T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANALİTİK FUZZY DÜZLEM GEOMETRİDE KONİKLER VE UYGULAMALARI

DOKTORA TEZİ

SEÇİL ÖZEKİNCİ

DENİZLİ, MART - 2023

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANALİTİK FUZZY DÜZLEM GEOMETRİDE KONİKLER VE UYGULAMALARI

DOKTORA TEZİ

SEÇİL ÖZEKİNCİ

DENİZLİ, MART - 2023

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

SEÇİL ÖZEKİNCİ

ÖZET

ANALİTİK FUZZY DÜZLEM GEOMETRİDE KONİKLER VE UYGULAMALARI
DOKTORA TEZİ
SEÇİL ÖZEKİNCİ
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI:PROF. DR. CANSEL AYCAN)

DENİZLİ, MART - 2023

Bu tez çalışmasında amaç; Fuzzy parabol, Fuzzy elips ve Fuzzy hiperbol oluşturmaktır. Daha önce Fuzzy parabol oluşturmak için tartışılan metotlardan uygulanabilirliği en yüksek olan beş aynı Fuzzy noktadan geçen Fuzzy konikler elde edilecektir. Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde Fuzzy mantığın ortaya çıkış sebebi ve kullanım alanları hakkında bilgi verilmiştir. Fuzzy mantıkla ilgili geometride yapılan çalışmaların genel özellikleri, tez ile ilgili ön bilgiler ve sonraki bölümlerde kullanılacak olan tanımlara yer verilmiştir. İkinci bölümde; Fuzzy uzayında Fuzzy parabol elde etmek için bazı yöntemler tartışılmış ve parabolü elde etmek için uygulanabilirliği en yüksek olan metot tespit edilerek geometrik uygulamaları yapılmıştır. Üçüncü bölümde; ikinci bölümde kullanılan metotta gerekli değişiklikler yapılarak Fuzzy elips elde edilmiştir. Kesin elips üzerinde beş aynı Fuzzy nokta alınarak ,bu noktalardan geçen Fuzzy elips oluşturulmuştur. Sonra da bu elipste yer alan bir noktanın üyelik derecesi hesaplanarak bu noktayı kapsayacak Fuzzy elips denklemi yazılacak şekilde uygulamalara yer verilmiş ve Fuzzy elipsin grafiği çizilmiştir. Ayrıca Fuzzy elips oluşturmak için yeni bir algoritma oluşturulmuştur. Dördüncü bölümde ikinci ve üçüncü bölümde kullanılan metot ile Fuzzy hiperbol için teoremler elde edilmiş ve Fuzzy hiperbolü oluşturulmuştur. Fuzzy hiperbolü elde edilirken uygulanan aşamalar grafik üzerinde resmedilmiş ve Fuzzy hiperbolü ile ilgili uygulamalar yapılarak geometrik yorumlar elde edilmiştir. Bu örneklerde herhangi bir noktanın Fuzzy hiperbolüne olan üyeliği incelenmiş ve bu noktadan geçen Fuzzy hiperbol denklemi elde edilmiş ayrıca Fuzzy hiperbol elde etmek için yeni bir algoritma oluşturulmuştur. Böylece hesaplamalar kısa süre içinde yapılarak Fuzzy hiperbol çizilmiştir. Beşinci bölümde ise tezden çıkarılabilecek sonuçlara yer verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Fuzzy uzay, Fuzzy nokta, Fuzzy parabol, Fuzzy hiperbol, Fuzzy elips, Aynı Fuzzy noktalar, Üyelik derecesi.

ABSTRACT

CONICS IN ANALYTİCAL FUZZY PLANE GEOMETRY AND THEIR APPLICATIONS
PH.D THESIS

SEÇİL ÖZEKİNCİ
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATİCS

(SUPERVISOR:PROF. DR. CANSEL AYCAN)

DENİZLİ, MARCH 2023

The aim of this thesis is to create Fuzzy parabola, Fuzzy ellipse, and Fuzzy hyperbola. Fuzzy conics that passing through the five same fuzzy points are obtained by using the most applicable method among the discussed methods to create a fuzzy parabola. In the first section, the short history of this subject is presented. Firstly, information is given about the reason for the emergence of Fuzzy logic and its usage areas. Studies in geometry related to Fuzzy logic and the general properties of this studies have been mentioned. Then, the preliminary information about the study and the definitions that will be used in the next chapters are given. In the second section, some methods for obtaining a Fuzzy parabola in the fuzzy space are discussed and the most accurate method to obtain this parabola has been determined, its geometric properties have been examined. Then various geometric applications have given. In the third section, necessary studies have been done to obtain a Fuzzy ellipse. Suitable changes are made in the method which used to obtain a Fuzzy parabola in the previous section and a Fuzzy ellipse has been created. Five same points have been taken on the core ellipse and a Fuzzy ellipse which passing through the points has been created. Then, the membership value of a point in this Fuzzy ellipse has been calculated and the applications have been given to form the equation of the Fuzzy ellipse that cover this point and the graph of the fuzzy ellipse is drawn. In addition, a new algorithm has been created to generate Fuzzy ellipses. In the fourth section, the necessary theorems have been obtained by making changes for the Fuzzy hyperbola in the method used in the second and third sections, and the Fuzzy hyperbola has been created. The steps applied in obtaining the fuzzy hyperbola have been depicted on the graph and geometric comments have been obtained by making applications a Fuzzy hyperbola. In these examples, the value of membership of any point to the Fuzzy hyperbola has been investigated and the fuzzy hyperbola equation which passing through these points have been obtained and a new algorithm has been created to obtain fuzzy hyperbola. So, calculations have been made in a short time and the Fuzzy hyperbola has been drawn. In the fifth section, the result can be derived from the thesis are included.

KEYWORDS: Fuzzy Space, Fuzzy Points, Fuzzy Parabola, Fuzzy Ellipse, Fuzzy Hyperbola, Same Fuzzy Points, Membership Value.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

TABLO LİSTESİ

<u>Sayfa</u>

SEMBOL LİSTESİ

$\widetilde{\boldsymbol{FP}}$: Fuzzy Parabol

$\widetilde{\boldsymbol{FE}}$: Fuzzy Elips

$\widetilde{\boldsymbol{FH}}$: Fuzzy Hiperbol

$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{A})$: Üyelik Derecesi

$\widetilde{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{b_i})$: Fuzzy Parabolünde Fuzzy Nokta

$\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{b_i})$: Fuzzy Elipsinde Fuzzy Nokta

$\widetilde{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{b_i})$: Fuzzy Hiperbolünde Fuzzy Nokta

$\boldsymbol{CP}$: Kesin Parabol

$\boldsymbol{CE}$: Kesin Elips

$\boldsymbol{CH}$: Kesin Hiperbol

$(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{G}/\boldsymbol{H})_{\boldsymbol{LR}}$: LR tip Fuzzy sayısı

ÖNSÖZ

Tezimi yaptığım süre boyunca benden bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyen her konuda desteğini hissettiren akademik ortamda olduğu kadar insani, ahlaki değerleri ile de örnek aldığım danışman hocam Prof. Dr. Cansel Aycan ‘a, tezimin içeriğinde kullandığım matematik programlarında yardımı ve tezimi yaptığım süre boyunca desteklerini esirgemediği için Prof. Dr. İbrahim Çelik hocama, çalışmam süresinde bilgi ve görüşlerini paylaşan, içten ve samimi tavırlarıyla örnek olan, tik sınavlarım için Muğla’dan gelerek yanımızda olan Doç. Dr. Sibel Paşalı Atmaca hocama, yoğun çalışmalarım sırasında birçok fedakârlık gösterip desteklerini esirgemedikleri, sabır gösterdikleri ve her an yanımda oldukları için eşim Mehmet Fatih Özekinci ve biricik oğlum Tuğra Kaan Özekinci ’ye ve yaşamımın her döneminde benden maddi-manevi desteklerini esirgemeyen, her zaman yanımda olan ve bana güvenen canım annem, babam ve kardeşime teşekkürümü bir borç bilirim.

1. GİRİŞ

Fuzzy (Bulanık) küme tanımı ilk olarak 1965 yılında ABD, Berkeley Üniversitesi'nde Profesör Lotfi A. Zadeh 'in 'Information and Control' isimli dergide 'Fuzzy Sets' başlıklı bir makale yayınlamasıyla ortaya çıkmıştır. Teknik bir probleme çözüm arayışında gerçekleştirdiği çalışmaları Fuzzy kavramı için başlangıç olmuştur. Zadeh, insanın hayat tecrübelerinden ve her türlü bilgisinden yararlanılarak kurallar işleyişini oluşturup makinaya aktarma fikrinin temellerini atmıştır. Fuzzy mantık en yalın haliyle bir karar verme mekanizması tasarımı olarak tanımlanabilir. Klasik kümenin çalışma prensipleri matematiksel olarak ifade edildiğinde '1' ve '0' değerlerinden oluşan bir tablo çıkar. Buna göre de klasik mantık birçok sorunun cevabını tam olarak verememektedir. Çünkü hayat kesinliklerden ibaret değildir. Bu mantığa göre bir varlık ancak belirli bir kümeye ait olabilir. Doğru olmayı '1' ile ifade ederken yanlış da '0' olarak değerlendirilir. Fuzzy mantık, klasik mantıktan belirsizlik içermesiyle ayrıldığı gibi 'doğru' ve 'yanlış' gibi kavramların yanına bunları güçlendirmek veya zayıflatmak için kullanılan niceleyicilere de bağlıdır. Bir koşulun doğrulanmasında derece kavramını tanıtarak doğru veya yanlışın dışında farklı bir durumun olma koşulunda Fuzzy mantık önemli veriler sağlar. Matematiksel olarak Fuzzy mantık çok değerlilik demektir. Fuzzy küme ise ait olma derecesine sahip elemanları olan bir kümedir. Fuzzy kümeler üyelik fonksiyonları yardımıyla belirlenir. Bir eleman bir Fuzzy kümeye üyelik derecesiyle aittir ve bu derece $[0,1]$ kapalı aralığında bir değerdir. Günlük hayatta kullandığımız birçok ifade aslında bulanık (Fuzzy) bir yapıya sahiptir. Örnek verecek olursak sıcaklık kavramında kesin mantığa göre sıcak ya da soğuk olarak nitelendirilen durum Fuzzy küme ile modellenecek olursa çok sıcak, sıcak, soğuk ya da çok soğuk olarak dilsel ifadelerle tanımlanır. Yani sıcaklığı derecelendirerek ifade eder. Fuzzy mantık yaklaşım yapısı gereği daha esnek sonuçlar ortaya koymaktadır.

Fuzzy kümeler teorisi, gerçek zamanlı uygulamalarda uygulaması kolay uygun bir yöntem sunar ayrıca tasarımcıların ve operatörlerin bilgilerinin dinamik kontrol sistemine aktarılmasını sağlar. Fuzzy mantık yalnızca teorik değil, aynı zamanda uygulamaya da yönelik olduğu bir yaklaşım olduğundan birçok çalışmaya konu olmuştur. Zadeh ’in çalışmalarıyla başlayarak o zamandan beri bu alanda birçok teorik ve uygulamalı atılım gerçekleştirildi ve teorik çalışmalar geliştiren çok sayıda araştırmacı tarafından ilgi gördü. Bazı araştırmacılar zor olduğu düşünülen problemlerin Fuzzy mantıkla çözümüne dikkat çekmiştir. İlk uygulama olarak 1975’te Londra da Profesör Mandanı tarafından, proses kontrolü için bir strateji geliştirildi ve bir buhar motorunun kontrolünde kullanıldı. Elde ettiği sonuçları yayınladı. “Eğer türbinin hızlanma ivmesi yükseliyorsa basınç çok düşünce buhar vanasını bir miktar aç şeklinde kurallar ile bu sistemi gerçekleştirmişlerdir (Bih 2006). 1978 de Danimarka şirketinde F.L Smith, bir çimento fırınının kontrolünü bu sonuçlarla sağladı. Bu, Fuzzy mantığın ticari anlamda ilk gerçek endüstriyel uygulamasıydı. Seksenlerin sonunda Fuzzy mantık büyük bir çıkış yapıp çamaşır makineleri, kameralar gibi tüketici ürünlerinin yapımında kullanıldı. Suyun arıtılması, liman konteyner vinçleri, yer altı ve havalandırma/iklimlendirme sistemleri gibi endüstriyel uygulamalarda kullanılmaya başlandı. Finans ve tıbbi teşhis gibi diğer alanlarda geliştirilen uygulamalar 1990’dan itibaren Almanya da ve ABD de çok sayıda çalışmalara konu oldu. Fuzzy mantık, günümüzde yapay zekâ, bilgisayar, sibernetik internet teknolojileri, yüz tanıma sistemleri, uzay araçları, evrenin oluşumu, Elektra teknolojileri, robot teknolojileri, savaş teknolojileri gibi farklı alanlarda da kullanılmaktadır (Işıklı 2008). Ayrıca bu çalışmada Işıklı (2008), Fuzzy mantığın ortaya çıkışını, hangi alanlarda kullanıldığını, ne gibi sonuçlar ortaya koyduğunu, bilimsel buluşları ele alarak mantık ve sibernetiğin gelişmesini açıklamıştır. Zimmerman (2001), Fuzzy mantık hakkında gerekli teorileri ele almış, çeşitli kullanım alanlarından bahsetmiş, karar analizi yaparak literatüre katkı sağlamıştır.

Matematik ve geometrik alanda incelendiğinde de Fuzzy mantığın kullanıldığı birçok çalışma mevcuttur. Zadeh (1965) çalışmasında Fuzzy kümenin sürekli üyelik derecesine sahip bir nesne sınıfı olduğundan ve bileşme, kesişme, tümleme gibi kavramların Fuzzy kümelere genişletilebileceğinden bahsetmiştir. Dubois ve Prade (1979) çalışmalarında kesin doğrunun normalleştirilmiş dış bükey Fuzzy alt kümeleri yani Fuzzy sayılar için toplama, çıkarma, çarpma bölme işlemlerine yer vermişlerdir. Rosenfeld (1984), Fuzzy alt küme için yükseklik ve genişlik tanımlamış ayrıca içsel, dışsal çaptan bahsetmiştir. Rosenfeld (1998) çalışmasında ise mesafe ve göreceli konumdan bahsetmiş ayrıca alan, çevre, dış bükeylik kavramlarının görüntü işleme ve analizindeki bazı uygulamalarına yer vermiştir. Muganda (1990) çalışmasında Fuzzy olmanın temel özelliklerini lineer ve afin uzaylar için incelemiş ayrıca Fuzzy bir lineer uzay için taban kavramını tanımlamıştır. Chaudhuri (1991), iki boyutlu destek uzayında nokta, doğru, çember, çokgen gibi Fuzzy geometrik şekilleri tanıtmıştır. Tanımlar Fuzzy kümenin seviye kümelerine dayanmaktadır. Buckley ve Eslami (1997 ^{a,b}) Fuzzy düzlem geometrisi hakkında fikirler ortaya atmışlardır. Çalışmalarında Fuzzy nokta ve Fuzzy noktalar arasındaki Fuzzy uzaklığı tanımlamışlar ve bunun zayıf metrik olduğu göstermişlerdir. Fuzzy doğru parçası, iki Fuzzy doğru arasındaki dar açı, aynı ve ters noktalar tanımlanmıştır. Fuzzy düzlem geometrisinde Ghosh ve Chakraborty (2019) Fuzzy daireler, Fuzzy dikdörtgenler, Fuzzy üçgenler ve Fuzzy çokgenler üzerinde çalışmışlardır. Dubois ve Prade (1979) çalışmasında kesin doğrunun normalleştirilmiş dış bükey Fuzzy alt kümeleri yani Fuzzy sayılar için toplama, çıkarma, çarpma bölme işlemlerine yer vermişlerdir. Yine aynı çalışmada Fuzzy bir daire ya da Fuzzy bir çokgenin alanın ve çevresinin Fuzzy bir sayı olduğunu göstermişlerdir. Fuzzy düzlem geometrisinde Fuzzy daireler oluşturarak merkezlerinin Fuzzy bir noktada olamayabileceğini ifade etmişlerdir. Üç Fuzzy yarı düzlemin kesişimi ile elde edilen Fuzzy üçgen ve bu Fuzzy üçgenin alan ve çevresi Rosenfeld (1990) tarafından tanıtılmıştır. Çınar (2015) çalışmasında farklı Fuzzy metrik uzay tanımlarına yer vermiştir. Ghosh ve Chakraborty (2019) beş aynı Fuzzy noktadan geçen Fuzzy parabolü oluşturmak için metot tanıtmışlardır. Tüm bu çalışmalar incelendiğinde geometri alanında koniklerden sadece Fuzzy daire ve Fuzzy parabol eğrilerinin incelendiği görülmüştür. Bu tez çalışmasında Fuzzy elips ve Fuzzy hiperbol tanıtılmış ve bu eğrileri oluşturmak için gerekli bilgi ve teoremler gösterilmiştir. Daha sonra Fuzzy hiperbol ve Fuzzy elips denklemlerini elde edip herhangi bir noktanın bu koniklere olan üyelikleri incelenerek, Fuzzy elips ve Fuzzy hiperbol uygulamalarına yer verilmiştir.

1.1 Fuzzy Mantığın Avantaj ve Dezavantajları

Bu kısımda Fuzzy mantığın avantaj ve dezavantajlarından bahsedeceğiz.

1.1.1 Avantajları

Fuzzy mantığın en büyük avantajı insan düşünme tarzına yakın olmasıdır. İnsana özgü tecrübe ile öğrenme olayının kolay modellenebilmesi ve belirsiz kavramların bile matematiksel olarak ifade edilebilmesi Fuzzy mantığı kullanışlı kılar. Bu nedenle Fuzzy mantık, klasik mantığın kapladığı alandan daha ileri gidebilmiş, insanların gerçek hayatta sahip olduğu ve çoğu alanda kullandığı mantık modelini alıp bilgisayarlar ve makineler üzerinde yeniden yapılandıran önemli bir alandır. Karşımıza çıkan problemler basit bir matematiksel modelle tanımlanabilen bir sistem ise klasik mantık uygulanabilir bir yöntemdir fakat daha karmaşık bir problemse çözüm üretebilmek için ihtiyaç duyulan sayısal verilere geleneksel mantık sistemini kullanarak ulaşmak hem zor hem de maliyetli olabilir. Böyle durumlarda Fuzzy mantık, sistemi daha iyi analiz edebildiğinden daha basit çözümler getirerek daha ekonomik olur.

Fuzzy mantıkta işaretlerin bir ön işleme tabi tutulmaları ve oldukça geniş bir alana yayılan değerlerin az sayıda üyelik fonksiyonlarına indirgenmeleri nedeni ile Fuzzy denetim genellikle daha küçük bir yazılımla daha hızlı bir şekilde sonuçlanır. Söz edilen az sayıda değerler üzerinde uygulanacak kural sayısı da az olduğundan sonuca ulaşmak daha da çabuklaşacaktır. Bu durum geleneksel bilgisayar ortamında böyledir. Özel geliştirilmiş bir donanımla sonuca daha da hızlı ulaşmak olasıdır. Örneğin Sanyo-Fisher firması mühendisleri, video kayıt cihazında kullanmayı düşündükleri mikro bilgisayarın yetersiz kalmasından dolayı, Fuzzy denetim kullanmaya karar vermişlerdir. Fuzzy denetim yazılım boyutlarının daha küçük olmasını sağladığından, dış bellek kullanımına gerek kalmamıştır.

1.1.2 Dezavantajları

Fuzzy mantığın denetiminde kullanılan kurallar deneyime bağlıdır. Daha fazla doğruluk için daha çok Fuzzy dereceler elde edilmesi gerekir. Bunun için üyelik fonksiyonları seçmek gerekmekte fakat üyelik fonksiyonları bulmak için belirli bir yöntem olmadığından en uygun fonksiyonun deneme ile bulunması gerekmektedir. Bu da bazen daha fazla çalışma süresi gerektirebilir. Bulanık bilgiye dayalı bir sistemin denetlenip doğrulanması kapsamlı bir çalışma gerektirir, sistemin nasıl cevap vereceği önceden kestirilemez. Ancak benzetim çalışması yapılabilir.

1.2 Temel Kavramlar

Bu bölümde tez çalışmamda kullanacak olduğumuz temel tanımlardan bahsedeceğiz.

Tanım 1.1 (Karakteristik Fonksiyon) X herhangi bir küme olmak üzere $A \subset X$ olsun.

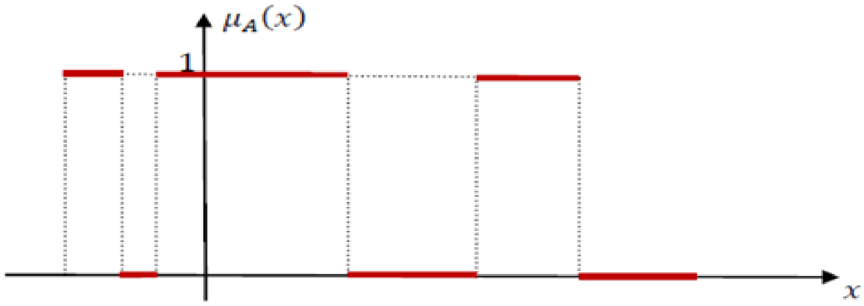
$$\chi A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlı $\chi A(x): X \to \{0,1\}$ fonksiyonuna A kümesinin ***karakteristik fonksiyonu*** denir (Çınar 2015).

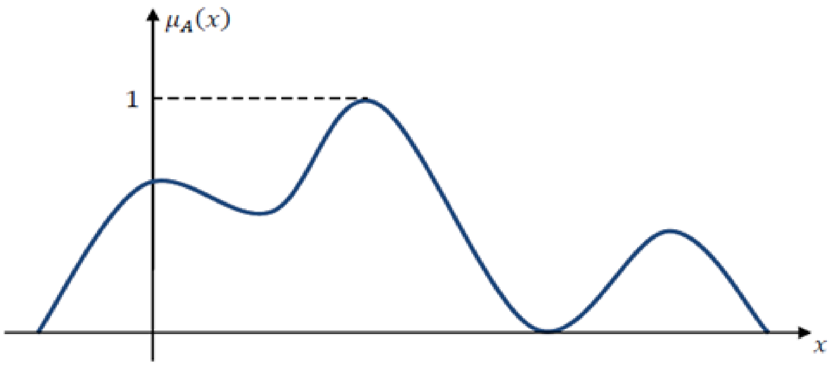
Tanım 1.2 (Fuzzy Küme) X boş kümeden farklı herhangi bir küme ve $\mu: X \to [0,1]$ şeklinde verilen bir fonksiyon olsun. $\tilde{A} = \{(x, \mu(x)): x \in X\}$ kümesi μ fonksiyonu ile karakterize edilen Fuzzy küme olarak adlandırılır. Ayrıca μ ya $\tilde{A}$ Fuzzy kümesinin ***üyelik fonksiyonu*** ve her $x \in X$ için $\mu\ (x) \in [0,1]$ değerine de ***x in $\tilde{A}$ ya ait olma derecesi*** denir (Zadeh 1965). Klasik küme teorisinde A bir küme olmak üzere; A nın üyelik (karakteristik) fonksiyonu $\mu_A(x)$, $x \in A$ iken 1 ve $x \notin A$ iken 0 olmak üzere iki değer almaktadır. Üyelik fonksiyonu sadece 0 ve 1 değerini alan bu kümelere ***adi* veya *basit küme*** denir. Özel olarak;

X Fuzzy kümesi; $\mu_x(x) = 1$ olmak üzere $X = \{(x, 1)|x \in X\}$,

$\emptyset$ Fuzzy kümesi; $\mu_\emptyset(x) = 0$ olmak üzere $\emptyset = \{(x, 0)|x \in X\}$ şeklinde gösterilir (Çınar 2015).



Şekil 1.1: Bir Klasik A kümesi

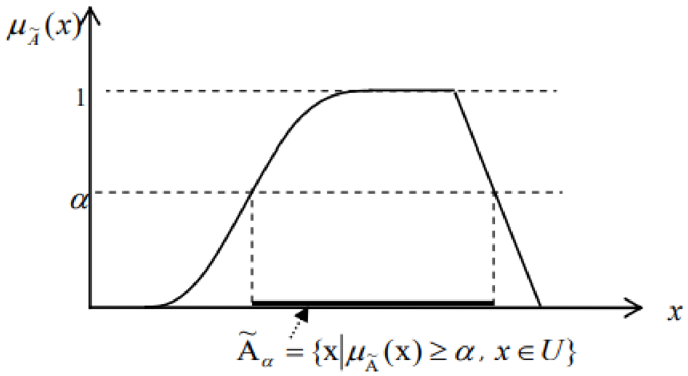


Şekil 1.2: Bir Fuzzy A kümesi

Tanım 1.3 (α-kesimleri) $\mathbb{R}^n$ de bir $\tilde{A}$ Fuzzy kümesinin üyelik dereceleri α ‘ya eşit veya daha büyük elemanlarından oluşan klasik kümeye ***α-kesim kümesi*** denir yani $\tilde{A}$ Fuzzy kümesinin α-kesim kümesi aşağıdaki gibi gösterilebilir;

$$\tilde{A}\ (\alpha) = \{x | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\ , x \in X, \alpha \in [0,1]\}$$

$\{x: \mu(x|\tilde{A}) > 0\}$ kümesine ***$\tilde{A}$ kümesinin desteği*** denir.



Şekil 1.3: α-kesim kümesinin gösterimi

Tanım 1.4 (Fuzzy sayı) R de bir $\tilde{A}$ Fuzzy kümesi μ üyelik fonksiyonu için aşağıdaki koşulları sağladığında R üzerinde bir ***Fuzzy sayı*** olarak adlandırılır.

i) $\mu(x|\tilde{A})$ üst yarı süreklidir.

ii)Bir $[a, d]$ aralığı dışında $\mu(x|\tilde{A}) = 0$ olur.

iii) $a \leq b \leq c \leq d$ için $\mu(x|\bar{A})$, $[a, b]$ aralığında artan, $[c, d]$ aralığında azalan ve her $x \in [b, c]$ için $\mu(x|\tilde{A}) = 1$ olan b ve c sayıları vardır.

Burada $b = c$ için $f(x) = \mu(x|\bar{A}), \forall x \in [a, b]$ ve $g(x) = \mu(x|\tilde{A}), \quad \forall x \in [c, d]$ olması durumunda yukarıda tanımlanan Fuzzy sayıları $(a/c/d)_{fg}$ şeklinde gösterilir. Özellikle $f(x)$ ve $g(x)$ lineer fonksiyonlar ise o zaman bu Fuzzy sayıya üçgen Fuzzy sayı denir ve $(a/c/d)$ şeklinde gösterilir (Buckley ve Eslami 1997).

Tanım 1.5 (Fuzzy Nokta) $\mathbb{R}^2$ de (a, b) noktasında $\tilde{P}(\alpha, b)$ olarak yazılan Fuzzy bir noktanın μ üyelik fonksiyonu için aşağıdaki özellikleri sağlarsa $\tilde{P}(\alpha, b)$ ye ***Fuzzy nokta*** denir.

i) $\mu((x, y)|\tilde{P}(a, b))$ üst yarı süreklidir.

ii) $\mu((x, y)|\tilde{P}(a, b)) = 1 \iff (x, y) = (a, b)$

iii) $\forall \alpha \in [0,1]$ için $\tilde{P}(a, b)(\alpha)$, $\mathbb{R}^2$ nin kompakt ve konveks alt kümesidir.

Genellikle Fuzzy noktaları temsil etmek için $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \ldots$ notasyonları kullanılır (Çınar 2015). Çalışmamızda Fuzzy parabolde kullanılan noktaları $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \ldots$

Fuzzy elipste kullandığımız noktaları $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \ldots$ ve Fuzzy hiperbolde kullandığımız noktaları $\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2, \ldots$ ile göstereceğiz.

Tanım 1.6 (LR-tip Fuzzy sayısı) $L: [0, \infty) \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu artmayan olup aşağıdaki özelliklerden herhangi birini sağlarsa bir Fuzzy sayısının referans fonksiyonu adını alır;

i) $L(0) = 1$ ve $L(1) = 0$ veya

ii) $\forall x \in [0, \infty)$ için $L(x) > 0$ ve $L(+\infty) = 0$

L ve R gibi referans fonksiyonları varsa aşağıdaki üyelik fonksiyonu ile verilen bir $\tilde{A}$ Fuzzy sayısı, ***LR-tip fuzzy sayısı*** adını alır ve $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ iki sayı olmak üzere üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır:

$$\mu\big(x|\breve{A}\big) = \begin{cases} L\left(\dfrac{m-x}{\alpha}\right), x \leq m \\ R\left(\dfrac{x-m}{\beta}\right), x \geq m \end{cases}$$

LR tip Fuzzy sayısını temsil etmek için $(m - \alpha/m/m + \beta)_{LR}$ notasyonunu kullanacağız (Ghosh ve Chakraborty 2019).

Tanım 1.7 (Fuzzy sayılara göre Fuzzy aynı-ters noktalar) x ve y sırasıyla $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$ Fuzzy sayılarının desteklerine ait iki sayı olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan x ve y sayılarına $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$ Fuzzy sayılarına göre aynı noktalar denir.

i) $\mu(x|\tilde{a}) = \mu\big(y|\tilde{b}\big)$

ii) a ve b sırasıyla $\tilde{a}(1)$ ve $\tilde{b}(1)$ in orta noktaları olmak üzere $x \leq a$ ve $y \leq b$ ya da $x \geq a$ ve $y \geq b$ (Ghosh ve Chakraborty 2019).

Tanım 1.8 (Fuzzy noktalara göre Fuzzy aynı-ters noktalar) (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) sırasıyla Fuzzy $\tilde{P}(a, b)$ ve $\tilde{P}(c, d)$ noktalarının destekleri üzerinde iki nokta ve L_1 ise (x_1, y_1) ve (a, b) den geçen bir doğru olsun. $\tilde{P}(a, b)$ Fuzzy noktası ve L_1 boyunca $\tilde{P}(a, b)$ nin desteğinde $\widetilde{r_1}$ Fuzzy sayısını alalım. Her $(x, y), L_1$ üzerinde ise $\widetilde{r_1}$ Fuzzy sayısının üyelik fonksiyonunu $\mu((x, y)|\widetilde{r_1}) = \mu\left((x, y)|\tilde{P}(a, b)\right)$ şeklinde, diğer durumlarda ise 0 olarak yazabiliriz. Benzer şekilde (x_2, y_2) ve (c, d) den geçen L_2 boyunca $\widetilde{r_2}$ fuzzy sayısını $\tilde{P}(c, d)$ noktasının desteği üzerinde alalım. Eğer

(i) (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) $\widetilde{r_1}$ ve $\widetilde{r_2}$ ye göre aynı noktalar ve (ii)$L_1, L_2, (a,b)$ ve (c,d) dan geçen doğru ile aynı açıyı yapıyor ise (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktalarına $\tilde{P}(a,b)$ ve $\tilde{P}(c,d)$ ye göre aynı noktalar denir. Ayrıca (x_1, y_1) ve $(-x_2, -y_2)$ noktaları aynı noktalar ise (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktalarına $\tilde{P}(a,b)$ ve $\tilde{P}(c,d)$ ye göre ters noktalar denir (Ghosh ve Chakraborty 2019).

