T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI

İNCE YAPI SABİTİNİN KOZMOLOJİK ÖLÇEKTE SKALAR ALANLA DEĞİŞİMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZABIHULLAH ISAQI

DENİZLİ, MAYIS-2023

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI

İNCE YAPI SABİTİNİN KOZMOLOJİK ÖLÇEKTE SKALAR ALANLA DEĞİŞİMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZABIHULLAH ISAQI

DENİZLİ, MAYIS-2023

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

ZABIHULLAH ISAQI

ÖZET

İNCE YAPI SABİTİNİN KOZMOLOJİK ÖLÇEKTE SKALAR ALANLA DEĞİŞİMİ
DOKTORA TEZİ
ZABIHULLAH ISAQI
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI
TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. ÖZCAN SERT
DENİZLİ, MAYIS-2023

Bu tezde, ince yapı sabitinin kozmolojik zaman ölçeğinde değişimi incelendi. Öncelikle diferansiyel hesap teknikleri öğrenilerek Einstein'ın gravitasyon teorisi difreransiyel formlarla ifade edildi. Daha sonra bu teoride ince yapı sabitine bakabilmek için bu teoriye elektromanyetik alan ilave edildi. Ek olarak, bu ince yapı sabitinin değişimine izin veren bir skalar alan teoriye minimal olmayacak şekilde eklendi. Modelin kozmolojik ölçekte ince yapı sabitinin değişimini incelemek için Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) metriği altında çözümleri ele alındı. Bu çözümler evrenin radyasyon baskın döneminde ve madde baskın döneminde skalar alanın nasıl değiştiğini ve böylece ince yapı sabitinin kozmolojik ölçekte nasıl değiştiğini ortaya çıkarmaktadır.

ANAHTAR KELİMELER: İnce Yapı Sabiti, Einstein-Maxwell Teorisi, Skalar Alan, Kozmolojik Çözümler.

ABSTRACT

VARIATION OF THE FINE STRUCTURE CONSTANT WITH THE SCALAR FIELD ON THE COSMOLOGICAL SCALE
MSc THESIS
ZABIHULLAH ISAQI
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
PHYSICS
(SUPERVISOR: PROF. DR. ÖZCAN SERT)
DENİZLİ, MAY-2023

In this thesis, the variation of the fine structure constant on a cosmological time scale was investigated. Firstly, by learning differential calculus techniques, Einstein's theory of gravity was expressed in differential forms. Then, in order to look at the fine structure constant in this theory, an electromagnetic field was added to it. Additionally, a scalar field theory that allows for the variation of this fine structure constant was added in a non-minimal way. To investigate the variation of the fine structure constant on a cosmological scale in the model, solutions were considered under the Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) metric. These solutions reveal how the scalar field changes during the radiation-dominated and matter-dominated eras of the universe, and thus how the fine structure constant changes on the cosmological scale.

KEYWORDS: Fine Structure Constant, Einstein-Maxwell Theory, Scalar Field, Cosmological Solutions.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

M	:	Manifold
g	:	Metrik tensör
$\{x^\mu\}$	:	Koordinat Fonksiyonları
$T(M)$	:	Tanjant demeti
$T^\star(M)$	:	Kotanjant demeti
η_{ab}	:	Minkowski Metriği
$\{e^a\}$	:	Ortonormal Ko-çerçeve
$\{X_b\}$	:	Ortonormal çerçeve
$\wedge$	:	Dış çarpım işlemi
$\imath$	:	iç çarpım işlemi
d	:	Dış türev işlemi
$*$	:	Hodge Star işlemi
$\Lambda^p(M)$	:	p-formları uzayı
$\Lambda^a{}_b$	:	Bağlantı1-formları
D	:	Kovaryant Dış Türev
T^a	:	Burulma 2-formları
$\omega^a{}_b$	:	Levi-Civita Bağlantı1-formları
$K^a{}_b$	:	Koburulma 1-formları
$R^a{}_b$	:	Eğrilik 2-formları
R^a	:	Ricci Eğrilik 1-formları
R	:	Ricci Eğrilik skaları
L	:	Lagrange 4-formu
$\mathcal{L}$	:	Lagrange Fonksiyonu
δ	:	Sonsuz küçük varyasyon

