispatlayacağız.

Aşağıdaki verilen Lemma I_ρ genelleştirilmiş Riesz potansiyel operatörünün $L_{p,\lambda}$ Morrey uzaylarında Adams-tipi sınırlılığını kanıtlamak için bulunan genelleştirilmiş lokal eşitsizliktir.

5.2.1 Lemma $1 < p < \infty, 0 < 2k_1 < k_2 < \infty$ olmak üzere $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. ρ için

$$\int_0^t \frac{\rho(r)}{r^n}\frac{dr}{r} \lesssim \frac{\rho(t)}{t^n}$$

ve

$$\tilde{\rho}(t) = \int_{k_1 t}^{k_2 t} \frac{\rho(r)}{r^n}\frac{dr}{r}$$

koşulları sağlansın. Bu takdirde $r > 0$ için

$$|I_\rho f(u)| \lesssim \rho(t) Mf(u) + \int_t^\infty r^{-\frac{n}{p}-1}\rho f(r)||f||_{Lp(B(u,r))}dr$$

eşitsizliği sağlanır (Guliyev 2015).

İspat $1 < p < \infty$ olsun. f fonksiyonu $f = f_1 + f_2, f_1(v) = f(v)_{\chi_{B(u,2t)}}(v), f_2(v) = f(v)_{\chi_{B^c(u,2t)}}(v), t > 0$ şeklinde göz önünde bulundurulursa

$$I_\rho f(u) = I_\rho f_1(u) + I_\rho f_2(u)$$

için mutlak değer eşitsizliğinden

$$|I_\rho f| \lesssim |I_\rho f_1| + |I_\rho f_2|$$

bu şekilde yazılır. Öte yandan

$$|I_\rho f_1(u)| \leq \int_{B(u,2t)} \frac{\rho(|u-v|)}{|u-v|^n}|f(v)|dv$$

$$\lesssim \sum_{k=-\infty}^{0} \int_{\{v\in\mathbb{R}^n : 2^k k_1 t < |u-v| \leq 2^k k_2 t\}} \frac{\rho(|u-v|)}{|u-v|^n}|f(v)|dv$$

$$\lesssim \sum_{k=-\infty}^{0} \rho(2^k k_2 t) \frac{1}{(2^k k_2 t)^n} \int_{\{v\in\mathbb{R}^n : |u-v|\leq 2^k k_2 t\}} |f(v)|dv$$
$$\lesssim \rho(t) Mf(u)$$

bulunur. Ayrıca Hölder eşitsizliği ve Fubini teoremini kullanarak

$$|I_\rho f_2| \leq \int_{B^c(u,2t)} \frac{\rho(|u-v|)}{|u-v|^n} |f(v)|dv$$
$$\lesssim \int_{B^c(u,2t)} |f(v)|dv \int_{|u-v|}^{\infty} r^{-n-1}\rho(r)dr$$
$$\lesssim \int_{2t}^{\infty} \left(\int_{2t<|u-v|<r} |f(v)|dv \right) r^{-n-1}\rho(r)dr$$
$$\lesssim \int_{t}^{\infty} ||f||_{L_{p(B(u,r))}} \left(\int_{t<|u-v|<r} 1dv \right)^{\frac{1}{q}} r^{-n-1}\rho(r)dr$$
$$\lesssim \int_{t}^{\infty} ||f||_{L_{p(B(u,r))}} r^{n(1-\frac{1}{p})} r^{-n-1}\rho(r)dr$$
$$= \int_{t}^{\infty} r^{-\frac{n}{p}-1}\rho(r)||f||_{L_{p(B(u,r))}}dr$$

eşitliği sağlanabilir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi, aşağıda verilen teoremde lokal eşitsizlik yöntemini uygulayarak I_ρ genelleştirilmiş Riesz potansiyeli operatörlerinin $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzaylarında Adams-tipi sınırlılığını gösterelim.

5.2.1 Teorem (Adams-tipi Sınırlılık) $0 \leq \lambda < n, 1 < p < \infty$ olmak üzere $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. ρ için

$$\rho(t) \lesssim t^{\frac{n-\lambda}{p} - \frac{n-\lambda}{q}} \tag{5.11}$$

ve

$$\sup_{t\in(r,2r)} \frac{\rho(t)}{t^n} \lesssim \int_r^{\infty} \frac{\rho(s)}{s^n}\frac{ds}{s} \tag{5.12}$$

koşulları sağlansın. Bu durumda her $r > 0$ için

$$||I_\rho f||_{L_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \lesssim ||f||_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \tag{5.13}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Buradan, $I_\rho : L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \to L_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$‘ya sınırlıdır (Küçükaslan Doktora Tezi 2015).