2. FUZZY PARABOL

Bu bölümde Fuzzy parabolü hakkında mevcut bilgilere bağlı olarak iki farklı metot kullanılıp Fuzzy parabolü elde edilmeye çalışılacaktır. Bu anlamda çalışmamızda Fuzzy bir dairesel koninin kesin bir düzlemle kesilmesiyle elde edilen eğrilerden üç Fuzzy eğri üzerinde durulacaktır. Diğer bölümlerde Fuzzy elips ve Fuzzy hiperbol tanıtılacaktır.

2.1 Fuzzy Parabol Oluşturma

Geleneksel Öklid geometrisinde, bir parabolü iki farklı şekilde tanımlayabiliriz. İlk olarak odak (u, v) ve $ax + by + c = 0$ doğrusu verilsin. Parabol; sabit bir noktaya (odak) ve sabit bir doğruya eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesidir. Bunun denklemi aşağıdaki gibi verilir.

$$\frac{(ax + by + c)^2}{a^2 + b^2} = (x - u)^2 + (y - v)^2$$

Ayrıca bir parabol üzerindeki beş noktası biliniyorsa parabolü beş parametre belirleyerek $(a, b, g, f$ ve $c)$ elde ederiz. Yani genel cebirsel denklem;

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \ \ , h^2 = a.b$$

dir. Fuzzy parabol oluşturmak için iki farklı yol verilmiştir.

1) İlk olarak temel parabol; sabit bir Fuzzy nokta (odak) ve verilen Fuzzy doğruya uzaklıkları eşit olan noktalar kümesi tanımı kullanılacaktır.

2) İkinci yaklaşımda ise beş Fuzzy noktası bilinen Fuzzy parabol elde edilecektir (Ghosh ve Chakraborty 2019).

Verilen bu yaklaşımlara göre Fuzzy parabolü elde etmek için metotları tanıtacağız. Daha sonra konik oluşturmak için en uygun metot belirlenerek Fuzzy elips ve Fuzzy hiperbolü elde edeceğiz.

2.1.1 Fuzzy Parabol Oluşturmak için Kullanılan Metot 1

$\tilde{F}(a,b)$ bir Fuzzy nokta ve $\tilde{L}$ bir Fuzzy doğru olsun. Fuzzy parabolünü aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$\tilde{F}$ odağı ve $\tilde{L}$ doğrusu ile verilen $\widetilde{FP_1}$ Fuzzy parabolü $\widetilde{D}(\tilde{P},\tilde{F}) = \widetilde{D}(\tilde{P},\tilde{L})$ eşitliğini sağlayan $\tilde{P}$ Fuzzy noktalar kümesinin koleksiyonudur **(**Ghosh ve Chakraborty 2019). Her ne kadar bu yöntem bir Fuzzy parabol tanımlamak için geleneksel fikri genelleştirse de keyfi $\tilde{F}$ odağı ve $\tilde{L}$ doğrusu için çok kısıtlayıcı ve iyi tanımlanmamıştır. Çünkü $\tilde{F}$ ve $\tilde{L}$ nin seçilimine göre $\widetilde{D}(\tilde{P},\tilde{F}) = \widetilde{D}(\tilde{P},\tilde{L})$ yi sağlayan $\widetilde{P}$ Fuzzy noktası bulunamayabilir. Tanımdaki eşitlik durumu kesin olmayacaktır, Fuzzy ya da kesin olmayan yapıda olmak zorunda olduğundan dolayı aynı çekirdeğe sahip sonsuz sayıda $\tilde{P}$ lerin varlığı durumu da ortaya çıkabilecektir. Bu durumda tek olmayan Fuzzy parabol durumu ortaya çıkar. Örneği aşağıda verilmiştir.

Örnek 2.1.1: $\widetilde{L} = (x + 2/x + 1/x) = 0$ fuzzy doğru ve üyeliği dairesel koni olan $\tilde{F}(1,0)$ Fuzzy noktayı düşünelim. $\{(x,y): (x-1)^2 + y^2 \le 1\}$ ve tepe noktası $(1,0)$ olsun. $\tilde{F}$ ve $\tilde{L}$ ile elde edilen çekirdek parabol $\widetilde{FP_1}(1)$, $y^2 = 4x$ parabolüdür. $(4,4) \in \widetilde{FP_1}(1)$ noktasına dikkat edelim. $\widetilde{P_0}(4,4)$ Fuzzy noktamız aşağıdaki üyelik fonksiyonu ile verilsin.

$$\mu\left((x,y)|\widetilde{P_0}(4,4)\right) = \begin{cases} 1 - \sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2}, (x-4)^2 + (y-4)^2 \le 1 \\ \qquad\qquad 0 \qquad\qquad\quad , \text{ diğer durumlar} \end{cases}$$

$\widetilde{D}(\widetilde{P_0},\tilde{F}) = \widetilde{D}(\widetilde{P_0},\tilde{L}) = (3/\,5\,/\,7)_{LR}$ olur. Belirtmeliyiz ki $(4,4)$ de aşağıda verilen üyelik fonksiyonu ile $\widetilde{P_\varepsilon}$ sonsuz tane Fuzzy nokta

$$\mu\left((x,y)|\widetilde{P_\varepsilon}(4,4)\right) = \begin{cases} 1 - \sqrt{\left(\frac{x-4}{1+\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{y-4}{1+\varepsilon}\right)^2}, (x-4)^2 + (y-4)^2 \le (1+\varepsilon)^2 \\ \qquad\qquad 0 \text{ , diğer durumlar} \end{cases}$$

$\widetilde{D}(\widetilde{P_\varepsilon},\tilde{F}) = \widetilde{D}(\widetilde{P_\varepsilon},\tilde{L}) = (3-\varepsilon/\,5\,/\,7+\varepsilon\,)_{L_\varepsilon R_\varepsilon}$ olacak şekilde mevcuttur. Fuzzy noktalar $\widetilde{P_\varepsilon}(4,4)$, genişletilmiş dönüşüm uygulanarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$(x,y) \to (4 + k(x-4), 4 + k(y-4))$$

$$(k = 1 + \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0)$$

$\widetilde{D}(\widetilde{P_\varepsilon}, \widetilde{L})$ hesaplandığında $\widetilde{D}(\widetilde{P_\varepsilon}, \widetilde{L}) = (3 - \varepsilon / \, 5 \, / \, 7 + \varepsilon \,)$ bulunur. $\widetilde{F}(1,0)$ ve $\widetilde{P_\varepsilon}(4,4)$ nin çekirdeklerini birleştiren doğru;

$$L \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{4}$$

olur. $\widetilde{F}(1,0)$ ve $\widetilde{P}(4,4)$ ün desteklerinin sınırları sırasıyla, $C_1 \equiv (x-1)^2 + y^2 = 1$ ve $C_2 \equiv (x-4)^2 + (y-4)^2 = (1+\varepsilon)^2$ çemberleridir.

L doğrusu ve C_1 çemberinin kesim noktası $\left(\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ ve $\left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$ noktalarıdır. L doğrusu ve C_2 çemberinin kesim noktası

$$R_\varepsilon = \left(4 + \frac{3}{5}(1+\varepsilon), 4 + \frac{4}{5}(1+\varepsilon)\right)$$

ve

$$S_\varepsilon = \left(4 - \frac{3}{5}(1+\varepsilon), 4 - \frac{4}{5}(1+\varepsilon)\right)$$

dir.

Aşağıdaki şekilde görüldüğü üzere $\widetilde{F}(1,0)$ ve $\widetilde{P_\varepsilon}(4,4)$ üzerinde en uzak ve en yakın noktalar sırasıyla

$$\left(\frac{2}{5}, \frac{-4}{5}\right) \text{ ve } R_\varepsilon = \left(4 + \frac{3}{5}(1+\varepsilon), 4 + \frac{4}{5}(1+\varepsilon)\right)$$

$$\left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right) \text{ ve } S_\varepsilon = \left(4 - \frac{3}{5}(1+\varepsilon), 4 - \frac{4}{5}(1+\varepsilon)\right)$$

dur. En yakın iki ters nokta arasındaki uzaklık

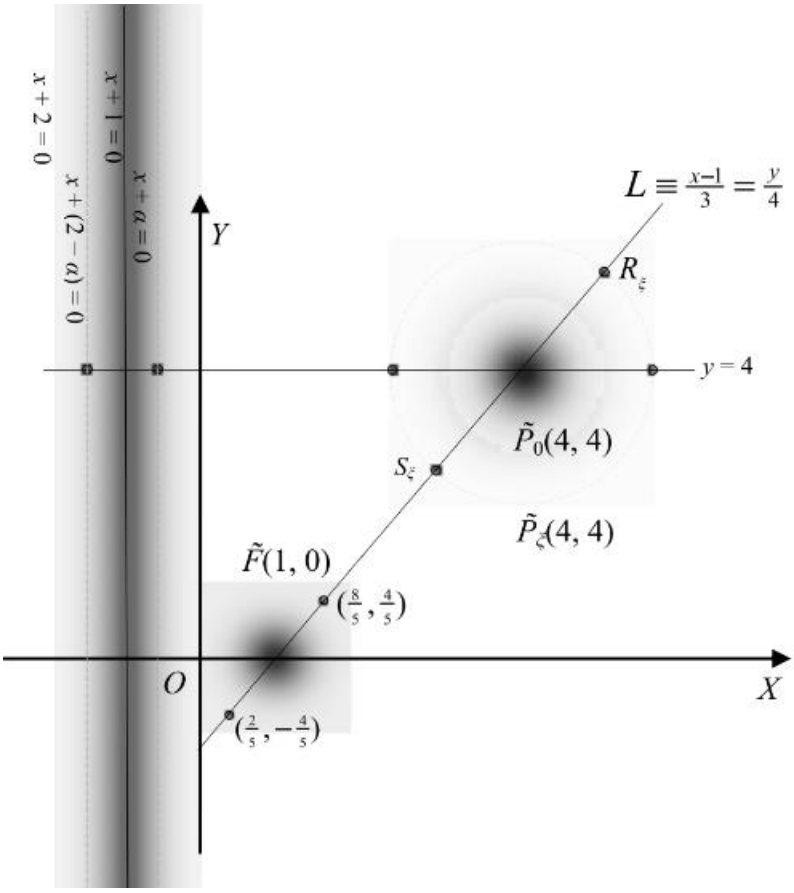
$$\sqrt{\left(4 - \frac{11 + 3\varepsilon}{5}\right)^2 + \left(4 - \frac{8 + 4\varepsilon}{5}\right)^2} = 3 - \varepsilon$$

En uzak iki ters nokta arasındaki uzaklık

$$\sqrt{\left(4+\frac{1+3\varepsilon}{5}\right)^2+\left(4+\frac{8+4\varepsilon}{5}\right)^2}=7+\varepsilon$$

bulunur. Bu yüzden $\widetilde{D}\big(\widetilde{P_\varepsilon},\tilde{F}\big)=(3-\varepsilon/\,5\,/\,7+\varepsilon\,)_{L_\varepsilon R_\varepsilon}$ buluruz.

$\varepsilon>0$ keyfi seçimi $\widetilde{P_\varepsilon}(4{,}4)$ te $\widetilde{D}\big(\widetilde{P_\varepsilon},\tilde{F}\big)$ yi sağlayan sonsuz Fuzzy noktaları olduğunu söyler. Bu yüzden $\tilde{F}P_1$ tek Fuzzy parabolü $\tilde{F}$ odağı ve $\tilde{L}$ doğrusu ile tanımlanamamaktadır.



Şekil 2.1: Metot 1'e göre Fuzzy Parabol Oluşturma

Teorem 2.1.1.1: (Ghosh ve Chakraborty 2019) $\tilde{F}$ bir Fuzzy nokta ve $\tilde{L}$ bir Fuzzy doğru olsun. Eğer $\widetilde{D}\big(\tilde{P},\tilde{F}\big)=\widetilde{D}(\tilde{P},\tilde{L})$ şartını sağlayan bir $\tilde{P}(a,b)$ Fuzzy noktası var ise $\widetilde{D}\big(\widetilde{P_k},\tilde{F}\big)=\widetilde{D}(\widetilde{P_k},\tilde{L})$ olacak şekilde sonsuz tane $\widetilde{P_k}$ ler bulunabilir.

İspat:

$$\widetilde{D}(\tilde{P},\tilde{F}) = \vee_{\substack{\alpha\in[0,1]\\ \theta\in[0,2\pi]}} \left\{\begin{matrix} d(F_\theta^\alpha, P_\theta^\alpha): F_\theta^\alpha, P_\theta^\alpha \,; \widetilde{F} \text{ ve } \widetilde{P} \text{ üzerinde α üyelik} \\ \text{değeri ile verilen ters noktalar} \end{matrix}\right\} \quad (2.1)$$

ve

$$\widetilde{D}(\tilde{P},\tilde{L}) = \vee_{\substack{\alpha\in[0,1]\\ \theta\in[0,2\pi]}} \left\{\begin{matrix} d(P_\theta^\alpha, L^\alpha): P_\theta^\alpha, L^\alpha; \widetilde{P} \text{ ve } \widetilde{L} \text{ üzerinde α üyelik} \\ \text{değeri ile verilen ters nokta ve eğri} \end{matrix}\right\} \quad (2.2)$$

Kabul edelim ki $P_\theta^\alpha = (x_{p\theta}^\alpha, y_{p\theta}^\alpha)$ ve $F_\theta^\alpha = (x_{f\theta}^\alpha, y_{f\theta}^\alpha)$, $\widetilde{P}$ ve $\widetilde{F}$ de üyelik değerleri α olan iki ters nokta P_θ^α ve $F_\theta^\alpha \alpha$ sırasıyla

$$\frac{x-a}{cos\theta} = \frac{y-b}{sin\theta} \text{ve} \frac{x-c}{cos\theta} = \frac{y-d}{sin\theta}$$

Doğruları üzerinde olan noktalardır.

$$\left(\text{Odak noktası } \tilde{F}(c,d) \text{ ve Fuzzy nokta } \tilde{P}(a,b)\right)$$

Genişletilmiş dönüşümü uygulayalım.

$$(x,y) \to \big(a + k(x-a), b + k(y-b)\big) \quad (k > 1)$$

$\widetilde{P_k}(a,b)$ Fuzzy nokta olsun. $\tilde{F}$ üzerindeki α üyelik değeri ile verilen P_θ^α noktaları üzerinde genişletilmiş dönüşümü uygulayalım ve

$F_\theta^\alpha = (x_{f\theta}^\alpha, y_{f\theta}^\alpha) \in \tilde{F}$ ve $P_\theta^\alpha = \Big(a + k\big(x_{P_\theta}^\alpha - a\big)\Big), \Big(b + k\big(y_{P_\theta}^\alpha - b\big)\Big) \in \widetilde{P_k}$ dır.

Tekrar dikkat edelim ki eğer

$d(P_\theta^\alpha, F_\theta^\alpha) = d(P_\theta^\alpha, L_\alpha)$ olursa $d(P_{k\theta}^\alpha, F_\theta^\alpha) = d(P_{k\theta}^\alpha, L_\alpha)$ olur. Böylece (2.1) ve (2.2) den $\widetilde{D}(\widetilde{P_k}, \tilde{F}) = \widetilde{D}(\widetilde{P_k}, \tilde{L})$ elde edilir ve teorem keyfi $k > 1$ için ispatlanmış olur.

Sonuç: Teorem 2.1.1.1 de Fuzzy odak $\tilde{F}$ ve Fuzzy doğru $\tilde{L}$ olduğundan Fuzzy parabol $\widetilde{FP_1}$ tanımlamak için karşımıza iki durum çıkabilir.

Durum 1: $\widetilde{D}(\tilde{F},\tilde{P}) = \widetilde{D}(\widetilde{P}, \tilde{L})$ yi sağlayan bir $\tilde{P}$ Fuzzy nokta olmayabilir. O halde $\widetilde{FP_1}$ Fuzzy parabolü tanımlanamaz.

Durum 2: $\widetilde{FP}_1$ çekirdek parabolünün her noktasında $\widetilde{D}(\tilde{F},\tilde{P}) = \widetilde{D}(\tilde{P},\tilde{L})$ şartını sağlayan sonsuz $\tilde{P}$ Fuzzy noktalar olabilir. Bu durumda tek bir $\widetilde{FP}_1$ Fuzzy parabolü tanımlamak mümkün olmaz.

2.1.2 Fuzzy Parabol Oluşturmak için Kullanılan Metot 2

$\tilde{P}_i(a_i, b_i),\ i = 1,2,3,4,5$ çekirdeği kesin bir CP dediğimiz parabolün üzerinde olan beş Fuzzy nokta olsun. Bu beş Fuzzy noktadan geçen Fuzzy bir parabol oluşturmak için önce Fuzzy $\widetilde{FP}_{1,\dots,5}$ dediğimiz parabolik parça çizmeliyiz. Sonra Fuzzy parabol $\widetilde{FP}$ yi elde etmek $\widetilde{FP}_{1,\dots,5}$i her iki taraftanda sonsuzluğa uzatabiliriz.

$\widetilde{FP}$ yi sonsuz olarak genişletmek için kesin parabol üzerinde çekirdekleri ile verilmiş varsayımsal iki Fuzzy nokta düşünelim. Biri $\widetilde{P_1}(a_1, b_1)$ in diğer tarafında sonsuz bir mesafe, diğeri ise $\widetilde{P_5}(a_5, b_5)$ in tarafında sonsuz bir mesafe olan bu Fuzzy noktalar sırasıyla $\widetilde{P_{1\infty}}$ ve $\widetilde{P_{5\infty}}$ olsun. $\widetilde{FP}_{1\infty}$ ve $\widetilde{FP}_{5\infty}$ sırasıyla $\widetilde{P_1}$ ve $\tilde{P}_{1\infty}$ u ve $\widetilde{P_5}$ ve $\tilde{P}_{5\infty}$ u birleştiren Fuzzy parabol parçası olsun. Sonra $\widetilde{FP}$ Fuzzy parabolü $\widetilde{FP} = \widetilde{FP}_{1\infty} \cup \widetilde{FP}_{1,\dots,5} \cup \widetilde{FP}_{5\infty}$ olarak tanımlanabilir. $\widetilde{FP}_{1,\dots,5}$ orta parça, $\widetilde{FP}_{1\infty}$ ve $\widetilde{FP}_{5\infty}$ sonsuz uçlardır.

2.1.2.1 $\widetilde{FP}_{1,.,5}$ Yapımı

Bu bölümde $\widetilde{FP}_{1,\dots,5}$ i elde edeceğiz.

$$\widetilde{FP}_{1,\dots,5} = \bigcup_{\alpha=[0,1]} \left\{ \begin{array}{l} FP_\alpha : \widetilde{P_i}(a_i, b_i)\ \ i = 1,2,3,4,5 \text{ noktalarından geçen üyelik} \\ \text{derecesi } \alpha \text{ olan beş aynı noktadan geçen kesin parabol} \end{array} \right\}$$

Matematiksel olarak, $\widetilde{FP}_{1,\dots,5}$ parçası ,üyelik fonksiyonu yardımıyla

$$\mu\left((x,y)\middle|\widetilde{FP}_{1,\dots,5}\right) = \sup \left\{ \begin{array}{c} \alpha : (x,y);\text{ üyelik derecesi } \alpha \text{ olan } \tilde{P}_i, i = 1,2,3,4,5\ beş \\ \text{aynı noktadan geçen } FP_\alpha \text{üzerinde bir nokta} \\ \end{array} \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Buna göre tanımlardan da anlaşılacağı üzere $\widetilde{FP}_{1,\dots,5}$ Fuzzy parabolik parça $\widetilde{P}_i, i = 1, \dots, 5$ ların desteği üzerindeki beş aynı noktadan geçen tüm kesin parabollerin birleşimidir.

2.1.2.2 $\widetilde{FP}_{1\infty}$ ve $\widetilde{FP}_{5\infty}$ ların Elde Edilmesi

Sonsuz uçların elde edilmesi $\widetilde{P}_{1\infty}$ve $\widetilde{P}_{5\infty}$ Fuzzy noktaların elde edilmesine bağlıdır.

$\widetilde{P}_{1\infty}$ve $\widetilde{P}_{5\infty}$ Fuzzy noktalarını nasıl elde edebiliriz ve sonsuz (uzak) mesafe ne anlama geliyor? Bu soruların cevapları Önerme 2.1.2.1. de tanıtılmıştır.

Önerme belirtir ki $\widetilde{FP}_{1\infty}$ ve $\widetilde{FP}_{5\infty}$un elde edilmesi için $\widetilde{P}_{1\infty}$ve $\widetilde{P}_{5\infty}$un şekli ve konumu önemsenmemektedir. $\widetilde{P}_{1\infty}$ ve $\widetilde{P}_{5\infty}$ Fuzzy noktaları iki varsayımsal Fuzzy noktalardır. $\widetilde{FP}_{1\infty}$ ve $\widetilde{FP}_{5\infty}$un elde edilmesi için sadece gerekli bilgi $\widetilde{P}_{1\infty}$ ve $\widetilde{P}_{5\infty}$ un desteklerinin $(\mu > 0)$ kompakt kümeler olması ve bunların çekirdeklerin çekirdek parabol CP üzerinde olması gerekmektedir.

$\widetilde{FP}_{1\infty}$ ve $\widetilde{FP}_{5\infty}$ u elde etmek için sırasıyla $\widetilde{P_1}$ ve $\widetilde{P}_{1\infty}$, $\widetilde{P_5}$ ve $\widetilde{P}_{5\infty}$ aynı noktalarının tüm parabolik parçalarının bileşimini almamız gerekmektedir. Ancak, Önerme 2.1.2.1'e göre bu parabolik parçalar $\widetilde{FP}(1)$ çekirdek parabolüne paralel olmalıdır. Bu yüzden $\widetilde{FP}_{1\infty}$ ve $\widetilde{FP}_{5\infty}$ yarı sonsuz Fuzzy parçaları, farklı üyelik dereceleri ile verilen kesin yarı sonsuz parabolik parçaların iki takımıdır ve yarı parabolik parçalar kesin parabol CP ye paralel olmalıdır.

Önerme 2.1.2.1: (Ghosh ve Chakraborty 2019) Fuzzy noktaların koleksiyonu şeklinde bir $\widetilde{FP}$ Fuzzy parabolü düşünelim. $\widetilde{FP}_{1\infty}$ ve $\widetilde{FP}_{5\infty}$ da kesin parabolik parçalar $\widetilde{FP}(0)$ kesin parabolüne paralel olmalıdır.

İspat: Aksini düşünelim $FP_{1\infty}$ bir yarı sonsuz kesin parabol parçası çekirdek parabol $\widetilde{FP}(1)$ e paralel olmasın. $\widetilde{FP}_{1\infty}(0)$, formülüzasyonuna göre, $\widetilde{P_1}$ ve $\widetilde{P}_{1\infty}$ Fuzzy noktaların aynı noktalarıyla birleşen yarı sonsuz parabolik parçaların birleşimidir. Bu nedenle $FP_{1\infty}$ a karşılık gelen $(x_i, y_i) \in \widetilde{P_1}(0)$ ve $(x_{1\infty}, y_{1\infty}) \in \widetilde{P}_{1\infty}(0)$ iki aynı noktalar mevcuttur ki bunlarda $FP_{1\infty}$ un iki uçlarıdır.

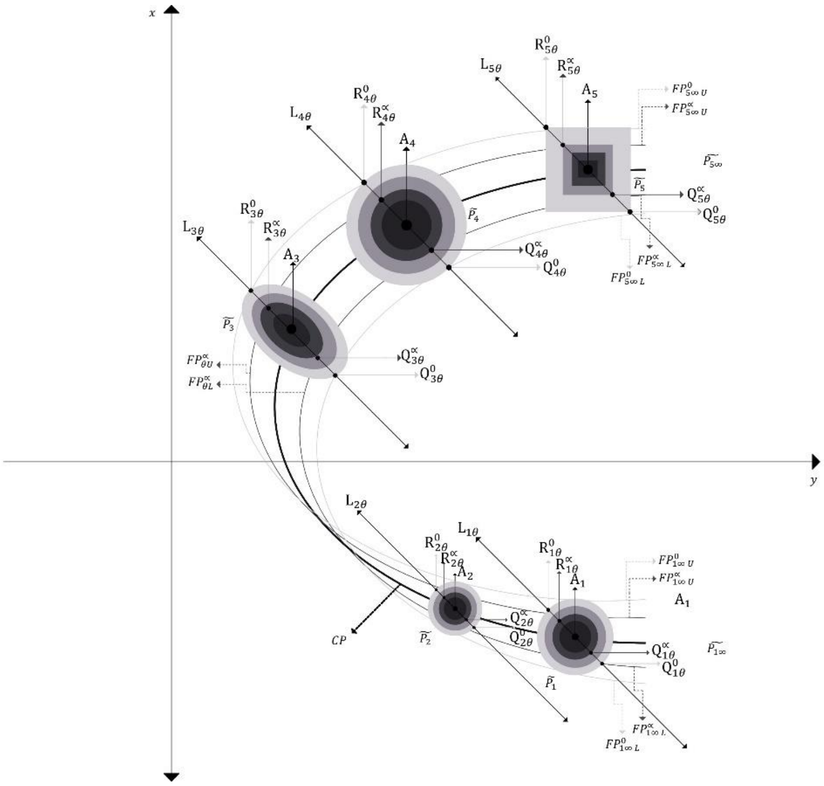
$FP_{1\infty}$, $\widetilde{FP}(1)$ e paralel olmadığında ya $FP_{1\infty}$ ile $\widetilde{FP}(1)$ kesişebilir ya da $(x_{1\infty}, y_{1\infty})$ noktası ve yarı sonsuz parabolik parça $FP_{1\infty}$ arasındaki mesafe sonsuzdur. İlk bahsedilen durum, $(x_1, y_1) \in \widetilde{P}_1(0)$ ve $(x_{1\infty}, y_{1\infty}) \in \widetilde{P}_{1\infty}(0)$ ın aynı noktalar olmadığını gösterir. Çünkü bu durumda (x_1, y_1) ve $(x_{1\infty}, y_{1\infty})$, $\widetilde{FP}_1$ in farklı iki tarafında bulunur ve bu yüzden $\widetilde{P}_1$ ve $\widetilde{P}_{1\infty}$ un çekirdek noktalarının birleştiği doğrunun iki farklı tarafında uzanmaktadır. Diğer durumda $\widetilde{P}_{1\infty}$ un desteğinin sınırsız ve bu yüzden $\widetilde{P}_{1\infty}$un bir Fuzzy nokta olmadığını ima eder. Bu durumda da bir çelişki ortaya çıkar yani bu iki durumda imkansızdır. Bu yüzden $FP_{1\infty}$, $\widetilde{FP}(1)$ e paralel olmak zorundadır. Yani tüm yarı sonsuz parabolik $\widetilde{FP}_{1\infty}(0)$ daki parçalar $\widetilde{FP}(1)$ e paralel olmalıdır. Benzer şekilde gösterebiliriz ki $\widetilde{FP}_{5\infty}(0)$ daki tüm sonsuz parabolik parçaların $FP(1)$ e paralel olması gerekir. Dolayısıyla sonuca ulaşılır.

FP yi elde ederken, ilk olarak $\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2, \widetilde{P}_3, \widetilde{P}_4$ ve $\widetilde{P}_5$ de aynı beş noktanın birleşimi ile elde edilen ortadaki parabolik parça $\widetilde{FP}_{1,\dots,5}$ i ele alıp daha sonra $\widetilde{FP}_{1,\dots,5}$ in her iki tarafına yarı sonsuz $\widetilde{FP}_{1\infty}$ ve $\widetilde{FP}_{5\infty}$u ekleriz. $\widetilde{FP}_{1\infty}$ ve $\widetilde{FP}_{5\infty}$ aşağıdaki formüller kullanarak değerlendirilir;

$$\widetilde{FP}_{1\infty} = \bigcup \left\{ \begin{matrix} FP_{1\infty}(x,y) : (x,y) \in \widetilde{P}_1(0) \text{ ve } FP_{1\infty}, \widetilde{P}_1 \text{ üzerinde } \alpha \text{ üyelik} \\ \text{derecesi ile verilen } \widetilde{FP}(1) \text{ e paralel parabol parçası} \end{matrix} \right\}$$

ve

$$\widetilde{FP}_{5\infty} = \bigcup \left\{ \begin{matrix} FP_{5\infty}(x,y) : (x,y) \in \widetilde{P}_5(0) \text{ ve } FP_{5\infty}, \widetilde{P}_5 \text{ üzerinde } \alpha \text{ üyelik} \\ \text{derecesi ile verilen } \widetilde{FP}(1) \text{ e paralel parabol parçası} \end{matrix} \right\}$$



Şekil 2.2: Metot 2 ye göre Elde Edilen Fuzzy Parabolü

Şekil 2.2'de $\widetilde{FP}$ yi elde etmek için metot gösteriyor ki beş Fuzzy nokta $\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2, \widetilde{P}_3, \widetilde{P}_4$ ve $\widetilde{P}_5$ olsun. Merkezi A_1 olan çembersel bölge, merkezi A_2 olan elips bölge, merkezi A_3 olan elips bölge, A_4 olan çembersel bölge ve merkezi A_5 olan dörtgensel bölge sırasıyla $\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2, \widetilde{P}_3, \widetilde{P}_4$ ve $\widetilde{P}_5$ in destekleridir. Gri gölgeli bölgeler farklı α-kesimleri için Fuzzy noktaların desteklerini temsil eder. Fuzzy noktalar için üyelik derecelerinin değişmesi gri seviyelerinin yoğunluğu ile gösterilir. En koyu gri seviye en yüksek üyelik fonksiyonudur. $\widetilde{P}_i$ deki A_i lerin üyelik dereceleri 1 dir ve $\widetilde{P}_i$ lerin desteğinin çevresinde giderek 0 a doğru düşer.