ÖNSÖZ

Bu çalışmayı hazırlama sürecimde birçok kişinin desteğini arkamda hissettim ve bu yüzden çok şanslı hissediyorum. Bu vesileyle, bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde büyük katkıları olan birkaç kişiye teşekkür etmek istiyorum.

Çalışma sürecim boyunca her zaman yanımda olan, zengin bilgi birikimiyle çalışmama farklı perspektifler kazandıran ve çalışmanın ilerlemesi sırasında desteğini hiçbir zaman esirgemeyen danışmanım Sayın Prof. Dr. Özcan SERT'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışmamı yürütürken sergilediği olumlu tutum ve bana verdiği enerji ile cesaretlendiren, birikimlerini benimle paylaşan hocaların hocaları arasında yer alan Sayın Prof. Dr. Muzaffer ADAK'a minnettarlığımı ifade etmek istiyorum. Kendisine teşekkür borçluyum.

Hem de, bu çalışmanın hazırlanmasında benimle yakından ilgilenen aileme de teşekkür etmek istiyorum. Onların sonsuz desteği ve moral motivasyonları sayesinde bu çalışmayı başarıyla tamamladım.

Son olarak, çalışmamın gerçekleştirilmesinde emeği geçen herkese teşekkür etmek istiyorum. Sizlerin desteği olmadan bu çalışma gerçekleştirilemezdi.

1. GİRİŞ

Evrenin başlangıcı, evrimi ve sonu bilimin en önemli konularından biridir. Bunun için gravitasyon dediğimiz kavramın ne olduğunu anlamak çok önemlidir. Bugün hala gravitasyonun tam olarak ne olduğu bilinmemektedir. Gezegenlerin Güneş etrafındaki yörünge hareketinin nasıl olduğunun tam olarak anlaşılması, Kepler'in bu hareketi açıklayan 3 önemli yasayı ortaya koymasıyla mümkün olmuştur. Daha sonra Newton 1687'de yayınlanan kitabında Evrensel Gravitasyon Yasasını; "Her parçacık, başka bir parçacığı kütleleriyle doğru orantılı ve birbirlerine olan uzaklığın karesiyle ters orantılı bir kuvvetle çeker" olarak ifade etmiştir; $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$. Burada G gravitasyonel çekim sabiti denilen bir evrensel sabittir ve deneysel olarak ölçülebilir. Bu formül kütleleri m_1 ve m_2 olan iki parçacık birbirlerinden r kadar bir uzaklıkta bulunuyorlarsa çekim kuvvetinin büyüklüğünün formüldeki F kadar olacağını söyler. Newton' un bu teorisi Güneş sistemindeki gezegenlerin yörünge hareketlerini incelemekte oldukça kullanışlıydı. Ancak bazı konularda bu teori yetersiz kalmaktaydı. Bu yetersizliklerden bazılarını aşağıdaki gibi sıralayabiliriz.

- Merkür'ün yörüngesinin uzun süre incelenmesi sonucu gözlenen presesyonlu yörünge hareketi Newton teorisi ile açıklanamıyordu.

- Yıldızlardan gelen görülebilen ışığın dalga boyunun artması ışığın kırmızıya kayması olayı olarak açıklanabilir. Evrende gök cisimlerinden gelen ışığın hemen hemen hepsinin kırmızıya kaydığı gözlemlendi. Bu durum bize evrenin yönden bağımsız olarak bizden uzaklaştığını yani evrenin genişlediğini gösterir.

