T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

$Y(R)F^2$ GRAVİTASYON MODELİNİN DÜZGÜN KARA DELİK ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ROWENA SARAGENA

DENİZLİ, TEMMUZ-2019

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

$Y(R)F^2$ GRAVİTASYON MODELİNİN DÜZGÜN KARA DELİK ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ROWENA SARAGENA

DENİZLİ, TEMMUZ-2019

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

ROWENA SARAGENA

ÖZET

$Y(R)F^2$ GRAVİTASYON MODELİNİN DÜZGÜN KARA DELİK ÇÖZÜMLERİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ROWENA SARAGENA
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. ÖZCAN SERT
DENİZLİ, TEMMUZ-2019

Bu tezde ilk olarak dış cebir ile ilgili temel kavramlar ve diferansiyel formların özellikleri incelendi. Daha sonra, Einetein' ın Genel Relativite teorisi ve Einstein-Maxwell teorisi diferansiyel formlarla ifade edildi. Minimal olmayan Einstein-Maxwell teori olarak ta bilinen, gravitasyonun elektromanyetik alana minimal olmayan bağlanmalarını içeren model ele alındı ve bu modele küresel simetrik statik bir metrik için, düzgün karadelik çözümleri bulunarak, bu çözümlerin enerji koşullarını sağlayıp sağlamadığı araştırıldı. Bunun sonucu olarak bu çözümlerin yüklü karadeliklerle birlikte bir dulite dönüşümüyle manyetik monopol yüküne sahip kara delikleri de tarif edebildiği görüldü.

ANAHTAR KELİMELER: Gravitasyon, Düzgün karadelikler, Minimal olmayan bağlanmalar

ABSTRACT

REGULAR BLACK HOLE SOLUTIONS OF THE $Y(R)F^2$ GRAVITATION MODEL
MSC THESIS
ROWENA SARAGENA
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: DOÇ. DR. ÖZCAN SERT)
DENİZLİ, JULY-2019

In this thesis, the basic concepts related with the exterior algebra and the features of the differential forms have been firstly investigated. Then, Einstein's theory of gravity and Einstein-Maxwell theory have been expressed in differential forms. By dealing with the model known as non-minimal Einstein-Maxwell theory which involves the non-minimal couplings between the electromagnetic fields and gravitational field has been considered. By finding regular black hole solutions to the model for spherically symmetric static metric, it has been investigated about whether these solutions satisfy energy conditions or not. As a result, it was shown that these solutions can described the black holes with electric charge, and also magnetic monopole charge by a duality transformation.

KEYWORDS: Gravitation, Regular Black holes, Non-minimal Couplings

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\boldsymbol{M}$	:	Manifold
$\boldsymbol{g}$	:	Metrik
$\boldsymbol{\nabla}$	:	Connection
$\{\boldsymbol{x^\mu}\}$	:	Koordinat Fonksiyonları
$\boldsymbol{\imath}$	:	iç çarpım
$\boldsymbol{T(M)}$	:	Tanjant uzayı
$\boldsymbol{T^\star(M)}$	:	Kotanjant uzayı
$\boldsymbol{\eta_{ab}}$	:	Minkowski metriği
$\{\boldsymbol{e^a}\}$	:	Ortonormal baz 1-formları
$\{\boldsymbol{X_b}\}$	:	Ortonormal Referans Çerçevesi
$\wedge$	:	Dış çarpım
$\boldsymbol{\Lambda^p(M)}$	:	p-formları uzayı
$\boldsymbol{d}$	:	Dış türev
$\boldsymbol{\Lambda^a{}_b}$	:	Connection 1-formları
$\boldsymbol{D}$	:	Kovariant Dış Türev
$\boldsymbol{\Omega^a{}_b}$	:	Metrik uyumlu bağlantı 1-formları
$\boldsymbol{T^a}$	:	Torsion 2-formları
$\boldsymbol{\omega^a{}_b}$	:	Levi-Civita Connection 1-formları
$\boldsymbol{K^a{}_b}$	:	Kontortion 1-formları
$\boldsymbol{q^a{}_b}$	:	Anti-Simetrik Connection 1-formları
$\boldsymbol{R^a{}_b}$	:	Eğrilik 2-formları
$\boldsymbol{L}$	:	Lagrange Yoğunluğu 4-formu
$\boldsymbol{\mathcal{L}}$	:	Lagrange Fonksiyonu
$\boldsymbol{\kappa}$	:	Evrensel Gravitasyonel bağlanma sabiti
$*$	:	Hodge Star Operatorü
$\boldsymbol{\delta}$	:	Sonsuz küçük varyasyon

ÖNSÖZ

Bu tezde minimal olmayan elektromanyetik ve gravitasyonel bağlanmalar içeren bir gravitasyon modelinin düzgün karadelik çözümleri çalışıldı. Bu tez boyunca yardımlarını ve bilgilerini benimle paylaşan danışman hocam, Doç.Dr. Özcan SERT'e ve manevi destekleriyle tezi yazmama vesile olan aileme çok teşşekür ediyorum.

1. GİRİŞ

Newton'un 17. yüzyılda önerdiği kütleler arasındaki çekim kuvveti formülü, $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$, çoğu gravitasyonel olayı gayet pratik bir şekilde açıklayabilmektedir. Fakat, bu formül gravitasyonel olaylarla ilgili aşağıdaki durumları açıklamakta yetersiz kalmıştır.

- Newton'a göre kütleler arasındaki kuvvet kütlelerin konumuna anlık olarak bağlıdır. Yani, kuvvet sonsuz bir hızla iletilmektedir. Bu ise Einstein' ın Özel Görelilik kuramına aykırıdır. Kuvvetin ışık hızından hızlı olmaması gerekir.
- Güneşe en yakın gezegen olan Merkür'ün yörüngesindeki periheliyon presesyonu olarak bilinen ve standart eliptik yörüngelerde meydana gelen sapmalar Newton formülüyle açıklanamaz.
- Bir yıldızdan uzaklaşan bir fotonun enerjisinin kırmızıya kayması yine gravitasyonel olarak cevap aranan bir problemdir.
- Güneş tutulması sırasında belirgin bir şekilde ortaya konan bir diğer gözlem ise kütleli cisimlerin yakınından geçen ışığın yolunun eğri olması yine düz uzay-zaman kavramıyla açıklanamayan bir gerçektir.

Böylece 1915 yılında Einstein tarafından ortaya atılan Kütle çekim teorisi bu olayları da açıklayabildiği ve limit durumda Newton teorisini de içerdiği için büyük ilgi görmüştür. Einstein'in Kütle çekim teorisine göre madde uzay-zaman geometrisinde eğrilikler veya bükülmeler meydana getirir ve parçacıklar bu eğri geometride kendi yörüngelerini takip ederek kütle çekim olayını ortaya çıkarırlar.

Bunlarla birlikte Genel Relativite veya Görelilik olarak ta bilinen Einstein'in Gravitasyon Teorisi evrenin genişlemesi gerektiğinin söylüyordu, bu ise 1929 da Hubble teleskobuyla doğrulandı Hubble (1929). Işığın gravitasyonel kırmızıya kayması yine 1959 da gözlemlendi Pound ve Rebka (1959). Bu teoriye göre nötron yıldızı kara delik gibi kompakt astrofiziksel nesnelerin ivmeli hareketleri uzay-zamanda gravitasyonel dalgalar oluşturması gerekiyordu. Bu dalgalar 2016 yılında gözlemlenmiştir Abbott ve diğ. (2016).

Genel görelilik teorisinde, uzay-zaman geometrisini yöneten alan denklemleri bir eylem ilkesinden türetilebilir. Bu teoride eylem Ricci eğrilik skaları R nin manifold üzerinden integrali olarak tanımlanır. Ricci eğrilik skaları uzay-zaman metriğinden elde edilebilen bir fonksiyondur.

Genel Relativitenin bütün bu olayları açıklamadaki başarılarına karşın, kozmolojik ölçeklerde hala bir takım açıklanmayı bekleyen everenin sırları bulunmaktadır. Bunlardan ilki Hubble teleskobunun ortaya koyduğu evrenin genişlemesinden daha da fazlası olan artan bir ivmeyle genişlemesidir Albrecht ve diğ. (1982), Guth (1981), Linde (1982), Starobinsky (1980). Einstein'in teorisi bu gözlemi kozmolojik sabit olarak bilinenen sabit bir enerji olaya dahil edildiğinde açıklayabilmektedir. Bu enerjinin sebebi ise açıklanamamaktadır. Bu nedenle bu ivmeli genişlemeye neden olan enrjiye karanlık enerji denilmektedir Amanullah ve diğ. (2010), Knop ve diğ. (2003), Perlmutter ve diğ. (1999), Riess ve diğ. (1998), Schwarz ve diğ. (2016), Weinberg ve diğ. (2013).

Bir diğer sır ise yine galaksiler ölçeği gibi büyük ölçeklerde ortaya çıkmaktadır. Galaksilerin yörüngesel hız eğrileri Galaksilerin merkezinden uzaklaştıkça Newton limitinde olduğu gibi azalması beklenirken, neredeyse sabit kaldığı görülmüştür. Bu gözlem galaksilerde parlaklıkları gözlemlenebilen normal madde dışında görülmeyen ve bilinmeyen başka maddenin varlığıyla açıklanabilecek bir durum olarak düşünülmüş ve bu maddeye karanlık madde denilmiştir Baer ve diğ. (2015), Overduin ve diğ. (2004). Bu karanlık madde ve karanlık enerji evrenin yaklaşık %96 sını oluşturduğu için günümüzün en önemli çözüm bekleyen problemlerinden biridir.

Einstein'in kütle çekim teorisinin başarılarını kaybetmeden evrenin bu sırlarını da açıklayabilen bir teori bulmak için Einstein teorisindeki R Ricci skalarını $f(R)$ ile değiştirmek son zamanlarda oldukça büyük ilgi görmüş bir modifiye gravitasyon teorisidir Allemandi ve diğ. (2004), Capozziello (2002), Capozziello ve diğ. (2003, 2006, 2007), Carroll ve diğ. (2004), Cognola ve diğ. (2005), Kerner (1982), Nojiri ve diğ. (2004), Odintsov ve diğ. (2003), Sotiriou (2007), Starobinsky (1980). Özellikle nötron yıldızı ve yüklü kardelik gibi kompakt astrofiziksel nesneleri incelerken elektromanyetik alanların varlığı ihmal edilemez. Ayrıca bu yoğun alanların bulunduğu bu ekstrem durumlarda $Y(R)F^2$ tipi minimal olmayan bağlanmalar ortaya çıkabilir.