A_i den geçen $L_{i\theta}$ beş doğruyu düşünelim $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ Bu beş doğru x ekseni ile θ derece açı yapar.$\tilde{P}_i(A_i)(\alpha)$, bir Fuzzy noktanın α-kesimi olduğundan, konvekstir ve A_i , $\tilde{P}_i(A_i)(\alpha)$ nın içteki noktasıdır, $L_{i\theta}$ doğrusu $\tilde{P}_i(A_i)(\alpha)$ nın iki noktasında sınırları ile kesişir. Burada iki kesişen noktalar $Q^\alpha_{i\theta}$ ve $R^\alpha_{i\theta}$ olsun. Bu yüzden $Q^\alpha_{1\theta}, Q^\alpha_{2\theta}, Q^\alpha_{3\theta}, Q^\alpha_{4\theta}$ve $Q^\alpha_{5\theta}$, α üyelik derecesi ile verilen beş aynı noktanın kümesi benzer şekilde $R_{1\theta}^{\alpha}, R_{2\theta}^{\alpha}, R_{3\theta}^{\alpha}, R_{4\theta}^{\alpha}$ ve $R_{5\theta}^{\alpha}$ α üyelik derecesi ile verilen beş aynı noktanın kümesidir.$FP_{\theta U}^{\alpha}$, $Q_{i\theta}^{\alpha}$ lardan geçen parabol ve $FP_{\theta L}^{\alpha}$, $R_{i\theta}^{\alpha}$ lardan geçen paraboldür.θ , $[0,2\pi]$ aralığında ve α ,[0,1] aralığında değiştiğinde $\widetilde{FP}$ de $FP_{\theta L}^{\alpha}$ ve $FP_{\theta U}^{\alpha}$ gibi paraboller oluşur. Fuzzy parabolik parça α üyelik derecesi ile verilen $FP_{\theta L}^{\alpha}$ ve $FP_{\theta U}^{\alpha}$ ların koleksiyonudur.

$$\widetilde{FP}_{1,\ldots,5} = \bigcup_{\substack{\theta\in[0,2\pi] \\ \alpha\in[0,1]}} \{FP_{\theta L}^{\alpha}, FP_{\theta U}^{\alpha}\}$$

dir. FP , $\widetilde{FP}$ Fuzzy parabolünün desteğinde bir parabol olsun. $\widetilde{FP}$ de FP ;

$\mu\left(FP \middle| \widetilde{FP}\right) = \min\limits_{(x,y)\in FP} \mu\left((x,y) \middle| \widetilde{FP}\right)$ üyeliği ile verilir.

Teorem 2.1.2.1 (Ghosh ve Chakraborty 2019) $FP, \widetilde{FP}$ Fuzzy parabolü üzerinde bir parabol olduğunu varsayalım ve $i = 1, 2, 3, 4, 5$ için $\mu\left((x_i, y_i) \middle| \widetilde{FP}\right) = \alpha$ üyelik derecesi ile verilen beş aynı nokta $(x_i, y_i) \in \widetilde{P_i}(0)$ mevcut olsun öyle ki FP, bu beş (x_i, y_i) den geçen bir paraboldür. Öyleyse $\mu\left(FP \middle| \widetilde{FP}\right) = \alpha$ olur.

İspat:

$\mu\left(FP \middle| \widetilde{FP}\right) \nless \alpha$ ve $\mu\left(FP \middle| \widetilde{FP}\right) \ngtr \alpha$ olduğunu göstermeliyiz.

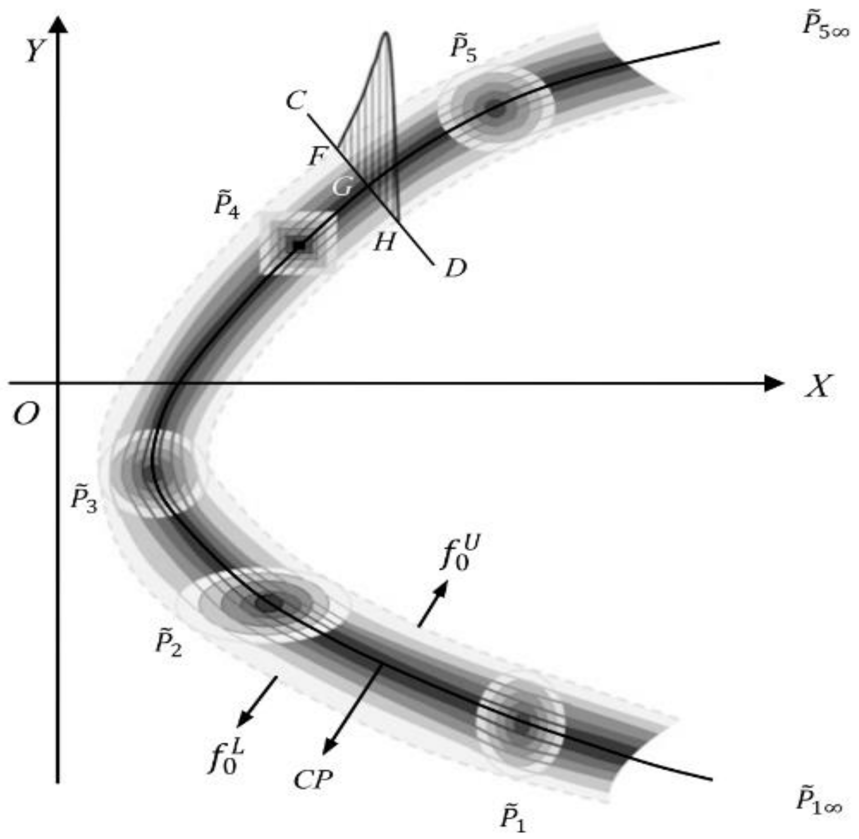
(i) Tersine $\mu\left(FP \middle| \widetilde{FP}\right) < \alpha$ alalım. $\mu\left(FP \middle| \widetilde{FP}\right)$ tanımından, $\widetilde{FP}$ içinde (x_0, y_0) mevcuttur öyle ki $(x_0, y_0) \in FP$ ve $\mu\left(FP \middle| \widetilde{FP}\right) < \alpha$ dır. $\mu\left(FP \middle| \widetilde{FP}\right) = \beta$ olsun. $(x_0, y_0) \in FP$ ve FP, α üyelik değeri ile verilen beş aynı noktayı birleştiren parabol iken

$$\mu\left((x_0, y_0) \middle| \widetilde{FP}\right) = \sup\left\{\begin{matrix} \delta: (x,y); \delta \text{ üyelik değeri ile verilen beş aynı} \\ \text{noktayı birleştiren parabol üzerinde olan nokta} \end{matrix}\right\} \geq \alpha$$

olur. Bununla birlikte $\beta < \alpha$ olduğundan dolayı bir çelişki ortaya çıkar. Bu yüzden $\mu\left(FP \middle| \widetilde{FP}\right) \nless \alpha$ olur.

(ii) $\mu\left(FP \middle| \widetilde{FP}\right) = \min\left\{\alpha: (x,y), FP \text{ üzerinde ve } \mu\left(FP \middle| \widetilde{FP}\right) = \alpha\right\}$ ve $i = 1, 2, 3, 4, 5$ için (x_i, y_i) tüm noktalar, FP üzerinde olduğundan bu kısım açıktır. (Büyük olamaz).

Böylece ispat tamamlanır yani $\mu\left(FP\middle|\,\widetilde{FP}\,\right) = \alpha$ olur.



Şekil 2.3: Tamamlanmış Fuzzy Parabol

$\widetilde{FP}$ de kesin parabol $CP \equiv \widetilde{FP}(1)$ ye dik bir doğru göz önünde bulundurulursa bu doğru boyunca $\widetilde{FP}(0)$ üzerinde Fuzzy bir sayı olduğunu unutmayalım. Örneğin CD doğrusu alınırsa, o zaman CD boyunca Fuzzy sayı $(F/G/H)_{LR}$, LR tipinde bulunabilir. Böylece Fuzzy parabol boyunca çapraz kesiti, üç boyutlu Fuzzy sayı olan $(F/G/H)$, (temelde $R^2 \times [0,1]$ in alt kümesi) olarak görselleştirilebilir.

Fuzzy parabol $\widetilde{FP}$, Fuzzy noktaların bir bileşimi olarak düşünülebilir. Bu görselleştirmeye göre $\widetilde{FP}$ deki $(F/G/H)_{LR}$ Fuzzy sayısını düşünelim. $\widetilde{FP}(0)$, destek kümesi konveks küme olsun öyle ki FH doğru parçasındaki tüm noktalar, F ve H hariç konveks bölgenin iç noktalarıdır.

2.1.2.1 Örnek: $\widetilde{P}_1(5,-4), \widetilde{P}_2(3,-2\sqrt{2}), \widetilde{P}_3(1{,}0), \widetilde{P}_4(2{,}2)$ ve $\widetilde{P}_5(4{,}2\sqrt{3})$ beş Fuzzy nokta olsun. Bu beş Fuzzy noktanın üyelik fonksiyonları sırasıyla

$$\{(x,y):(x-5)^2+(y+4)^2 \le 1\} \text{ çembersel,}$$

$$\left\{(x,y):(x-3)^2+4\left(y+2\sqrt{2}\right)^2 \le 1\right\} \text{elipsel,}$$

$$\{(x,y):(x-1)^2+y^2 \le 1\} \quad \text{çembersel,}$$

$$\{(x,y):4(x-2)^2+(y-2)^2 \le 1\} \text{ elipsel,}$$

ve

$$\left\{(x,y):(x-4)^2+\left(y-2\sqrt{3}\right)^2 \le 1\right\} \text{ çembersel}$$

konikler olsun. Üyelik fonksiyonların tepe noktaları sırasıyla $(5,-4), \left(3,-2\sqrt{2}\right), (1{,}0), (2{,}2)$ ve $\left(4{,}2\sqrt{3}\right)$ olsun. Burada kesin parabol $\{(x,y): y^2 = 4x-4\}$ tür. $\alpha \in [0{,}1]$ ler için $\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2, \widetilde{P}_3, \widetilde{P}_4$ ve $\widetilde{P}_5$ de üyelik dereceleri α olan aynı beş noktalar;

$$Q_{1\theta}^{\alpha}:(X_{1\theta}^{\alpha}, Y_{1\theta}^{\alpha}) = (5+(1-\alpha)\cos\theta, -4+(1-\alpha)\sin\theta)$$

$$Q_{2\theta}^{\alpha}:(X_{2\theta}^{\alpha}, Y_{2\theta}^{\alpha}) = \left(3+(1-\alpha)\frac{\cos\theta}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}, -2\sqrt{2}+(1-\alpha)\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}\right)$$

$$Q_{3\theta}^{\alpha}:(X_{3\theta}^{\alpha}, Y_{3\theta}^{\alpha}) = (1+(1-\alpha)\cos\theta, (1-\alpha)\sin\theta)$$

$$Q_{4\theta}^{\alpha}:(X_{4\theta}^{\alpha}, Y_{4\theta}^{\alpha}) = \left(2+(1-\alpha)\frac{\cos\theta}{\sqrt{3\cos^2\theta+1}}, 2+(1-\alpha)\frac{\sin\theta}{\sqrt{3\cos^2\theta+1}}\right)$$

ve

$$Q_{5\theta}^{\alpha}:(X_{5\theta}^{\alpha}, Y_{5\theta}^{\alpha}) = \left(4+(1-\alpha)\cos\theta, 2\sqrt{3}+(1-\alpha)\sin\theta\right)$$

olsun. $Q_{1\theta}^{\alpha}, Q_{2\theta,}^{\alpha} Q_{3\theta,}^{\alpha} Q_{4\theta}^{\alpha}$ ve $Q_{5\theta}^{\alpha}$ den geçen E_{θ}^{α} dediğimiz parabol aşağıdaki denklem tarafından belirlenir.

$$a_{\theta}^{\alpha}x^2 + 2h_{\theta}^{\alpha}xy + b_{\theta}^{\alpha}y^2 + 2g_{\theta}^{\alpha}x + 2f_{\theta}^{\alpha}y + c_{\theta}^{\alpha} = 0 \text{ ve } {h_{\theta}^{\alpha}}^2 = a_{\theta}^{\alpha}.b_{\theta}^{\alpha} \tag{2.3}$$

$$a_{\theta}^{\alpha} = \frac{2h_{\theta}^{\alpha}}{k_{\theta}^{\alpha}}\begin{vmatrix} -x_{1\theta}^{\alpha}y_{1\theta}^{\alpha} & {y_{1\theta}^{\alpha}}^2 & x_{1\theta}^{\alpha} & y_{1\theta}^{\alpha} & 1 \\ -x_{2\theta}^{\alpha}y_{2\theta}^{\alpha} & {y_{2\theta}^{\alpha}}^2 & x_{2\theta}^{\alpha} & y_{2\theta}^{\alpha} & 1 \\ -x_{3\theta}^{\alpha}y_{3\theta}^{\alpha} & {y_{3\theta}^{\alpha}}^2 & x_{3\theta}^{\alpha} & y_{3\theta}^{\alpha} & 1 \\ -x_{4\theta}^{\alpha}y_{4\theta}^{\alpha} & {y_{4\theta}^{\alpha}}^2 & x_{4\theta}^{\alpha} & y_{4\theta}^{\alpha} & 1 \\ -x_{5\theta}^{\alpha}y_{1\theta}^{\alpha} & {y_{5\theta}^{\alpha}}^2 & x_{5\theta}^{\alpha} & y_{5\theta}^{\alpha} & 1 \end{vmatrix},$$

$$b_{\theta}^{\alpha} = \frac{2h_{\theta}^{\alpha}}{k_{\theta}^{\alpha}}\begin{vmatrix} {x_{1\theta}^{\alpha}}^2 & -x_{1\theta}^{\alpha}y_{1\theta}^{\alpha} & x_{1\theta}^{\alpha} & y_{1\theta}^{\alpha} & 1 \\ {x_{2\theta}^{\alpha}}^2 & -x_{2\theta}^{\alpha}y_{2\theta}^{\alpha} & x_{2\theta}^{\alpha} & y_{2\theta}^{\alpha} & 1 \\ {x_{3\theta}^{\alpha}}^2 & -x_{3\theta}^{\alpha}y_{3\theta}^{\alpha} & x_{3\theta}^{\alpha} & y_{3\theta}^{\alpha} & 1 \\ {x_{4\theta}^{\alpha}}^2 & -x_{4\theta}^{\alpha}y_{4\theta}^{\alpha} & x_{4\theta}^{\alpha} & y_{4\theta}^{\alpha} & 1 \\ {x_{5\theta}^{\alpha}}^2 & -x_{5\theta}^{\alpha}y_{1\theta}^{\alpha} & x_{5\theta}^{\alpha} & y_{5\theta}^{\alpha} & 1 \end{vmatrix}$$

$$g_{\theta}^{\alpha} = \frac{h_{\theta}^{\alpha}}{k_{\theta}^{\alpha}}\begin{vmatrix} {x_{1\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{1\theta}^{\alpha}}^2 & -x_{1\theta}^{\alpha}y_{1\theta}^{\alpha} & y_{1\theta}^{\alpha} & 1 \\ {x_{2\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{2\theta}^{\alpha}}^2 & -x_{2\theta}^{\alpha}y_{2\theta}^{\alpha} & y_{2\theta}^{\alpha} & 1 \\ {x_{3\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{3\theta}^{\alpha}}^2 & -x_{3\theta}^{\alpha}y_{3\theta}^{\alpha} & y_{3\theta}^{\alpha} & 1 \\ {x_{4\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{4\theta}^{\alpha}}^2 & -x_{4\theta}^{\alpha}y_{4\theta}^{\alpha} & y_{4\theta}^{\alpha} & 1 \\ {x_{5\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{5\theta}^{\alpha}}^2 & -x_{5\theta}^{\alpha}y_{5\theta}^{\alpha} & y_{5\theta}^{\alpha} & 1 \end{vmatrix}$$

$$f_{\theta}^{\alpha} = \frac{h_{\theta}^{\alpha}}{k_{\theta}^{\alpha}}\begin{vmatrix} {x_{1\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{1\theta}^{\alpha}}^2 & x_{1\theta}^{\alpha} & -x_{1\theta}^{\alpha}y_{1\theta}^{\alpha} & 1 \\ {x_{2\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{2\theta}^{\alpha}}^2 & x_{2\theta}^{\alpha} & -x_{2\theta}^{\alpha}y_{2\theta}^{\alpha} & 1 \\ {x_{3\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{3\theta}^{\alpha}}^2 & x_{3\theta}^{\alpha} & -x_{3\theta}^{\alpha}y_{3\theta}^{\alpha} & 1 \\ {x_{4\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{4\theta}^{\alpha}}^2 & x_{4\theta}^{\alpha} & -x_{4\theta}^{\alpha}y_{4\theta}^{\alpha} & 1 \\ {x_{5\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{5\theta}^{\alpha}}^2 & x_{5\theta}^{\alpha} & -x_{5\theta}^{\alpha}y_{5\theta}^{\alpha} & 1 \end{vmatrix}$$

$$c_{\theta}^{\alpha} = \frac{2h_{\theta}^{\alpha}}{k_{\theta}^{\alpha}}\begin{vmatrix} {x_{1\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{1\theta}^{\alpha}}^2 & x_{1\theta}^{\alpha} & y_{1\theta}^{\alpha} & -x_{1\theta}^{\alpha}y_{1\theta}^{\alpha} \\ {x_{2\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{2\theta}^{\alpha}}^2 & x_{2\theta}^{\alpha} & y_{2\theta}^{\alpha} & -x_{2\theta}^{\alpha}y_{2\theta}^{\alpha} \\ {x_{3\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{3\theta}^{\alpha}}^2 & x_{3\theta}^{\alpha} & y_{3\theta}^{\alpha} & -x_{3\theta}^{\alpha}y_{3\theta}^{\alpha} \\ {x_{4\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{4\theta}^{\alpha}}^2 & x_{4\theta}^{\alpha} & y_{4\theta}^{\alpha} & -x_{4\theta}^{\alpha}y_{4\theta}^{\alpha} \\ {x_{5\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{5\theta}^{\alpha}}^2 & x_{5\theta}^{\alpha} & y_{5\theta}^{\alpha} & -x_{5\theta}^{\alpha}y_{5\theta}^{\alpha} \end{vmatrix}$$

ve

$$k_\theta^\alpha = \begin{vmatrix} {x_{1\theta}^\alpha}^2 & {y_{1\theta}^\alpha}^2 & x_{1\theta}^\alpha & y_{1\theta}^\alpha & 1 \\ {x_{2\theta}^\alpha}^2 & {y_{2\theta}^\alpha}^2 & x_{2\theta}^\alpha & y_{2\theta}^\alpha & 1 \\ {x_{3\theta}^\alpha}^2 & {y_{3\theta}^\alpha}^2 & x_{3\theta}^\alpha & y_{3\theta}^\alpha & 1 \\ {x_{4\theta}^\alpha}^2 & {y_{4\theta}^\alpha}^2 & x_{4\theta}^\alpha & y_{4\theta}^\alpha & 1 \\ {x_{5\theta}^\alpha}^2 & {y_{5\theta}^\alpha}^2 & x_{5\theta}^\alpha & y_{5\theta}^\alpha & 1 \end{vmatrix}$$

.

$\tilde{P}_i$ lerden geçen (i=1,2...,5) $\widetilde{FP}_{1,\dots,5}$ Fuzzy parabol parçası $Q_{1\theta}^\alpha$ ve $Q_{5\theta}^\alpha$ lar arasında uzanan E_θ^α tüm olası parabolik parçaların bir bölgesidir.

$$\widetilde{FP}_{1,\dots,5} = \bigcup_{\substack{\theta\in[0,2\pi] \\ \alpha\in[0,1]}} \{a_\theta^\alpha x^2 + 2h_\theta^\alpha xy + b_\theta^\alpha y^2 + 2g_\theta^\alpha x + 2f_\theta^\alpha y + c_\theta^\alpha = 0\}$$

Sonsuz parçalar $\widetilde{FP}_{1\infty}$ ve $\widetilde{FP}_{5\infty}$ aşağıdaki üyelik fonksiyonları ile karar verilir;

$$\mu\left((x\,,y)\middle|\widetilde{FP}_{1\infty}\right) = \begin{cases} \alpha, & y^2 - {y_{1\theta}^\alpha}^2 = 4(x - x_{1\theta}^\alpha), \theta = 63.43 \\ 0, & diğer\ durumlar \end{cases}$$

ve

$$\mu\left((x\,,y)\middle|\widetilde{FP}_{5\infty}\right) = \begin{cases} \alpha, & y^2 - {y_{5\theta}^\alpha}^2 = 4(x - x_{5\theta}^\alpha), \theta = 60 \\ 0, & diğer\ durumlar \end{cases}$$

Sırasıyla $\theta = 63.43^\circ$ ve $\theta = 60^\circ$ açıları kesin parabolün $(5,-4)$ ve $(4,2\sqrt{3})$ noktalarında x ekseni ile pozitif açı yapan açıların normalleridir.

2.1.2.1 Üyelik Fonksiyonu Oluşturma

$\widetilde{FP} = \widetilde{FP}_{1\infty} \cup \widetilde{FP}_{1,\dots,5} \cup \widetilde{FP}_{5\infty}$ un üyelik fonksiyonunu değerlendirmek için üç parçanın üyelik fonksiyonlarını ayrı ayrı değerlendirmeliyiz. Bunlar ortadaki parça $\widetilde{FP}_{1,\dots,5}$ ve $\widetilde{FP}_{1\infty}$ ve $\widetilde{FP}_{5\infty}$ sonsuz uçlardır. $\widetilde{FP}_{1\infty}$ un tanımına göre sonsuz uçların üyelik derecelerinin değerlendirilmesi önemsizdir ve

$$\mu\left((x,y)\middle|\widetilde{FP}_{1\infty}\right) = \sup\left\{\begin{matrix} \alpha: (x,y); \text{kesin parabol } FP_\alpha \text{ üzerinde } \widetilde{P}_1(0)\text{da} \\ \text{bir noktadan geçen ve üyeliği } \alpha \text{ olan nokta} \end{matrix}\right\}$$

ve

$$\mu\left((x,y)\middle|\widetilde{FP}_{5\infty}\right) = \sup\left\{\begin{matrix}\alpha\colon (x,y); \text{kesin parabol } FP_\alpha \text{ üzerinde } \tilde{P}_5(0)\text{da} \\ \text{bir noktadan geçen ve üyeliği } \alpha \text{ olan nokta}\end{matrix}\right\}$$

Bununla birlikte $\mu\left((x,y)\middle|\widetilde{FP}_{1,\dots,5}\right)$ üyelik derecesinin değerlendirilmesi her zaman kolay olmayabilir. Ayrıca $\widetilde{FP}_{1,\dots,5}$ in üyelik fonksiyonunun kapalı formunu elde etmek gerçekten zor bir iştir. Çünkü belirli bir noktadaki üyelik değeri, bir dizi doğrusal olmayan (nonlineer) denklemlerin çözümlerinden elde edilen reel sayılar dizininin supremumudur.

Metot 2'deki Fuzzy parabolün tanımı,

$$\mu\left((x,y)\middle|\widetilde{FP}_{1,\dots,5}\right) = \sup\left\{\begin{matrix}\alpha\colon (x,y);\ \tilde{P}_i \text{ içinde beş noktadan geçen} \\ \text{parabol üzerinde } \alpha \text{ üyelik değeri ile verilen nokta}\end{matrix}\right\}$$

yi kastetmektedir. Bu yüzden $\mu\left((x,y)\middle|\ \widetilde{FP}\ \right)$ yi elde etmek için ilk önce üyelik değeri $\alpha \in [0,1]$ olan beş aynı nokta almalıyız. Daha sonra üyelik değerleri ile verilen beş aynı noktayı birleştiren parabol üzerinde bulunan (x,y) ler için olan α değerleri tanımlanmalıdır. α nın değerlendirilmesi doğrusal olmayan bir denklem çözmeyi gerektirebilir. Bu α değerlerinin supremumu, $\mu\left((x,y)\middle|\widetilde{FP}_{1,\dots,5}\right)$ üyelik değerini verir.

Geometrik olarak da bu üyelik derecesini içeren parabol kesin parabolümüze yakın olan bu parabollerden birisi olacaktır. Hangisi olacağına denklemi çözerek karar vermemiz en doğrusu olur. Aşağıdaki paragraf $\tilde{P}_i$ beş Fuzzy noktalardan geçen $\widetilde{FP}$ Fuzzy parabolün içinde (x_0,y_0) noktasının üyelik değerini tanımlamak için sistematik bir prosedürü gösterir. $(i = 1,2,,\dots,5)$ $\theta \in [0,2\pi]$ ve $\alpha \in [0,1]$ verilsin. $\tilde{P}_i$ler üzerinde aynı noktaları

$$(x_{1\theta}^{\alpha}, y_{1\theta}^{\alpha}), (x_{2\theta}^{\alpha}, y_{2\theta}^{\alpha}), (x_{3\theta}^{\alpha}, y_{3\theta}^{\alpha}), (x_{4\theta}^{\alpha}, y_{4\theta}^{\alpha}) ve\ (x_{5\theta}^{\alpha}, y_{5\theta}^{\alpha})$$

ile gösterelim.

Konik E_θ^α üzerinde (x_0,y_0) ın olası α larının kümesini tanımlamak için $\theta = \theta_0 \in [0,2\pi]$ belirli değerini saptarız ve E_θ^α nın (2.3) denklemini tanımlarız. Buna göre α üzerinde bir denklem elde edilecektir. Bu denklemi çözeceğiz. Böylece S_{θ_0} dediğimiz $E_{\theta_0}^\alpha$ üzerindeki (x_0,y_0) nın olası değerlerinin kümesi elde edilir. S_{θ_0} ın supremum değerini alıyoruz ve bu da s_{θ_0} olsun. O zaman $[0,2\pi]$ kümesi boyunca θ_0 ı değiştiririz ve $s_{\theta_0}^{\alpha}$ ları bulmaya devam ederiz.

$\widetilde{FP}$ Fuzzy parabolü içinde (x_0, y_0) ın üyelik değeri $\mu\left((x_0, y_0) \middle| \widetilde{FP}\right) = sup s_{\theta_0}$ ile verilir. Alttaki örnek prosedürü sayısal olarak göstermektedir. Örnek 2.1.2.1 de verilen Fuzzy parabolünü düşünelim. $\widetilde{FP}$ Fuzzy parabolünün $(2, 1.78)$ noktasının üyelik değerini belirlemeye çalışıyoruz. İlk olarak, $(2, 1.78)$ noktanın üzerinde olduğu E_{θ}^{α} parabolünün kümesini belirliyoruz. E_{θ}^{α} nın denkleminin denklem (2.3) deki gibi olması için α olası değerlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım;

$$a_{\theta}^{\alpha}(2)^2 + 2h_{\theta}^{\alpha}(2)(1.78) + b_{\theta}^{\alpha}(1.78)^2 + 2g_{\theta}^{\alpha}(2) + 2f_{\theta}^{\alpha}(1.78) + c_{\theta}^{\alpha} = 0$$

yani

$$4a_{\theta}^{\alpha} + 7.12h_{\theta}^{\alpha} + 3.1684b_{\theta}^{\alpha} + 4g_{\theta}^{\alpha} + 3.56f_{\theta}^{\alpha} + c_{\theta}^{\alpha} = 0 \qquad (2.4)$$

elde edilir. $\theta = 45^{\circ}$ alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$-105.61 - 1462.04\alpha + 813.94\,\alpha^2 - 115.70\alpha^3 + 3.91\alpha^4 = 0$$

Denklem çözüldüğünde

$$\alpha = -0.07, 2.96, 6.49, 20.19$$

değerleri bulunur. α nın aralığı gereği çözüm kümesi boş kümedir. (2.4) denkleminde $\theta = 30^{\circ}$ alınırsa

$$638.35 - 2499.86\alpha + 1263.57\,\alpha^2 - 290.39\alpha^3 + 22.83\alpha^4 = 0$$

bulunur. Bu denklem çözüldüğünde

$$\alpha = 0.30, 6.92$$

değerleri elde edilir. $\mu\left((2,1.78) \middle| \widetilde{FP}\right) = 0.30$ bulunur.

3. FUZZY ELİPS

Bu bölümde koniklerden elipsi ele alacağız. Fuzzy elipsi elde etmek için beş Fuzzy noktası bilinen bir koniği elde etme yöntemini kullanacağız.

$\widetilde{E}_i(a_i, b_i),\ i = 1,2,3,4,5$ çekirdeği kesin bir CE dediğimiz elipsin üzerinde olan beş Fuzzy nokta olsun. Bu beş Fuzzy noktadan geçen Fuzzy bir elips oluşturmak için bir Fuzzy $\widetilde{FE}_{1,\dots,5}$ dediğimiz eliptik parça çizmeliyiz.

$$\widetilde{FE} = \bigcup \widetilde{FE}_{1,\dots,5}$$

olarak tanımlanacak ve aşağıda ifade edilen biçimde elde edilecektir.

3.1 $\widetilde{FE}_{1,\dots,5}$ i Elde Etme

$$\widetilde{FE}_{1,\dots,5} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \left\{ \begin{matrix} FE_\alpha : \tilde{E}_i(a_i, b_i)\ \ i = 1,2,3,4,5 \text{ noktalarından geçen üyelik} \\ \text{derecesi } \alpha \text{ olan beş aynı noktadan geçen kesin elips} \end{matrix} \right\}$$

Matematiksel olarak $\widetilde{FE}_{1,\dots,5}$ parçası üyelik fonksiyonu yardımıyla

$$\mu\left((x\,, y)\middle|\widetilde{FE}_{1,\dots,5}\right) = \sup \left\{ \begin{matrix} \alpha : (x, y);\ FE_\alpha \text{üzerindeki } \tilde{E}_i, i = 1,2,3,4,5 \text{ de beş aynı} \\ \text{noktadan geçen ve üyelik değeri } \alpha \text{ olan nokta} \end{matrix} \right\}$$

şeklinde tanımlıdır. Tanıma göre $\widetilde{FE}_{1,\dots,5}$ Fuzzy elipsi çeşitli üyelik değerlerine sahip kesin noktaların koleksiyonudur. Ayrıca $\mu\left((x, y)\middle|\widetilde{FE}_{1,\dots,5}\right)$ üyelik fonksiyonunun tanımı gösteriyor ki Fuzzy elipsi $\tilde{E}_i, i = 1,2,3,4,5$ ların desteği üzerindeki beş aynı noktadan geçen yani üyelik dereceleri sıfır hariç sıfır ile bir aralığında olan noktalar ile oluşturulan kesin elipslerin birleşimidir.