- Newton teorisine göre foton gibi kütlesiz nesnelerin yıldızların yakınından geçerken, etkilenmeden yoluna devam etmesi yani hiç bir kuvvet etki etmemesi gerekiyor. Fakat Güneş tutulması sırasında yapılan gözlemlerde ışığın yıldız gibi büyük kütleli cisimler tarafından çekilerek yolunun büküldüğü gözlenmiştir. Yine bir yıldızın gravitasyonel mercekleme yoluyla birden fazla görüntüsünün olması bu şekilde açıklanabilmektedir.

- Newton Gravitasyon teorisine göre her kütleli cisimin, birbirine uyguladığı kuvvet anında meydana gelir. Yani, cisimlerden birinin konumu değiştiğinde sonsuz bir hızla diğerinin de değişmesi gerekir. Bu ise Özel Görelilik kuramına uymaz. Yani Einstein, kütle çekimi de dahil hiç bir etkinin ışık hızından daha hızlı olamayacağını keşfetmiştir.

  Bu ve benzeri sorunlar Newton mekaniğiyle çözülemedi. Einstein 1905 yılında Özel Görelilik teorisini ve 1915 yılında da Genel Görelilik teorisini ortaya koyarak bu sorunlara çözüm bulmuştur. Genel Görelilik teorisine göre uzay ve zaman kütlenin etkisiyle bükülmektedir. Oluşan bu bükülmüş geometri kütle-çekim etkisine yol açar.

Ayrıca Einstein'ın gravitasyon teorisi kütle-çekim dalgalarının olması gerektiğini öngörmektedir. Bu öngörü ise 2016 yılında 1.3 milyar yıl önce çarpışan iki karadelikten kaynaklanan kütle-çekim dalgaları gözlenerek doğrulanmıştır(Abbott ve diğ. (2016a,b)).

Einstein'ın Gravitasyon Teorisi uzay-zaman metriğinin ikinci mertebeden türevlerini içeren alan denklemiyle ifade edilir. Bu alan denklemi Einstein-Hilbert eylemi denilen bir eylemden (action) varyasyon hesabıyla elde edilebilir. Bu eylem integrali R Ricci skalarıyla orantılıdır.

Her ne kadar yukarıda bahsettiğimiz problemlerde başarı gösterse de Einstein'ın Gravitasyon teorisi hala bazı güncel problemlere sahiptir. Bunlardan birisi, Planck ölçeği gibi çok küçük ölçeklerde teorinin ne olacağı tam olarak bilinmemektedir (Brill ve Wesson 1970, Isham (1981)). Yani, gravitasyonun kuantumlanması nasıl olacaktır? Yine kuantum alan teorisinin klasik ölçeklerde gravitasyon ile uyumlu olması gerekir (Sotiriou 2007).