Gravitasyon teorilerinde tekilliklerin doğasını anlamak zor ve karmaşık bir problemdir. Bu problemi Gravitasyonun kuantum teorisinin çözübileceği düşünülür. Fakat şimdiye kadar yapılan çalışmalar Gravitasyonun kuantum teorisi kurmaktan oldukça uzak olduğumuzu göstermiştir. Bu nedenle düzgün kara delik çözümleriyle bu tekilliklerden kurtulabiliriz.

Düzgün kara delik çözümleri ilk olarak Bardeen tarafından verildi Bardeen (1968). Daha sonra Bardeen'in bu çözümü Einstein-Nonlinear elektrodinamiğinin alan denklemlerine çözüm olarak Ayon-Beato ve Garcia (1999, 2000) tarafından bulundu. $f(R)$ gravitasyon teorisinin non-lineer elektrodinamiğe minimal olarak bağlandığı bir teoride de düzgün kara delik çözümü elde etmek oldukça ilginçtir. Son yıllarda literatürde düzgün kara delik çözümleri Ansoldi ve diğ. (2007), Ayon-Beato ve Garcia (1999, 2000), Balart ve Vegenas (2014), Bronnikov (2001), Dymnikova (2004, 1992), Hawking ve Penrose (1970), Hawyard (2006), Nicolini ve diğ. (2006) kaynakları başta olmak üzere artan bir şekilde devam etmektedir.

Bu tezde inceleyeceğimiz minimal olmayacak şekilde çiftlenimli $Y(R)$-Maxwell gravitasyon modelleri Balakin (2005), Balakin ve diğ. (2008), Bamba ve diğ. (2008), Buchdahl (1979), Dereli ve diğ (1996), Dereli ve Üçoluk (1990), Dereli ve Sert (2011), Drummond ve Hathrell (1980), (Horndeski 1976), Müller-Hoissen (1988), Prasanna (1971), Sert (2012), Sert ve Adak (2012), Sert (2013) makalelerinde detaylı incelenmiş ve çözümleri sunulmuştur. Bu modeller evrenin kozmik ivmelenmesi ve galaksilerin dönme eğrilerin açıklayabilen bazı çözümlere sahip olduğu için bu teorinin düzgün kara delik çözümlerini bulmak oldukça ilginç olacaktır. Bu nedenle bu tezde bu konuyu inceleyeceğiz.

Penrose-Hawking tekillik teoremine göre Hawking ve Penrose (1970), bir kara deliğin olay ufkunun iç bölgesinde bir tekillik ortaya çıkması için Güçlü enerji koşulu (strong energy condition, SEC) sağlanmalı. Bu nedenle tekil olmayan düzgün kara delikler bu koşulu kara deliğin içindeki bir merkezi bölgede ihlal ederler. Bu tez çalışmasında gravitasyon ve elektromanyetik alanların minimal olmayan çiftlenimlerini içeren çeşitli modellere düzgün kara delik çözümleri bulacağız. Bu çözümler için effektif enerji momentum tensörününü kullanarak enerji koşullarını hesaplayacağız. Bu kara deliklerin iç merkezi bölgesinin en azından merkezi bir kısmında bu güçlü enerji koşulunun ihlal edildiğini göstereceğiz ve bu çözümlerin matematiksel ve fiziksel sonuçlarını inceleyeceğiz.

1.1 Diferansiyel Geometrik Kavramlar

Bu tezde manifold M ile, metrik g ile, tensörlerin veya spinörlerin paralel taşınmasında kullanılan bağlantı (connection) ise ω ile gösterilecektir.

Bir M manifoldunun q noktasında teğet vektörlerinin oluşturduğu uzaya bu manifoldun bu noktadaki teget uzayı denir ve $T_q(M)$ ile gösterilir. $T_q(M)$ teğet uzayı $\{\frac{\partial}{\partial x^\nu}\}$ ile verilen baz vektör kümesinden oluşur. Bu teğet uzayının duali ise $T_q^*(M)$ ile göstereilir ve $\{dx^\mu\}$ baz ko-vektör kümesinden oluşur. Teğet uzayının bazları ile koteğet uzayının bazlarının iç çarpımı ι, Kroenecker delta sembolü olan δ^μ_v ifadesini verir. Kroenecker delta $\mu = \nu$ için bire diğer durumlarda sıfıra eşittir.

$$\iota_\nu dx^\mu = \delta^\mu_v \tag{1.1}$$

Burada $\iota_\nu = \iota_{\frac{\partial}{\partial x^\nu}}$ olarak kısaltılır. M manifoldu üzerindeki fonksiyonlar $(0,0)$-tipi tensörlerdir, tanjant uzayının elemanları olan vektörler $(1,0)$-tipi kontravaryant tensörlerdir, kotanjant uzayının elemanları olan ko-vektörler $(0,1)$-tipi kovaryant tensörler olarak bilinir.

Teğet uzayında ortanormal olan lineer bağımsız vektörler kümesi $\{X_a\}, a = 0, 1, 2, 3$ olarak bulunabilir ve ortanormal referans çerçevesi adını alır. Bu ortanormal vektörler kümesini kullanarak Minkowski düz uzay-zaman metriğini $g(x_a, x_b) = \eta_{ab}$ bağıntısından elde edebiliriz. Burada Minkowski metriği sadece köşegen elemanları $(-1, 1, 1, 1)$ olarak sıfırdan farklı olan $4x4$ formunda bir matristir. Bu ortanormal vektörler kümesine dual olan ortanormal referans ko-çerçevesi ise $\{e^a\}$ ile gösterirsek, iç çarpımları Kroenecker sembolüne eşit olur.

$$\iota_{X_b}(e^a) = \delta^a_b \tag{1.2}$$

1.1.1 Dış Cebirde Temel Kavramlar

Gravitasyon teorisi ilk olarak dış cebir kullanılmadan yazılmıştır. Fakat çok fazla index ve tensor içerdiği için anlaşılması zor bir teoridir. Biz bu tezde dış cebrin kolaylıklarından faydalanarak daha basit bir dille modeli kurarak sonuçları ifade edaceğiz. Burada $T^*(M)$ kotanjant uzayında bir demeti ifade ederse bu demetin bazları ko-frame 1-form olur ve tensör çarpımını tamamen anti-simetrik hale getirerek M manifoldu üzerinde tanımlanan bir p-formu uzayı elde ederiz ve $\Omega^p(M)$ ile gösteririz. M manifoldu için tanımlanabilecek bütün p-formalarının toplamı dış cebir uzayını oluşturur.

A, M manifoldu üzerinde bir p-form olarak tanımlanırsa, bu tensör

$$A = \frac{1}{p!} A_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_p} \tag{1.3}$$

koordinat koçerçevesini kullanarak bileşenlere ayrılabilir.

Yine M manifoldu üzerinde tanımlı A_1 p-formu, A_2 q formu, A_3 r-formu ve α bir sabit olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. $\alpha(A_1 \wedge A_2) = (\alpha A_1) \wedge A_2 = A_1 \wedge (\alpha A_2)$

2. $(A_1 + A_2) \wedge A_3 = A_1 \wedge A_3 + A_2 \wedge A_3$

3. $A_1 \wedge (A_2 \wedge A_3) = (A_1 \wedge A_2) \wedge A_3$

4. $A_1 \wedge A_2 = (-1)^{p.q} A_2 \wedge A_1$

1.1.2 Dış Türev İşlemi

Dış türevi d ile göstererek, manifold üzerindeki bir p-formu $p+1$-forma gönderen bir tam türev işlemi olarak tanımlarız.

$$d : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M) \tag{1.4}$$

Yine p ve q formları olan A_1 ve A_2 üzerinde aşağıdaki özdeşlikleri sağlar:

1. $d(A_1 + A_2) = dA_1 + dA_2$

2. $dA = \frac{1}{p!} \frac{\partial A_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_p}}{\partial x^\mu} dx^\mu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_p}$

3. $d(A_1 \wedge A_2) = dA_1 \wedge A_3 + (-1)^p A_1 \wedge dA_3$

4. $d(dA) = 0$

1.1.3 İç Çarpım

İç çarpım işlemini ι ile gösterek, bir p-formu, (p-1) forma dönüştüren bir işlem olarak tanımlarız

$$\iota : \Omega^p(M) \to \Omega^{p-1}(M) \tag{1.5}$$

ve iç çarpım işlemi aşağıdaki ifadeleri sağlar.

1. $\iota_a f = 0$

2. $e_a \wedge \iota^a A = pA$

3. $\iota_a \iota_b A = -\iota_b \iota_a A$

4. $\iota_a(A_1 \wedge A_2) = \iota_a A_1 \wedge A_2 + (-1)^p A_1 \wedge \iota_a A_2$

1.1.4 Hodge Star Gönderimi

Hodge star işlemini $*$ ile göstereceğiz ve manifold üzerideki p-formu (4-p)-forma gönderecektir.

$$* : \Omega^p(M) \to \Omega^{4-p}(M) \tag{1.6}$$

Bu Hodge star işlemini kullanarak uzayzamandaki hacimsel 4-formu

$$*1 = e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 = \frac{1}{4!}\varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \tag{1.7}$$

ile verilir. Bu tez boyunca antisimetrik Levi-Civita tensörünün $\varepsilon_{0123} = +1$ olduğu seçimi kullanacağız. Buna göre bu hodge star işlemi A, B p-formları olmak üzere aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

1. $A \wedge *B = B \wedge *A$ ve $*B \wedge A = *A \wedge B$

2. $*(A \wedge e_a) = \iota_a * A$

3. $*(*A) = \pm A$

1.1.5 Lorentz Dönüşümü

Uzay-zamanın bir noktasında bir gözlemci $\{e^a\}$ koordinat ko-bazına veya 1-formuna göre gözlem yaperken başka bir gözlemci de başka bir noktada $\{e^{a\prime}\}$ koordinat ko-bazına göre gözlem yapsın. L^a_b yerel Lorentz dönüşüm matrisi olmak üzere bu iki gözlemci arasındaki dönüşüm bağıntısı

$$e^{a\prime} = L^a{}_b e^b \tag{1.8}$$

olarak verilir. Benzer şekilde $X_a e^a$ skalarının Lorentz dönüşümü yapılırsa değişmez kaldığı görülür.

$$X'_a(e^a)' = X_c L^{-1c}{}_a (L^a{}_d e^d) = X_c \delta^c_d e_d = X_c e^c = X_a e^a \tag{1.9}$$

Bu çarpımın Lorentz invaryant olduğu gösterilmiş olur.