3.2 Üyelik Fonksiyonu Oluşturma

$\mu((x, y)|\widetilde{FE}_{1,\dots,5})$ üyelik derecesinin değerlendirmesi her zaman kolay olmayabilir. Ayrıca $\widetilde{FE}_{1,\dots,5}$ in üyelik fonksiyonunun kapalı formunu elde etmek gerçekten zor bir iştir. Çünkü belirli bir noktadaki üyelik değeri, bir dizi doğrusal olmayan (nonlineer) denklemlerin çözümlerinden elde edilen reel sayılar dizisinin supremumudur. Fuzzy elipsin tanımında μ üyelik fonksiyonu olarak,

$$\mu\left((x,y)\middle|\,\widetilde{FE}_{1,2,\dots,5}\right)=\sup\left\{\begin{matrix}\alpha:(x,y),\tilde{E}_i \text{ içinde beş aynı noktadan geçen elips} \\ \text{üzerinde } \alpha \text{ üyelik değeri ile verilen nokta}\end{matrix}\right\}$$

kastedilmektedir. Bu yüzden $\mu\left((x,y)\middle|\,\widetilde{FE}\right)$ yi elde etmek için ilk önce üyelik değeri $\alpha \in [0,1]$ olan beş aynı nokta almalıyız. Daha sonra üyelik değerleri ile verilen beş aynı noktayı birleştiren elips üzerinde bulunan (x,y) ler için olan α değerleri tanımlanmalıdır. α nın değerlendirilmesi doğrusal olmayan bir denklem çözmeyi gerektirebilir. Bu α değerlerinin supremumu, $\mu\left((x,y)\middle|\,\widetilde{FE}_{1,2,\dots,5}\right)$ üyelik derecesini verir.

Şekil 3.1' de görüldüğü üzere (x,y) noktasında üyelik dereceleri ile elipse paralel gerçek elipsler çizebiliriz. Bu elipsler için üyelik derecelerinin supremumunu bulmak ortaya çıkacak nonlineer denklem sistemin çözümü ile mümkündür. Geometrik olarak bu üyelik derecesini içeren elips kesin elipsimize paralel olan bu elipslerden biri olacaktır. Buna üyelik derecesinin denklemini çözünce karar vermemiz en doğrusu olur.

Aşağıda $\tilde{E}_i$ beş Fuzzy noktadan geçen $\widetilde{FE}$ Fuzzy elipsinin içinde (x_0,y_0) noktasının üyelik değerlerini tanımlamak için sistematik bir prosedür bulunur.

$\tilde{E}_i$ ler üzerinde üyelik dereceleri aynı noktaları

$$(x_{1\theta}^{\alpha},y_{1\theta}^{\alpha}),(x_{2\theta}^{\alpha},y_{2\theta}^{\alpha}),(x_{3\theta}^{\alpha},y_{3\theta}^{\alpha}),(x_{4\theta}^{\alpha},y_{4\theta}^{\alpha}),(x_{5\theta}^{\alpha},y_{5\theta}^{\alpha})$$

ile gösterelim.

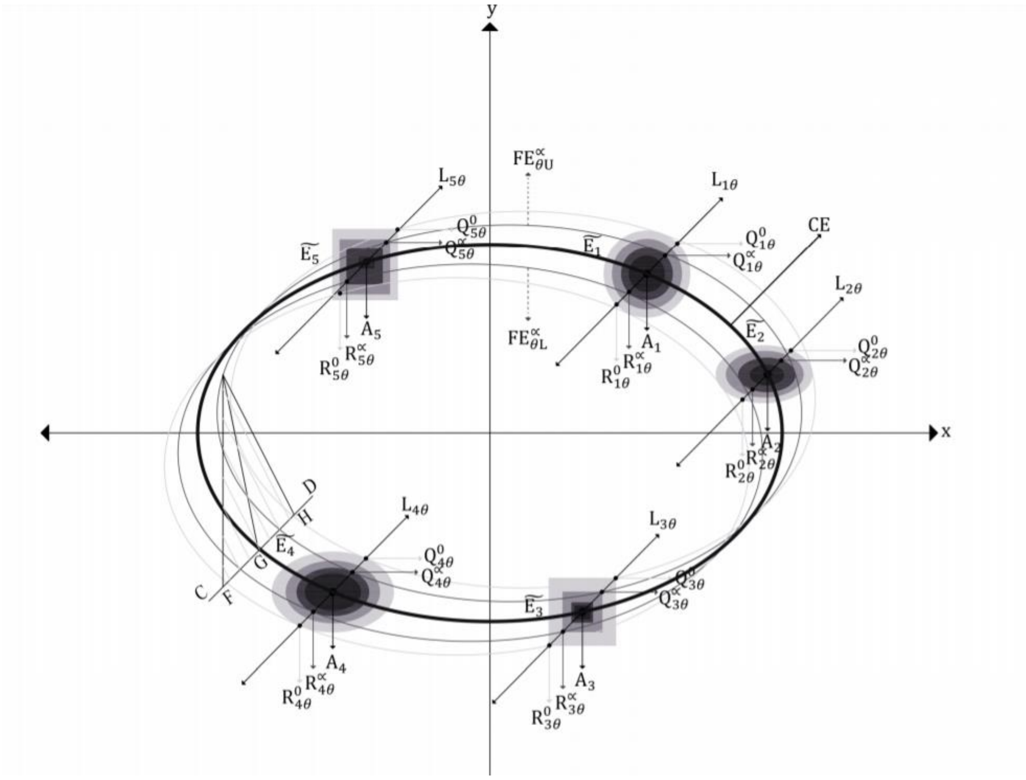
Konik E_{θ}^{α} üzerinde (x_0,y_0) ın olası α üyelik değerlerinin kümesini tanımlamak için $\theta=\theta_0 \in [0,2\pi]$ belirli değerlerini saptarız ve E_{θ}^{α} ın

$$a_{\theta}^{\alpha}x^2+2h_{\theta}^{\alpha}xy+b_{\theta}^{\alpha}y^2+2g_{\theta}^{\alpha}x+2f_{\theta}^{\alpha}y+c_{\theta}^{\alpha}=0 \text{ ve } {h_{\theta}^{\alpha}}^2<a_{\theta}^{\alpha}.b_{\theta}^{\alpha}$$

denklemini tanımlarız. Buna göre α üzerinde bir denklem elde edilecektir, bulunan bu denklemi çözeceğiz. Böylece S_{θ} dediğimiz $E_{\theta_0}^{\alpha}$ üzerindeki (x_0,y_0) ın olası değerlerinin kümesi elde edilir. S_{θ_0} ın supremumu değerini alırız ve bu da s_{θ} olsun.

O zaman $[0,2\pi]$ kümesi boyunca θ_0 değerini değiştiririz ve s_θ^α ları bulmaya devam ederiz. $\widetilde{FE}$ Fuzzy elipsi içinde (x_0, y_0)ın üyelik değeri $\mu\left((x,y)\middle|\, \widetilde{FE}\right) = \sup s_{\theta_0}$ ile verilir.

$\widetilde{FE}$ yi elde etmek için $\widetilde{E_1}, \widetilde{E_2}, \ldots, \widetilde{E_5}$ beş aynı noktanın birleşiminden oluşan $\widetilde{FE}_{1,\ldots,5}$ elipsini düşünelim.



Şekil 3.1: Fuzzy Elipsin Elde Edilişi

Yukarıdaki şekilde $\widetilde{FE}$ Fuzzy elipsini oluşturulan $\widetilde{E}_1, \widetilde{E}_2, \widetilde{E}_3, \widetilde{E}_4$ve $\widetilde{E}_5$ noktalarını düşündük. A_1 merkezli çembersel bölge, A_2 merkezli elips bölge A_3 merkezli dörtgensel bölge, A_4 merkezli elips bölgesi ve A_5 merkezli dörtgensel bölge sırasıyla $\widetilde{E}_1, \widetilde{E}_2, \widetilde{E}_3, \widetilde{E}_4$ve $\widetilde{E}_5$ noktalarının destekleridir. Gri gölgeli bölgeler Fuzzy noktaların destekleri içindeki farklı α-kesimlerin bölgelerini göstermektedir. Fuzzy noktalar için üyelik derecelerinin değişmesi gri seviyelerinin yoğunluğu ile gösterilir. En koyu gri seviye en yüksek üyelik fonksiyonudur. $\tilde{E}_i$ deki A_i lerin üyelik dereceleri 1 dir ve $\tilde{E}_i$ lerin desteğinin çevresinde giderek 0 a doğru düşer.

A_i den geçen $L_{i\theta}$ doğrularını düşünelim. ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) Bu beş doğru x ekseni ile θ derece açı yapar. $\tilde{E}_i(A_i)(\alpha)$, bir Fuzzy noktanın α -kesimleridir, konvekstir ve A_i , $\tilde{E}_i(A_i)(\alpha)$ nın içteki noktasıdır, $L_{i\theta}$ doğrusu $\tilde{E}_i(A_i)(\alpha)$ nın iki noktasında sınırları ile kesişir. Burada kesişen iki nokta $Q_{i\theta}^{\alpha}$ ve $R_{i\theta}^{\alpha}$ olsun. Bu yüzden $Q_{1\theta}^{\alpha}, Q_{2\theta}^{\alpha}, Q_{3\theta}^{\alpha}, Q_{4\theta}^{\alpha}$ve $Q_{5\theta}^{\alpha}$, α üyelik derecesi ile verilen beş aynı noktanın kümesi benzer şekilde $R_{1\theta}^{\alpha}, R_{2\theta}^{\alpha}, R_{3\theta}^{\alpha}, R_{4\theta}^{\alpha}$ve $R_{5\theta}^{\alpha}$ α üyelik derecesi ile verilen beş aynı noktanın kümesidir. $FE_{\theta U}^{\alpha}$, $Q_{i\theta}^{\alpha}$ lardan geçen elips ve $FE_{\theta L}^{\alpha}$ da, $R_{i\theta}^{\alpha}$ lardan geçen elipstir. θ , $[0,2\pi]$ aralığında ve α da [0,1] aralığında değiştiğinde $\widetilde{FE}$ de $FE_{\theta L}^{\alpha}$ve $FE_{\theta U}^{\alpha}$ gibi elipsler oluşur. Fuzzy eliptik parça α üyelik derecesi ile verilen $FE_{\theta L}^{\alpha}$ ve $FE_{\theta U}^{\alpha}$ ların koleksiyonudur.

$$\widetilde{FE}_{1,\dots,5} = \bigcup_{\substack{\theta\in[0,2\pi] \\ \alpha\in[0,1]}} \{FE_{\theta L}^{\alpha}, FE_{\theta U}^{\alpha}\}$$

dir. FE , $\widetilde{FE}$ Fuzzy elipsinin desteğinde bir elips olsun.

$\mu\left(FE \middle| \widetilde{FE}\right) = \min\ \mu\left((x,y)\middle|\widetilde{FE}\right)$ üyeliği ile verilir.

Teorem 3.2.1: $FE, \widetilde{FE}$ Fuzzy elipsi üzerinde bir elips olduğunu varsayalım ve $i = 1, 2, 3, 4, 5$ için $\mu\left((x_i, y_i)\middle| \widetilde{FE}\right) = \alpha$ üyelik derecesi ile verilen beş aynı nokta $(x_i, y_i) \in \widetilde{E}_i(0)$ olsun. Öyle ki FE, bu beş (x_i, y_i) noktalarından geçen bir elipstir, öyleyse $\mu\left(FE \middle| \widetilde{FE}\right) = \alpha$ olur.

İspat:

i) $\mu\left(FE\middle| \widetilde{FE}\right) \nless \alpha$ ve ii) $\mu\left(FE\middle| \widetilde{FE}\right) \ngtr \alpha$ olduğunu göstermeliyiz.

i) Tersine $\mu\left(FE\middle| \widetilde{FE}\right) < \alpha$ alalım. $\mu\left(FE\middle| \widetilde{FE}\right)$ tanımından, $\widetilde{FE}$ içinde (x_0, y_0) noktası mevcuttur öyle ki $(x_0, y_0) \in FE$ ve $\mu\left((x_0, y_0)\middle| \widetilde{FE}\right) < \alpha$ dır.

$\mu\left((x_0, y_0)\middle| \widetilde{FE}\right) = \beta$ olsun. $(x_0, y_0) \in FE$ ve FE, α üyelik değeri ile verilen beş aynı noktayı birleştiren elips iken

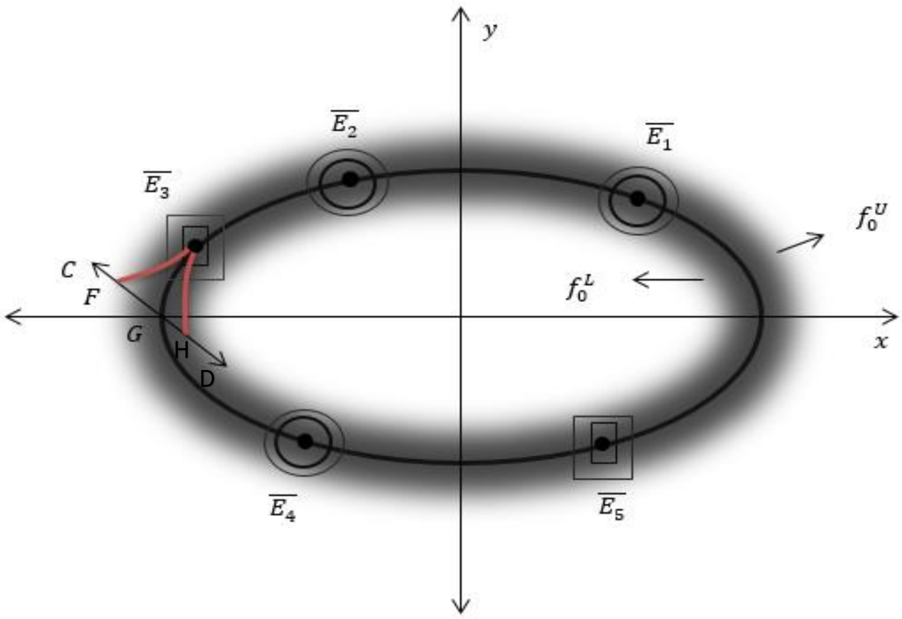
$$\mu\left((x_0, y_0)\middle| \widetilde{FE}\right) = \sup\left\{\begin{matrix} \delta: (x, y), \delta \text{ üyelik değeri ile verilen beş aynı} \\ \text{noktayı birleştiren elips üzerinde olan nokta}\end{matrix}\right\} \geq \alpha$$

olur. Bununla birlikte $\beta < \alpha$ olduğundan dolayı bir çelişki ortaya çıkar. Bu yüzden $\mu\left(FE\middle|\,\widetilde{FE}\ \right) \nless \alpha$ olmalıdır.

ii) $\mu\left(FE\middle|\,\widetilde{FE}\right) = \min\left\{\alpha: (x,y), FE \text{ üzerinde ve } \mu\left((x,y)\middle|\,\widetilde{FE}\right) = \alpha\right\}$ ve $i = 1,2,3,4,5$ için tüm (x_i, y_i) noktaları FE üzerinde olduğundan bu kısmın ispatı açıktır. Yani $\mu\left(FE\middle|\,\widetilde{FE}\ \right) = \alpha$ olur.

$\widetilde{FE}$ de kesin elipse $CE \equiv \widetilde{FE}\ (1)$ dik bir doğru göz önünde bulundurulursa, bu doğru boyunca $\widetilde{FE}(0)$ üzerinde bir Fuzzy sayı olduğunu unutmayalım. Örneğin CD doğrusu alınırsa, o zaman CD boyunca Fuzzy sayı $(F/G/H)_{LR}$, LR tipinde bulunabilir. Böylece Fuzzy elips boyunca çapraz kesiti, üç boyutlu Fuzzy sayı olan $(F/G/H)$, (temelde $R^2 \times [0,1]$ in alt kümesi) olarak görselleştirilebilir.

Fuzzy elips $\widetilde{FE}$, Fuzzy noktaların bir bileşimi olarak düşünülebilir. Bu görselleştirmeye göre $\widetilde{FE}$ deki $(F/G/H)_{LR}$ Fuzzy sayısını düşünelim. $\widetilde{FE}(0)$, destek kümesindeki konveks küme olsun öyle ki FH doğru parçasındaki tüm noktalar, F ve H hariç konveks bölgenin iç noktalarıdır.



Şekil 3.2: Tamamlanmış Fuzzy Elips

3.3 Fuzzy Elips Uygulamaları

Bu bölümde Fuzzy elips uygulamalarına yer vereceğiz.

Örnek 3.3.1 $\tilde{E}_1(1,0), \tilde{E}_{22}\left(\frac{1}{5}, \frac{4\sqrt{6}}{5}\right), \tilde{E}_3\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right), \tilde{E}_4\left(-\frac{1}{2}, -\sqrt{3}\right)$ ve $\tilde{E}_5\left(\frac{1}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$ beş Fuzzy nokta olsun. Bu beş Fuzzy noktanın üyelik fonksiyonları sırasıyla

$$\{(x,y): (x-1)^2 + y^2 \leq 1\} \qquad \text{(Çembersel)}$$

$$\left\{(x,y): \left(x-\frac{1}{5}\right)^2 + 4\left(y-\frac{4\sqrt{6}}{5}\right)^2 \leq 1\right\} \qquad \text{(Elipssel)}$$

$$\left\{(x,y): \left(x+\frac{1}{4}\right)^2 + \left(y-\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2 \leq 1\right\} \qquad \text{(Çembersel)}$$

$$\left\{(x,y): \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(y+\sqrt{3}\right)^2 \leq 1\right\} \qquad \text{(Elipssel)}$$

$$\left\{(x,y): \left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2 \leq 1\right\} \qquad \text{(Çembersel)}$$

olsun. Üyelik fonksiyonları tepe noktaları sırasıyla $(1,0)$, $\left(\frac{1}{5}, \frac{4\sqrt{6}}{5}\right)$ $\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\sqrt{3}\right)$ ve $\left(\frac{1}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$ dir. $\alpha \in [0,1]$ ler için $\widetilde{E}_1, \widetilde{E}_2, \widetilde{E}_3, \widetilde{E}_4$ve $\widetilde{E}_5$ de üyelik değerleri α olan beş nokta sırasıyla;

$$Q_{1\theta}^{\alpha}: (X_{1\theta}^{\alpha}, Y_{1\theta}^{\alpha}) = (1 + (1-\alpha)\cos\theta, (1-\alpha)sin\theta)$$

$$Q_{2\theta}^{\alpha}: (X_{2\theta}^{\alpha}, Y_{2\theta}^{\alpha}) = \left(\frac{1}{5} + (1-\alpha)\frac{\cos\theta}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}, \frac{4\sqrt{6}}{5} + (1-\alpha)\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}\right)$$

$$Q_{3\theta}^{\alpha}: (X_{3\theta}^{\alpha}, Y_{3\theta}^{\alpha}) = \left(-\frac{1}{4} + (1-\alpha)\cos\theta, \frac{\sqrt{15}}{2} + (1-\alpha)\sin\theta\right)$$

$$Q_{4\theta}^{\alpha}: (X_{4\theta}^{\alpha}, Y_{4\theta}^{\alpha}) = \left(-\frac{1}{2} + (1-\alpha)\frac{\cos\theta}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}, -\sqrt{3} + (1-\alpha)\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}\right)$$

$$Q_{5\theta}^{\alpha}:(X_{5\theta}^{\alpha},Y_{5\theta}^{\alpha})=\left(\frac{1}{3}+(1-\alpha)\cos\theta,\frac{4\sqrt{2}}{3}+(1-\alpha)\sin\theta\right)$$

olsun. $Q_{1\theta}^{\alpha},Q_{2\theta}^{\alpha},Q_{3\theta}^{\alpha},Q_{4\theta}^{\alpha}$ ve $Q_{5\theta}^{\alpha}$ dan geçen E_{θ}^{α} dediğimiz elips aşağıdaki denklem tarafından belirlenir.

$$a_{\theta}^{\alpha}x^2+2h_{\theta}^{\alpha}xy+b_{\theta}^{\alpha}y^2+2g_{\theta}^{\alpha}x+2f_{\theta}^{\alpha}y+c_{\theta}^{\alpha}=0 \text{ ve } {h_{\theta}^{\alpha}}^2<a_{\theta}^{\alpha}b_{\theta}^{\alpha} \tag{3.1}$$

Şimdi bu denklem için katsayıları hesaplayalım;

$$a_{\theta}^{\alpha}=\frac{2h_{\theta}^{\alpha}}{k_{\theta}^{\alpha}}\begin{vmatrix} -x_{1\theta}^{\alpha}y_{1\theta}^{\alpha} & {y_{1\theta}^{\alpha}}^2 & x_{1\theta}^{\alpha} & y_{1\theta}^{\alpha} & 1 \\ -x_{2\theta}^{\alpha}y_{2\theta}^{\alpha} & {y_{2\theta}^{\alpha}}^2 & x_{2\theta}^{\alpha} & y_{2\theta}^{\alpha} & 1 \\ -x_{3\theta}^{\alpha}y_{3\theta}^{\alpha} & {y_{3\theta}^{\alpha}}^2 & x_{3\theta}^{\alpha} & y_{3\theta}^{\alpha} & 1 \\ -x_{4\theta}^{\alpha}y_{4\theta}^{\alpha} & {y_{4\theta}^{\alpha}}^2 & x_{4\theta}^{\alpha} & y_{4\theta}^{\alpha} & 1 \\ -x_{5\theta}^{\alpha}y_{1\theta}^{\alpha} & {y_{5\theta}^{\alpha}}^2 & x_{5\theta}^{\alpha} & y_{5\theta}^{\alpha} & 1 \end{vmatrix},$$

$$b_{\theta}^{\alpha}=\frac{2h_{\theta}^{\alpha}}{k_{\theta}^{\alpha}}\begin{vmatrix} {x_{1\theta}^{\alpha}}^2 & -x_{1\theta}^{\alpha}y_{1\theta}^{\alpha} & x_{1\theta}^{\alpha} & y_{1\theta}^{\alpha} & 1 \\ {x_{2\theta}^{\alpha}}^2 & -x_{2\theta}^{\alpha}y_{2\theta}^{\alpha} & x_{2\theta}^{\alpha} & y_{2\theta}^{\alpha} & 1 \\ {x_{3\theta}^{\alpha}}^2 & -x_{3\theta}^{\alpha}y_{3\theta}^{\alpha} & x_{3\theta}^{\alpha} & y_{3\theta}^{\alpha} & 1 \\ {x_{4\theta}^{\alpha}}^2 & -x_{4\theta}^{\alpha}y_{4\theta}^{\alpha} & x_{4\theta}^{\alpha} & y_{4\theta}^{\alpha} & 1 \\ {x_{5\theta}^{\alpha}}^2 & -x_{5\theta}^{\alpha}y_{1\theta}^{\alpha} & x_{5\theta}^{\alpha} & y_{5\theta}^{\alpha} & 1 \end{vmatrix}$$

$$g_{\theta}^{\alpha}=\frac{h_{\theta}^{\alpha}}{k_{\theta}^{\alpha}}\begin{vmatrix} {x_{1\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{1\theta}^{\alpha}}^2 & -x_{1\theta}^{\alpha}y_{1\theta}^{\alpha} & y_{1\theta}^{\alpha} & 1 \\ {x_{2\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{2\theta}^{\alpha}}^2 & -x_{2\theta}^{\alpha}y_{2\theta}^{\alpha} & y_{2\theta}^{\alpha} & 1 \\ {x_{3\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{3\theta}^{\alpha}}^2 & -x_{3\theta}^{\alpha}y_{3\theta}^{\alpha} & y_{3\theta}^{\alpha} & 1 \\ {x_{4\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{4\theta}^{\alpha}}^2 & -x_{4\theta}^{\alpha}y_{4\theta}^{\alpha} & y_{4\theta}^{\alpha} & 1 \\ {x_{5\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{5\theta}^{\alpha}}^2 & -x_{5\theta}^{\alpha}y_{5\theta}^{\alpha} & y_{5\theta}^{\alpha} & 1 \end{vmatrix}$$

$$f_{\theta}^{\alpha}=\frac{h_{\theta}^{\alpha}}{k_{\theta}^{\alpha}}\begin{vmatrix} {x_{1\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{1\theta}^{\alpha}}^2 & x_{1\theta}^{\alpha} & -x_{1\theta}^{\alpha}y_{1\theta}^{\alpha} & 1 \\ {x_{2\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{2\theta}^{\alpha}}^2 & x_{2\theta}^{\alpha} & -x_{2\theta}^{\alpha}y_{2\theta}^{\alpha} & 1 \\ {x_{3\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{3\theta}^{\alpha}}^2 & x_{3\theta}^{\alpha} & -x_{3\theta}^{\alpha}y_{3\theta}^{\alpha} & 1 \\ {x_{4\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{4\theta}^{\alpha}}^2 & x_{4\theta}^{\alpha} & -x_{4\theta}^{\alpha}y_{4\theta}^{\alpha} & 1 \\ {x_{5\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{5\theta}^{\alpha}}^2 & x_{5\theta}^{\alpha} & -x_{5\theta}^{\alpha}y_{5\theta}^{\alpha} & 1 \end{vmatrix}$$

$$c_{\theta}^{\alpha}=\frac{2h_{\theta}^{\alpha}}{k_{\theta}^{\alpha}}\begin{vmatrix} {x_{1\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{1\theta}^{\alpha}}^2 & x_{1\theta}^{\alpha} & y_{1\theta}^{\alpha} & -x_{1\theta}^{\alpha}y_{1\theta}^{\alpha} \\ {x_{2\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{2\theta}^{\alpha}}^2 & x_{2\theta}^{\alpha} & y_{2\theta}^{\alpha} & -x_{2\theta}^{\alpha}y_{2\theta}^{\alpha} \\ {x_{3\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{3\theta}^{\alpha}}^2 & x_{3\theta}^{\alpha} & y_{3\theta}^{\alpha} & -x_{3\theta}^{\alpha}y_{3\theta}^{\alpha} \\ {x_{4\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{4\theta}^{\alpha}}^2 & x_{4\theta}^{\alpha} & y_{4\theta}^{\alpha} & -x_{4\theta}^{\alpha}y_{4\theta}^{\alpha} \\ {x_{5\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{5\theta}^{\alpha}}^2 & x_{5\theta}^{\alpha} & y_{5\theta}^{\alpha} & -x_{5\theta}^{\alpha}y_{5\theta}^{\alpha} \end{vmatrix}$$

ve

$$k_\theta^\alpha = \begin{vmatrix} {x_{1\theta}^\alpha}^2 & {y_{1\theta}^\alpha}^2 & x_{1\theta}^\alpha & y_{1\theta}^\alpha & 1 \\ {x_{2\theta}^\alpha}^2 & {y_{2\theta}^\alpha}^2 & x_{2\theta}^\alpha & y_{2\theta}^\alpha & 1 \\ {x_{3\theta}^\alpha}^2 & {y_{3\theta}^\alpha}^2 & x_{3\theta}^\alpha & y_{3\theta}^\alpha & 1 \\ {x_{4\theta}^\alpha}^2 & {y_{4\theta}^\alpha}^2 & x_{4\theta}^\alpha & y_{4\theta}^\alpha & 1 \\ {x_{5\theta}^\alpha}^2 & {y_{5\theta}^\alpha}^2 & x_{5\theta}^\alpha & y_{5\theta}^\alpha & 1 \end{vmatrix}$$

Bu determinant değerlerini elde etmek için aşağıdaki determinantın sütunları yerine

$$\begin{vmatrix} {x_{1\theta}^\alpha}^2 & {y_{1\theta}^\alpha}^2 & x_{1\theta}^\alpha & y_{1\theta}^\alpha & 1 \\ {x_{2\theta}^\alpha}^2 & {y_{2\theta}^\alpha}^2 & x_{2\theta}^\alpha & y_{2\theta}^\alpha & 1 \\ {x_{3\theta}^\alpha}^2 & {y_{3\theta}^\alpha}^2 & x_{3\theta}^\alpha & y_{3\theta}^\alpha & 1 \\ {x_{4\theta}^\alpha}^2 & {y_{4\theta}^\alpha}^2 & x_{4\theta}^\alpha & y_{4\theta}^\alpha & 1 \\ {x_{5\theta}^\alpha}^2 & {y_{5\theta}^\alpha}^2 & x_{5\theta}^\alpha & y_{5\theta}^\alpha & 1 \end{vmatrix}$$

sırasıyla

$$\begin{bmatrix} -x_{1\theta}^\alpha & y_{1\theta}^\alpha \\ -x_{2\theta}^\alpha & y_{2\theta}^\alpha \\ -x_{3\theta}^\alpha & y_{3\theta}^\alpha \\ -x_{4\theta}^\alpha & y_{4\theta}^\alpha \\ -x_{5\theta}^\alpha & y_{5\theta}^\alpha \end{bmatrix}$$

Sütununu yazmak gerekir.

$a_\theta^\alpha, b_\theta^\alpha, c_\theta^\alpha, f_\theta^\alpha, g_\theta^\alpha$ and k_θ^α determinant değerlerini bulmak için kullanılan determinant değerlerini sırasıyla A, B, C, F, G and K alalım. Böylece,

$$a_\theta^\alpha = \frac{2h_\theta^\alpha}{k_\theta^\alpha}.A$$

$$b_\theta^\alpha = \frac{2h_\theta^\alpha}{k_\theta^\alpha}.B$$

$$c_\theta^\alpha = \frac{2h_\theta^\alpha}{k_\theta^\alpha}.C$$

$$f_\theta^\alpha = \frac{h_\theta^\alpha}{k_\theta^\alpha}.F$$

$$g_\theta^\alpha = \frac{h_\theta^\alpha}{k_\theta^\alpha}.G$$

$$k_\theta^\alpha = K$$

(3.2)

ifadesi elde edilir.

$\tilde{E}_i$ lerden geçen $(i = 1,2,..,5)$ Fuzzy elipsi $Q_{1\theta}^\alpha$ ve $Q_{5\theta}^\alpha$ lar arasında uzanan E_θ^α tüm olası elips parçalarının bir bölgesidir.

$$\widetilde{\mathrm{FE}}_{1,2,..,5} = \bigcup_{\substack{\theta\in[0,2\pi] \\ \alpha\in[0,1]}} \{(x,y): a_\theta^\alpha x^2 + 2h_\theta^\alpha xy + b_\theta^\alpha y^2 + 2g_\theta^\alpha x + 2f_\theta^\alpha y + c_\theta^\alpha = 0\}$$

(3.3)

dir.

Kesin elips FE,

$$\left\{(x,y): x^2 + \frac{y^2}{4} = 1\right\}$$

dir. $\theta = [0,2\pi]$ ve $\alpha \in [0,1]$ olduğunda, $(x_{1\theta}^\alpha, y_{1\theta}^\alpha), (x_{2\theta}^\alpha, y_{2\theta}^\alpha), (x_{3\theta}^\alpha, y_{3\theta}^\alpha), (x_{4\theta}^\alpha, y_{4\theta}^\alpha)$ ve $(x_{5\theta}^\alpha, y_{5\theta}^\alpha)$ $\tilde{E}_i$ ler üzerinde beş aynı nokta olsun.