İspat $\rho(t) \lesssim t^{\frac{\lambda-n}{p}} \lesssim \left(t^{\frac{\lambda-n}{p}}\right)^{\frac{p}{q}}$ ve $B(u,t)$, u merkezli t yarı çaplı açık yuvar ve

$$t^{\frac{\lambda-n}{p}} = \frac{Mf(u)}{||f||_{L_{p,\lambda}}}$$

olarak belirlenirse (5.11), (5.12), Lemma 5.2.1 ve Teorem 4.2 den

$$\begin{aligned}
||I_\rho f||_{L_{q,\lambda}} &= \sup_{\substack{t>0\\ u\in\mathbb{R}^n}} t^{\frac{-\lambda}{q}} \left(\int_{B(u,t)} |I_\rho f(v)|^q dv\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim \sup_{\substack{t>0\\ u\in\mathbb{R}^n}} t^{\frac{-\lambda}{q}} \left(\int_{B(u,t)} \left(\rho(t)Mf(v) + \int_t^\infty r^{\frac{-n}{p}-1}\rho(r)||f||_{L_p(B(u,r))}dr\right)^q dv\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim \sup_{\substack{t>0\\ u\in\mathbb{R}^n}} t^{\frac{-\lambda}{q}} \left(\int_{B(u,t)} \left(\rho(t)Mf(v) + ||f||_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \int_t^\infty r^{\frac{\lambda-n}{p}-1}\rho(r)dr\right)^q dv\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim \sup_{\substack{t>0\\ u\in\mathbb{R}^n}} t^{\frac{-\lambda}{q}} \left(\int_{B(u,t)} \rho(t)Mf(v) + t^{\frac{\lambda-n}{p}}\rho(t)||f||_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}\right)^q dv\Bigg)^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim \sup_{\substack{t>0\\ u\in\mathbb{R}^n}} t^{\frac{-\lambda}{q}} \left(\int_{B(u,t)} \left(\left(t^{\frac{n-\lambda}{p}}\right)^{\frac{p}{q}-1} Mf(v) + \left(t^{\frac{n-\lambda}{p}}\right)^{\frac{p}{q}} ||f||_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}\right)^q dv\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \sup_{\substack{t>0\\ u\in\mathbb{R}^n}} t^{\frac{-\lambda}{q}} \left(\int_{B(u,t)} \left(\left(\frac{Mf(v)}{||f||_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}}\right)^{\frac{p}{q}-1} Mf(v) + \left(\frac{Mf(v)}{||f||_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}}\right)^{\frac{p}{q}} ||f||_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}\right)^q dv\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \sup_{\substack{t>0\\ u\in\mathbb{R}^n}} t^{\frac{-\lambda}{q}} \left(\int_{B(u,t)} \left((Mf(v))^{\frac{1}{q}} ||f||^{1-\frac{p}{q}}_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}\right)^q dv\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= ||f||^{1-\frac{p}{q}}_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \sup_{\substack{t>0\\ u\in\mathbb{R}^n}} t^{\frac{-\lambda}{q}} ||Mf||^{\frac{p}{q}}_{L_{p(B(u,t))}} \\
&= ||f||^{1-\frac{p}{q}}_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} ||Mf||^{\frac{p}{q}}_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim ||f||^{1-\frac{p}{q}}_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} ||f||^{\frac{p}{q}}_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \\
&= ||f||_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

bulunur. $p = 1$ olsun. O halde I_ρ genelleştirilmiş Riesz potansiyel operatörünün zayıf $(1, q)$ sınırlılığı ve Lemma 5.1'i kullanarak

$$||I_\rho f||_{WL_q(B(u,t))} \leq ||I_\rho f||_{WL_q(\mathbb{R}^n)} \lesssim ||f||_{L_1(\mathbb{R}^n)}$$

sağlanır. Böylelikle ispat tamamlanır. Teorem 5.2.1'den $0 < \alpha < n, 1 < p < \frac{n}{\alpha}, 0 < \lambda < n - \alpha p$ için $\rho(r) = r^{\alpha}$ alınırsa Adams teoremi bir sonuç olarak elde edilir.