1.1.6 Bağlantı 1-Formları

Ortanormal 1-formu e^a nın dış türevinin Lorentz dönüşümünü aldığımızda

$$de^{a\prime} = d(L^a{}_b e^b) = dL^a{}_b e^b + L^a{}_b de^b \tag{1.10}$$

yukarıdaki Lorentz dönüşümünden farklı olarak $dL^a{}_b e^b$ teriminin fazladan geldiği görülür. Bu dönüşümü Lorentz dönüşümüne benzetmek için bağlantı 1-formları dediğimiz niceliklere ihtiyaç vardır. Bu niceliklerin dönüşümü

$$\omega^{a\prime}{}_b = L^a{}_c \omega^c{}_f L^{-1f}{}_b + L^a{}_c dL^{-1c}{}_b \tag{1.11}$$

ile verilirse ve kovaryant dış türev dediğimiz yeni bir dış türev tanımlanırsa bu fazladan terimden kurtuluruz.

1.1.7 Kovaryant Dış Türev İşlemi

Herhangi bir T tensörünün kovaryant dış türevini, $\omega^a{}_b$ bağlantı 1-formlarını kullanarak

$$DT := (d \mp \omega)T \tag{1.12}$$

tanımlayabiliriz. Az önce ortanormal 1-formunun dış türevinin tensör gibi dönüşmediğinin gördük. Şimdi ise D kovaryant dış türevnin

$$De^a = de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b \tag{1.13}$$

tensör gibi dönüştüğünü $\omega^a{}_b$ bağlantı 1-formlarını da dönüştürerek gösterebiliriz.

$$De^{a\prime} = L^a{}_b De^b \tag{1.14}$$

Bu (0,1)-tipi tensör olan e^a 1-formlarına benzer olarak genel bir (p,q)-tipi R tensörünün kovaryant dış türevi

$$DR_{a_1\cdots a_p}{}^{b_1\cdots b_q} = dR_{a_1\cdots a_p}{}^{b_1\cdots b_q} + \omega^{b_1}{}_c R_{a_1\cdots a_p}{}^{cb_2\cdots b_q} + \omega^{b_q}{}_c R_{a_1\cdots a_p}{}^{b_1\cdots c} \tag{1.15}$$

$$-\omega^c{}_{a_1} R_{ca_2\cdots a_p}{}^{cb_2\cdots b_q} - \cdots - \omega^c{}_{a_p} R_{a_1\cdots c}{}^{cb_2\cdots b_q} \tag{1.16}$$

ile verilir.

1.1.8 Burulma

e^a ortanormal baz 1-formlarının kovaryant dış türevi burulma tensörü olarak isimlendirilir ve T^a gösterilir.

$$De^a = de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b = T^a \tag{1.17}$$

Herhangi bir 2-form tensörünü başka bir 1-form tensörü ve ortanormal baz bir form yardımıyla aşağıdaki gibi türebiliriz.

$$K^a{}_b \wedge e^b = T^a \tag{1.18}$$

Buradaki ${K_a}^b$ bağlantı 1-formu olarak düşünülür ve ${\omega_a}^b$ Levi-Civita bağlantı 1-formundan farklı olarak bir tensörel niceliktir ve lokal kovaryant dönüşümler altında tensör gibi dönüşür [Hehl, 1995, Dereli 1996, Dereli, 1995, Cartan, 1986]

1.1.9 Eğrilik

Uzay-zaman geometrisinin lokal eğriliği $R^a{}_b$ ile gösterilir Riemann eğrilik tensörü yardımıyla bulunabilir. Burulmasız uzay-zaman geometrilerinde bu eğrilik 2-formları sadece ω Levi-Civita bağlantısına bağlı olarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$R^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \tag{1.19}$$

Genel kovaryant dönüşümler altında $R^a{}_b$ nin bir tensör gibi dönüştüğünü gösterelim:

$$\begin{aligned} R^a{}_b &= d(S^a{}_c dS^{-1c}{}_b + S^a{}_c \omega^c{}_f S^{-1f}{}_b) && (1.20)\\ &+ (S^a{}_e \omega^e{}_f S^{-1f}{}_c + S^a{}_e dS^{-1e}{}_c) \wedge (S^c{}_g \omega^g{}_h S^{-1h}{}_b + S^c{}_g dS^{-1g}{}_b) && (1.21) \end{aligned}$$

Burada ifadelerde gerekli sadeleştirmeleri yaparsak, ayrıca dış türevli terimlerde $(dS^{-1c}{}_b)S^b{}_g = -S^{-1c}{}_b(dS^b{}_g)$ özelliğini kullanılırsak

$$R^a{}_b = S^a{}_c(d\omega^c{}_d + \omega^c{}_e \wedge \omega^e{}_d)S^{-1d}{}_b \tag{1.22}$$

$$R^a{}_b(\omega) = S^a{}_b R^c{}_d S^{-1d}{}_b\ . \tag{1.23}$$

Böylece Rieman eğrilik 2-formlarının bu dönüşümler altında tensör gibi dönüştüğü görülmüş olur. Riemann eğrilik iki formları kaç bileşene sahiptir.

1.2 Genel Relativite Teorisi

Genel Relativite güneş sistemi ölçeğinde en popüler ve gözlemlerle uyumlu gravitasyon teorisidir. Bu teori ilk olarak 1915 yılında Einstein tarafından ortaya atılmıştır. Bu teoride gravitasyon alanı uzay zamanın eğriliği olarak ortaya çıkar. Bu gravitasyon alanının davranışını belirleyen denkleme gravitasyonel alan denklemi denir. Einstein ın Gravitasyon teorisinde yazmış olduğu alan denklemi Lagrange fonksiyonelinin integrali ile verilen ve Einstein-Hilbert eylemi (action) olarak bilinen bir fonksiyonelden sonsuz küçük varyasyon hesabı yöntemiyle türetilebilir. Burada alan denklemlerinin

$$\begin{aligned} I[e^a, \omega^a{}_b] &= \int_M L = \int_M \frac{1}{2\kappa^2} R^a{}_b(\omega) \wedge *(e_a \wedge e^b) + \lambda_a \wedge T^a \\ &= \int_M \frac{1}{2\kappa^2} R * 1 + \lambda_a \wedge T^a \end{aligned} \tag{1.24}$$

eylem integralinden türetilişini göstereceğiz. Burada κ uzunluk boyutunda gravitasyonel bir sabittir. Eylem integrali I, e^a ko-frame ve $\omega^a{}_b$ connection değişkenlerine bağlı bir şekilde verilmiştir ve L Lagrange 4-formunun integralini olarak tanımlanır. Bu eylemin değişkenlerine göre varyasyonu alındığında

$$\delta L = -\frac{1}{2\kappa^2} \delta R^a{}_b(\omega) \wedge *e_a{}^b - \frac{1}{2\kappa^2} R^a{}_b(\omega) \wedge \delta * e_a{}^b \tag{1.25}$$

burada, ricci eğrilik 2-formunun tanımını kullanak

$$R^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \tag{1.26}$$

$$\delta L = -\frac{1}{2\kappa^2} \delta(d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b) \wedge *e_a{}^b - \frac{1}{2\kappa^2} (d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b) \wedge \delta * e_a{}^b \tag{1.27}$$

Burada sırasıyla aşağıdaki işlemleri takip ederek bu varyasyonu hesaplayalım. Öncelikle $\delta d = d\delta$ olur, yani dış türev ile varyasyon yer değiştirir, bunu kullanalım.

$$d(\delta\omega^a{}_b \wedge *e_a{}^b) = d(\delta\omega^a{}_b) \wedge *e_a{}^b - \delta\omega^a{}_b \wedge d * e_a{}^b \quad (1.28)$$

$$d(\delta\omega^a{}_b) \wedge *e_a{}^b = \delta\omega^a{}_b \wedge d * e_a{}^b + Mod(d) \quad (1.29)$$

Burada Mod(d) ile gösterilen terim tam türevli bir terimi ifade eder. Varyasyondan elde edilen alan denklemlerine katkıda bulunmaz.

$$\delta * e_a{}^b = \delta\frac{1}{(4-2)!}\varepsilon_a{}^b{}_{cd}e^{cd} = \frac{1}{2}\varepsilon_a{}^b{}_{cd}\delta(e^c \wedge e^d) \quad (1.30)$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_a{}^b{}_{cd}\delta e^c \wedge e^d + \frac{1}{2}\varepsilon_a{}^b{}_{cd}e^c \wedge \delta e^d \quad (1.31)$$

yukardaki son terimde $c \leftrightarrow d$ dönüşümü yapılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\delta * e_a{}^b = \frac{1}{2}\varepsilon_a{}^b{}_{cd}\delta e^c \wedge e^d + \frac{1}{2}\varepsilon_a{}^b{}_{dc}e^d \wedge \delta e^c \quad (1.32)$$

olur.