Konik E_θ^α üzerinde (x_0, y_0) ın olası α larının kümesini tanımlamak için $\theta = \theta_0 \in [0,2\pi]$ belirli değeri saptanır ve E_θ^α ın (3.3) denklemi tanımlanır. Buradan α ya bağlı bir denklem elde edilir. Bu denklem çözüldüğünde S_{θ_0} dediğimiz $E_{\theta_0}^\alpha$ üzerindeki (x_0, y_0) ın olası değerlerinin kümesi elde edilir. S_{θ_0} ın supremum değeri alınır ve bu da $s_{\theta_0}^\alpha$ olsun. $[0,2\pi]$ kümesi boyunca θ_0 ı değiştirip, $s_{\theta_0}^\alpha$ lar bulunmaya devam edilir.

$\widetilde{FE}$ Fuzzy elipsindeki (x_0, y_0) ın üyelik değeri;

$$\mu\big((x_0, y_0)\big)|\widetilde{FE} = \sup_{\theta} s_{\theta_0}$$

ile verilir. $\widetilde{FE}$ Fuzzy elipsinin $(1, 0.5)$ noktasının üyelik değerini belirlemeye çalışalım. İlk olarak $(1, 0.5)$ noktasının üzerinde olduğu E_θ^α elipsinin kümesini belirleyelim. E_θ^α nın denkleminin, denklem (3.3) deki gibi olması için α olası değerlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım;

$$a_\theta^\alpha(1)^2 + 2h_\theta^\alpha(1)(0.5) + b_\theta^\alpha(0.5)^2 + 2g_\theta^\alpha(1) + 2f_\theta^\alpha(0.5) + c_\theta^\alpha = 0$$

yani

$$a_\theta^\alpha + h_\theta^\alpha + 0{,}25b_\theta^\alpha + 2g_\theta^\alpha + f_\theta^\alpha + c_\theta^\alpha = 0 \tag{3.4}$$

elde edilir. $\theta_0 = 45°$ alınırsa $k_\theta^\alpha = 0$ bulunur. O halde 45° için denklemin çözümü yoktur.

$$K = \begin{vmatrix} [1+(1-\alpha)\cos 45°]^2 & [(1-\alpha)\sin 45°]^2 & 1+(1-\alpha)\cos 45° & (1-\alpha)\sin 45° & 1 \\ \left[\frac{1}{5}+\frac{(1-\alpha)\cos 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}}\right]^2 & \left[\frac{(1-\alpha)\sin 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}}\right]^2 & \frac{1}{5}+\frac{(1-\alpha)\cos 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}} & \frac{(1-\alpha)\sin 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}} & 1 \\ \left[-\frac{1}{4}+(1-\alpha)\cos 45°\right]^2 & \left[\frac{\sqrt{15}}{2}+(1-\alpha)\sin 45°\right]^2 & -\frac{1}{4}+(1-\alpha)\cos 45° & \frac{\sqrt{15}}{2}+(1-\alpha)\sin 45° & 1 \\ \left[-\frac{1}{2}+\frac{(1-\alpha)\cos 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}}\right]^2 & \left[-\sqrt{3}+\frac{(1-\alpha)\sin 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}}\right]^2 & -\frac{1}{2}+\frac{(1-\alpha)\cos 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}} & -\sqrt{3}+\frac{(1-\alpha)\sin 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}} & 1 \\ \left[\frac{1}{3}+(1-\alpha)\cos 45°\right]^2 & \left[\frac{4\sqrt{2}}{3}+(1-\alpha)\sin 45°\right]^2 & \left[\frac{1}{3}+(1-\alpha)\cos 45°\right] & \frac{4\sqrt{2}}{3}+(1-\alpha)\sin 45° & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

Şimdi de denklem (3.4) ü elde etmek için $\theta_0 = 30°$ alalım ve $a_\theta^\alpha,\ b_\theta^\alpha, g_\theta^\alpha, f_\theta^\alpha, c_\theta^\alpha$ and k_θ^α değerlerini hesaplayalım.

$$k_\theta^\alpha = K$$

$$K = \begin{vmatrix} [1+(1-\alpha)\cos 30°]^2 & [(1-\alpha)\sin 30°]^2 & 1+(1-\alpha)\cos 30° & (1-\alpha)\sin 30° & 1 \\ \left[\frac{1}{5}+\frac{(1-\alpha)\cos 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right]^2 & \left[\frac{(1-\alpha)\sin 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right]^2 & \frac{1}{5}+\frac{(1-\alpha)\cos 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}} & \frac{(1-\alpha)\sin 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}} & 1 \\ \left[-\frac{1}{4}+(1-\alpha)\cos 30°\right]^2 & \left[\frac{\sqrt{15}}{2}+(1-\alpha)\sin 30°\right]^2 & -\frac{1}{4}+(1-\alpha)\cos 30° & \frac{\sqrt{15}}{2}+(1-\alpha)\sin 30° & 1 \\ \left[-\frac{1}{2}+\frac{(1-\alpha)\cos 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right]^2 & \left[-\sqrt{3}+\frac{(1-\alpha)\sin 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right]^2 & -\frac{1}{2}+\frac{(1-\alpha)\cos 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}} & -\sqrt{3}+\frac{(1-\alpha)\sin 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}} & 1 \\ \left[\frac{1}{3}+(1-\alpha)\cos 30°\right]^2 & \left[\frac{4\sqrt{2}}{3}+(1-\alpha)\sin 30°\right]^2 & \frac{1}{3}+(1-\alpha)\cos 30° & \frac{4\sqrt{2}}{3}+(1-\alpha)\sin 30° & 1 \end{vmatrix}$$

determinantının sonucu

$= -0{,}02\alpha^3 + 0{,}37\alpha^2 + 0{,}69\alpha - 1{,}02$ elde edilir.

O halde diğer determinantları da elde etmeye çalışalım. A determinant değeri için

$$\begin{vmatrix}
-[1+(1-\alpha)\cos 30°][(1-\alpha)\cos 30°] & [(1-\alpha)\sin 30°]^2 & 1+(1-\alpha)\cos 30° & (1-\alpha)\sin 30° & 1 \\
-\left[\frac{1}{5}+\frac{(1-\alpha)\cos 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right]\left[\frac{(1-\alpha)\cos 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right] & \left[\frac{(1-\alpha)\sin 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right]^2 & \frac{1}{5}+\frac{(1-\alpha)\cos 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}} & \frac{(1-\alpha)\sin 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}} & 1 \\
-\left[-\frac{1}{4}+(1-\alpha)\cos 30°\right]\left[\frac{\sqrt{15}}{2}+(1-\alpha)\sin 30°\right] & \left[\frac{\sqrt{15}}{2}+(1-\alpha)\sin 30°\right]^2 & -\frac{1}{4}+(1-\alpha)\cos 30° & \frac{\sqrt{15}}{2}+(1-\alpha)\sin 30° & 1 \\
-\left[-\frac{1}{2}+\frac{(1-\alpha)\cos 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right]\left[-\sqrt{3}+\frac{(1-\alpha)\sin 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right] & \left[-\sqrt{3}+\frac{(1-\alpha)\sin 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right]^2 & -\frac{1}{2}+\frac{(1-\alpha)\cos 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}} & -\sqrt{3}+\frac{(1-\alpha)\sin 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}} & 1 \\
-\left[\frac{1}{3}+(1-\alpha)\cos 30°\right]\left[\frac{4\sqrt{2}}{3}+(1-\alpha)\sin 30°\right] & \left[\frac{4\sqrt{2}}{3}+(1-\alpha)\sin 30°\right]^2 & \frac{1}{3}+(1-\alpha)\cos 30° & \frac{4\sqrt{2}}{3}+(1-\alpha)\sin 30° & 1
\end{vmatrix}$$

$=0.011\alpha^3 - 0.477\alpha^2 + 3.221\alpha - 1.696$ elde edilir.

Şimdi de B determinant değerine bakalım

$$\begin{vmatrix}
[1+(1-\alpha)\cos 30°]^2 & -[1+(1-\alpha)\cos 30°][(1-\alpha)\cos 30°] & 1+(1-\alpha)\cos 30° & (1-\alpha)\sin 30° & 1 \\
\left[\frac{1}{5}+\frac{(1-\alpha)\cos 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right]^2 & -\left[\frac{1}{5}+\frac{(1-\alpha)\cos 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right]\left[\frac{(1-\alpha)\cos 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right] & \frac{1}{5}+\frac{(1-\alpha)\cos 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}} & \frac{(1-\alpha)\sin 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}} & 1 \\
\left[-\frac{1}{4}+(1-\alpha)\cos 30°\right]^2 & -\left[-\frac{1}{4}+(1-\alpha)\cos 30°\right]\left[\frac{\sqrt{15}}{2}+(1-\alpha)\sin 30°\right] & -\frac{1}{4}+(1-\alpha)\cos 30° & \frac{\sqrt{15}}{2}+(1-\alpha)\sin 30° & 1 \\
\left[-\frac{1}{2}+\frac{(1-\alpha)\cos 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right]^2 & -\left[-\frac{1}{2}+\frac{(1-\alpha)\cos 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right]\left[-\sqrt{3}+\frac{(1-\alpha)\sin 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right] & -\frac{1}{2}+\frac{(1-\alpha)\cos 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}} & -\sqrt{3}+\frac{(1-\alpha)\sin 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}} & 1 \\
\left[\frac{1}{3}+(1-\alpha)\cos 30°\right]^2 & -\left[\frac{1}{3}+(1-\alpha)\cos 30°\right]\left[\frac{4\sqrt{2}}{3}+(1-\alpha)\sin 30°\right] & \frac{1}{3}+(1-\alpha)\cos 30° & \frac{4\sqrt{2}}{3}+(1-\alpha)\sin 30° & 1
\end{vmatrix}$$

$=0.033\alpha^3 - 0.255\alpha^2 + 0.230\alpha + 0.717$ bulunur.

G determinant değeri için hesaplama yapıldığında

$$\begin{vmatrix}
[1+(1-\alpha)\cos 30°]^2 & [1+(1-\alpha)\cos 30°]^2 & [1+(1-\alpha)\cos 30°]^2 & [1+(1-\alpha)\cos 30°]^2 & 1 \\
\left[\frac{1}{5}+\frac{(1-\alpha)\cos 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right]^2 & \left[\frac{(1-\alpha)\sin 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right]^2 & -\left[\frac{1}{5}+\frac{(1-\alpha)\cos 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right]\left[\frac{(1-\alpha)\cos 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right] & \frac{(1-\alpha)\sin 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}} & 1 \\
\left[-\frac{1}{4}+(1-\alpha)\cos 30°\right]^2 & \left[\frac{\sqrt{15}}{2}+(1-\alpha)\sin 30°\right]^2 & -\left[-\frac{1}{4}+(1-\alpha)\cos 30°\right]\left[\frac{\sqrt{15}}{2}+(1-\alpha)\sin 30°\right] & \frac{\sqrt{15}}{2}+(1-\alpha)\sin 30° & 1 \\
\left[-\frac{1}{2}+\frac{(1-\alpha)\cos 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right]^2 & \left[-\sqrt{3}+\frac{(1-\alpha)\sin 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right]^2 & -\left[-\frac{1}{2}+\frac{(1-\alpha)\cos 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right]\left[-\sqrt{3}+\frac{(1-\alpha)\sin 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right] & -\sqrt{3}+\frac{(1-\alpha)\sin 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}} & 1 \\
\left[\frac{1}{3}+(1-\alpha)\cos 30°\right]^2 & \left[\frac{4\sqrt{2}}{3}+(1-\alpha)\sin 30°\right]^2 & -\left[\frac{1}{3}+(1-\alpha)\cos 30°\right]\left[\frac{4\sqrt{2}}{3}+(1-\alpha)\sin 30°\right] & \frac{4\sqrt{2}}{3}+(1-\alpha)\sin 30° & 1
\end{vmatrix}$$

$=-0.555\alpha^3 + 5.777\alpha^2 - 10.915\alpha + 5.693$ elde edilir.

F determinant değeri

$$\begin{vmatrix}
[1+(1-\alpha)\cos 30°]^2 & [(1-\alpha)\sin 30°]^2 & 1+(1-\alpha)\cos 30° & -[1+(1-\alpha)\cos 30°][(1-\alpha)\cos 30°] & 1 \\
\left[\frac{1}{5}+\frac{(1-\alpha)\cos 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right]^2 & \left[\frac{(1-\alpha)\sin 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right]^2 & \frac{1}{5}+\frac{(1-\alpha)\cos 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}} & -\left[\frac{1}{5}+\frac{(1-\alpha)\cos 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right]\left[\frac{(1-\alpha)\cos 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right] & 1 \\
\left[-\frac{1}{4}+(1-\alpha)\cos 30°\right]^2 & \left[\frac{\sqrt{15}}{2}+(1-\alpha)\sin 30°\right]^2 & -\frac{1}{4}+(1-\alpha)\cos 30° & -\left[-\frac{1}{4}+(1-\alpha)\cos 30°\right]\left[\frac{\sqrt{15}}{2}+(1-\alpha)\sin 30°\right] & 1 \\
\left[-\frac{1}{2}+\frac{(1-\alpha)\cos 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right]^2 & \left[-\sqrt{3}+\frac{(1-\alpha)\sin 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right]^2 & -\frac{1}{2}+\frac{(1-\alpha)\cos 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}} & -\left[-\frac{1}{2}+\frac{(1-\alpha)\cos 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right]\left[-\sqrt{3}+\frac{(1-\alpha)\sin 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right] & 1 \\
\left[\frac{1}{3}+(1-\alpha)\cos 30°\right]^2 & \left[\frac{4\sqrt{2}}{3}+(1-\alpha)\sin 30°\right] & \frac{1}{3}+(1-\alpha)\cos 30° & -\left[\frac{1}{3}+(1-\alpha)\cos 30°\right]\left[\frac{4\sqrt{2}}{3}+(1-\alpha)\sin 30°\right] & 1
\end{vmatrix}$$

$= 0.057\alpha^3 + 0.141\alpha^2 + 0.649\alpha - 0.848$ olarak bulunur.

C determinant değeri de,

$$\begin{vmatrix} [1+(1-\alpha)\cos 30°]^2 & [(1-\alpha)\sin 30°]^2 & 1+(1-\alpha)\cos 30° & (1-\alpha)\sin 30° & -[1+(1-\alpha)\cos 30°][(1-\alpha)\cos 30°] \\ \left[\frac{1}{5}+\frac{(1-\alpha)\cos 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right]^2 & \left[\frac{(1-\alpha)\sin 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right]^2 & \frac{1}{5}+\frac{(1-\alpha)\cos 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}} & \frac{(1-\alpha)\sin 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}} & -\left[\frac{1}{5}+\frac{(1-\alpha)\cos 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right]\left[\frac{(1-\alpha)\cos 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right] \\ \left[-\frac{1}{4}+(1-\alpha)\cos 30°\right]^2 & \left[\frac{\sqrt{15}}{2}+(1-\alpha)\sin 30°\right]^2 & -\frac{1}{4}+(1-\alpha)\cos 30° & \frac{\sqrt{15}}{2}+(1-\alpha)\sin 30° & -\left[-\frac{1}{4}+(1-\alpha)\cos 30°\right]\left[\frac{\sqrt{15}}{2}+(1-\alpha)\sin 30°\right] \\ \left[-\frac{1}{2}+\frac{(1-\alpha)\cos 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right]^2 & \left[-\sqrt{3}+\frac{(1-\alpha)\sin 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right]^2 & -\frac{1}{2}+\frac{(1-\alpha)\cos 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}} & -\sqrt{3}+\frac{(1-\alpha)\sin 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}} & -\left[-\frac{1}{2}+\frac{(1-\alpha)\cos 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right]\left[-\sqrt{3}+\frac{(1-\alpha)\sin 30°}{\sqrt{1+3\sin^2 30°}}\right] \\ \left[\frac{1}{3}+(1-\alpha)\cos 30°\right]^2 & \left[\frac{4\sqrt{2}}{3}+(1-\alpha)\sin 30°\right]^2 & \frac{1}{3}+(1-\alpha)\cos 30° & \frac{4\sqrt{2}}{3}+(1-\alpha)\sin 30° & -\left[\frac{1}{3}+(1-\alpha)\cos 30°\right]\left[\frac{4\sqrt{2}}{3}+(1-\alpha)\sin 30°\right] \end{vmatrix}$$

$= -0.194\alpha^4 + 2.264\alpha^3 - 5.842\alpha^2 + 6.232\alpha - 3.518$ bulunur.

Bulduğumuz değerleri denklem (3.4) te yerine koyalım ve $a_\theta^\alpha, b_\theta^\alpha, c_\theta^\alpha, f_\theta^\alpha, g_\theta^\alpha$ ve c_θ^α katsayılarını elde edelim.

Bu katsayıları denklem (3.4) te yerine koyar ve denklemi h_θ^α $(h_\theta^\alpha \neq 0)$ ile sadeleştirirsek aşağıdaki lineer olmayan denklemi elde ederiz;

$$-0{,}389\alpha^4 + 3{,}475\alpha^3 - 0{,}692\alpha^2 - 1{,}706\alpha - 0{,}555 = 0 \qquad (3.5)$$

Denklem (3.5) çözüldüğünde, α reel değerleri;

$$0.96, -0.35$$

Olarak bulunur.

Bu değerlerden 0 ile 1 arasında olan 0.96 alınmalıdır. $\theta_0 = 30°$ alındığında olabilecek α değerlerinin kümesi $s_{\theta_0} = \{0.96\}$ bulunur. $[0,2\pi]$ aralığında θ_0 değerleri değiştirilerek yazılır ve s_{θ_0} kümeleri bulunur. Daha sonra s_{θ_0} ların supremumu alınacaktır. Açı değerleri determinantlarda değiştirilerek hesaplama yapıldığında bulunan $s_{\theta_0}^\alpha$ kümelerinin supremumu $s_{\theta_0} = \{0.96\}$ olur.

Beş aynı noktadan geçen koniği $\theta_0 = 30°$ ve $\alpha = 0.96$ için elde etmiş oluruz.

Bu noktalar $(1.01, 0.01) \in \tilde{E}_1$, $(0.21, 1.96) \in \tilde{E}_2$, $(-0.23, 1.94) \in \tilde{E}_3$, $(-0.48, -1.72) \in \tilde{E}_4$ ve $(0.35, 1.89) \in \tilde{E}_5$ olarak bulunmuştur.

Bu beş aynı noktadan geçen konik denklemi

$$0.96\mathrm{x}^2 + 0.27\mathrm{y}^2 - 0.04\mathrm{xy} + 0.05\mathrm{x} - 0.03\mathrm{y} - 1.03 = 0$$

yaklaşık olarak elde edilir. Bu konik denklemi (1,0.5) noktasını içerir ve Fuzzy elipsinin α- kesiminde

$$\mu\left((1{,}0.5)|\widetilde{FE}\right) = 0.96$$

olur.

Örnek 3.3.2: Aşağıdaki gibi merkezil olmayan bir kesin elips alalım;

$$\left\{(x, y): \frac{(x-1)^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1\right\}$$

Kesin elips üzerinde beş Fuzzy nokta $\tilde{E}_1 = (1, 4)$, $\tilde{E}_2 = \left(0, \frac{2\sqrt{35}}{3}\right)$, $\tilde{E}_3 = \left(-2, 2\sqrt{3}\right)$, $\tilde{E}_4 = \left(-3, -\frac{4\sqrt{5}}{3}\right)$ ve $\tilde{E}_5 = \left(4, -2\sqrt{3}\right)$ olsun. Bu beş noktanın üyelik fonksiyonlarını sırasıyla aşağıdaki gibi alalım.

$$\{(x, y): (x-1)^2 + (y-4)^2 \leq 1\}$$

$$\left\{(\mathrm{x}, \mathrm{y}): \mathrm{x}^2 + 9\left(\mathrm{y} - \frac{2\sqrt{35}}{3}\right)^2 \leq 1\right\}$$

$$\left\{(\mathrm{x}, \mathrm{y}): (\mathrm{x}+2)^2 + \left(\mathrm{y} - 2\sqrt{3}\right)^2 \leq 1\right\}$$

$$\left\{(x, y): (x+3)^2 + \left(y + \frac{4\sqrt{5}}{3}\right)^2 \leq 1\right\}$$

$$\left\{(x, y): 9(x-4)^2 + \left(y - 2\sqrt{3}\right)^2 \leq 1\right\}$$

olsun. Üyelik fonksiyonların tepe noktaları sırasıyla (1,4), $\left(0, \frac{2\sqrt{35}}{3}\right)$, $\left(-2, 2\sqrt{3}\right)$, $\left(-3, \frac{4\sqrt{5}}{3}\right)$ ve $\left(4, -2\sqrt{3}\right)$ dır. Şimdi de üyelik fonksiyonları α olan $\widetilde{E}_1, \widetilde{E}_2, \widetilde{E}_3, \widetilde{E}_4$ ve $\widetilde{E}_5$ deki beş aynı noktayı alalım.

$$\theta_{1\theta}^{\alpha}: (X_{1\theta}^{\alpha}, Y_{1\theta}^{\alpha}) = (1 + (1-\alpha)\cos\theta, 4 + (1-\alpha).\sin\theta)$$

$$\theta_{2\theta}^{\alpha}: (X_{2\theta}^{\alpha}, Y_{2\theta}^{\alpha}) = \left((1-\alpha).\frac{\cos\theta}{\sqrt{1+8\sin^2\theta}}, \frac{2\sqrt{35}}{3} + (1-\alpha).\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+8\sin^2\theta}}\right)$$

$$\theta_{3\theta}^{\alpha}: (X_{3\theta}^{\alpha}, Y_{3\theta}^{\alpha}) = \left(-2 + (1-\alpha)\cos\theta, 2\sqrt{3} + (1-\alpha).\sin\theta\right)$$

$$\theta_{4\theta}^{\alpha}: (X_{4\theta}^{\alpha}, Y_{4\theta}^{\alpha}) = \left(-3 + (1-\alpha).\cos\theta, -\frac{4\sqrt{5}}{3} + (1-\alpha).\sin\theta\right)$$

$$\theta_{5\theta}^{\alpha}:(X_{5\theta}^{\alpha},Y_{5\theta}^{\alpha})=\left(4+(1-\alpha).\frac{\cos\theta}{\sqrt{8\cos^2\theta+1}},-2\sqrt{3}+(1-\alpha).\frac{\sin\theta}{\sqrt{8\cos^2\theta+1}}\right)$$

$\theta_{1\theta}^{\alpha},\theta_{2\theta}^{\alpha},\theta_{3\theta}^{\alpha},\theta_{4\theta}^{\alpha}$ ve $\theta_{5\theta}^{\alpha}$ dan geçen E_{θ}^{α} dediğimiz elips aşağıdaki denklem tarafından belirlenir;

$$a_{\theta}^{\alpha}x^2+2h_{\theta}^{\alpha}xy+b_{\theta}^{\alpha}y^2+2g_{\theta}^{\alpha}x+2f_{\theta}^{\alpha}y+c_{\theta}^{\alpha}=0 \text{ ve } {h_{\theta}^{\alpha}}^2<a_{\theta}^{\alpha}b_{\theta}^{\alpha} \qquad (3.6)$$

Bir önceki örnekte elde ettiğimiz gibi $a_{\theta}^{\alpha},b_{\theta}^{\alpha},g_{\theta}^{\alpha},f_{\theta}^{\alpha}$ ve c_{θ}^{α} leri elde ederiz. $\tilde{E}_i$ lerden geçen $(i=1,2,\dots,5)$ Fuzzy elipsi, $\theta_{1\theta}^{\alpha}$ ve $\theta_{5\theta}^{\alpha}$ ler arasında uzanan E_{θ}^{α} tüm olası elips parçalarının bir bölgesidir.

$$\widetilde{\mathrm{FE}}_{1,2,..,5}=\bigcup_{\substack{\theta\in[0,2\pi]\\ \alpha\in[0,1]}}\{(\mathrm{x},\mathrm{y}):\mathrm{a}_{\theta}^{\alpha}\mathrm{x}^2+2\mathrm{h}_{\theta}^{\alpha}\mathrm{xy}+\mathrm{b}_{\theta}^{\alpha}\mathrm{y}^2+2\mathrm{g}_{\theta}^{\alpha}\mathrm{x}+2\mathrm{f}_{\theta}^{\alpha}\mathrm{y}+\mathrm{c}_{\theta}^{\alpha}=0\}$$

(3.7)

Şimdi de (1,4.1) in $\widetilde{FE}$ fuzzy elipsine üyelik değerini bulalım. (1,4.1) noktasının üzerinde olduğu E_{θ}^{α} ların kümesini belirleyelim. (3.7) denkleminde (1,4.1) noktasını yazalım.

Buradan

$$\mathrm{a}_{\theta}^{\alpha}(1)^2+2\mathrm{h}_{\theta}^{\alpha}(1)(4.1)+\mathrm{b}_{\theta}^{\alpha}(4.1)^2+2\mathrm{g}_{\theta}^{\alpha}(1)+2\mathrm{f}_{\theta}^{\alpha}(4.1)+\mathrm{c}_{\theta}^{\alpha}=0$$

bulunur. Bu denklem

$$a_{\theta}^{\alpha}+8.2h_{\theta}^{\alpha}+16.81b_{\theta}^{\alpha}+2g_{\theta}^{\alpha}+8.2f_{\theta}^{\alpha}+c_{\theta}^{\alpha}=0 \qquad (3.8)$$

şeklinde olur. (3.8) te $\theta=45°$ alınır ve $a_{\theta}^{\alpha},b_{\theta}^{\alpha},g_{\theta}^{\alpha},\ f_{\theta}^{\alpha},$ ve c_{θ}^{α} hesaplanır ve yerine yazılırsa aşağıdaki non-lineer denklem elde edilir;

$$-31.18\alpha^4-1303.24\alpha^3-5634.93\alpha^2-6568.61\alpha+10404.88=0$$

Bu denklem çözülerek reel α değerleri bulunur; $\alpha=0.85$ ve $\alpha=-2.78$ 0 ile 1 arasında α değerini 0.85 almalıyız.

$\theta=45°$ için, S_{θ_0} kümesinin α elemanları $\{0.85\}$ olur. $[0,2\pi]$ aralığında θ_0 lar yazılır ve $s_{\theta_0}^{\alpha}$ değerleri bulunur. $s_{\theta_0}^{\alpha}$lardan supremum olanı alınır. $\theta=45°$ ve $\alpha=0.85$ için aynı noktalardan geçen konik bulunur. Bu beş aynı nokta;

$(1.31,4.31) \in \widetilde{E_1}$, $(0.13,4.08) \in \widetilde{E_2}, (-1.68, 3.7) \in \widetilde{E_3}, (-2.68, -2.67) \in \widetilde{E_4}$

Ve $(4.13, -3.32) \in \widetilde{E_5}$ dır. Bu beş noktadan geçen konik denklemi;

$$-524.85x^2 + 74.07xy - 2027.74y^2 + 1902.47x + 907.46y + 28574.06=0 \tag{3.9}$$

olarak elde edilir.

Konik denklemi $(1,4.1)$ noktasını içerir ve Fuzzy elipsinin α-kesiminde

$\mu\left((1,4.1)|\widetilde{FE}\right) = 0.85$ dir.

3.4 Fuzzy Elips Elde Etmek İçin Algoritma

Bu çalışmanın uygulamalarında verilen örneklerde kullanılan hesaplamalar için Maple programı kullanılmıştır. Örneklerde tüm hesaplamalar ayrıntılı bir şekilde gösterilmiştir. Fakat hesaplamaları ayrı ayrı yapıp çıkan sonuçların uygunluğuna göre denklemlerde yerlerine yazmak ve karşılaştırma yapmak zaman alıcı olmuştur. Bu durumlar göz önüne alındığında farklı açılar altında Fuzzy elips denklemleri elde edilip, değerleri karşılaştırılarak Fuzzy elips çizmek için algoritma oluşturma gerekliliği görülmüştür. Oluşturduğumuz algoritma ile bu hesaplamalar kısa sürede tamamlanmaktadır. Önerilen algoritma; yöntemin doğruluğunu, verimliliğini ve uygulanabilirliğini göstermek için bazı Fuzzy elips örneklerine uygulanmıştır.

ALGORİTMA :

Beş aynı noktadan geçen Fuzzy elipsi oluşturmak ve herhangi bir noktanın Fuzzy elipsine olan üyeliğini hesaplayıp, Fuzzy elips çizebilmek için aşağıdaki algoritmayı vereceğiz:

1. Adım: Merkezi kesin elips üzerinde ve üyelik değeri $\alpha \in [0,1]$ olan beş aynı nokta al.
2. Adım: Konik denkleminde yerine yazmak için determinantları yaz.
3. Adım: $[0,2\pi]$ boyunca belli aralıklarla determinantlarda kullanılan θ açılarını tara ve determinantları al.

4. Adım: (3.2) genel konik denkleminde üyelik incelenecek olan nokta için doğrusal olmayan denklem elde et.
5. Adım: Doğrusal olmayan ve değişkeni α olan denklemleri çöz.
6. Adım: Bulunan α değerlerinden $[0,1]$ aralığında uygun olanları al.
7. Adım: $\alpha \in [0,1]$ değerlerinin supremumunu al, 1. Adımda yerine yaz ve aynı noktaları bul.
8. Adım: Aynı noktalardan geçen elipslerin denklemlerini yaz.
9. Adım: 7. Adımda elde edilen elipsleri koyu mavi, açık mavi, gri, sarı... olacak şekilde supremum üyeliği olandan infimum üyeliği olana doğru çiz.

Örnek 3.3.1 ve Örnek 3.3.2 de bir Fuzzy elips elde etmenin adımları gösterilmiş, herhangi bir noktanın Fuzzy elipsine olan üyeliği araştırılmış ve bunları yaparken kullanılan hesaplamalar gösterilmiştir. Belirli aralıklarla açılar incelenmiş ve bu seçilen noktadan geçen kesin elipse en yakın elips denklemi elde edilmiştir.