Ayrıca son yapılan astrofiziksel ölçümler Einstein'ın Gravitasyon teorisinin büyük ölçeklerde düzeltilmesi gerektiğini ortaya koymuştur. Bu gözlemlerden en önemlisi Hubble teleskobunun ortaya çıkardığı evrenin ivmeli bir şekilde genişlemesidir (Albrecht ve Steinhardt 1982, Starobinsky 1980). Bu gözlemi açıklayacak şekilde karanlık enerji (dark energy) (Amanullah ve diğ. (2010), Knop ve diğ. (2003), Perlmutter ve diğ. (1999), Riess ve diğ. (1998), Schwarz ve diğ. (2016), Weinberg ve diğ. (2013)) denilen bilinmeyen bir nicelik ortaya atılmıştır. Yine bir diğer önemli gözlem ise evrendeki galaksiler incelendiğinde galaksilerin dönme hız eğrilerinin yıldızların parlaklıklarından elde edilen kütle miktarından daha fazla kütle varlığını öngörmesidir. Bu olayı açıklamak için ise karanlık madde (dark matter) (Baer ve diğ. (2015), Overduin ve Wesson (2004)) denilen bir nicelik ortaya atılmıştır. Bu nedenlerle Einstein'n gravitayon teorisini modifiye edecek şekilde yeni teorilere ihtiyaç vardır. Bazı modifiye gravitasyon modelleri Adak ve Sert (2005), Adak ve diğ. (2006), Allemandi ve diğ. (2004), Arapoglu ve diğ. (2011), Alavirad (2013), Astashenok ve diğ. (2013), Astashenok (2014), Cognola ve diğ. (2005), Capozziello ve diğ. (2004, 2007a, 2006), Capozziello ve Ritis (1993), Capozziello ve diğ. (1996, 2007b), Capozziello ve Lambiase (2000), Capozziello ve De Felice (2008), Capozziello (2002), Capozziello ve diğ. (2003a), Carroll ve diğ. (2004), Capozziello ve diğ. (2007c), Cartan (1923), Dereli (1984), Dereli ve diğ. (1995, 1996), Fiziev (2013), Flanders (1963), Ganguly (2014), Goswami (2014), Kerner (1982), Nojiri ve Odintsov (2003, 2004), Roshan ve Shojai (2008), Sert (2017), Sert (2005), Stephani ve diğ. (2018), Starobinsky 1980, Thring (1997), Trautman (1972), Vakili (2008) kaynaklarında bulunabilir.

Modifiye gravitasyon modellerinin geçerliliğini test etmenin çeşitli yolları vardır. Kara delikler ve nötron yıldızları gibi yoğun nesnelerin incelenmesi bu modellerin geçerliliğini oldukça ayırd edebilmektedir.

Dirac'ın 1937 yılındaki temel sabitlerin uzay-zamanla değişebileceğiyle ilgili önerisinden (Dirac (1937)) sonra bu alanda önemli çalışmalar ortaya çıkmıştır. Özellikle Sicim teorisinin düşük enerji limitinde kütlesiz skalar alanların varlığını öngörmesi önemli bir etkiye yol açmıştır. Skalar alanın varlığı alternatif gravitasyon modellerini akla getirmiştir. Bu modellerde ince yapı sabitinin nasıl değişeceği önemli hale gelmiştir. Bekenstein, 1982 yılındaki çalışmasında özellikle bu ince yapı sabitinin değişebileceğini öngören bir teori formüle etmiştir (Bekenstein1982). Daha sonra bu çalışma Olive ve diğ. (2002), Sandvik ve diğ. (2002) yayınlarında kozmolojik durumlara genişletilmiştir. Son zamanlarda bu yöndeki araştırmalar daha da artmıştır. Bu çalışmalarda özellikle skalar alanın elektromanyetik alan ile minimal olmayan çiftlenimi incelenmiştir (Anchordoqui ve diğ. (2003), Avelino (2008), Bento ve diğ. (2004), Chiba ve diğ. (2002), Copeland ve diğ. (2004), Lee ve diğ. (2004), Marra ve diğ. (2005), Mota (2004), Wetterich (2003)).

Bu tez çalışmasında skalar alanın elektromanyetik alana minimal olmayan bağlanmasını içeren gravitasyonel bir model kullanarak, ince yapı sabiti incelenmiştir. Bu modelin alan denklemleri elde edilerek bu denklemlere FLRW metriği için kozmolojik çözümler araştırılmıştır. Bu çalışmalar farklı bir notasyonla Barrow ve Li (2008) makalesinde verilmiştir. Bu makalede yer alan hesaplamalar diferansiyel form notasyonuyla tekrar ara işlemleriyle birlikte burada yapılarak ilgili makalede elde edilen çözüme ulaşılmıştır.