ε tanımından ve dış çarpımın $\delta e^c \wedge e^d = -e^d \wedge \delta e^c$ özelliğini kullanırsak,

$$\delta * e_a{}^b = \frac{1}{2}\varepsilon_a{}^b{}_{cd}\delta e^c \wedge e^d + \frac{1}{2}\varepsilon_a{}^b{}_{cd}\delta e^c \wedge e^d \quad (1.33)$$

$$= \varepsilon_a{}^b{}_{cd}\delta e^c \wedge e^d \quad (1.34)$$

$$= \delta e^c \wedge \varepsilon_a{}^b{}_{cd} \wedge e^d \quad (1.35)$$

$$= \delta e^c \wedge *e_a{}^b{}_c \quad (1.36)$$

olur. Yani,

$$\delta * e_a{}^b = \delta e^c \wedge *e_a{}^b{}_c \quad (1.37)$$

dir. Şimdi bunları yerine yazalım.

$$\delta L = -\frac{1}{2\kappa^2}(\delta d\omega^a{}_b \wedge *e_a{}^b + \delta\omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \wedge *e_a{}^b + \omega^a{}_c\delta\omega^c{}_b \wedge *e_a{}^b) \quad (1.38)$$

$$-\frac{1}{2\kappa^2}(d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b) \wedge \delta * e_a{}^b \quad (1.39)$$

şimdi birinci terimin parantez içindeki ifadesini ele alalım.

$$\delta d\omega^a{}_b \wedge *e_a{}^b + \delta\omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \wedge *e_a{}^b + \omega^a{}_c \wedge \delta\omega^c{}_b \wedge *e_a{}^b) \tag{1.40}$$

$\delta d\omega^a{}_b \wedge *e_a{}^b$ invaryanttır. O halde,

$$\delta\omega^a{}_b \wedge d * e_a{}^b + \delta\omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \wedge *e_a{}^b - \delta\omega^c{}_b \wedge \omega^a{}_c \wedge *e_a{}^b \tag{1.41}$$

yukarıdaki denklemin son teriminde $c \leftrightarrow a$ dönüşümü yapılırak,

$$\delta\omega^a{}_b \wedge d * e_a{}^b + \delta\omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \wedge *e_a{}^b - \delta\omega^a{}_b \wedge \omega^c{}_a \wedge *e_c{}^b \tag{1.42}$$

yine üçüncü terime $b \leftrightarrow c$ dönüşümü yapılırsa,

$$\delta\omega^a{}_b \wedge d * e_a{}^b + \delta\omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \wedge *e_a{}^b - \delta\omega^a{}_c \wedge \omega^b{}_a \wedge *e_b{}^c \tag{1.43}$$

$$\delta\omega^a{}_b \wedge d * e_a{}^b + \delta\omega^a{}_c \wedge (\omega^c{}_b \wedge *e_a{}^b - \omega^b{}_a \wedge *e_b{}^c) \tag{1.44}$$

ikinci terimede $c \leftrightarrow b$ dönüşümü yapalım,

$$\delta\omega^a{}_b \wedge d * e_a{}^b + \delta\omega^a{}_b \wedge (\omega^b{}_c \wedge *e_a{}^c - \omega^c{}_a \wedge *e_c{}^b) \tag{1.45}$$

$$\delta\omega^a{}_b \wedge (d * e_a{}^b + \omega^b{}_c \wedge *e_a{}^c - \omega^c{}_a \wedge *e_c{}^b) \tag{1.46}$$

$$D * e_a{}^b = d * e_a{}^b + \omega^b{}_c \wedge *e_a{}^c - \omega^c{}_a \wedge *e_c{}^b \tag{1.47}$$

olduğundan,

$$\delta\omega^a{}_b \wedge D * e_a{}^b \tag{1.48}$$

olur.

$$\delta * e_a{}^b = \delta(\frac{1}{(4-2)!}\varepsilon_a{}^b{}_{cd}e^{cd}) \quad (1.49)$$
$$= \frac{1}{2}\varepsilon_a{}^b{}_{cd}\delta e^c \wedge e^d + \frac{1}{2}\varepsilon_a{}^b{}_{cd}e^c \wedge \delta e^d \quad (1.50)$$
$$= \frac{1}{2}\varepsilon_a{}^b{}_{cd}\delta e^c \wedge e^d + \frac{1}{2}\varepsilon_a{}^b{}_{cd}\delta e^c \wedge e^d \quad (1.51)$$
$$= \varepsilon_a{}^b{}_{cd}\delta e^c \wedge e^d = \delta e^c \wedge (\varepsilon_a{}^b{}_{cd}e^d) \quad (1.52)$$
$$= \delta e^c \wedge *e_a{}^b{}_c \quad (1.53)$$

şimdi bunu yerine yazalım,

$$(d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b) \wedge \delta e^c \wedge *e_a{}^b{}_c = (d\omega^a{}_b \wedge \delta e^c + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \wedge \delta e^c) \wedge *e_a{}^b \quad (1.54)$$

parantez içindeki ifadeye $c \leftrightarrow a$ dönüşümü yapılırsa,

$$(d\omega^c{}_b \wedge \delta e^a + \omega^c{}_a \wedge \omega^a{}_b \wedge \delta e^a) \wedge *e_a{}^b \quad (1.55)$$

yine parantez içine $c \leftrightarrow b$ dönüşümü yapılırsa,

$$(d\omega^b{}_c \wedge \delta e^a + \omega^b{}_a \wedge \omega^a{}_c \wedge \delta e^a) \wedge *e_a{}^b \quad (1.56)$$

o halde

$$(d\omega^b{}_c + \omega^b{}_a \wedge \omega^a{}_c) \wedge \delta e^a \wedge *e_a{}^b{}_c \quad (1.57)$$

tüm bunlar ilk denklemde yerine yazılırsa,

$$\delta L = -\frac{1}{2\kappa^2}\delta\omega^a{}_b \wedge D * e_a{}^b - \frac{1}{2\kappa^2}\delta e^a \wedge R^b{}_c \wedge *e_a{}^b{}_c \quad (1.58)$$

elde edilir. Einstein Gravitasyon teorisinde $Q_{ab} = 0$ alınır. (1.58) denklemindeki birinci terimi burulma tensörü cinsinden yazalım.

$$D * e_a{}^b = D * [e_{ac}\eta^{bc}] = \eta^{bc} D * e_{ac} \quad (1.59)$$

Bu tez çalışması boyunca metriğin kovaryant dış türevi olan non-metricity tensörünü sıfır alacağız, $D\eta^{bc} = 0$. Bu varsayımı kullanarak (1.58) denklemindeki birinci terimi hesaplayalım.

$$
\begin{aligned}
D * e_{ab} &= D[\frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}e^{cd}] && (1.60)\\
&= \frac{1}{2}[D\varepsilon_{abcd}e^c \wedge e^d + \varepsilon_{abcd}De^c \wedge e^d - \varepsilon_{abcd}e^c \wedge De^d] && (1.61)\\
&= \frac{1}{2}(D\varepsilon_{abcd})e^c \wedge e^d + \varepsilon_{abcd}De^c \wedge e^d && (1.62)
\end{aligned}
$$

Metrik gradyant tensörü yani $Q_{ab} = D\eta_{ab} = 0$ olduğu için otomatik olarak $(D\varepsilon_{abcd})e^c \wedge e^d = 0$ olmasına yol açar. Böylece

$$D * e_{ab} = T^c \wedge *e_{abc} \qquad (1.63)$$

Bu sonuçları topluca yazacak olursak

$$\delta L = -\frac{1}{2\kappa^2}\delta\omega_{ab} \wedge [T_c \wedge *e^{abc} + \lambda^a \wedge e^b] - \frac{1}{2\kappa^2}\delta e^a \wedge [R^{bc}(\omega) \wedge *e_{abc} + D\lambda_a] \qquad (1.64)$$

Bu Einstein-Hilbert Lagrangianı (pseudo)-Riemannsal uzay-zamanda yazılmıştır. (Pseudo)-Rieman uzay-zaman geometrilerinde $Q^a{}_b = 0$, $T^a = 0$, $R^a{}_b \neq 0$ alınır. Bu durumun sonucu olarak bağlantı, Levi-Civita antisimetrik 1-formu olan $\omega^a{}_b$ ye dönüşür. Bu nedenle (1.64) varyasyonu;

$$\delta L = -\frac{1}{2}\delta e^a \wedge R^b{}_c(\omega) \wedge *e_{ab}{}^c \qquad (1.65)$$

haline gelir. Varyasyon prensibi $\delta L = 0$ ile ifade edilir. Varyasyonun sonucu olarak

$$-\frac{1}{2}R^{bc}(\omega) \wedge *e_{abc} = 0 \qquad (1.66)$$

ile verilen boşlukta Einstein gravitasyon alan denklemi elde edilir. Yine bu ifadeden aşağıdaki gibi Einstein tensörü tanımlanabilir.

$$G_a = -\frac{1}{2}R^{bc}(\omega) \wedge *e_{abc} \qquad (1.67)$$

$$G_a = -\frac{1}{2} R^{bc} \wedge *e_{abc} = -\frac{1}{4} R^{bc}{}_{,gf}\; e^{gf} \wedge *e_{abc} \tag{1.68}$$

Dış cebrin ve diferansiyel formların özellikleri kullanarak Einstein tensörü değişik biçimlerde yazılabilir. İlk olarak Hodge star işleminin özellikleri kullanarak aşağıdakiler elde edilir.

$$e^f \wedge *e_{abc} = \delta_a{}^f * e_{bc} - \delta_b{}^f * e_{ac} - \delta_c{}^f * e_{ab} \tag{1.69}$$

$$e^{gf} \wedge *e_{abc} = -\delta_a{}^f \delta_b{}^g * e_c + \delta_a{}^f \delta_c{}^g * e_b + \delta_b{}^f \delta_a{}^g * e_c \tag{1.70}$$

$$-\delta_b{}^f \delta_c{}^g * e_a - \delta_c{}^f \delta_a{}^g * e_b + \delta_c{}^f \delta_b{}^g * e_a \tag{1.71}$$

Bu sonuçları ilk denklemdeki Einstein tensöründe yerine yazarak;

$$\begin{aligned} G_a &= -\frac{1}{4}[R_{ba,}{}^{bc} * e_c - R_{ca,}{}^{bc} * e_b - R_{ab,}{}^{bc} * e_c + R_{cb,}{}^{bc} * e_a \\ &\quad + R_{ac,}{}^{bc} * e_b - R_{bc,}{}^{bc} * e_a] \end{aligned} \tag{1.72}$$

Ayrıca, bu Einstein tensörü 3-formunu, aşağıdaki gibi 1-formun yıldızı olarak yazarız.

$$G_a = R_{ac,}{}^{bc} * e_b - \frac{1}{2} R_{bc,}{}^{bc} * e_a \tag{1.73}$$

$* * e^a = e^a$ olduğundan Einstein tensörünün starı;

$$*G_a = R_{ac,}{}^{bc} e_b - \frac{1}{2} R_{bc,}{}^{bc}{}^e_a \tag{1.74}$$

Burada aşağıdaki tanımları kullanalım:

- **Ricci eğrilik 1-formu**

$$(Ric)_a = \iota_b R^b{}_a = \frac{1}{2} R^b_{gl,a} \iota_b e^{gl} = R_{ac,}{}^{bc} e_b \tag{1.75}$$

- **Eğrilik skaları**

$$R = \iota_a R^a = \iota_a(\iota^b R^a{}_b) = \iota_a(R^a{}_{c,}{}^{bc} e_b) = R_{bc,}{}^{bc} \tag{1.76}$$

Buna göre Eintein tensörünün starı şöyle olur.

$$*G_a = R_a - \frac{1}{2}Re_a \tag{1.77}$$

Böylece kaynaksız yani enerji-momentum tensörü içermeyen Einstein denklemi

$$R_a - \frac{1}{2}Re_a = 0 \tag{1.78}$$

olarak yazılabilir. Bu denklemin küresel simetrik statik çözümü Schwarzchild çözümü olarak bilinir ve

$$ds^2 = -(1 - \frac{2GM}{r})dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{r}}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta d\phi^2 \tag{1.79}$$

ile verilir. Burada G gravitasyonel sabit, M ise sabit kütle olarak integrasyon sabitinin belirlenmesiyle ortaya çıkar. Görüldüğü gibi $r = 0$ da metriğin zaman bileşeni sonsuza gittiği için $r = 0$ noktasının tekil noktası olduğu söylenir ve kara delik tekilliği olarak isimlendirilir.