Şimdi Örnek 3.3.1 de merkezleri kesin elips üzerindeki beş nokta algoritmaya yazılarak $(1, 0.5)$ noktasının kesin elipse olan üyeliği incelecek ve bu noktadan geçen Fuzzy elips çizilecektir. Algoritmaya $\tilde{E}_1(1,0), \widetilde{E_2}\left(\frac{1}{5}, \frac{4\sqrt{6}}{5}\right), \widetilde{E_3}\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right), \widetilde{E_4}\left(-\frac{1}{2}, -\sqrt{3}\right)$ ve $\widetilde{E_5}\left(\frac{1}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$ Fuzzy noktalarının α kesitlerinde yer alan aşağıda verilen beş aynı noktayı sırasıyla yazalım:

$$Q_{1\theta}^{\alpha}: (X_{1\theta}^{\alpha}, Y_{1\theta}^{\alpha}) = (1 + (1-\alpha)\cos\theta, (1-\alpha)sin\theta)$$

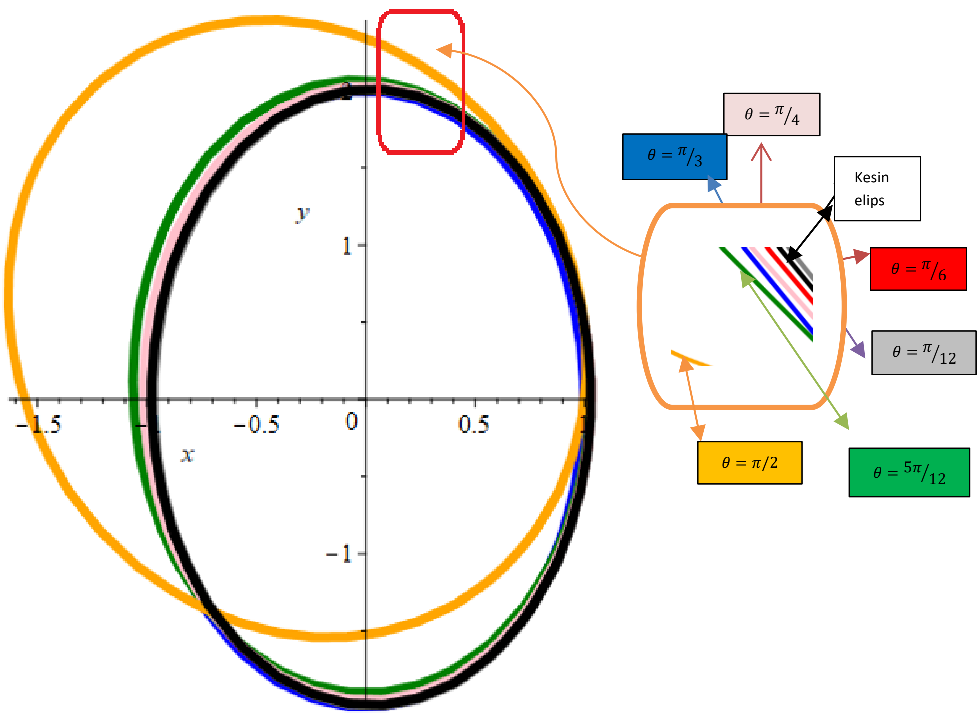
$$Q_{2\theta}^{\alpha}: (X_{2\theta}^{\alpha}, Y_{2\theta}^{\alpha}) = \left(\frac{1}{5} + (1-\alpha)\frac{\cos\theta}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}, \frac{4\sqrt{6}}{5} + (1-\alpha)\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}\right)$$

$$Q_{3\theta}^{\alpha}: (X_{3\theta}^{\alpha}, Y_{3\theta}^{\alpha}) = \left(-\frac{1}{4} + (1-\alpha)\cos\theta, \frac{\sqrt{15}}{2} + (1-\alpha)\sin\theta\right)$$

$$Q_{4\theta}^{\alpha}: (X_{4\theta}^{\alpha}, Y_{4\theta}^{\alpha}) = \left(-\frac{1}{2} + (1-\alpha)\frac{\cos\theta}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}, -\sqrt{3} + (1-\alpha)\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}\right)$$

$$Q_{5\theta}^{\alpha}: (X_{5\theta}^{\alpha}, Y_{5\theta}^{\alpha}) = \left(\frac{1}{3} + (1-\alpha)\cos\theta, \frac{4\sqrt{2}}{3} + (1-\alpha)\sin\theta\right)$$

Üyeliğini aradığımız $(1, 0.5)$noktasını da konik denkleminde yerine yazarak programı çalıştırdığımızda program $[0,2\pi]$ aralığında açıları $15°$ dan başlayıp $15°$ artırarak tek tek tarama yapar ve elde edilen α ya bağlı doğrusal olmayan denklemleri çözerek S_{θ_0} kümelerini elde edip supremumunu verir. Elde edilen α üyelik derecelerini aynı noktalarda yerine yazar ve farklı elips eğrileri elde eder. Bu eğrilerin bileşimi bize Fuzzy elipsini verir. Algoritmada elde edilen Fuzzy elips şekil 3.3 de gösterilmiştir.



Şekil 3.3: Örnek 3.3.1 de Elde edilen Fuzzy Elips

Şimdi de elde edilen Fuzzy elipsinde, farklı elips eğrilerinin üyeliklerini karşılaştıralım.

Tablo 3.1: Örnek 3.3.1 de Elde Edilen Fuzzy Elipsinin üyelikleri

Açı değerleri	Üyelik dereceleri
$\theta = \pi/12$	0,98
$\theta = \pi/6$	0,964
$\theta = \pi/4$	0,957
$\theta = \pi/3$	0,941
$\theta = 5\pi/12$	0,894
$\theta = \pi/2$	0,499

Oluşturduğumuz algoritmaya göre Fuzzy elipsi kısa süre içerisinde oluşturup, her elips eğrisinin kesin elipse göre durumu yorumlanabilir. Açıları daha küçük aralıklara göre seçip inceleme de yapılabilir.

4. FUZZY HİPERBOL

Bu bölümde koniklerden hiperbolü ele alacağız. Fuzzy hiperbol tanımlamak için elipste kullandığımız metodu kullanacağız.

$\widetilde{H}_i(a_i, b_i), i = 1,2,3,4,5$ çekirdekleri kesin bir CH dediğimiz hiperbolün üzerinde olan, üçü bir kolda ikisi diğer kolda olan beş Fuzzy nokta olsun. Bu beş Fuzzy noktadan geçen Fuzzy hiperbolü oluşturmak için önce $\widetilde{FH}_{1,\dots,5}$ Fuzzy hiperbolik parçayı çizmeliyiz. Sonra Fuzzy hiperbol $\widetilde{FH}$ yi elde etmek için bu hiperbolik parçanın iki kolunun iki tarafından da sonsuzluğa uzatmalıyız.

$\widetilde{FH}$ yi sonsuz olarak genişletmek için çekirdeği kesin hiperbol üzerinde varsayımsal olarak ikisi bir kolda ikisi diğer iki kolda olan dört Fuzzy nokta düşünelim. İkisi $\widetilde{H_1}(a_1, b_1)$ ve $\widetilde{H_3}(a_3, b_3)$ ün tarafında sonsuz mesafeler, diğer ikisi $\widetilde{H_4}(a_4, b_4)$ ve $\widetilde{H_5}(a_5, b_5)$ in tarafında sonsuz mesafeler olan Fuzzy noktalar sırasıyla $\widetilde{H}_{1\infty}, \widetilde{H}_{3\infty}$ ve $\widetilde{H}_{4\infty}, \widetilde{H}_{5\infty}$ olsun. $\widetilde{FH}_{1\infty}$ ve $\widetilde{FH}_{3\infty}$, $\widetilde{H}_1$ ve $\widetilde{H}_{1\infty}$ ile $\widetilde{H}_3$ ve $\widetilde{H}_{3\infty}$ den geçen yarı sonsuz Fuzzy hiperbolik parça, $\widetilde{FH}_{4\infty}$ ve $\widetilde{FH}_{5\infty}$, $\widetilde{H}_4$ ve $\widetilde{H}_{4\infty}$ ile $\widetilde{H}_5$ ve $\widetilde{H}_{5\infty}$ den geçen Fuzzy hiperbolik parça olsunlar. Sonra $\widetilde{FH}$, fuzzy hiperbolü

$$\widetilde{FH} = \widetilde{FH}_{1\infty} \cup \widetilde{FH}_{3\infty} \cup \widetilde{FH}_{1,\dots,5} \cup \widetilde{FH}_{4\infty} \cup \widetilde{FH}_{5\infty}$$

olarak tanımlayabiliriz. $\widetilde{FH}_{1,\dots,5}$ Fuzzy hiperbolik parça $\widetilde{FH}_{1\infty}$ ile $\widetilde{FH}_{3\infty}$ ve $\widetilde{FH}_{4\infty}$ ile $\widetilde{FH}_{5\infty}$ sonsuz uçlardır.

4.1 $\widetilde{FH}_{1,\dots,5}$ i Elde Etme

$$\widetilde{FH}_{1,..,5} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \left\{ \begin{array}{c} FH_\alpha : \widetilde{H}_i(a_i, b_i), \qquad i = 1,2,3,4,5 \text{ noktalardan} \\ \text{geçen üyelik derecesi } \alpha \text{ olan} \\ \text{beş noktadan oluşan kesin hiperbol} \end{array} \right\}$$

Matematiksel olarak $\widetilde{FH}_{1,\dots,5}$ hiperbolik parçası üyelik fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\mu\left((x,y)|\ \widetilde{FH}_{1,\dots,5}\right)=\sup\left\{\begin{array}{c}\alpha:(x,y),\widetilde{H}_i \text{ de } \alpha \text{ üyelik derecesi ile}\\ \text{verilen beş aynı noktadan}\\ \text{geçen } FH_\alpha \text{ üzerinde yer alır.}\end{array}\right\}$$

Tanıma göre $\widetilde{FH}_{1,\dots,5}$ hiperbolik parçası çeşitli üyelik değerlerine sahip kesin noktaların koleksiyonudur. $\mu\left((x,y)|\ \widetilde{FH}_{1,\dots,5}\right)$ üyelik fonksiyonunun tanımı gösteriyor ki Fuzzy hiperbolü $\widetilde{H}_i, i=1,\dots,5$ lerin desteği üzerindeki beş aynı noktadan geçen kesin hiperbollerin birleşimidir.

4.2 $\widetilde{FH}_{1\infty}$ ile $\widetilde{FH}_{3\infty}$ ve $\widetilde{FH}_{4\infty}$ ile $\widetilde{FH}_{5\infty}$ lerin Elde Edilmesi

Sonsuz uçların elde edilmesi $\widetilde{H}_{1\infty}$, $\widetilde{H}_{3\infty}$ ile $\widetilde{H}_{4\infty}$, $\widetilde{H}_{5\infty}$ Fuzzy noktaların elde edilmesine bağlıdır.

$\widetilde{H}_{1\infty}$ ile $\widetilde{H}_{3\infty}$ ve $\widetilde{H}_{4\infty}$ ile $\widetilde{H}_{5\infty}$ Fuzzy noktalarını nasıl elde edebiliriz ve sonsuz (uzak) mesafe ne anlama gelir? Bu soruların cevapları aşağıdaki önermede tanıtılmıştır.

Önerme belirtir ki $\widetilde{FH}_{1\infty}$ ve $\widetilde{FH}_{3\infty}$ un elde edilmesi için $\widetilde{H}_{1\infty}$ ve $\widetilde{H}_{3\infty}$ un şekli ve konumu önemsenmemektedir. $\widetilde{H}_{1\infty}$, $\widetilde{H}_{3\infty}$Fuzzy noktaları iki varsayımsal Fuzzy noktalardır. $\widetilde{FH}_{1\infty}$ ve $\widetilde{FH}_{3\infty}$ un elde edilmesi için sadece gerekli bilgi $\widetilde{H}_{1\infty}$ ve $\widetilde{H}_{3\infty}$ un desteklerinin $(\mu>0)$ kompakt kümeler olması ve bunların çekirdeklerinin çekirdek hiperbol CH üzerinde olması gerekmektedir. Aynı durum $\widetilde{H}_{4\infty}$ ile $\widetilde{H}_{5\infty}$ un elde edilmesi için de geçerlidir.

$\widetilde{FH}_{1\infty}$, $\widetilde{FH}_{3\infty}$ ile $\widetilde{FH}_{4\infty}$,$\widetilde{FH}_{5\infty}$ elde etmek için sırasıyla $\widetilde{H}_1$ve $\widetilde{H}_{1\infty}$, $\widetilde{H}_3$ ve $\widetilde{H}_{3\infty}$,$\widetilde{H}_4$ ve $\widetilde{H}_{4\infty}$, $\widetilde{H}_5$ ve $\widetilde{H}_{5\infty}$ aynı noktalardan geçen hiperbolik parçaları belirlemeye ihtiyaç vardır. Önermeye göre bu parçalar $\widetilde{FH}(1)$ çekirdek hiperbolüne paralel olmalıdır. Bu yüzden $\widetilde{FH}$ nin $\widetilde{FH}_{1\infty}$, $\widetilde{FH}_{3\infty}$,$\widetilde{FH}_{4\infty}$ ve $\widetilde{FH}_{5\infty}$ farklı üyelik dereceleri ile verilen yarı sonsuz Fuzzy hiperbolik parçalar, kesin hiperbol CH ye paralel olmalıdır.

Önerme 4.2.1: Fuzzy noktaların koleksiyonu şeklinde bir $\widetilde{FH}$ Fuzzy hiperbol düşünelim. $\widetilde{FH}_{1\infty}$, $\widetilde{FH}_{3\infty}$ ile $\widetilde{FH}_{4\infty}$,$\widetilde{FH}_{5\infty}$ deki tüm yarı sonsuz hiperbolik parçalar $\widetilde{FP}(1)$ kesin hiperbolüne paralel olmalıdır.

İspat: Aksini düşünelim, kabul edelim ki $\widetilde{FH}_{1\infty}$ yarı sonsuz hiperbol parçası $\widetilde{FH}(1)$ çekirdek hiperbolüne paralel olmasın.

$\widetilde{FH}_{1\infty}(0)$, formülüzasyonuna göre $\widetilde{H}_1$ve $\widetilde{H}_{1\infty}$ Fuzzy noktaların aynı noktaları ile birleşen yarı sonsuz hiperbolik parçaların birleşimidir. Bu nedenle $FH_{1\infty}$ a karşılık gelen $(x_i, y_i) \in \widetilde{H}_1(0)$ ve $(x_{1\infty}, y_{1\infty}) \in \widetilde{H}_{1\infty}(0)$ iki aynı noktaları mevcuttur ki bunlarda $FH_{1\infty}$ un iki uçlarıdır. $FH_{1\infty}$, $\widetilde{FH}(1)$ e paralel olmadığında, ya $FH_{1\infty}$ ile $FH(1)$ kesişir ya da $(x_{1\infty}, y_{1\infty})$ noktası ile yarı sonsuz hiperbolik parça $FH_{1\infty}$ arasındaki mesafe sonsuz olur.

İlk bahsedilen durum $(x_1, y_1) \in \widetilde{H}_1(1)$ ve $(x_{1\infty}, y_{1\infty}) \in \widetilde{H}_{1\infty}(0)$ ın aynı noktalar olmadığını gösterir. Çünkü (x_1, y_1) ve $(x_{1\infty}, y_{1\infty})$, $\widetilde{FH}(1)$ in farklı iki tarafındadır ve dolayısıyla $\widetilde{H}_1$ ve $\widetilde{H}_{1\infty}$ un çekirdek noktalarını birleştiren doğrunun iki farklı tarafında uzanır.

İkinci durumda ise; $\widetilde{H}_{1\infty}$ un desteğinin sınırsız olduğunu ve bu yüzden $\widetilde{H}_{1\infty}$ un fuzzy nokta olmadığını ima eder. Bu da kabulümüz ile çelişir. Yani bu iki durumda imkansızdır. Bu yüzden $\widetilde{FH}_{1\infty}$, $\widetilde{FH}(1)$ e paralel olmak zorundadır. Bu nedenle tüm yarı sonsuz $\widetilde{FH}_{1\infty}(0)$ daki tüm sonsuz hiperbolik parçaların $FH(1)$ e paralel olması gerekir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

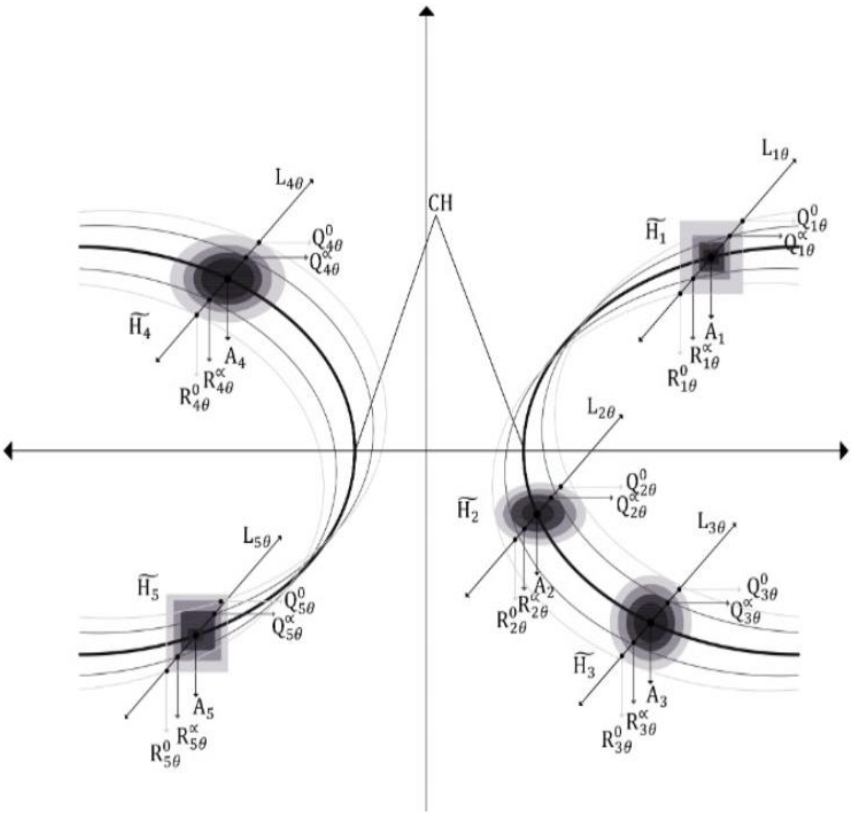
FH yi elde ederken ilk olarak $\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2, \widetilde{H}_3, \widetilde{H}_4$ ve $\widetilde{H}_5$ de aynı beş nokta ile elde edilen hiperbolik parçanın $\widetilde{FH}_{1,..,5}$ in iki kolunun her iki tarafına da yarı sonsuz hiperbolik $\widetilde{FH}_{1\infty}$ ile $\widetilde{FH}_{3\infty}$ ve $\widetilde{FH}_{4\infty}$ ile $\widetilde{FH}_{5\infty}$ u ekleriz. $\widetilde{FH}_{1\infty}, \widetilde{FH}_{3\infty}, \widetilde{FH}_{4\infty}$ ve $\widetilde{FH}_{5\infty}$ aşağıdaki formüller kullanılarak bulunur.

$$\widetilde{FH}_{1\infty} = \bigcup \left\{ \begin{array}{l} FH_{1\infty}\colon (x,y) \in \widetilde{H}_1(0) \text{ ve } FH_{1\infty}, \widetilde{\mathrm{H}}_1 \text{ üzerinde } \alpha \text{ üyelik} \\ \text{derecesi ile verilen } \widetilde{FH}(1) \text{ e paralel hiperbolik parça} \end{array} \right\}$$

$$\widetilde{FH}_{3\infty} = \bigcup \left\{ \begin{array}{l} FH_{3\infty}\colon (x,y) \in \widetilde{H}_3(0) \text{ ve } FH_{3\infty}, \widetilde{\mathrm{H}}_3 \text{ üzerinde } \alpha \text{ üyelik} \\ \text{derecesi ile verilen } \widetilde{FH}(1)\ e \text{ paralel hiperbolik parça} \end{array} \right\}$$

$$\widetilde{FH}_{4\infty} = \bigcup \left\{ \begin{array}{l} FH_{4\infty}\colon (x,y) \in \widetilde{H}_4(0) \text{ ve } FH_{4\infty}, \widetilde{\mathrm{H}}_4 \text{ üzerinde } \alpha \text{ üyelik} \\ \text{derecesi ile verilen } \widetilde{FH}(1) \text{ e paralel hiperbolik parça} \end{array} \right\}$$

$$\widetilde{FH}_{5\infty} = \bigcup \left\{ \begin{array}{l} FH_{5\infty}: (x,y) \in \widetilde{H}_5(0) \text{ ve } FH_{5\infty}, \widetilde{\mathrm{H}}_5 \text{ üzerinde } \alpha \text{ üyelik} \\ \text{derecesi ile verilen } \widetilde{FH}\,(1) \text{ e paralel hiperbolik parça} \end{array} \right\}$$



Şekil 4.1: Fuzzy Hiperbol Elde Etme

Şekilde $\widetilde{FH}$ yi elde etmek için $\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2, \widetilde{H}_3, \widetilde{H}_4$ ve $\widetilde{H}_5$ beş fuzzy nokta alalım. Merkezi A_1 olan dörtgensel bölge, merkezi A_2 olan elips bölge, merkezi A_3 olan çembersel bölge, merkezi A_4 olan elipsel bölge ve merkezi A_5 olan dörtgensel bölge sırasıyla $\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2, \widetilde{H}_3, \widetilde{H}_4$ ve $\widetilde{H}_5$ in destekleridir. Gri gölgeli bölgeler farklı α -kesimleri için Fuzzy noktaların desteklerini temsil eder.

Fuzzy noktalar için üyelik derecelerinin değişmesi daha önce gösterdiğimiz doğru, parabol ve elips gibi gri seviyelerinin yoğunluğu ile gösterilir. En koyu gri seviyesi en yüksek üyelik fonksiyonudur. $\widetilde{\mathrm{H}}_i$ deki A_i lerin üyelik dereceleri 1 dir ve $\widetilde{\mathrm{H}}_i$ lerin desteğinin çevresinde giderek 0 a doğru düşer. Şekilde, içteki merkezi A_i ler olan elips ya da çemberler $\widetilde{\mathrm{H}}_i(\alpha)$ nın α- kesimleridir.

Şimdi de A_i den geçen beş $L_{i\theta}$ doğrularını düşünelim. ($i = 1,2,3,4,5$) Bu beş doğru pozitif x ekseni ile θ derecelik açı yapar. Bir Fuzzy noktanın α-kesimi olan $\widetilde{H}_i(A_i)(\alpha)$ konveks ve $A_i, H_i(A_i)(\alpha)$ nın iç noktası olduğunda, $L_{i\theta}$ doğrusu $\widetilde{H}_i(A_i)(\alpha)$ nın sınırları ile iki nokta kesişir. Bu kesişim noktaları $Q_{i\theta}^{\alpha}$ ve $R_{i\theta}^{\alpha}$ olsun. $Q_{1\theta}^{\alpha}, Q_{2\theta}^{\alpha}, Q_{3\theta}^{\alpha}, Q_{4\theta}^{\alpha}$ ve $Q_{5\theta}^{\alpha}$, α üyelik derecesine sahip beş aynı noktanın kümesini oluşturur. Benzer şekilde $R_{1\theta}^{\alpha}, R_{2\theta}^{\alpha}, R_{3\theta}^{\alpha}, R_{4\theta}^{\alpha}$ ve $R_{5\theta}^{\alpha}$, α üyelik derecesine sahip beş aynı noktadır.

$Q_{i\theta}^{\alpha}$ lardan geçen Fuzzy hiperbol $FH_{\theta U}^{\alpha}$ ve $R_{i\theta}^{\alpha}$ lerden geçen Fuzzy hiperbol $FH_{\theta L}^{\alpha}$ olsun. Tüm $Q_{i\theta}^{\alpha}$ ve $R_{i\theta}^{\alpha}$ noktalarının üyelik değerleri α olduğunda, $FH_{\theta U}^{\alpha}$ ve $FH_{\theta L}^{\alpha}$ nın $\widetilde{FH}$ hiperbolünde üyeliği α olur. $\theta, [0,2\pi]$ aralığında ve $\alpha, [0,1]$ aralığında değiştiğinde $\widetilde{FH}$ de $FH_{\theta U}^{\alpha}$ ve $FH_{\theta L}^{\alpha}$ gibi hiperboller oluşur. Fuzzy hiperbolik parça α üyelik derecesi ile verilen $FH_{\theta U}^{\alpha}$ ve $FH_{\theta L}^{\alpha}$ ların koleksiyonudur.

$$\widetilde{FH}_{1,\dots,5} = \bigcup_{\substack{\theta \in [0,2\pi] \\ \alpha \in [0,1]}} \left\{ FH_{\theta U}^{\alpha}, FH_{\theta L}^{\alpha} \right\}$$

FH, $\widetilde{FH}$ nin desteğinde bir hiperbol olsun. $\widetilde{FH}$ de, FH hiperbolünün üyelik değeri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mu\left(FH \middle| \widetilde{FH}\right) = \min_{(x,y) \in FH} \mu\left((x,y) \middle| \widetilde{FH}\right)$$

Aşağıdaki teorem $\widetilde{H}_i$ lerdeki aynı noktalar kullanarak $\widetilde{FH}$ de FH hiperbolünün üyelik değerini nasıl bulacağımızı gösterir.

Teorem 4.2.1 $\widetilde{FH}$ Fuzzy hiperbolü üzerinde FH hiperbolünü düşünelim ve $i = 1,2,3,4,5$ için $\mu\big((x_i, y_i) |\, FH\big) = \alpha$ üyelik derecesi ile verilen beş aynı nokta $(x_i, y_i) \in \widetilde{H}_i(0)$ mevcut olsun öyle ki FH, bu beş (x_i, y_i) den geçen bir hiperboldür ve $\mu\big(\widetilde{FH} |\, FH\big) = \alpha$ dır.

İspat:

$\mu\big(FH |\, \widetilde{FH}\big) \nless \alpha$ ve $\mu\big(FH |\, \widetilde{FH}\big) \ngtr \alpha$ olduğunu göstermeliyiz.

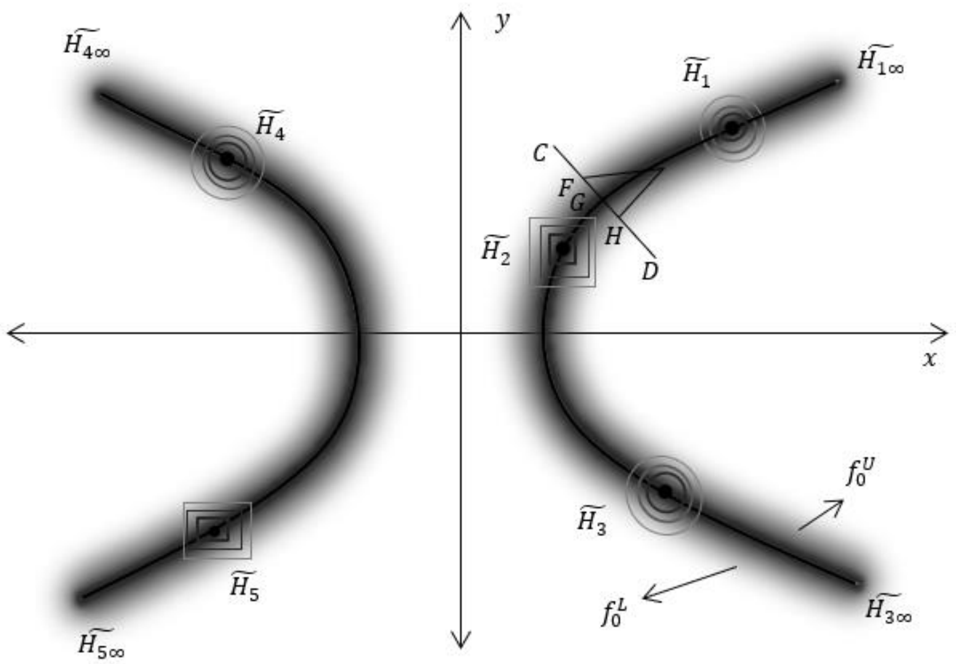
(i) Tersine $\mu\big(FH |\, \widetilde{FH}\big) < \alpha$ alalım. $\mu\big(FH |\, \widetilde{FH}\big)$ nin tanımından, $\widetilde{FH}$ de öyle bir (x_0, y_0) nokta vardır ki $(x_0, y_0) \in FH$ ve $\mu\left((x_0, y_0) |\, \widetilde{FH}\right) < \alpha$ dır.

$\mu\left((x_0, y_0) | \widetilde{FH}\right) = \beta$ alalım. $(x_0, y_0) \in FH$ ve FH üyelik değeri α olan beş aynı noktadan geçen hiperbol olduğundan,

$\mu\left((x_0, y_0) | \widetilde{FH}\right) = \sup \left\{ \begin{matrix} \delta: (x, y), \delta \text{ üyelik değeri ile verilen} \\ \text{beş aynı noktadan geçen} \\ \text{hiperbol üzerinde olan nokta} \end{matrix} \right\} \geq \alpha$ olur. Bu da $\beta < \alpha$ kabulümüz ile çelişir. Bu yüzden $\mu\left(FH | \widetilde{FH}\right) \nless \alpha$ dır.

(ii) $(\mu\left(FH | \widetilde{FH}\right) = \min \left\{ \begin{matrix} \alpha: (x, y) \text{ noktası } FH \text{ üzerinde} \\ \text{ve } \mu\left(FH | \widetilde{FH}\right) = \alpha \end{matrix} \right\}$ ve

$i = 1,2,3,4,5$ için (x_i, y_i) tüm noktalar FH üzerinde olduğundan bu kısım açıktır. (Yani Büyük olamaz). Yani $\mu\left(FH | \widetilde{FH}\right) = \alpha$ dır.



Şekil 4.2: Tamamlanmış Fuzzy Hiperbolü

Tamamlanmış Fuzzy hiperbolü $\widetilde{FH}$ Şekil 4.2'de gösterilmiştir. f_0^L ve f_0^U eğrileri arasındaki bölge $\widetilde{FH}$ Fuzzy hiperbolünün destekleridir. Fuzzy noktalar $\widetilde{H}_i$ lerin beş kesin noktası A_i lerden geçen kesin hiperbol CH dir.

Örneğin Şekil 4.2'de $\widetilde{H}_1$ çember bölgesinin çevresinde üyelik değeri 0 iken $\widetilde{H}_i(0)$ ın temas ettiği yerler f_0^L ve f_0^U hariç tüm noktalar $\widetilde{FH}$ için bir üyelik değerine sahiptir. $\widetilde{H}_i(0)$ da her (x_0, y_0) noktası için $\mu\left((x_0, y_0)|\ \widetilde{FH}\right)$ büyük ya da eşit $\mu\left((x_0, y_0)|\ \widetilde{H}_i\right)$ dir. ($i = 1,2,3,4,5$)

$\widetilde{FH}$ de kesin hiperbol $CH \equiv \widetilde{FH}(1)$ e dik doğru düşünelim. Bu doğru boyunca $FH(0)$ üzerinde Fuzzy bir sayı olduğunu unutmayalım. Şekil 4.2'de CD boyunca $(F/G\ /H\ )_{LR}$ dediğimiz Fuzzy sayı vardır. Böylece Fuzzy hiperbol boyunca kesit $(F/G\ /H\ )_{LR}$ gibi Fuzzy sayı olan üç boyutlu bir şekil (temel olarak $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ alt kümesi) olarak görselleştirilebilir. Sadece G de üyelik değeri 1 e eşittir.