2. İNCE YAPI SABİTİNİN TARİHSEL BAĞLAMI

Yunanca alfa harfiyle temsil edilen ince yapı sabiti boyutsuz bir sayıdır, bu nedenle hangi birimde hesaplanırsa hesaplansın, her zaman aynı değere sahip olur ve $1,5 \times 10^{-10}$ mertebesinde bir belirsizlikle yaklaşık olarak $0,0073 \approx \frac{1}{137,0356}$ sayısal değerindedir. Bu sabit, elektromanyetik teori, kuantum teorisi gibi fiziğin bir çok alanında ortaya çıkmaktadır. Yine de değeri şu anda herhangi bir teoriden doğrudan tahmin edilemez ve doğada deneysel olarak ölçebileceğimiz temel sabitlerden biridir. Bu sabiti, temel elektrik yükü $e = 1,602 \times 10^{-19}C$ boşluğun geçirgenlik (dielektrik) sabiti $\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}F/m$ planck sabiti $h = 6,62610^{-34}Js$ ve ışık hızı $c = 299792458\ m/s$ cinsinden aşağıdaki orandan bulabiliriz.

$$\alpha = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 hc} \tag{2.1}$$

Bu formülü yeniden düzenlersek, elektronun relativistik olmayan hızı olan $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}$ cinsinden

$$\alpha = \frac{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}}{c} \simeq \frac{1}{137} \tag{2.2}$$

oranına ulaşırız. Bu oran, Bohr yörüngesindeki bir elektronun hızının, ışık hızına oranını temsil eder. Başka bir deyişle, bir atomun klasik modelinin yörüngesinde dönen bir elektronun hızı, ışık hızının yaklaşık $1/137$'si kadardır. Bugünkü atom modeli anlayışımız bu görüşten farklı olsa da bu oldukça iyi bir öngörüdür. Bu oranın boyut analizi yapıldığında hangi birim sistemi kullanılırsa kullanılsın boyutsuz olduğu görülür.

2.1 İnce Yapı Sabitinin Yorumu

Bu gizemli sayıyı veren formülün fiziksel yorumunu bulmak için formüle daha detaylı bakalım. Bu sayının neyi temsil ettiğini bulmanın bir kaç farklı yolu vardır.

İlk olarak, ince yapı sabitini aşağıdaki orandan elde edebiliriz:

$$\alpha = \frac{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 d}}{\frac{\hbar c}{\lambda}} \tag{2.3}$$

Bu ifade aralarında d mesafesi olan iki elektronun elektrostatik enerjisi $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 d}$ ve bunların birbirleriyle etkileşirken kullandıkları fotonun enerjisi $\frac{\hbar c}{\lambda}$ oranından elde edilen ince yapı sabitini temsil eder. Yani; elektronların etkileşim enerjisinin, etkileşimi sağlayan fotonun enerjisine oranı olarak tariflenir. Böylece aslında, iki yüklü parçacık arasındaki etkileşimin şiddetini temsil eder. Bu sayı $1/137$ den daha büyük olsaydı iki elektron arasındaki etkileşim enerjisi daha büyük olacak yani elektronlar birbirlerini daha fazla bir enerjiyle iteceklerdi. Bu aslında çevremizde gördüğümüz fiziksel olayların daha farklı bir şekilde gerçekleşeceği anlamına gelirdi. Böylece aslında bu sabitin hayatımızda ne kadar önemli olduğunu anlayabiliriz.

İnce yapı sabitinin karşımıza çıktığı bir diğer alan ise kuantum mekaniğidir. Bohr atom modeline göre her bir $n.$ yörüngeye ait enerji seviyeleri

$$E_n = -\frac{m_e}{2\hbar^2}\Big(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\Big)^2\frac{1}{n^2} \tag{2.4}$$

olarak bulunur. 1916 yılında Alman teorik fizikçi Arnold Sommerfeld Bohr atom modelini genelleştirerek, Modern kuantum mekaniğine göre daha hassas hesaplar yaptı. Yani elektronların spini ve göreli etkilerini de hesaba katarak enerji seviyelerini

$$E_{n,j} = E_n\Big[1 + \frac{\alpha^2}{2}\Big(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\Big)\Big] \tag{2.5}$$

olarak elde etti. Burada n, j kuantum sayılarıdır. Bu ifade ince yapı sabiti α yı içermektedir. Bu ince yapı sabiti siklotron hızlandırıcılarında elektronu hızlandırarak ve manyetik alan içinden geçirerek deneysel olarak ölçülebilir (Sommerfeld (1916)).