2. EINSTEIN-MAXWELL TEORİSİ

Genel relativitenin sonuçlarının çoğunu çok uzak yıldız ve galaksi kümelerinden bize ulaşan ışık yardımıyla test edebiliriz. Bu nedenle, önerilen herhangi bir Gravitasyon teorisini eksiksiz bir şekilde test etmek için, teoriye elektromanyetik alanlardan gelen katkılar ihmal edilmemelidir. Gravitasyonun elektromagnetik alanlara minimal bir şekilde bağlanması Einstein-Maxwell teorisi olarak isimlendirilir ve aşağıdaki eylem integraliyle verilir:

$$S = \int \{ \frac{1}{2\kappa^2} R_{ab} \wedge *(e^a \wedge e^b) - \frac{1}{2} F \wedge *F + \lambda_a \wedge T^a \} \tag{2.1}$$

Burada F elektromanyetik alan tensörüdür. Bu minimal modelde, uzayzaman geometrisi elektromanyetik alanların varlığından etkilenir. Maxwell denklemleri ise Minkowski uzayındaki ile aynı kalır.

Einstein-Maxwell teorisinin statik ve küresel simetrik çözümüne Reissner-Nordström çözümü denir. Bu teorinin başka simetrilere sahip metrikler için çözümleri Stephani ve diğ. (2005) kitabında detaylı olarak anlatılmıştır.

Einstein-Maxwell teorisinin alan denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$-\frac{1}{2\kappa^2} R^{bc} \wedge *e_{abc} = \frac{1}{2}(\iota_a F \wedge *F - F \wedge \iota_a * F), \tag{2.2}$$

$$d * F = 0 \,, \qquad\qquad dF = 0 \,. \tag{2.3}$$

Bu teorinin çözümleri ise Reissnerr-Nördstrom çözümleri olarak bilinir ve

$$\begin{aligned} ds^2 = \quad & -(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{\kappa^2 Q^2}{2r^2})dt^2 + (1 - \frac{2GM}{r} + \frac{\kappa^2 Q^2}{2r^2})^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 \\ & + r^2 \sin^2\theta d\phi^2, \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$F = \frac{Q}{r^2} dr \wedge dt \tag{2.5}$$

ile verilir. Yine bu teoriye bakıldığında $r = 0$ da hem metriğin hem de elektromanyetik tensörün sonsuza gittiği yani $r = 0$ noktasının kara delik tekilliğine sahip olduğu görülmektedir.

3. MİNİMAL OLMAYAN $Y(R)F^2$ FORMUNDA ÇİFTLENİMLİ GRAVİTASYON MODELİ

Einstein-Maxwell teorisini minimal olmayan çiftlenme terimleri elde edecek şekilde ifade etmek için Ricci tensörü R ile Maxwell tensörü F nin çarpımını düşünmek gerekir. Bu şekilde olan bağlanmaları ilk kez Prasanna (1971) önerdi. Sonra yük korunumu ve Ricci tensörü arasındaki ilişki hakkında bilgiler elde edebilmek amacıyla (Horndeski 1976) bu tür terimleri inceledi. Bu modifiye terimler, eğri uzayzaman arka planında yazılan etkin foton eylem integralini tek ilmek boşluk polarizasyonuyla hesaplayarak ortaya çıkmaktadır. Bu Drummond ve Hathrell (1980) makalesinde görülebilir.

Bu minimal olmayan modifkasyonların belirli bir özel kombinasyonu 5-boyutlu modellerden Dereli ve Üçoluk (1990), Müller-Hoissen (1988) Buchdahl (1979) kaynaklarında gösterildiği gibi, dört boyuta boyut düşürme sonucu ortaya çıkmaktadır.

Daha sonra yine bu terimlerin belirli bir kombinasyonu için gravitasyonel çözümleri incelenmiştir Balakin (2005), Balakin ve diğ. (2008).

Gravitasyon teorilerinde tekilliklerin doğasını anlamak zor ve karmaşık bir problemdir. Bu problemi Gravitasyonun kuantum teorisinin çözübileceği düşünülür. Fakat şimdiye kadar yapılan çalışmalar Gravitasyonun kuantum teorisi kurmaktan oldukça uzak olduğumuzu göstermiştir. Bu nedenle düzgün kara delik çözümleriyle bu tekilliklerden kurtulabiliriz.

Düzgün kara delik çözümleri ilk olarak Bardeen tarafından verildi Bardeen (1968). Daha sonra Bardeen'in bu çözümü Einstein-Nonlinear elektrodinamiğinin alan denklemlerine çözüm olarak bulundu Ayon-Beato ve Garcia (1999, 2000). $f(R)$ gravitasyon teorisinin non-lineer elektrodinamiğe minimal olarak bağlandığı bir teoride de düzgün kara delik çözümü elde etmek oldukça ilginçtir. Son yıllarda literatürde düzgün kara delik çözümleri Ansoldi ve diğ. (2007), Ayon-Beato ve Garcia (1999, 2000), Balart ve Vegenas (2014), Bronnikov (2001), Dymnikova (2004, 1992), Hawking ve Penrose (1970), Hawyard (2006), Nicolini ve diğ. (2006) çalışmaları başta olmak üzere artan bir şekilde çalışılmaya devam etmektedir.

Bu tezde inceleyeceğimiz minimal olmayacak şekilde çiftlenimli $Y(R)$-Maxwell gravitasyon modelleri Balakin (2005), Balakin ve diğ. (2008), Bamba ve diğ. (2008), Buchdahl (1979), Dereli ve diğ (1996), Dereli ve Üçoluk (1990), Dereli ve Sert (2011), Drummond ve Hathrell (1980), (Horndeski 1976), Müller-Hoissen (1988), Prasanna (1971), Sert (2012), Sert ve Adak (2012), Sert (2013) makalelerinde de detaylı bir şekilde incelenerek çözümleri verilmiştir. Bo modellerin evrenin kozmik ivmelenmesi ve galaksilerin dönme eğrilerini açıklayabilen bazı çözümlere sahip olduğu ayrıca görülmüştür. Bu nedenle bu teorinin düzgün kara delik çözümlerini bulmak oldukça ilginç olacaktır. Bu çözümler Sert (2016) makalesinde verilmiştir. Bu bölümde bu konuyu inceleyeceğiz.

Minimal olmayan çiftlenimli terimler içeren aşğıdaki eylem fonksiyoneli ile başlayalım. Bamba ve diğ. (2008), Dereli ve Sert (2011), Sert (2013).

$$I[e^a, \omega^a{}_b, F] = \int_M \{\frac{1}{2\kappa^2} R * 1 - \frac{1}{2} Y(R) F \wedge *F + \lambda_a \wedge T^a\}. \tag{3.1}$$

Burada $\{e^a\}$ ko-frame 1-formunu, $\{\omega^a{}_b\}$ bağlantı (connection) 1-formunu, $F = dA = \frac{1}{2} F_{ab} e^a \wedge e^b$ homojen elektromagnetik alanı 2-formunu, λ_a ise varyasyon sonucunda burulmasız (torsion-free) Levi-Civita bağlantısını veren Lagrange çarpanı 2-formudur. Bu bağlantı $T^a = de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b = 0$ bağıntısından bulunabilir. Bu eylem fonksiyonelinde R eğrilik skalarıdır. Bu eğrilik skaları $R^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b$ ile verilen eğrilik 2-formundan $\imath_a$ iç çarpım yoluyla $\imath_a \imath_b R^{ba}$ elde edilir. $\kappa^2 = 8\pi G$ ise evrensel gravitasyonel bağlanma sabitidir. Uzay-zaman metriğini $g = \eta_{ab} e^a \otimes e^b$ olarak alacağız ve işareti $(-+++)$ kullanacağız. Böylece yönlendirilmiş hacim elemanını $*1 = e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3$ olarak düşüneceğiz.

Bu teoriyi tarifleyen yukarıdaki eylemin, $\{e^a\}$, $\{\omega^a{}_b\}$ and $\{A\}$ değişkenlerine göre sonsuz küçük varyasyonlarını alarak gravitasyonel ve elektromanyetik alan denklemlerini Dereli ve Sert (2011), Sert (2013) makalelerinde bulunduğu gibi aşağıdaki şekilde elde ederiz.

$$-\frac{1}{2\kappa^2} R^{bc} \wedge *e_{abc} = \frac{1}{2} Y(\iota_a F \wedge *F - F \wedge \iota_a * F) + \frac{1}{2} Y_R F_{mn} F^{mn} * R_a \tag{3.2}$$

$$+\frac{1}{2} D[\iota^b D(Y_R F_{mn} F^{mn})] \wedge *e_{ab} \ , \tag{3.3}$$

$$d(*YF) = 0 \ , \qquad dF = 0 \ . \tag{3.4}$$

burada $Y_R = \frac{dY}{dR}$. Bu gravitasyonel alan denklemi (3.2)

$$\frac{G^a}{\kappa^2} = \tau^a \tag{3.5}$$

olarak da yazılabilir. Burada $G_a = -\frac{1}{2} R^{bc} \wedge *e_{abc} = *R_a - \frac{1}{2} R * e_a$ Einstein tensorü ve $\tau_a = \tau_{a,b} * e^b$ ise bu minimal olmayan model için efektif enerji-momentum tensorüdür. Denklem (3.5) kullanılarak efektif enerji yoğunluğu, radial ve teğetsel basınçlar $\rho = \tau_{0,0}$, $p_r = \tau_{1,1}$, $p_t = \tau_{2,2} = \tau_{3,3}$ bileşenlerinden bulunabilir.