4.3 Fuzzy Hiperbol Uygulamaları

Örnek 4.3.1: $\widetilde{H}_1(1,0), \widetilde{H}_2(2, 3\sqrt{3}), \widetilde{H}_3(-3,6\sqrt{2}), \widetilde{H}_4\left(-\frac{4}{3}, -\sqrt{7}\right)$ ve $\widetilde{H}_5\left(\frac{5}{2}, -\frac{3\sqrt{21}}{2}\right)$ beş Fuzzy nokta olsun. Bu beş Fuzzy noktanın üyelik fonksiyonları sırasıyla

$$\{(x, y): (x-1)^2 + y^2 \leq 1\} \text{ dairesel}$$

$$\left\{(x, y): (x-2)^2 + 4(y - 3\sqrt{3})^2 \leq 1\right\} \text{ elips}$$

$$\left\{(x, y): (x+3)^2 + (y - 6\sqrt{2})^2 \leq 1\right\} \text{ dairesel}$$

$$\left\{(x, y): 4(x-2)^2 + (y + \sqrt{7})^2 \leq 1\right\} \text{ elips}$$

$$\left\{(x, y): \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y + \frac{3\sqrt{21}}{2})^2 \leq 1\right\} \text{ dairesel}$$

olsun. Üyelik fonksiyonlarının tepe noktaları sırasıyla $(1,0)$, $(2, 3\sqrt{3})$, $(-3,6\sqrt{2})$, $\left(-\frac{4}{3}, -\sqrt{7}\right)$ ve $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3\sqrt{21}}{2}\right)$ dir. $\alpha \in [0,1]$ ler için $\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2, \widetilde{H}_3, \widetilde{H}_4$ ve $\widetilde{H}_5$ de üyelik değerleri α olan beş aynı nokta sırasıyla;

$$Q_{1\theta}^{\alpha} = (x_{1\theta}^{\alpha}, y_{1\theta}^{\alpha}) = (1 + (1-\alpha)\cos\theta, (1-\alpha)\sin\theta)$$

$$Q_{2\theta}^{\alpha}=(x_{2\theta}^{\alpha},y_{2\theta}^{\alpha})=\left(2+(1-\alpha).\frac{\cos\theta}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}\,,3\sqrt{3}+(1-\alpha).\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}\right)$$

$$Q_{3\theta}^{\alpha}=(x_{3\theta}^{\alpha},y_{3\theta}^{\alpha})=\left(-3+(1-\alpha)\cos\theta\,,6\sqrt{2}+(1-\alpha)\sin\theta\right)$$

$$Q_{4\theta}^{\alpha}=(x_{4\theta}^{\alpha},y_{4\theta}^{\alpha})=\left(-\frac{4}{3}+(1-\alpha).\frac{\cos\theta}{\sqrt{1+3\cos^2\theta}}\,,-\sqrt{7}+(1-\alpha).\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+3\cos^2\theta}}\right)$$

$$Q_{5\theta}^{\alpha}=(x_{5\theta}^{\alpha},y_{5\theta}^{\alpha})=\left(\frac{5}{2}+(1-\alpha)\cos\theta\,,-\frac{3\sqrt{21}}{2}+(1-\alpha)\sin\theta\right)$$

olsun. $Q_{1\theta}^{\alpha},Q_{2\theta}^{\alpha},Q_{3\theta}^{\alpha},Q_{4\theta}^{\alpha}$ ve $Q_{5\theta}^{\alpha}$ dan geçen H_{θ}^{α} dediğimiz Fuzzy hiperbolü yine aşağıdaki denklem tarafından belirlenir.

$$a_{\theta}^{\alpha}x^2+2h_{\theta}^{\alpha}xy+b_{\theta}^{\alpha}y^2+2g_{\theta}^{\alpha}x+2f_{\theta}^{\alpha}y+c_{\theta}^{\alpha}=0 \text{ ve } h_{\theta}^{\alpha^2}>a_{\theta}^{\alpha}.b_{\theta}^{\alpha} \qquad (4.1)$$

Şimdi bu denklem için katsayıları hesaplayacağımız determinantları verelim.

$$a_{\theta}^{\alpha}=\frac{2h_{\theta}^{\alpha}}{k_{\theta}^{\alpha}}\begin{vmatrix}-x_{1\theta}^{\alpha}y_{1\theta}^{\alpha} & {y_{1\theta}^{\alpha}}^2 & x_{1\theta}^{\alpha} & y_{1\theta}^{\alpha} & 1\\ -x_{2\theta}^{\alpha}y_{2\theta}^{\alpha} & {y_{2\theta}^{\alpha}}^2 & x_{2\theta}^{\alpha} & y_{2\theta}^{\alpha} & 1\\ -x_{3\theta}^{\alpha}y_{3\theta}^{\alpha} & {y_{3\theta}^{\alpha}}^2 & x_{3\theta}^{\alpha} & y_{3\theta}^{\alpha} & 1\\ -x_{4\theta}^{\alpha}y_{4\theta}^{\alpha} & {y_{4\theta}^{\alpha}}^2 & x_{4\theta}^{\alpha} & y_{4\theta}^{\alpha} & 1\\ -x_{5\theta}^{\alpha}y_{1\theta}^{\alpha} & {y_{5\theta}^{\alpha}}^2 & x_{5\theta}^{\alpha} & y_{5\theta}^{\alpha} & 1\end{vmatrix}$$

$$b_{\theta}^{\alpha}=\frac{2h_{\theta}^{\alpha}}{k_{\theta}^{\alpha}}\begin{vmatrix}{x_{1\theta}^{\alpha}}^2 & -x_{1\theta}^{\alpha}y_{1\theta}^{\alpha} & x_{1\theta}^{\alpha} & y_{1\theta}^{\alpha} & 1\\ {x_{2\theta}^{\alpha}}^2 & -x_{2\theta}^{\alpha}y_{2\theta}^{\alpha} & x_{2\theta}^{\alpha} & y_{2\theta}^{\alpha} & 1\\ {x_{3\theta}^{\alpha}}^2 & -x_{3\theta}^{\alpha}y_{3\theta}^{\alpha} & x_{3\theta}^{\alpha} & y_{3\theta}^{\alpha} & 1\\ {x_{4\theta}^{\alpha}}^2 & -x_{4\theta}^{\alpha}y_{4\theta}^{\alpha} & x_{4\theta}^{\alpha} & y_{4\theta}^{\alpha} & 1\\ {x_{5\theta}^{\alpha}}^2 & -x_{5\theta}^{\alpha}y_{1\theta}^{\alpha} & x_{5\theta}^{\alpha} & y_{5\theta}^{\alpha} & 1\end{vmatrix}$$

$$g_{\theta}^{\alpha}=\frac{h_{\theta}^{\alpha}}{k_{\theta}^{\alpha}}\begin{vmatrix}{x_{1\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{1\theta}^{\alpha}}^2 & -x_{1\theta}^{\alpha}y_{1\theta}^{\alpha} & y_{1\theta}^{\alpha} & 1\\ {x_{2\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{2\theta}^{\alpha}}^2 & -x_{2\theta}^{\alpha}y_{2\theta}^{\alpha} & y_{2\theta}^{\alpha} & 1\\ {x_{3\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{3\theta}^{\alpha}}^2 & -x_{3\theta}^{\alpha}y_{3\theta}^{\alpha} & y_{3\theta}^{\alpha} & 1\\ {x_{4\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{4\theta}^{\alpha}}^2 & -x_{4\theta}^{\alpha}y_{4\theta}^{\alpha} & y_{4\theta}^{\alpha} & 1\\ {x_{5\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{5\theta}^{\alpha}}^2 & -x_{5\theta}^{\alpha}y_{5\theta}^{\alpha} & y_{5\theta}^{\alpha} & 1\end{vmatrix}$$

$$f_\theta^\alpha = \frac{h_\theta^\alpha}{k_\theta^\alpha}\begin{vmatrix} {x_{1\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{1\theta}^{\alpha}}^2 & x_{1\theta}^\alpha & -x_{1\theta}^\alpha y_{1\theta}^\alpha & 1 \\ {x_{2\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{2\theta}^{\alpha}}^2 & x_{2\theta}^\alpha & -x_{2\theta}^\alpha y_{2\theta}^\alpha & 1 \\ {x_{3\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{3\theta}^{\alpha}}^2 & x_{3\theta}^\alpha & -x_{3\theta}^\alpha y_{3\theta}^\alpha & 1 \\ {x_{4\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{4\theta}^{\alpha}}^2 & x_{4\theta}^\alpha & -x_{4\theta}^\alpha y_{4\theta}^\alpha & 1 \\ {x_{5\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{5\theta}^{\alpha}}^2 & x_{5\theta}^\alpha & -x_{5\theta}^\alpha y_{5\theta}^\alpha & 1 \end{vmatrix}$$

$$c_\theta^\alpha = \frac{2h_\theta^\alpha}{k_\theta^\alpha}\begin{vmatrix} {x_{1\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{1\theta}^{\alpha}}^2 & x_{1\theta}^\alpha & y_{1\theta}^\alpha & -x_{1\theta}^\alpha y_{1\theta}^\alpha \\ {x_{2\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{2\theta}^{\alpha}}^2 & x_{2\theta}^\alpha & y_{2\theta}^\alpha & -x_{2\theta}^\alpha y_{2\theta}^\alpha \\ {x_{3\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{3\theta}^{\alpha}}^2 & x_{3\theta}^\alpha & y_{3\theta}^\alpha & -x_{3\theta}^\alpha y_{3\theta}^\alpha \\ {x_{4\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{4\theta}^{\alpha}}^2 & x_{4\theta}^\alpha & y_{4\theta}^\alpha & -x_{4\theta}^\alpha y_{4\theta}^\alpha \\ {x_{5\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{5\theta}^{\alpha}}^2 & x_{5\theta}^\alpha & y_{5\theta}^\alpha & -x_{5\theta}^\alpha y_{5\theta}^\alpha \end{vmatrix}$$

ve

$$k_\theta^\alpha = \begin{vmatrix} {x_{1\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{1\theta}^{\alpha}}^2 & x_{1\theta}^\alpha & y_{1\theta}^\alpha & 1 \\ {x_{2\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{2\theta}^{\alpha}}^2 & x_{2\theta}^\alpha & y_{2\theta}^\alpha & 1 \\ {x_{3\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{3\theta}^{\alpha}}^2 & x_{3\theta}^\alpha & y_{3\theta}^\alpha & 1 \\ {x_{4\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{4\theta}^{\alpha}}^2 & x_{4\theta}^\alpha & y_{4\theta}^\alpha & 1 \\ {x_{5\theta}^{\alpha}}^2 & {y_{5\theta}^{\alpha}}^2 & x_{5\theta}^\alpha & y_{5\theta}^\alpha & 1 \end{vmatrix}$$

$\widetilde{H}_i$ lerden geçen $(i = 1,2,\ldots,5)$ $\widetilde{FH}_{1,2\ldots,5}$ fuzzy hiperbolik parça $Q_{1\theta}^\alpha$ ve $Q_{5\theta}^\alpha$ lar arasında uzanan H_θ^α tüm olası hiperbol parçalarının bir bölgesidir.

$$\widetilde{FH}_{1,\ldots,5} = \bigcup_{\substack{\theta\in[0,2\pi] \\ \alpha\in[0,1]}} \{a_\theta^\alpha x^2 + 2h_\theta^\alpha xy + b_\theta^\alpha y^2 + 2g_\theta^\alpha x + 2f_\theta^\alpha y + c_\theta^\alpha = 0\} \tag{4.2}$$

Sonsuz $\widetilde{FH}_{2\infty}$, $\widetilde{FH}_{3\infty}$, $\widetilde{FH}_{4\infty}$ ve $\widetilde{FH}_{5\infty}$ uçları aşağıdaki üyelik fonksiyonları tarafından belirlenir.

$$\mu\left((x,y)|\widetilde{FH}_{2\infty}\right) = \begin{cases} \alpha, 9\left(x^2 - x_{2\theta}^{\alpha^2}\right) = y^2 - y_{2\theta}^{\alpha^2}, & \theta = 16{,}1° \\ 0, \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

$$\mu\left((x,y)|\widetilde{FH}_{3\infty}\right) = \begin{cases} \alpha, 9\left(x^2 - x_{3\theta}^{\alpha^2}\right) = y^2 - y_{3\theta}^{\alpha^2}, & \theta = 19{,}4° \\ 0, \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

$$\mu\left((x,y)|\widetilde{FH}_{4\infty}\right)=\begin{cases}\alpha, 9\left(x^2-x_{4\theta}^{\alpha^2}\right)=y^2-y_{4\theta}^{\alpha^2}, & \theta=26{,}7°\\ 0, \text{diğer durumlar}\end{cases}$$

$$\mu\left((x,y)|\widetilde{FH}_{5\infty}\right)=\begin{cases}\alpha, 9\left(x^2-x_{5\theta}^{\alpha^2}\right)=y^2-y_{5\theta}^{\alpha^2}, & \theta=16{,}98°\\ 0, \text{diğer durumlar}\end{cases}$$

$\theta = 16{,}1°,$ $19{,}4°, 26{,}7$ ve $16{,}98°$ açıları sırasıyla $\left(2, 3\sqrt{3}\right), \left(-3{,}6\sqrt{2}\right), \left(-\frac{4}{3}, -\sqrt{7}\right)$ ve $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3\sqrt{21}}{2}\right)$ noktalarından geçen kesin hiperbolün normallerinin x ekseni ile yaptığı pozitif yönlü açıdır. $\widetilde{FH}$ Fuzzy hiperbolüne

$$\left\{(x,y): x^2-\frac{y^2}{9}=1\right\}$$

dir. Şimdi de (1.2,0.4) noktasının $\widetilde{FH}$ Fuzzy hiperbolüne üyeliğini bulalım. İlk olarak (1.2,0.4) noktasının üzerinde olduğu H_θ^α hiperbolünün kümesini belirleyelim.

H_θ^α nın denkleminin (4.1) deki gibi olması için α olası değerlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$a_\theta^\alpha(1.2)^2+2h_\theta^\alpha(1.2)(0.4)+b_\theta^\alpha(0.4)^2+2g_\theta^\alpha(1.2)+2f_\theta^\alpha(0.4)+c_\theta^\alpha=0$$

$$1{,}44a_\theta^\alpha+0{,}96h_\theta^\alpha+0{,}16b_\theta^\alpha+2{,}4g_\theta^\alpha+0{,}8f_\theta^\alpha+c_\theta^\alpha=0 \qquad (4.3)$$

(4.3) denklemindeki $a_\theta^\alpha, b_\theta^\alpha, c_\theta^\alpha, f_\theta^\alpha, g_\theta^\alpha$ and k_θ^α katsayılarını bulmak için kullanılan determinant değerleri sırasıyla A, B, C, F, G and K olsun. Böylece,

$$a_\theta^\alpha=\frac{2h_\theta^\alpha}{k_\theta^\alpha}.A$$

$$b_\theta^\alpha=\frac{2h_\theta^\alpha}{k_\theta^\alpha}.B$$

$$c_\theta^\alpha=\frac{2h_\theta^\alpha}{k_\theta^\alpha}.C$$

$$f_\theta^\alpha=\frac{h_\theta^\alpha}{k_\theta^\alpha}.F$$

$$g_\theta^\alpha = \frac{h_\theta^\alpha}{k_\theta^\alpha}.G$$

$$k_\theta^\alpha = K$$

(4.4)

Alınıp,

(4.3) denkleminde $a_\theta^\alpha, h_\theta^\alpha, b_\theta^\alpha, g_\theta^\alpha, f_\theta^\alpha$ ve c_θ^α yerine yazılıp $\frac{h_\theta^\alpha}{k_\theta^\alpha}$ parantezine alınırsa;

$$\frac{h_\theta^\alpha}{k_\theta^\alpha}(2.88A + 0.96K + 0.32B + 2.4G + 0.8F + 2C) = 0 \qquad (4.5)$$

bulunur.

$\theta_0 = 45°$ alalım. $(x_{1\theta}^\alpha, y_{1\theta}^\alpha), (x_{2\theta}^\alpha, y_{2\theta}^\alpha), (x_{3\theta}^\alpha, y_{3\theta}^\alpha), (x_{4\theta}^\alpha, y_{4\theta}^\alpha)$ ve $(x_{5\theta}^\alpha, y_{5\theta}^\alpha)$ yerlerine yazılıp A, K, B, G, F ve C determinantlarını yaklaşık olarak hesaplayalım.

$$k_\theta^\alpha = K$$

$$K = \begin{vmatrix} [1+(1-\alpha)\cos 45°]^2 & [(1-\alpha)\sin 45°]^2 & 1+(1-\alpha)\cos 45° & (1-\alpha)\sin 45° & 1 \\ \left[2+\frac{(1-\alpha)\cos 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}}\right]^2 & \left[3\sqrt{3}+\frac{(1-\alpha)\sin 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}}\right]^2 & 2+\frac{(1-\alpha)\cos 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}} & 3\sqrt{3}+\frac{(1-\alpha)\sin 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}} & 1 \\ [-3+(1-\alpha)\cos 45°]^2 & \left[6\sqrt{2}+(1-\alpha)\sin 45°\right]^2 & -3+(1-\alpha)\cos 45° & 6\sqrt{2}+(1-\alpha)\sin 45° & 1 \\ \left[-\frac{4}{3}+\frac{(1-\alpha)\cos 45°}{\sqrt{1+8\cos^2 45°}}\right]^2 & \left[-\sqrt{7}+\frac{(1-\alpha)\sin 45°}{\sqrt{1+8\cos^2 45°}}\right]^2 & -\frac{4}{3}+\frac{(1-\alpha)\cos 45°}{\sqrt{1+8\cos^2 45°}} & -\sqrt{7}+\frac{(1-\alpha)\sin 45°}{\sqrt{1+8\cos^2 45°}} & 1 \\ \left[\frac{5}{2}+(1-\alpha)\cos 45°\right]^2 & \left[-\frac{3\sqrt{21}}{2}+(1-\alpha)\sin 45°\right]^2 & \left[\frac{5}{2}+(1-\alpha)\cos 45°\right] & -\frac{3\sqrt{21}}{2}+(1-\alpha)\sin 45° & 1 \end{vmatrix}$$

$$K = 2.337\alpha^3 - 73.417\alpha^2 - 657.057\alpha - 585.977$$

Şimdi de $a_\theta^\alpha,\ b_\theta^\alpha, c_\theta^\alpha, f_\theta^\alpha$ ve g_θ^α leri hesaplayalım

A determinant değeri için,

$$\begin{vmatrix} -[1+(1-\alpha)\cos 45°][(1-\alpha)\cos 45°] & [(1-\alpha)\sin 45°]^2 & 1+(1-\alpha)\cos 45° & (1-\alpha)\sin 45° & 1 \\ -\left[2+\frac{(1-\alpha)\cos 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}}\right]\left[3\sqrt{3}+\frac{(1-\alpha)\cos 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}}\right] & \left[3\sqrt{3}+\frac{(1-\alpha)\sin 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}}\right]^2 & 2+\frac{(1-\alpha)\cos 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}} & 3\sqrt{3}+\frac{(1-\alpha)\sin 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}} & 1 \\ -[-3+(1-\alpha)\cos 45°][6\sqrt{2}+(1-\alpha)\sin 45°] & \left[6\sqrt{2}+(1-\alpha)\sin 45°\right]^2 & -3+(1-\alpha)\cos 45° & 6\sqrt{2}+(1-\alpha)\sin 45° & 1 \\ -\left[-\frac{4}{3}+\frac{(1-\alpha)\cos 45°}{\sqrt{1+8\cos^2 45°}}\right]\left[-\sqrt{7}+\frac{(1-\alpha)\sin 45°}{\sqrt{1+8\cos^2 45°}}\right] & \left[-\sqrt{7}+\frac{(1-\alpha)\sin 45°}{\sqrt{1+8\cos^2 45°}}\right]^2 & -\frac{4}{3}+\frac{(1-\alpha)\cos 45°}{\sqrt{1+8\cos^2 45°}} & -\sqrt{7}+\frac{(1-\alpha)\sin 45°}{\sqrt{1+8\cos^2 45°}} & 1 \\ -\left[\frac{5}{2}+(1-\alpha)\cos 45°\right]\left[-\frac{3\sqrt{21}}{2}+(1-\alpha)\sin 45°\right] & \left[-\frac{3\sqrt{21}}{2}+(1-\alpha)\sin 45°\right]^2 & \left[\frac{5}{2}+(1-\alpha)\cos 45°\right] & -\frac{3\sqrt{21}}{2}+(1-\alpha)\sin 45° & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-1.168\alpha^3+859.293\alpha^2-1587.371\alpha-71752.51$$

Bulunur.

B determinantını hesaplarsak

$$\begin{vmatrix}
[1+(1-\alpha)\cos 45°]^2 & -[1+(1-\alpha)\cos 45°][(1-\alpha)\cos 45°] & 1+(1-\alpha)\cos 45° & (1-\alpha)\sin 45° & 1\\
\left[2+\frac{(1-\alpha)\cos 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}}\right]^2 & -\left[2+\frac{(1-\alpha)\cos 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}}\right]\left[3\sqrt{3}+\frac{(1-\alpha)\cos 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}}\right] & 2+\frac{(1-\alpha)\cos 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}} & 3\sqrt{3}+\frac{(1-\alpha)\sin 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}} & 1\\
[-3+(1-\alpha)\cos 45°]^2 & -[-3+(1-\alpha)\cos 45°][6\sqrt{2}+(1-\alpha)\sin 45°] & -3+(1-\alpha)\cos 45° & 6\sqrt{2}+(1-\alpha)\sin 45° & 1\\
\left[-\frac{4}{3}+\frac{(1-\alpha)\cos 45°}{\sqrt{1+8\cos^2 45°}}\right]^2 & -\left[-\frac{4}{3}+\frac{(1-\alpha)\cos 45°}{\sqrt{1+8\cos^2 45°}}\right]\left[-\sqrt{7}+\frac{(1-\alpha)\sin 45°}{\sqrt{1+8\cos^2 45°}}\right] & -\frac{4}{3}+\frac{(1-\alpha)\cos 45°}{\sqrt{1+8\cos^2 45°}} & -\sqrt{7}+\frac{(1-\alpha)\sin 45°}{\sqrt{1+8\cos^2 45°}} & 1\\
\left[\frac{5}{2}+(1-\alpha)\cos 45°\right]^2 & -\left[\frac{5}{2}+(1-\alpha)\cos 45°\right]\left[-\frac{3\sqrt{21}}{2}+(1-\alpha)\sin 45°\right] & \left[\frac{5}{2}+(1-\alpha)\cos 45°\right] & -\frac{3\sqrt{21}}{2}+(1-\alpha)\sin 45° & 1
\end{vmatrix}$$

$$=-1.168\alpha^3-121.751\alpha^2+643.496\alpha+7532.952$$

Elde edilir. Şimdi G için hesaplama yapılırsa

$$\begin{vmatrix}
[1+(1-\alpha)\cos 45°]^2 & [(1-\alpha)\sin 45°]^2 & -[1+(1-\alpha)\cos 45°][(1-\alpha)\cos 45°] & (1-\alpha)\sin 45° & 1\\
\left[2+\frac{(1-\alpha)\cos 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}}\right]^2 & \left[3\sqrt{3}+\frac{(1-\alpha)\sin 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}}\right]^2 & -\left[2+\frac{(1-\alpha)\cos 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}}\right]\left[3\sqrt{3}+\frac{(1-\alpha)\cos 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}}\right] & 3\sqrt{3}+\frac{(1-\alpha)\sin 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}} & 1\\
[-3+(1-\alpha)\cos 45°]^2 & \left[6\sqrt{2}+(1-\alpha)\sin 45°\right]^2 & -[-3+(1-\alpha)\cos 45°][6\sqrt{2}+(1-\alpha)\sin 45°] & 6\sqrt{2}+(1-\alpha)\sin 45° & 1\\
\left[-\frac{4}{3}+\frac{(1-\alpha)\cos 45°}{\sqrt{1+8\cos^2 45°}}\right]^2 & \left[-\sqrt{7}+\frac{(1-\alpha)\sin 45°}{\sqrt{1+8\cos^2 45°}}\right]^2 & -\left[-\frac{4}{3}+\frac{(1-\alpha)\cos 45°}{\sqrt{1+8\cos^2 45°}}\right]\left[-\sqrt{7}+\frac{(1-\alpha)\sin 45°}{\sqrt{1+8\cos^2 45°}}\right] & -\sqrt{7}+\frac{(1-\alpha)\sin 45°}{\sqrt{1+8\cos^2 45°}} & 1\\
\left[\frac{5}{2}+(1-\alpha)\cos 45°\right]^2 & \left[-\frac{3\sqrt{21}}{2}+(1-\alpha)\sin 45°\right]^2 & -\left[\frac{5}{2}+(1-\alpha)\cos 45°\right]\left[-\frac{3\sqrt{21}}{2}+(1-\alpha)\sin 45°\right] & -\frac{3\sqrt{21}}{2}+(1-\alpha)\sin 45° & 1
\end{vmatrix}$$

$= 1033.751\alpha^3-2942.633\alpha^2-86043.569\alpha+87952.451$ bulunur.

F için hesaplama yapalım;

$$\begin{vmatrix}
[1+(1-\alpha)\cos 45°]^2 & [(1-\alpha)\sin 45°]^2 & 1+(1-\alpha)\cos 45° & -[1+(1-\alpha)\cos 45°][(1-\alpha)\sin 45°] & 1\\
\left[2+\frac{(1-\alpha)\cos 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}}\right]^2 & \left[3\sqrt{3}+\frac{(1-\alpha)\sin 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}}\right]^2 & 2+\frac{(1-\alpha)\cos 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}} & -\left[2+\frac{(1-\alpha)\cos 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}}\right]\left[3\sqrt{3}+\frac{(1-\alpha)\sin 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}}\right] & 1\\
[-3+(1-\alpha)\cos 45°]^2 & \left[6\sqrt{2}+(1-\alpha)\sin 45°\right]^2 & -3+(1-\alpha)\cos 45° & -[-3+(1-\alpha)\cos 45°][6\sqrt{2}+(1-\alpha)\sin 45°] & 1\\
\left[-\frac{4}{3}+\frac{(1-\alpha)\cos 45°}{\sqrt{1+8\cos^2 45°}}\right]^2 & \left[-\sqrt{7}+\frac{(1-\alpha)\sin 45°}{\sqrt{1+8\cos^2 45°}}\right]^2 & -\frac{4}{3}+\frac{(1-\alpha)\cos 45°}{\sqrt{1+8\cos^2 45°}} & -\left[-\frac{4}{3}+\frac{(1-\alpha)\cos 45°}{\sqrt{1+8\cos^2 45°}}\right]\left[-\sqrt{7}+\frac{(1-\alpha)\sin 45°}{\sqrt{1+8\cos^2 45°}}\right] & 1\\
\left[\frac{5}{2}+(1-\alpha)\cos 45°\right]^2 & \left[-\frac{3\sqrt{21}}{2}+(1-\alpha)\sin 45°\right]^2 & \left[\frac{5}{2}+(1-\alpha)\cos 45°\right] & -\left[\frac{5}{2}+(1-\alpha)\cos 45°\right]\left[-\frac{3\sqrt{21}}{2}+(1-\alpha)\sin 45°\right] & 1
\end{vmatrix}$$

$$=-267.139\alpha^3+1601.891\alpha^2-13501.485\alpha-14836.237$$

Bulunur. C determinantının değeri ise

$$\begin{vmatrix}
[1+(1-\alpha)\cos 45°]^2 & [(1-\alpha)\sin 45°]^2 & 1+(1-\alpha)\cos 45° & (1-\alpha)\sin 45° & -[1+(1-\alpha)\cos 45°][(1-\alpha)\sin 45°]\\
\left[2+\frac{(1-\alpha)\cos 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}}\right]^2 & \left[3\sqrt{3}+\frac{(1-\alpha)\sin 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}}\right]^2 & 2+\frac{(1-\alpha)\cos 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}} & 3\sqrt{3}+\frac{(1-\alpha)\sin 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}} & -\left[2+\frac{(1-\alpha)\cos 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}}\right]\left[3\sqrt{3}+\frac{(1-\alpha)\sin 45°}{\sqrt{1+3\sin^2 45°}}\right]\\
[-3+(1-\alpha)\cos 45°]^2 & \left[6\sqrt{2}+(1-\alpha)\sin 45°\right]^2 & -3+(1-\alpha)\cos 45° & 6\sqrt{2}+(1-\alpha)\sin 45° & -[-3+(1-\alpha)\cos 45°][6\sqrt{2}+(1-\alpha)\sin 45°]\\
\left[-\frac{4}{3}+\frac{(1-\alpha)\cos 45°}{\sqrt{1+8\cos^2 45°}}\right]^2 & \left[-\sqrt{7}+\frac{(1-\alpha)\sin 45°}{\sqrt{1+8\cos^2 45°}}\right]^2 & -\frac{4}{3}+\frac{(1-\alpha)\cos 45°}{\sqrt{1+8\cos^2 45°}} & -\sqrt{7}+\frac{(1-\alpha)\sin 45°}{\sqrt{1+8\cos^2 45°}} & -\left[-\frac{4}{3}+\frac{(1-\alpha)\cos 45°}{\sqrt{1+8\cos^2 45°}}\right]\left[-\sqrt{7}+\frac{(1-\alpha)\sin 45°}{\sqrt{1+8\cos^2 45°}}\right]\\
\left[\frac{5}{2}+(1-\alpha)\cos 45°\right]^2 & \left[-\frac{3\sqrt{21}}{2}+(1-\alpha)\sin 45°\right]^2 & \left[\frac{5}{2}+(1-\alpha)\cos 45°\right] & -\frac{3\sqrt{21}}{2}+(1-\alpha)\sin 45° & -\left[\frac{5}{2}+(1-\alpha)\cos 45°\right]\left[-\frac{3\sqrt{21}}{2}+(1-\alpha)\sin 45°\right]
\end{vmatrix}$$

$$=210.014\alpha^4-551.863\alpha^3-19423.306\alpha^2+25857.334\alpha+66389.578$$

Bulunur.