2.2 İnce Yapı Sabitinin Kozmolojik Zamanla Değişimi

İnce yapı sabitinin değişken olabileceği fikri, Lorentz invaryantlığın bozulmasıyla sonuçlanan ışık hızı limitinin çok az da olsa kozmolojik zamanla değişebileceği fikrinden kaynaklanabilir Albrecht ve diğ. (1999), Barrow (1999), Moffat (1930). Diğer bir olasılık ise elektron yükü e nin kozmolojik zaman ölçeğinde değişebileceği olmasıdır. 1982 yılında Bekenstein lokal ayar invaryantlığının lokal

Lorentz invaryantlığının ve genel kovaryantlık ilkesinin korunabildiği ve elektrik yükünün değişebileceğinden kaynaklı böyle bir model öne sürdü, Bekenstein (1982). İnce yapı sabitinin değişim miktarıyla ilgili en hassas ölçümler yaklaşık 2 milyar yıllık olduğu düşünülen Afrika'da bulunan Oklo madeni olarak bilinen doğal nükleer fizyon reaktörlerindeki verilerden elde edilmiştir. Güçlü ve zayıf bağlanma sabitlerinin değişmediği kabul edilerek, bu verilerden ince yapı sabitindeki değişim oranının $-0,9 \times 10^{-7} < \frac{\triangle\alpha}{\alpha} < 1,2 \times 10^{-7}$ aralığında bir fark olduğu bulunmuştur, Damour ve diğ. (1996). Burada $\frac{\triangle\alpha}{\alpha} = \frac{\alpha(t)-\alpha_0}{\alpha_0}$ ve α_0 şimdiki değeri iken $\alpha(t)$ belirli bir t kozmolojik zamanındaki değeridir. Bununla birlikte ince yapı sabitinin değişebileceğinin en önemli kanıtları kuasarların soğurma spektrumlarından elde edilmiştir Chand ve diğ. (2004), Murphy ve diğ. (2001, 2007, 2008), Srianand ve diğ. (2004), Webb ve diğ. (1999). Bu çalışmalarda ince yapı sabiti kırmızıya kayma cinsinden $\alpha(z)$ olarak ifade edilmiştir. Şimdiki kırmızıya kayma değerindeki ince yapı sabiti $\alpha(0)$, geçmişdeki ince yapı sabiti $\alpha(z)$ olmak üzere $1 < z < 3,5$ aralığındaki kırmızıya kaymalar incelendiğinde

$$\frac{\triangle\alpha}{\alpha} = \frac{\alpha(z) - \alpha(0)}{\alpha(0)} \simeq -0,57 \times 10^{-5} \tag{2.6}$$

ile verilen bir fark olduğu ortaya çıkmıştır.

3. DİFERANSİYEL GEOMETRİ VE GENEL GÖRELİLİK TEORİSİ

3.1 Dış Cebir ve Diferansiyel Formlar

Bu çalışma boyunca diferansiyel geometrik kavramlar dış cebir yardımıyla kullanılacaktır. Dış cebir işlemlerinin daha detaylı analizi Adak ve Sert (2005), Adak ve diğ. (2006), Cartan (1923), Dereli (1984), Dereli ve diğ. (1995, 1996), Flanders (1963), Sert (2017), Sert (2005), Stephani ve diğ. (2018), Thring (1997), Trautman (1972) kaynaklarında bulunabilir.