3.1 Düzgün Kara Delik Çözümleri

Düzgün kara delik çözümleri bulmak için aşağıdaki (1 + 3)-boyutlu küresel simetrik, statik metriği

$$g = -f^2(r)dt^2 + g^2(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \tag{3.6}$$

bununla birlikte elektrik ve manyetik bileşenlere sahip olabilen elektromanyetik tensörü

$$F = E(r) dr \wedge dt + B(r) r^2 \sin\theta d\theta \wedge d\phi = E(r) e^1 \wedge e^0 + B(r) e^2 \wedge e^3 \tag{3.7}$$

kullanacağız. Bu metrik için eğrilik skalarını hesapladığımızda

$$R=\frac{2}{g^2}\left(\frac{f'g'}{fg}-\frac{f''}{f}+\frac{2g'}{gr}-\frac{2f'}{fr}+\frac{g^2-1}{r^2}\right)\ . \tag{3.8}$$

olduğunu buluruz. Burda asimptotik olarak Reissner-Nördstrom çözümüne dönüşen çözümlere bakacağımız için

$$g(r)=\frac{1}{f(r)} \tag{3.9}$$

olduğunu kullanacağız. Bu durumda bu minimal olmayan modelin alan denklemleri

$$\frac{1}{\kappa^2}(\frac{f^{2\prime}}{r}+\frac{f^2-1}{r^2})+Y_RL^2(\frac{f^{2\prime\prime}}{2}+\frac{f^{2\prime}}{r})+\frac{1}{2}YK^2+[(L^2Y_R)'f]'f$$
$$+\frac{2}{r}f^2(L^2Y_R)'=0, \tag{3.10}$$
$$\frac{1}{\kappa^2}(\frac{f^{2\prime}}{r}+\frac{f^2-1}{r^2})+Y_RL^2(\frac{f^{2\prime\prime}}{2}+\frac{f^{2\prime}}{r})+\frac{1}{2}YK^2$$
$$+(L^2Y_R)'(\frac{f^{2\prime}}{2}+\frac{2f^2}{r})=0, \tag{3.11}$$
$$\frac{1}{\kappa^2}(\frac{f^{2\prime\prime}}{2}+\frac{f^{2\prime}}{r})+Y_RL^2(\frac{f^{2\prime}}{r}+\frac{f^2-1}{r^2})-\frac{1}{2}YK^2+[(L^2Y_R)'f]'f$$
$$+(L^2Y_R)'(\frac{f^{2\prime}}{2}+\frac{f^2}{r})=0, \tag{3.12}$$

Burada $K^2=E^2+B^2$ ve $L^2=E^2-B^2$. Ayrıca Maxwell alan denklemlerinden

$$YE=\frac{q_e}{r^2}, \tag{3.13}$$
$$B=\frac{q_m}{r^2} \tag{3.14}$$

elde edilir. (3.8) eğrilik skaları ise

$$R=-f^{2\prime\prime}-\frac{4}{r}f^{2\prime}-\frac{2}{r^2}(f^2-1). \tag{3.15}$$

halini alır.

Bu denklem sistemine baktığımızda beş diferansiyel denklem (üç gravitasyonel, iki elektromanyetik) ve dört bilinmeyen fonksiyon (E,B,Y,f)

olduğunu görürüz. Bu diferansiyel denklemleri herhangi bir basitleştirme seçimi yapmadan çözmek imkansızdır. Burada yüksek mertebeden türevlerin getirdiği kararsızlıklardan kurtulmak ve basit denklemler elde etmek için aşağıdaki koşul altında çözümüne bakacağız.

$$Y_R L^2 = \frac{1}{\kappa^2} \tag{3.16}$$

Bu koşul altında denklem sayısı ikiye düşer.

$$f^{2\prime\prime} - \frac{2}{r^2}(f^2 - 1) = \kappa^2 Y K^2 \tag{3.17}$$

$$YE = \frac{q_e}{r^2}, \tag{3.18}$$

Burada koşul (3.16) in tam olarak (3.17) denkleminin diferansiyeli olduğu (3.22) denklemi kullanılarak görülür. Böylece üç bilinmeyenli (f, Y, E) iki denkleme (3.17), (3.18) ulaşırız. O zaman minimal olmayan çiftlenim fonksiyonuna sahip verilen bir model için, $f(r)$ metrik fonksiyonunu bu denklemlerden bulabiliriz. Diğer yandan istenilen bir metriğe karşılık gelen minimal olmayan modeli belirleyebiliriz. Bu işlemlerde başarılı olmak için r değişkenin $R(r)$ bağımlı değişkeninden yalnız bırakarak $r(R)$ yi bulmamız ve bu minimal olmayan fonksiyon olan Y yi R eğrilik skalarına bağlı olarak yazabilmemiz gerekiyor.

3.1.1 Düzgün Karadelik Çözümü-1

Bu $Y(R)F^2$ çiftlenimli modelin alan denklemleri (3.17), (3.18) aşağıdaki düzgün kara delik çözümünü kabul eder.

$$f^2(r) = 1 - \frac{2m}{r}\left(1 - \frac{1}{(1 + a^3 r^3)^{1/3}}\right) \tag{3.19}$$

$$B(r) = \frac{q}{r^2} \tag{3.20}$$

$$Y(r) = \frac{8ma^6 r^7}{\kappa^2 q^2 (1 + a^3 r^3)^{7/3}} \tag{3.21}$$

Bu çalışmaların detayları Sert (2016) makalesinde verilıştir. Burada sadece manyetik alanın varlığını yani elektrik alanı $E = 0$ alarak bu sonuca ulaşırız.

Burada $q = q_m$ manyetik monopol yükü ve $a = \frac{2m}{q^2}$. Bu metrik fonksiyonu (3.19), Einstein-Non-linear elektrodinamik modelinin elektriksel yüklü çözümü olarak Balart ve Vegenas (2014) makalesinde bulunabilir.

Bu metrik fonksiyonu (3.19) için eğrilik skaları R ve $R_{ab} \wedge *R^{ab}$ invaryant 4-formunu aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned} R(r) &= \frac{8ma^3}{(1+a^3r^3)^{7/3}} && (3.22) \\ R_{ab} \wedge *R^{ab} &= \Big(\frac{24m^2}{r^6} - \frac{48m^2}{r^6 p} - \frac{32m^2a^6}{p^7} + \frac{24m^2}{r^6p^2} + \frac{40m^2a^6}{p^8} \\ &\quad + \frac{32m^2a^{12}r^6}{p^{14}} - \frac{16m^2a^3}{r^3p^4} + \frac{16m^2a^3}{r^3p^5}\Big) * 1 && (3.23) \end{aligned}$$

burada $p = (1 + a^3r^3)^{1/3}$. Bu invaryantların $r = 0$ daki limit değerlerini kontrol edersek

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 0} R &= 8ma^3 = \frac{64m^4}{q^6} && (3.24) \\ \lim_{r\to 0} R_{ab} \wedge *R^{ab} &= \frac{16}{3} m^2 a^6 * 1 = \frac{2^{10}m^8}{3q^{12}} * 1, && (3.25) \end{aligned}$$

Kara deliğin merkezinde bu değerlerin düzgün olduğunu buluyoruz.

(3.22) denkleminden r yi R cinsinden yazarak minimal olmayan çiftlenim fonksiyonu Y yi R cinsinden elde edebiliriz.

$$r(R) = \frac{1}{a}\left((\frac{8ma^3}{R})^{3/7} - 1 \right)^{1/3} \qquad (3.26)$$

Bu ters fonksiyonu (3.26) minimal olmayan fonksiyon olan (3.21) ifadeside yerinde yazarsak

$$Y(R) = \frac{\left[(8ma^3)^{3/7} - R^{3/7}\right]^{7/3}}{\kappa^2 q^2 a^4} \qquad (3.27)$$

elde ederiz. Bu duruma karşılık gelen modelin Lagrangian'ı ise

$$L = \frac{1}{2\kappa^2} R * 1 - \frac{\left[(8ma^3)^{3/7} - R^{3/7}\right]^{7/3}}{2\kappa^2 q^2 a^4} F \wedge *F + \lambda_a \wedge T^a \qquad (3.28)$$

olur.

Burada Sert (2012) makalesinde verilen $B \to -YE$, $q \to -q = -q_e$ ve $Y \to \frac{1}{Y}$ dualite dönüşümü yaptığımız zaman sadece elektrik alanın bulunduğu $(B = 0,\ E \neq 0)$ elektromanyetik tensör F için ilgili modelin alan denklemlerine ulaşırız. Bu dönüşümün sonucu olarak aynı metrik fonksiyonu (3.19) bu elektrik alanı ve bu modelin minimal olmayan fonksiyonunu aşağıdaki gibi belirler.

$$Y(r) = \frac{\kappa^2 q^2 (1 + a^3 r^3)^{7/3}}{8 m a^6 r^7} \tag{3.29}$$

$$E(r) = \frac{4q}{\kappa^2 r^2}\left(1 + \frac{1}{a^3 r^3}\right)^{-7/3} = \frac{q}{Y(r) r^2} \tag{3.30}$$

Burada gördüğümüz gibi bu elektrik alanı karadeliğin merkezinde tekil değildir, $\lim_{r\to 0} E(r) = 0$. Bu minimal olmayan fonksiyonu (3.29) R ye bağlı olarak tekrar yazabiliriz.

$$Y(R) = \frac{\kappa^2 q^2 a^4}{\left[(8ma^3)^{3/7} - R^{3/7}\right]^{7/3}} \tag{3.31}$$

ve bu fonksiyona karşılık gelen modelin Lagrangian'ı

$$L = \frac{1}{2\kappa^2} R * 1 - \frac{\kappa^2 q^2 a^4}{2\left[(8ma^3)^{3/7} - R^{3/7}\right]^{7/3}} F \wedge *F + \lambda_a \wedge T^a \tag{3.32}$$

dualite dönüşümü aracılığıyla bulunur.

Burada kullanılan metrik fonksiyon (3.19) ve sadece (3.30) denkleminden ölçeklendirme sabiti kadar farklı bir elektrik alan farklı bir teori olan Einstein-nonlinear elektrodinamik teorisinden elde edildi Balart ve Vagenas (2014) makalesinde elde edildi.