5.2.1 Sonuç Kabul edelim ki $0 < \alpha < n, 1 < p < \frac{n}{\alpha}, 0 < \lambda < n - \alpha p$ ve $\alpha = \frac{n}{p} - \frac{n}{q}$ olsun. Bu taktirde $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$,

$$||I_\alpha f||_{L_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \lesssim ||f||_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}$$

eşitsizliği sağlanır, $I_\alpha : L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \to L_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$'ya sınırlıdır.

5. KAYNAKLAR

Morrey, C.B., "On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations", *Trans Amer. Math. Soc.,* 43, 126-166. (1938).

Adams, D.R., "A note on Riesz potentials", *Duke Math.J.* 42, 765-778. (1975).

Peetre, J., "On the theory of $L_{p,\lambda}$ spaces", *Jour. Funct. Anal*, 4, 71-87. (1969).

Sadosky, C., ”Interpolation of operators and singular integrals”, *Markel Dekker Inc.,*, 375 p. (1979).

Mazya, V.G., ”Sobolev Spaces”, *Springer-Verlag, Berlin*, (1985).

Chiarenza, F., Frasca, M. "Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function", *Rend. Math.,* 7, 273-279. (1987).

Taylor, M.E. "Analysis on Morrey spaces and applications to Navier-Stokes and other evolution equations". *Commun Partial Differ Equ,* 17(9-10), 1407-1456. (1992).

Nakai, E. ”On generalized fractional integrals”, *Taiwanese Jounrnal of Mathematics.,* 5.3, 587-602. (2001).

Gunawan, H. " A note on the generalized fractional integral operators" . *J. Indones. Math. Soc*, 9(1), 39-43. (2003).

Eridani, G. H., Nakai, E. "On generalized fractional integral operators". *Scientiae Mathematicae Japonicae*, 60(3), 539-550. (2004).

Grafakos, L., ”Classical and Modern Fourier Analysis”, *Mathematics Subject Classification*, (2008).

Guliyev, V.S., "Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized Morrey spaces", *Journal of inequalities and applications*, 1-20. (2009).

Gunawan, H., Nakai, E., Sawano, Y. "Characterizations for the generalized fractional integral operators on Morrey spaces". *Mathematical Inequalities and Applications*, 17(2), 761-777. (2014).

Guliyev, V. S., Ismayilova, A. F., Kucukaslan, A., Serbetci, A. "Generalized fractional integral operators on generalized local Morrey spaces". *Journal of Function Spaces*, (2015).

Küçükaslan, A., ”Genelleştirilmiş Kesirli İntegral Operatörlerinin Genelleştirilmiş Morrey Uzaylarında Sınırlılığı” , Doktora Tezi, *Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı*, Ankara, (2015).

Nakamura, S. "Generalized weighted Morrey spaces and classical operators", *Mathematische Nachrichten* , 289(17-18), 2235-2262. (2016).

Kucukaslan, A., "Equivalence of norms of the generalized fractional integral operator and the generalized fractional maximal operator on the generalixed weighted Morrey spaces ", *Annals of Functional Analysis,* 11, 07-1026, (2020).

Guliyev, V. S., Kucukaslan, A., Aykol, C., Serbetci, A.(2020).” Riesz potential in the local Morrey–Lorentz spaces and some applications”. *Georgian Mathematical Journal*, 27(4), 557-567. (2020).

Mustafayev, R., Kucukaslan, A., ” An extension of the Muckenhoupt–Wheeden theorem to generalized weighted Morrey spaces”, *Georgian Mathematical Journal*, 28(4), 595-610. (2021).

Mizuta, Y., Ohno, T., Shimomura, T. ”Sobolev embeddings in grand Morrey spaces”. *Mathematische Nachrichten*, (2021).

Küçükaslan, A., "The Two-Type Estimates for The Boundedness of Generalized Fractional Maximal Operator on the Generalized Weighted Local Morrey Spaces", *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 12(1), 56-65. (2021).

Kucukaslan, A., "Maximal and fractional maximal operators in the Lorentz-Morrey spaces and their applications to the Bochner-Riesz and Schrödinger-type operators”, *Journal of Interdisciplinary Mathematics,* 25:4, 963-976, (2022).