Bulunan determinant değerlerini (4.5) denkleminde yerine yazarak, denklemi h_θ^α $(h_\theta^\alpha \neq 0)$ a böldüğümüzde aşağıdaki lineer olmayan denklemi elde ederiz;

$$420.029\alpha^4 + 1162.068\alpha^3 - 42262.096\alpha^2 - 147723.644\alpha + 127196.826 = 0 \tag{4.6}$$

Bu denklemi Maple programında çözülerek, α değerleri $0.717, 10.197, -4.516$ ve -9.164 olarak bulunur.

Bu değerlerden 0 ile 1 arasında olan 0.717 alınmalıdır. $\theta_0 = 45°$ alındığında olabilecek α değerlerinin kümesi $s_{\theta_0} = \{0.717\}$ bulunur. $[0,2\pi]$ aralığında θ_0 değerleri değiştirilerek yazılır ve s_{θ_0} kümeleri bulunur. Daha sonra s_{θ_0} ların supremumu alınacaktır. Açı değerleri determinantlarda değiştirilerek hesaplama yapıldığında bulunan $s_{\theta_0}^\alpha$ kümelerinin supremumu $s_{\theta_0} = \{0.717\}$ olur.

Beş aynı noktadan geçen koniği $\theta_0 = 45°$ ve $\alpha = 0.717$ için elde etmiş oluruz.

Bu noktalar yaklaşık $(1.205{,}0.205) \in \widetilde{H}_1$, $(2.129{,}5.325) \in \widetilde{H}_2$ $(-2.784{,}8.69) \in \widetilde{H}_3$, $(-1.203, -2.516) \in \widetilde{H}_4$ ve $(2.705, -6.668) \in \widetilde{H}_5$ dir. Bu beş noktadan geçen hiperbol denklemi aşağıdaki gibi;

$$-72372.62x^2 - 159.62xy + 7917.21y^2 + 25766.96x - 4541.24y + 74675.32 = 0$$

Elde edilir.

Bu hiperbol denklemi (1.2,0.4) noktasını içerir ve Fuzzy hiperbolünün α kesitinde $\mu\left((1.2{,}0.4)|\widetilde{FH}\right) = 0{,}717$ olur.

Örnek 4.3.2: $\widetilde{H}_1(6,2\sqrt{17}), \widetilde{H}_2(2,2),\ \widetilde{H}_3(0,2\sqrt{5}), \widetilde{H}_4(-3,-2\sqrt{26})$ ve $\widetilde{H}_5(4,-2\sqrt{5})$ beş Fuzzy nokta olsun. Bu beş Fuzzy noktanın üyelik fonksiyonları sırasıyla

$\{(x,y): (x-6)^2 + (y-2\sqrt{17})^2 \leq 1\}$ dairesel

$\{(x,y): (x-2)^2 + 9(y-2)^2 \leq 1\}$ elips

$\{(x,y): x^2 + (y - 2\sqrt{5})^2 \leq 1\}$ dairesel

$\{(x,y): 9(x+3)^2 + (y + 2\sqrt{26})^2 \leq 1\}$ elips

$\{(x,y): (x-4)^2 + (y + 2\sqrt{5})^2 \leq 1\}$ dairesel

olsun. Üyelik fonksiyonlarının tepe noktaları sırasıyla $(6,2\sqrt{17}), (2,2)$, $(0,2\sqrt{5}), (-3,-2\sqrt{26})$ ve $(4,-2\sqrt{5})$ dir. $\alpha \in [0,1]$ ler için $\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2, \widetilde{H}_3, \widetilde{H}_4$ ve $\widetilde{H}_5$ de üyelik değerleri α olan beş aynı nokta sırasıyla

$$Q_{1\theta}^{\alpha} = (x_{1\theta}^{\alpha}, y_{1\theta}^{\alpha}) = \left(6 + (1-\alpha)\cos\theta, 2\sqrt{17} + (1-\alpha)\sin\theta\right)$$

$$Q_{2\theta}^{\alpha} = (x_{2\theta}^{\alpha}, y_{2\theta}^{\alpha}) = \left(2 + (1-\alpha).\frac{\cos\theta}{\sqrt{1+8\sin^2\theta}}, 2\sqrt{5} + (1-\alpha).\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+8\sin^2\theta}}\right)$$

$$Q_{3\theta}^{\alpha} = (x_{3\theta}^{\alpha}, y_{3\theta}^{\alpha}) = \left((1-\alpha)\cos\theta, 2\sqrt{5} + (1-\alpha)\sin\theta\right)$$

$$Q_{4\theta}^{\alpha} = (x_{4\theta}^{\alpha}, y_{4\theta}^{\alpha}) = \begin{pmatrix} -3 + (1-\alpha).\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{1+8\cos^2\theta}}, -2\sqrt{26} \\ +(1-\alpha).\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{1+8\cos^2\theta}} \end{pmatrix}$$

$$Q_{5\theta}^{\alpha} = (x_{5\theta}^{\alpha}, y_{5\theta}^{\alpha}) = \left(4 + (1-\alpha)\cos\theta, -2\sqrt{5} + (1-\alpha)\sin\theta\right)$$

olsun.

Kesin hiperbol denklemi

$$\frac{y^2}{4} - (x-2)^2 = 1$$

dir.

$Q_{1\theta}^{\alpha}, Q_{2\theta}^{\alpha}, Q_{3\theta}^{\alpha}, Q_{4\theta}^{\alpha}$ ve $Q_{5\theta}^{\alpha}$ dan geçen H_{θ}^{α} dediğimiz Fuzzy hiperbolü yine aşağıdaki denklem tarafından belirlenir.

$$a_{\theta}^{\alpha}x^2 + 2h_{\theta}^{\alpha}xy + b_{\theta}^{\alpha}y^2 + 2g_{\theta}^{\alpha}x + 2f_{\theta}^{\alpha}y + c_{\theta}^{\alpha} = 0 \text{ve } h_{\theta}^{\alpha^2} > a_{\theta}^{\alpha}.b_{\theta}^{\alpha} \qquad (4.7)$$

Bu denklemde kullanılan $a_{\theta}^{\alpha}, b_{\theta}^{\alpha}, g_{\theta}^{\alpha}, f_{\theta}^{\alpha}$ ve c_{θ}^{α} yı bulmak için kullanılan determinantlar bir önceki örnekteki gibi alınıp seçeceğimiz bir noktanın üyeliği hesaplanacaktır.

$\widetilde{H}_i$ lerden geçen $(i = 1,2, \dots ,5)$ $\widetilde{FH}_{1,\dots,5}$ Fuzzy hiperbolik parça $Q_{1\theta}^{\alpha}$ ve $Q_{5\theta}^{\alpha}$ lar arasında uzanan H_{θ}^{α} olası tüm olası hiperbol parçalarının bir bölgesidir.

$$\widetilde{FH}_{1,\dots,5} = \bigcup_{\substack{\theta\in[0,2\pi] \\ \alpha\in[0,1]}} \{a_{\theta}^{\alpha}x^2 + 2h_{\theta}^{\alpha}xy + b_{\theta}^{\alpha}y^2 + 2g_{\theta}^{\alpha}x + 2f_{\theta}^{\alpha}y + c_{\theta}^{\alpha} = 0\}$$

(4.8)

Sonsuz $\widetilde{FH}_{1\infty}, \widetilde{FH}_{3\infty}, \widetilde{FH}_{4\infty}$ ve $\widetilde{FH}_{5\infty}$ uçları aşağıdaki üyelik fonksiyonları tarafından belirlenir.

$$\mu\left((x,y)|\widetilde{FH}_{1\infty}\right) = \begin{cases} \alpha, y^2 - y_{1\theta}^{\alpha^2} = 4\left((x-2)^2 + x_{1\theta}^{\alpha^2}\right), & \theta = 27{,}2° \\ 0, \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

$$\mu\left((x,y)|\widetilde{FH}_{3\infty}\right) = \begin{cases} \alpha, y^2 - y_{3\theta}^{\alpha^2} = 4\left((x-2)^2 + x_{3\theta}^{\alpha^2}\right), & \theta = 29{,}2° \\ 0, \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

$$\mu\left((x,y)|\widetilde{FH}_{4\infty}\right) = \begin{cases} \alpha, y^2 - y_{4\theta}^{\alpha^2} = 4\left((x-2)^2 + x_{4\theta}^{\alpha^2}\right), & \theta = 26{,}7° \\ 0, \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

$$\mu\left((x,y)|\widetilde{FH}_{5\infty}\right) = \begin{cases} \alpha, y^2 - y_{5\theta}^{\alpha^2} = 4\left((x-2)^2 + x_{5\theta}^{\alpha^2}\right), & \theta = 29{,}2° \\ 0, \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

$\theta = 27.2°, 29.2°, 26{,}7°$ ve $29.2°$ açıları sırasıyla $\left(6,2\sqrt{17}\right), \left(0,2\sqrt{15}\right)$, $\left(-3,-2\sqrt{26}\right)$ ve $\left(4,-2\sqrt{5}\right)$ noktalarından geçen kesin hiperbolün normallerinin x ekseni ile yaptığı pozitif yönlü açıdır.

Şimdi de $(2.05, 2.05)$ noktasının üyeliğini araştıralım. $(2.05, 2.05)$ noktasının üzerinde olduğu H_{θ}^{α} hiperbolünün kümesini belirleyelim.

H_{θ}^{α} nın denkleminin α olası değerlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$a_{\theta}^{\alpha}(2.05)^2 + 2h_{\theta}^{\alpha}(2)(2.05)(2.05) + b_{\theta}^{\alpha}(2.05)^2 + 2g_{\theta}^{\alpha}(2.05)$$

$$+2f_{\theta}^{\alpha}(2.05) + c_{\theta}^{\alpha} = 0$$

$$4.2025a_{\theta}^{\alpha} + 8.405h_{\theta}^{\alpha} + 4.2025b_{\theta}^{\alpha} + 4.1g_{\theta}^{\alpha} + 4.1f_{\theta}^{\alpha} + c_{\theta}^{\alpha} = 0 \qquad (4.9)$$

$a_{\theta}^{\alpha}, b_{\theta}^{\alpha}, c_{\theta}^{\alpha}, f_{\theta}^{\alpha}, g_{\theta}^{\alpha}$ ve k_{θ}^{α} ları hesaplarken kullanılan determinantlara sırasıyla A, B, C, F, G ve K olmak üzere;

$$\frac{h_\theta^\alpha}{k_\theta^\alpha}(8.405A + 8.405K + 8.405B + 4.1G + 4.1F + 2C) = 0 \qquad (4.10)$$

bulunur.

$\theta_0 = 150°$ alalım. $(x_{1\theta}, y_{1\theta}), (x_{2\theta}, y_{2\theta}), (x_{3\theta}, y_{3\theta}), (x_{4\theta}, y_{4\theta})$ ve $(x_{5\theta}, y_{5\theta})$ yerlerine yazılıp A, K, B, G, F ve C determinantlarını yaklaşık olarak hesaplanıp lineer olmayan denklem;

$$-3.184\alpha^4 - 17.469\alpha^3 + 14514.314\alpha^2 - 204227.678\alpha + 204987.984 = 0$$

şeklinde bulunur.

Denklem çözülerek reel α değerleri 0,886 ve 42.001 bulunmaktadır.

$\alpha \in [0,1]$ olması gerektiğinden 0,886 alınmalıdır. $\theta_0 = 150°$ için S_{θ_0} ların supremumu bulunmuş olur. Yani beş aynı noktadan geçen koniği $\theta_0 = 150°$ ve $\alpha = 0,886$ için elde etmiş oluruz. Bu noktalar $(6.079,8.383) \in \widetilde{H}_1$, $(2.029,2.051) \in \widetilde{H}_2$, $(0.079,4.608) \in \widetilde{H}_3$, $(-4.954,-14.063) \in \widetilde{H}_4$ ve $(4.079,-4335) \in \widetilde{H}_5$ dir. Bu beş noktadan geçen hiperbol denklemi;

$$348199.353x^2 - 1624.867xy - 86002.529y^2 - 1445151.495x$$

$$+27947.976y + 1809949.889 = 0$$

olarak elde edilir.

Bu hiperbol denklemi $(2.05,2.05)$ noktasını içerir ve Fuzzy hiperbolünün

α-kesiminde

$\mu\left((2.05,2.05)|\widetilde{FH}\right) = 0,886$ olarak bulunur.

4.4 Fuzzy Hiperbol elde etmek için Algoritma

Bu çalışmanın uygulamalarında verilen örneklerde kullanılan hesaplamalar için Maple programı kullanılmıştır. Örneklerde tüm hesaplamalar ayrıntılı bir şekilde gösterilmiştir. Fakat hesaplamaları ayrı ayrı yapıp çıkan sonuçların uygunluğuna göre denklemlerde yerlerine yazmak ve karşılaştırma yapmak zaman alıcı olmuştur.

Bu durumlar göz önüne alındığında farklı açılar altında Fuzzy hiperbol denklemleri elde edilip, değerleri karşılaştırılarak Fuzzy hiperbol çizmek için algoritma oluşturma gerekliliği görülmüştür. Oluşturduğumuz algoritma ile bu hesaplamalar saniyeler içinde tamamlanmaktadır. Önerilen algoritma; yöntemin doğruluğunu, verimliliğini ve uygulanabilirliğini göstermek için bazı Fuzzy hiperbol örneklerine uygulanmıştır.

ALGORİTMA :

Beş aynı noktadan geçen Fuzzy hiperbolü oluşturmak ve herhangi bir noktanın Fuzzy hiperbolüne olan üyeliğini hesaplayıp, Fuzzy hiperbolü çizebilmek için aşağıdaki algoritmayı vereceğiz:

1. Adım: Merkezi kesin hiperbol üzerinde ve üyelik değeri $\alpha \in [0,1]$ olan beş aynı nokta al.

2. Adım: Konik denkleminde yerine yazmak için determinantları yaz.

3. Adım: $[0,2\pi]$ boyunca belli aralıklarla determinantlarda kullanılan θ açılarını tek tek tara ve determinantları al.

4. Adım: (3.2) genel konik denkleminde üyelik incelenecek olan nokta için doğrusal olmayan denklem elde et.

5. Adım: Doğrusal olmayan ve değişkeni α olan denklemleri çöz.

6. Adım: Bulunan α değerlerinden $[0,1]$ aralığında uygun olanları al.

7. Adım: $\alpha \in [0,1]$ değerlerinin supremumunu al, 1. Adımda yerine yaz ve aynı noktaları bul.

8. Adım: Aynı noktalardan geçen hiperbollerin denklemlerini yaz.

9. Adım: 7. Adımda elde edilen hiperbolleri koyu mavi, açık mavi, gri, sarı... olacak şekilde supremum üyeliği olandan infimum üyeliği olana doğru çiz.

Örnek 4.3.1 ve Örnek 4.3.2 de bir Fuzzy hiperbol elde etmenin adımları gösterilmiş, herhangi bir noktanın Fuzzy hiperbolüne olan üyeliği araştırılmış ve bunları yaparken kullanılan hesaplamalar gösterilmiştir. Belirli aralıklarla açılar incelenmiş ve bu seçilen noktadan geçen kesin hiperbolümüze en yakın hiperbol denklemi elde edilmiştir.

Şimdi ilk olarak Örnek 4.3.1 de merkezleri kesin hiperbol üzerindeki beş nokta algoritmaya yazılarak (1.2,0.4) noktasının kesin hiperbole olan üyeliği incelecek ve bu noktadan geçen Fuzzy hiperbol çizilecektir. Algoritmaya $\widetilde{H}_1(1,0), \widetilde{H}_2\left(2, 3\sqrt{3}\right), \widetilde{H}_3\left(-3,6\sqrt{2}\right), \widetilde{H}_4\left(-\frac{4}{3}, -\sqrt{7}\right)$ ve $\widetilde{H}_5\left(\frac{5}{2}, -\frac{3\sqrt{21}}{2}\right)$ Fuzzy noktalarda olan aşağıda verilen beş aynı noktayı sırasıyla yazalım;

$$Q_{1\theta}^{\alpha} = (x_{1\theta}^{\alpha}, y_{1\theta}^{\alpha}) = (1 + (1-\alpha)\cos\theta\,, (1-\alpha)\sin\theta)$$

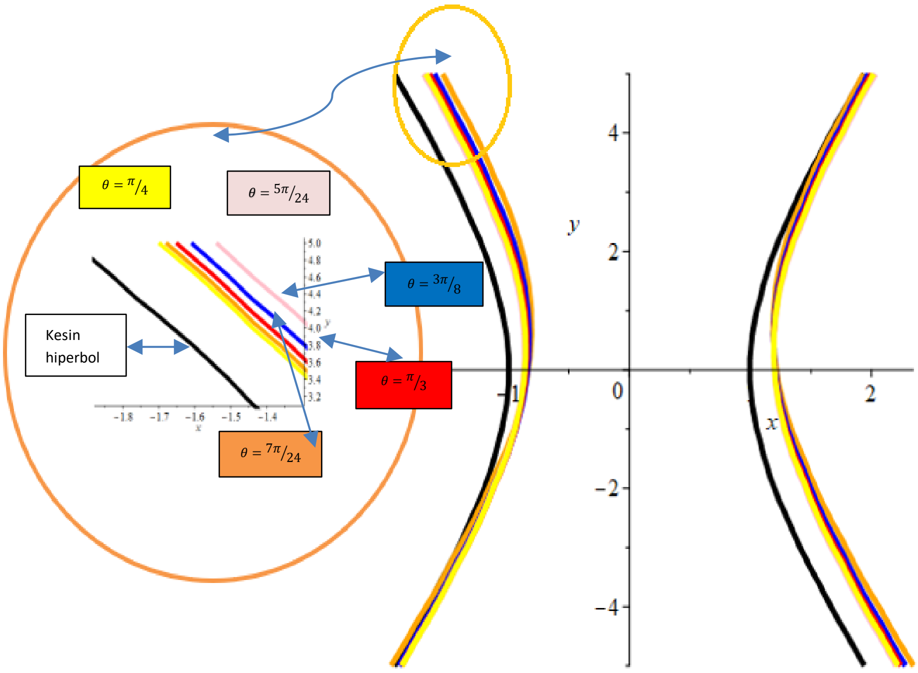
$$Q_{2\theta}^{\alpha} = (x_{2\theta}^{\alpha}, y_{2\theta}^{\alpha}) = \left(2 + (1-\alpha).\frac{\cos\theta}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}\,, 3\sqrt{3} + (1-\alpha).\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}\right)$$

$$Q_{3\theta}^{\alpha} = (x_{3\theta}^{\alpha}, y_{3\theta}^{\alpha}) = \left(-3 + (1-\alpha)\cos\theta\,, 6\sqrt{2} + (1-\alpha)\sin\theta\right)$$

$$Q_{4\theta}^{\alpha} = (x_{4\theta}^{\alpha}, y_{4\theta}^{\alpha}) = \left(-\frac{4}{3} + (1-\alpha).\frac{\cos\theta}{\sqrt{1+8\cos^2\theta}}\,, -\sqrt{7} + (1-\alpha).\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+8\cos^2\theta}}\right)$$

$$Q_{5\theta}^{\alpha} = (x_{5\theta}^{\alpha}, y_{5\theta}^{\alpha}) = \left(\frac{5}{2} + (1-\alpha)\cos\theta\,, -\frac{3\sqrt{21}}{2} + (1-\alpha)\sin\theta\right)$$

Üyeliğini aradığımız (1.2,0.4) noktasını da konik denkleminde yerine yazarak programı çalıştırdığımızda program $[0,2\pi]$ aralığında açıları $45°$ dan başlayıp 7,5 ° artırarak tek tek tarama yapar ve elde edilen α ya bağlı doğrusal denklemleri çözerek S_{θ_0} kümelerini elde edip supremumunu verir. Elde edilen α üyelik derecelerini aynı noktalarda yerine yazar ve farklı hiperbol eğrileri elde eder. Bu eğrilerin bileşimi bize Fuzzy hiperbolünü verir. Algoritmada elde edilen Fuzzy hiperbol şekil 9 da gösterilmiştir.



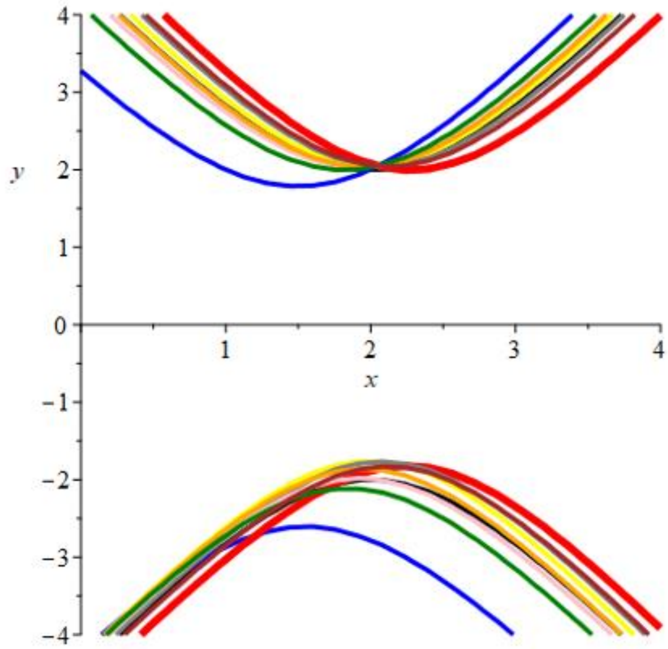
Şekil 4.3: Örnek 4.3.1 de oluşturulan Fuzzy Hiperbol

Algoritma sonucu karşılaştırmayı da kolaylıkla yapabiliriz. Aşağıda verilen tabloda kesin hiperbole en yakın ve en uzak hiperbollerin üyelik dereceleri verilmiştir. Ayrıca Şekil 4.3'te bir kesit ele alınıp büyütülerek en yakın ve en uzak hiperboller gösterilmiştir.

Tablo 4.1: Örnek 4.3.1 de Elde Edilen Fuzzy Hiperbolünün üyelikleri

Açı	Üyelik Derecesi
$\theta = {}^{\pi}/_{4}$	0,717
$\theta = {}^{7\pi}/_{24}$	0,671
$\theta = {}^{\pi}/_{3}$	0,599
$\theta = {}^{3\pi}/_{8}$	0,479
$\theta = {}^{5\pi}/_{12}$	0,259

Şimdi de algoritmayı Örnek 4.3.2 ye uygulayıp, Fuzzy hiperbolü elde ederek çizimini gösterelim. Üyeliğini aradığımız $(2.05, 2.05)$ noktasını da konik denkleminde yerine yazarak programı çalıştırdığımızda program $[0, {}^{3\pi}/_{2}]$ aralığında açıları $0°$ dan başlayıp $30°$ ar artırarak tek tek tarama yapar ve elde edilen α ya bağlı doğrusal denklemleri çözerek S_{θ_0} kümelerini elde edip supremumunu verir. Elde edilen α üyelik derecelerini aynı noktalarda yerine yazar ve farklı hiperbol eğrileri elde eder. Bu eğrilerin bileşimi bize Fuzzy hiperbolünü verir. Algoritmada elde edilen Fuzzy hiperbol Şekil 4.4' de gösterilmiştir.



Şekil 4.4: Örnek 4.3.2 de verilen Fuzzy Hiperbol

Son olarak buluğumuz değerleri tablo üzerinde karşılaştıralım.

Tablo 4.2: Örnek 4.3.2 de Elde Edilen Fuzzy Hiperbolünün üyelikleri

Açı	Üyelik Derecesi
$\theta = 0\,\pi$	0,692
$\theta = \pi/6$	0,84
$\theta = \pi/3$	0,841
$\theta = \pi/2$	0,857
$\theta = 2\pi/3$	0,877
$\theta = 5\pi/6$	0,886
$\theta = \pi$	0,799
$\theta = 7\pi/6$	0,382

Algoritma sonucu karşılaştırmayı da kolaylıkla yapabiliriz. Yukarıda verilen tabloda kesin hiperbole en yakın ve en uzak hiperbollerin üyelik dereceleri verilmiştir. $\theta = {}^{7\pi}/_{6}$ değerinden sonra bulunan üyelik dereceleri $[0,1]$ aralığına düşmemektedir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Fuzzy parabol, Fuzzy elips ve Fuzzy hiperbol tanımlanmış ve özellikleri detaylı bir şekilde anlatılmıştır. Daha önceki çalışmalarda bulanık parabol için bazı yöntemler ele alınmıştır (Ghosh ve Chakraborty 2019). Fuzzy elips ve Fuzzy hiperbolü tanımlamak için, Fuzzy parabol için uygulanan yöntemi değiştirmek gerekir. İlk olarak, kesin konik üzerinde beş nokta alınır. Beş aynı nokta olarak adlandırılan bu noktalar belirli özellikler sağlatılarak oluşturulmuştur. Elips kapalı bir eğri olduğundan beş aynı nokta ile eliptik parçalar oluşturularak Fuzzy elipsi elde ederiz. Fuzzy hiperbol için ise hiperbolik parçalar oluşturulduktan sonra dört ucundan sonsuza uzatmak gerekir. Böylece belirli $\alpha \in [0,1]$ değerlerine karşılık aynı noktalar belirlenir. Ve tüm bu aynı noktalardan geçen kesin konikler Fuzzy konikler oluşturur. Bu özelliği ile noktaları belirlemek zor olsa da Fuzzy konik denklemini oluşturmak için önemlidir. Bu çalışmada bu koşulu sağlayan noktalar belirlenmekte ve bu noktalar kullanılarak oluşturulacak Fuzzy konikler elde edilmesi için gerekli özellikler ispatlanmaktadır. Fuzzy koniklerin grafikleri çizilerek, farklı üyelik derecelerine sahip Fuzzy noktaların geometrik konumunu grafik üzerinde gösterilmiştir. Örnekler üzerinde bazı geometrik uygulamalarına da yer verilmiştir. Bu çalışmada Fuzzy elips ve Fuzzy hiperbol oluşurken katsayılarının hesaplanmasında tanımlanan determinantların farklı nokta ve açılar için hesaplanabileceği verilen örneklerle açıkça gösterilmiştir fakat bu işlemlerin algoritma kullanılmadan yapılması zaman almaktadır bu sebeple de Fuzzy elips ve Fuzzy hiperboller için yeni bir algoritma oluşturulmuştur. Önerilen algoritma; yöntemin doğruluğu, etkinliği ve uygulanabilirliği için birkaç örneğe uygulanmıştır. Algoritma kullanılarak Fuzzy elips ve hiperbol denklemlerinin elde edilmesi için gerekli determinantlar hesaplanmakta ve katsayılar kolayca elde edilebilmekte, istenen noktaların Fuzzy hiperbole üyelik dereceleri saniyeler içinde bulunabilmekte ve grafikleri kolaylıkla çizilebilmektedir.

Fuzzy uzay, teknolojik cihazların kodlanması ve programlanmasında önemli bir yere sahiptir. Hiperbolik eğriler ise biyolojide bitkilerin fotosentez, $CO2$ ve ısı dağılımlarında sıklıkla karşılaşılan eğrisel yapılardır. Ayrıca radar dalgalarının dağılımları özellikle spektral radar ve hatta sinir ağına dayalı yayınlarda karşımıza çıkmaktadır. Belgeleri tararken kullanılır. Bu alanlar birbiriyle birleştiğinde bahsedilen teknolojik yapıların Fuzzy uzayda yer alması sonucunda Fuzzy hiperbol oluşturulmasına ihtiyaç duyulmaktadır. Ayrıca Fuzzy elips böbrek taşı kırma makinelerinde, bilardo oyunlarında, uzay mühendisliğinde ve lazer teknolojisinde vb. kullanılabilir. Matematiksel olarak, gelecekte faydalı olacağını düşünerek Fuzzy elips ve Fuzzy hiperbolü tanımlayarak analiz etmeyi amaçladık. Bu çalışmamızda gösterdiğimiz yöntem ve uygulamalarla yukarıda belirtilen alanlarda yapılacak çalışmalara yol gösterecek şekilde Fuzzy koniklerden elips ve hiperbolü detaylı bir şekilde ortaya koyduk.

6. KAYNAKLAR

Bih, J., “Paradigm shift - an introduction to Fuzzy logic”, *IEEE Potentials*, 25(1), 6-21,(2006).

Buckley, J.J. and Eslami, E., “Fuzzy plane geometry I: Points and Line”, *Fuzzy sets and Syst*.,86,179-187,(1997).

Buckley,J. and Eslami, E., “Fuzzy plane geometry II: Circles and Polygon”, *Fuzzy sets and Syst*.,87,79-85,(1997).

Chaudhuri, B.B., “Some shape definitions in fuzzy geometry of space”, *Patt Recogn. Lett*. 12, 531–535, (1991).

Çınar, M., “Fuzzy Metrik Uzaylar”, Yüksek Lisans Tezi, *Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Zonguldak, (2015).

Dubois, D. and Prade, H., “Fuzzy real algebra: some results”, *Fuzzy Sets Syst*. 2, 327–348, (1979).

Ghosh, D. and Chakraborty D., “Analytical Fuzzy Plane Geometry I”, *Fuzzy Sets and Syst*.,209,66-83, (2012).

Ghosh, D. and Chakraborty D., “Analytical Fuzzy Plane Geometry II”, *Fuzzy Sets and Syst*.,243,84-109, (2013).

Ghosh, D. and Chakraborty D., “Analytical Fuzzy Plane Geometry III”, *Fuzzy Sets and Syst*.,283,83-107, (2016).

Ghosh, D. and Chakraborty D., *An Introduction to Analytical Fuzzy Plane Geometry*, Cham, Switzerland: Springer International Publishing Fuzzy Sets and Syst.,145-172, (2019).

Işıklı, Ş., “Bulanık Mantık ve Bulanık Teknolojiler”, *Ankara Üniv. Dil ve Tarih-Coğrafya Fakültesi Felsefe Bölümü Dergisi*,19, 105-116, (2008).

Muganda, G.C., “Fuzzy linear and affine space”, *Fuzzy Sets Syst*. 38, 365–373, (1990).

Rosenfeld, A.,” The diameter of a fuzzy set”, *Fuzzy Sets Syst.* 13, 241–246, (1984).

Rosenfeld, A., “Fuzzy Rectangles”, *Patt. Recogn. Lett.,* 11 (10), 677-679, (1990).

Rosenfeld, A., “Fuzzy geometry: An updated overview”, *Inf. Sci.*,110 (3-4), 127–133, (1998).

Zadeh, L.A., “Fuzzy Sets”, *Information and Control*, 8,338-353, (1965).

Zadeh, L.A., “Toward extended fuzzy logic—a first step”, *Fuzzy Sets Syst*.,160 (21), 3175–3181, (2009).

Zimmermann, H.J., *Fuzzy Set Theory–and Its Applications*, New York: Springer Science Business Media, 11-107, (2001).