Bu çözümün enerji koşullarının hepsini sağlayıp sağlamadığını kontrol etmek gerekir. Genel Görelilik teorisine göre bir tekilliğin ortaya çıkabilmesi için aşağıda hesaplanan bu koşulların sıfır veya sıfırdan büyük olması gerekir. Fakat düzgün kara deliklerin olması için en azından Güçlü Enerji koşulu (Strong

Energy Condition veya SEC) ihlal edilmeli. Bu koşulları hesaplamak için ilk olarak enerji yoğunluğu $\rho(r)$, radyal ve teğetsel basınçlar p_r, p_t, metrik fonksiyonu (3.19), manyetik alan (3.20) veya elektrik alan (3.30) kullanılarak bulunur.

$$\rho(r) = \frac{16m^4q^2}{\kappa^2(q^6+8m^3r^3)^{4/3}} = -p_r(r) \tag{3.33}$$

$$p_t(r) = \frac{16q^2m^4(8m^3r^3-q^6)}{\kappa^2(q^6+8m^3r^3)^{7/3}} \tag{3.34}$$

Bu koşulları aşağıdaki gibi yazarak kontrol edebiliriz.

$$DEC_1 = \rho \geq 0, \tag{3.35}$$

$$NEC_1 = WEC_1 = \rho + p_r = 0 \;, \tag{3.36}$$

$$NEC_2 = WEC_2 = \rho + p_t = \frac{2^8m^7q^2r^3}{\kappa^2(q^6+8m^3r^3)^{7/3}} \;, \tag{3.37}$$

$$SEC = \rho + p_r + 2p_t = \frac{32m^4q^2(8m^3r^3-q^6)}{\kappa^2(q^6+8m^3r^3)^{7/3}} \;, \tag{3.38}$$

$$DEC_2 = \rho - p_r = 2\rho \;, \tag{3.39}$$

$$DEC_3 = \rho - p_t = \frac{32m^4q^8}{\kappa^2(q^6+8m^3r^3)^{7/3}} \tag{3.40}$$

Burada DEC Dominant enerji koşulunu, NEC Null enerji koşulunu, WEC Weak enerji koşulunu, SEC ise Strong enerji koşulunu ifade eder. Yukarıdaki koşulları incelediğimizde hepsi $r \geq \frac{q^2}{2m}$ bölgesinde elektrik yüklü veya manyetik yüklü durumlar için ayrı ayrı sağlanır. Fakat sadece SEC $r < \frac{q^2}{2m}$ olan iç bölgede ihlal edilir.

3.1.2 Düzgün Kara Delik Çözümü-2

İkinci düzgün kara delik çözümü olarak, Balart ve Vagenas (2014) ve Rodrigues ve diğ. (2015) makalelerinde verilmiş olan metrik fonksiyonu düşünelim.

$$f^2(r) = 1 - \frac{2m}{r}e^{-\frac{q^2}{2mr}} \tag{3.41}$$

Bu metrik fonksiyonu için Ricci skaları R ve invaryant bir nicelik olan eğrilik 4-formu $R_{ab} \wedge *R^{ab}$ yi bu metrik fonksiyonu (3.41) kullanarak aşağıdaki gibi hesaplarız. Bu hesaplar Sert (2016) makalesinde verilmiştir.

$$R(r) = \frac{q^4}{2mr^5} e^{-\frac{q^2}{2mr}} \tag{3.42}$$

$$R_{ab} \wedge *R^{ab} = \left(\frac{24m^2}{r^6} - \frac{24mq^2}{r^7} + \frac{12q^4}{r^8} - \frac{2q^6}{mr^9} + \frac{q^8}{8m^2r^{10}}\right) e^{-\frac{q^2}{mr}} * 1 \tag{3.43}$$

Bu invaryant niceliklerin $r = 0$ da limitlerini hesaplayalım.

$$\lim_{r \to 0} R = 0, \qquad \lim_{r \to 0} R_{ab} \wedge *R^{ab} = 0 \tag{3.44}$$

Bu limitlerin kara deliğin merkezi olan $r = 0$ da düzgün olduğunu görüyoruz. (3.41) metrik fonksiyonu için (3.17) ve (3.18) diferansiyel denklemleri aşağıdaki çözümleri verir.

$$Y(r) = \frac{2\kappa^2 mr}{(8mr - q^2) e^{-\frac{q^2}{2mr}}} \tag{3.45}$$

$$E(r) = \frac{q}{r^2 Y(r)} = \frac{q(8mr - q^2) e^{-\frac{q^2}{2mr}}}{2m\kappa^2 r^3} \tag{3.46}$$

Bu sonuçlar Sert (2016) makalesinde bulunabilir. Bu elektrik alanı kara deliğin merkezinde düzgün olduğunu ve $r \to \infty$ limitinde asimptotik olarak

$$E(r) = \frac{4q}{\kappa^2 r^2} - \frac{5q^3}{2m\kappa^2 r^3} + \frac{3q^5}{4m^2\kappa^2 r^4} + O\left(\frac{1}{r^5}\right) \tag{3.47}$$

davranacağını gösterebiliriz.

(3.42) denkleminden $R(r)$ nin tersini alarak bulunan Dence (2013) makalesinde detaylı olarak incelenen Lambert fonksiyonu cinsinden ifade edebiliriz.

$$r(R) = -\frac{q^2}{10m} W^{-1} \left[-\frac{1}{10} \left(\frac{2q^6 R}{m^4} \right)^{1/5} \right] \tag{3.48}$$

Böylece bu modelin minimal olmayan fonksiyonunu R ye bağlı olarak tekrar ifade edersek

$$Y(R) = -\frac{10^5\kappa^2 m^4 W^5\left[-\frac{1}{10}\left(\frac{2q^6R}{m^4}\right)^{1/5}\right]}{2q^6R\left(4+5W\left[-\frac{1}{10}\left(\frac{2q^6R}{m^4}\right)^{1/5}\right]\right)} \tag{3.49}$$

Bu minimal olmayan $Y(R)F^2$ tipi modeller dualite dönüşümü denilen Sert (2012) makalesinde verilmiş olan $YE \to -B, \quad q \to -q, \quad Y \to \frac{1}{Y}$, dönüşümü altında elektrik alanına sahip çözümleri manyetik alana sahip çözümlere veya tersi olarak manyetik alana sahip çözümleri elektrik alanına sahip çözümlere dönüştürür. Yani, aynı (3.41) metriğini kullanarak sadece manyetik alanın varlığındaki çözümlere ulaşırız. Bu çözümler elektrik alanlı (3.45), (3.46) çözümlerinin duali olarak karşımıza çıkar.

$$B(r) = \frac{q}{r^2} \tag{3.50}$$

$$Y(R) = -\frac{2q^6R\left(4+5W\left[-\frac{1}{10}\left(\frac{2q^6R}{m^4}\right)^{1/5}\right]\right)}{10^5\kappa^2 m^4 W^5\left[-\frac{1}{10}\left(\frac{2q^6R}{m^4}\right)^{1/5}\right]} \tag{3.51}$$

Daha sonra (3.41) metrik fonksiyonu ve (3.46) elektrik alanı veya (3.50) manyetik alanı için enerji yoğunluğu ve basınçları hesaplarsak

$$\rho(r) = \frac{q^2 e^{\frac{-q^2}{2mr}}}{\kappa^2 r^4} = -p_r(r) \qquad p_t(r) = \rho(r) - \frac{q^4 e^{\frac{-q^2}{2mr}}}{4\kappa^2 m r^5} \tag{3.52}$$

olduğunu görürüz.

Tekrar enerji koşullarını hesaplarsak

$$
\begin{aligned}
DEC_1 &= \rho \geq 0, & (3.53)\\
NEC_1 &= WEC_1 = \rho + p_r = 0 \ , & (3.54)\\
NEC_2 &= WEC_2 = \rho + p_t = \frac{q^2 e^{\frac{-q^2}{2mr}}}{4m\kappa^2 r^5}(8mr - q^2) \ , & (3.55)\\
SEC &= \rho + p_r + 2p_t = \frac{q^2 e^{\frac{-q^2}{2mr}}}{2m\kappa^2 r^5}(4mr - q^2) \ , & (3.56)\\
DEC_2 &= \rho - p_r = 2\rho \ , & (3.57)\\
DEC_3 &= \rho - p_t = \frac{q^4 e^{\frac{-q^2}{2mr}}}{4\kappa^2 m r^5} \ , & (3.58)
\end{aligned}
$$

buluruz. Bu sonuçlardan gördüğümüz kadarıyla elektrik ve manyetik yüke sahip çözümler $r \geq \frac{q^2}{4m}$ bölgesinde bu enerji koşullarının hepsi sağlanır. Fakat, $\frac{q^2}{8m} \leq r < \frac{q^2}{4m}$ bölgesinde sadece SEC ihlal edilir. Dahası $r < \frac{q^2}{8m}$ bölgesinde NEC_2, WEC_2, SEC enerji koşullarının üçü de ihlal edilir.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde Einstein'in gravitasyon teorisinde karşımıza çıkan kara delik tekilliklerinden kurtulmak için modifiye edilmiş $Y(R)F^2$ tipi minimal olmayan bağlanmalı teoriler incelendi. Bu teoriler ilk olarak diferansiyel formlar kullanılarak dış cebir hesabıyla tanıtıldı. Einstein teorisinin ve Einstein-Maxwell teorisinin tekillikleri gösterildi. Bu tekillikleri içermeyen literatürdeki metrik fonksiyonları kullanılarak bunlara minimal olmayan bağlanmalı $Y(R)F^2$ formundaki modeller bulundu. Daha önce Sert (2016) makalesinde incelenmiş olan bu modellerin çözümlerinin $r = 0$ da tekil olmayan elektrik alan veya manyetik alan ile uyumlu oldukları gösterildi. Bu tekilliklerin ortadan kaldırıldığı enerji koşullarıyla da kontrol edildi. Genel Görelilik teorisine tekilliklerin ortaya çıkabilmesi için üç enerji koşulununda sıfır veya sıfırdan büyük olması gerekir. Bu çözümlerden birincisi belirli bir yarıçaptan küçük iç bölgelerde sadece güçlü enerji koşulunu ihlal etmektedir. İkincisi ise bir dış yarıçaptan daha büyük mesafelerde enerji koşullarını sağlamakta, fakat, bir iç yarıçap ile dış yarıçap arasındaki bölgede sadece Güçlü enerji koşulunu ihlal etmektedir. Bununla birlikte $r = 0$ civarında olan en iç bölgede ise üç enerji koşuluda ihlal edilmektedir. Bu ise bu bölgede tekilliklerin ortadan kalktığının işareti olarak değerlendirilir.

5. KAYNAKLAR

Abbott, B. P. et al. (LIGO Scientific- and Virgo Collaborations), "Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger" *Phys. Rev. Lett.* 116, 061102, (2016).

Albrecht, A. et al. (Phys. Rev. Lett.), " Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking "*Phys. Rev. Lett.* 48, 1220, (1982).

Allemandi, G. et. Al. " Accelerated Cosmological Models in Ricci squared Gravity?" Phys. Rev. D. 70, 043528, (2004).

Amanullah, R. et al. (Astrophys J.), " Spectra and hubble space telescope light curves of six type 1a supernovae at $0.511 < z < 1.12$ and the union2 compilation "*Astrophys. J.* 716, 712, (2010).

Ansoldi, S., Nicolini, P., Smailagic, A. and Spallucci, E. "Noncommutative geometry inspired charged black holes" *Phys. Lett. B* 645, 261 (2007).

Ayon-Beato, E. and Garcia, A., "New Regular Black Hole Solution from Nonlinear Electrodynamics", *Phys. Lett. B* 464, 25 (1999).

Ayon-Beato, E., Garcia, A. "The Bardeen Model as a Nonlinear Magnetic Monopole", *Phys. Lett. B* 493, 149 (2000).

H. Baer et al. (Physics Reports.), " Dark matter production in the early Universe: Beyond the thermal WIMP paradigm" Physics Reports. 555, 1, (2015).

Balakin, A. B., "Non-minimal coupling for the gravitational and electromagnetic fields: a general system of equations", *Class. Q. Grav.*, 22, 1867, (2005).

Balakin, A.B., Bochkarev, V.V., Lemos, J.P.S., " Nonminimal coupling for the gravitational and electromagnetic fields: Black hole solutions and solitons", *Phys. Rev. D*, 77, 084013, (2008).

Balart, L. and Vagenas, E.C., "Regular black holes with a nonlinear electrodynamics source", *Phys. Rev. D* 90, 124045 (2014).

Balart, L. ve Vagenas, E. C. "Regular black hole metrics and the weak energy condition" *Phys. Lett. B* 730, 14 (2014).

Bamba, K., Nojiri, S., Odintsov, S. D., Future of the universe in modified gravitational theories: Approaching to the finite-time future singularity, *JCAP* **10** 045 [arXiv:0807.2575], (2008).

Bardeen, J.M. "Non-singular general-relativistic gravitational collapse" *in: Proceedings of GR5*, Tbilisi, USSR, p. 174, (1968).

Bronnikov, K.A. "Regular magnetic black holes and monopoles from nonlinear electrodynamics", *Phys. Rev. D* 63, 044005 (2001).

Buchdahl, H. A., "On a Lagrangian for non-minimally coupled gravitational and electromagnetic fields", *J. Phys. A*, 12, 1037,(1979).

Capozziello, S. " General Relativity and Quantum Cosmology" Int. J. Mod. Phys. D 11, 483, (2002).

Capozziello, S. et. Al., " Quintessence without scalar fields" Recent Res.Dev.Astron.Astrophys. 1:625, (2003), arXiv : astro - ph/0303041.

Capozziello, S. et. Al., " Curvature quintessence matched with observational data " Mod. Phys. D. 12, 1969, (2003b).

Capozziello S., Cardone V.F., Carloni S., Troisi A., Can higher order curvature theories explain rotation curves of galaxies?, *Phys. Lett. A,* 326, 292, (2004).

Capozziello, S. et. Al. (JCAP), "Dark energy and dark matter as curvature effects " JCAP. 010, (2005).

Capozziello S., Cardone V.F., Troisi A., Mon. Not. R. Ast. Soc. 375, 1423, (2007).

Carroll, S.M.et. Al. (Phys. Rev. D), " Is Cosmic Speed-Up Due to New Gravitational Physics?" Phys. Rev. D. 70, 043528, (2004).

Cartan, E., "On manifolds with an affine connection and the theory of general relativity", edited 1986, Bibliopolis, Italy, (1923).

Nojiri, S. et. Al. (JCAP), One-loop f(R) gravity in de Sitter universe" JCAP. 010, (2005).

Culetu, H., "On a Regular Charged black Hole with a Nonlinear Electric Source"*Int. J. Theor. Phys.*, 54: 2855 - 2863, (2015).

Dence, T. P. "A Brief Look into the Lambert W Function", *Applied Mathematics* 4, 887 (2013).

Dereli, T., "Differential Forms and Maxwell Equations, Lectures Notes", TÜBİTAK Graduate Summer School, 18-28 Sep, (1984).

Dereli, T., Önder, M., Schray, J., Tucker, R. W., Wang, C., "Non-Riemannian Gravity and the Einstein-Proca system", *Class. Quant. Grav.*, 13, L103, (1996).

Dereli, T., Üçoluk, G., "Kaluza-Klein reduction of generalized theories of gravity and nonminimal gauge couplings", *Class. Q. Grav.*, 7, 1109, (1990)

Dereli, T., Sert, Ö., "Non-minimal $R^n F^2$-Coupled Electromagnetic Fields to Gravity and Static, Spherically Symmetric Solutions", *Mod. Phys. Lett. A* **26** 1487 [arXiv:1105.4579], (2011).

Dereli, T., Sert, Ö., "Non-minimal $\ln(R)F^2$ Couplings of Electromagnetic Fields to Gravity: Static, Spherically Symmetric Solutions", *Eur. Phys. J. C* 71, 3, 1589, (2011).

Drummond, I. T., Hathrell, S. J., "QED vacuum polarization in a background gravitational field and its effect on the velocity of photons", *Phys. Rev. D* 22, 343, (1980).

Dymnikova, I., "Regular electrically charged structures in Nonlinear Electrodynamics coupled to General Relativity" , *Class. Quant. Grav.* 21, 4417 (2004).

Dymnikova, I. "Vacuum nonsingular black hole", *Gen. Rel. Grav.* 24, 235 (1992).

Flanders, H., "Differential Forms with Applications to the Physical Sciences", ISBN 0122596501, Academic Press, New York, USA, (1963).

Guth, A.H. " The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems "*Phys. Rev. D.* 23, 347, (1981).

Hawking, S. W. and Penrose, R. "The singularities of gravitational collapse and cosmology" *Proc. Roy. Soc.* A314 529 A, (1970).

Hayward, S.A. "Formation and Evaporation of Nonsingular Black Holes ", *Phys. Rev. Lett.* 96, 031103 (2006).

Horndeski, G. W.,"Conservation of charge and Einstein-Maxwell field equations", *J. Math. Phys.* 17 1980, (1976).

Hubble, E. P.: "A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae", *Proc. US Nat. Acad. Sci.* 15, 168-173, (1929).

Knop, R. A. et. Al. (Astrophys. J.), " New Constraints on Ω_M, $\omega_L ambda$ and ω from an Independent Set of 11 High-Redshift Supernovae Observed with the Hubble Space Telescope "*Astrophys. J.* 598

Kerner, R., Cosmology without singularity and nonlinear gravitational Lagrangians *Gen. Rel. Grav.,* 14, 453, (1982).

Linde,A. D. " A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems "*Phys. Rev. Lett. B* 108, 389, (1982).

Müller-Hoissen, F., "Non-minimal coupling from dimensional reduction of the Gauss-Bonet action", *Class. Q. Grav.*, 5, L35, (1988).

Nicolini, P., Smailagic, A. ve Spallucci, E. "Noncommutative geometry inspired Schwarzschild black hole", *Phys. Lett. B* 632, 547 (2006).

Nojiri S. et. Al., " Modified gravity with lnR terms and cosmic acceleration" Gen. Rel. Grav. 36, 1765, (2004).

Odintsov, S.D. et. Al., " Quintessence without scalar fields " Recent Res.Dev.Astron.Astrophys. 1:625, (2003), arXiv : astro - ph/0303041.

Overduin, J. M. et al., " Dark Matter and Background Light " Physics Reports. 402, 267, (2004).

Perlmutter, S. et al, " Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae "*Astrophys. J.* 517, 565, (1999).

Pound, R.V. and Rebka, G.A. Jr., "Gravitational Red-Shift in Nuclear Resonance" *Phys. Rev. Lett.* 3, 439, (1959).

Prasanna, A. R., "A new invariant for electromagnetic fields in curved space-time", *Phys. Lett.*, A37, 331, (1971).

Riess, A. G. et al, " Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant "*Astron. J* 116, 1009, (1998).

Rodrigues, M.E., Junior, E.L.B., Marques, G.T., Zanchin, V.T.,"Regular black holes in f(R) gravity coupled to nonlinear electrodynamics", *Phys.Rev. D* 94 (2016) no.2, 024062, Addendum: Phys.Rev. D94 (2016) no.4, 049904

Schwarz, D. J. et al. (Class. Quant. Grav.), " CMB Anomalies after Planck " Class. Quant. Grav. 33 184001,(2016).

Sert, Ö., "Genel rölativitenin simetrik teleparalel eşdeğeri ve Dirac denklemi", Yüksek Lisans Tezi Pamukkale Üniversitesi, *FenBilimleri Enstitüsü*, (2005).

Sert, Ö., "Gravity and Electromagnetism with $Y(R)F^2$-type Coupling and Magnetic Monopole Solutions", The European Physical Journal Plus 127:152, 1-7 pp., DOI: 10.1140/epjp/i2012-12152-5, arXiv:1203.0898, (2012).

Sert, Ö. ve Adak, M., "An anisotropic cosmological solution to the Maxwell-$Y(R)$ gravity", arXiv:1203.1531 [gr-qc], (2012).

Sert, Ö., "Electromagnetic duality and new solutions of the non-minimally coupled Y(R)-Maxwell Gravity", *Modern Physics Letters A*, 28:12 1350049, 1-8 pp., DOI: 10.1142/S0217732313500491, arXiv:1303.2436, (2013).

Sert, Ö., "Regular Black Hole Solutions of the Non-minimally Coupled $Y(R)F^2$ Gravity", *Journal of Mathematical Physics*, 57, 032501 (2016), DOI: 10.1063/1.4944428 arXiv:1512.01172 [gr-qc]

Sotiriou, T. P.(PhD thesis), " Actions for Gravity:Theory and Phenomenology " 230 pages, (2007), arXiv:0710.4438v1 [gr-qc]

Starobinsky, A.A., " A New Type of isotropic cosmological models without singularity" Phys. Lett. B 91, 99, (1980).

Stephani, H., Kramer, D., Maccallum, M., Hoenselaers, C., and Herlt, E., *Exact Solutions to Einstein's Field Equations*, Second ed., Chambridge University Press, UK, (2005).

Weinberg, D. H., et al., " Observational probes of cosmic acceleration "*Physics Reports* 530, 87, (2013).

Zaslavskii, O. B., "Regular black holes and energy conditions" *Phys. Lett. B* 688, 4-5, 278-280, (2010)