Burada uzay-zaman $(0, 2)$ tipi metrik tensör ile donatılmış 4-boyutlu bir M manifoldu olarak alınır. Ayrıca, tensörlerin paralel taşınmasında kullanılan bir nicelik olan Λ bağlantı 1-formları metrik ile uyumlu bir şekilde, metrikten türetilerek burada kullanılacaktır. Manifoldun bir noktasındaki koordinat haritasını $\{x^\mu\}$ ile gösterelim. Bu durumda manifoldun bir noktasındaki $T(M)$ tanjant uzayı, $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$ koordinat bazlarına sahiptir. Yine bu uzayın duali olan $T^*(M)$ kotanjant uzayı ise $\{dx^\mu\}$ baz 1-formlarına sahiptir. Bu koordinat bazlarının ortanormal halini $\{X_a\}$ ile gösterelim. Duali olan ortonormal ortanormal 1-fromları ise $\{e^a\}$ ile gösterebiliriz. Bu uzay-zamandaki (p, q) tipi bir T tensörü

$$\underbrace{T^*(M) \times ...T^*(M)}_{p\ kez}\underbrace{T(M) \times ...T(M)}_{q\ kez} \to \mathbb{R} \tag{3.1}$$

gönderimiyle temsil edilebilir. Düz uzay-zaman metriğini ifade eden Minkowski metriği

$$g(X_a, X_b) = \eta_{ab}, \qquad a, b, \cdots = 0, 1, 2, 3 \tag{3.2}$$

iki ortonormal baz vektörünün iç çarpımıyla tanımlanır. Burada η_{ab} matrisinin köşegen elemanları $(-1, 1, 1, 1)$ diğer elemanları ise sıfırdır. Gravitasyon alanının varlığında uzay-zamanın iki noktası arasındaki sonsuz-küçük uzaklığı ifade eden metrik ise ortanormal 1-formlar cinsinden

$$ds^2 = \eta_{ab}e^a \otimes e^b = -e^0 \otimes e^0 + e^1 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2 + e^3 \otimes e^3 \tag{3.3}$$

olarak ifade edilir.

A p-form olan bir tensör olmak üzere, $A \in \Lambda^p(M)$ dx^μ 1-formlar ve A_μ bileşenler cinsinden

$$A = \frac{1}{p!} A_{\mu_1\mu_2...\mu_p} dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_p} \tag{3.4}$$

şeklinde açılabilir.

3.2 Dış Çarpım Özelliği

Dış cebirde manifold üzerindeki p-formu uzayını $\Lambda^p(M)$ ile gösterelim. Aşağıdaki gibi iki tane tensörü $A_1 \in \Lambda^p(M)$ ve $A_2 \in \Lambda^q(M)$ olarak alalım. Bu elemanlar için $\wedge$ simgesi ile gösterilen dış çarpım aşağıdaki özellikleri sağlar:

- $(A_1 + A_2) \wedge (A_3) = A_1 \wedge A_3 + A_2 \wedge A_3$
- $(\alpha A_1) \wedge A_2 = A_1 \wedge (\alpha A_2) = \alpha(A_1 \wedge A_2)$
- $A_1 \wedge (A_2 \wedge A_3) = (A_1 \wedge A_2) \wedge A_3$
- $A_1 \wedge A_2 = (-1)^{p.q} A_2 \wedge A_1$

bu özelliklere sırasıyla dağılma, skaler fonksiyon ile çarpım, birleşme ve sıra degiştirme denir.

3.3 Dış Cebirde Dış Türev Kavramı

Manifold üzerinde tanımlanan bir diğer diferansiyel geometrik kavram ise türevdir. Bu türev dış cebirde dış türev olarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$d : \Lambda^p(M) \longrightarrow \Lambda^{p+1}(M) \tag{3.5}$$

Yani; bir p-formu $p + 1$-forma dönüştürür. Genel bir A tensörünün dış türevini

$$dA = \frac{1}{p!} \frac{\partial A_{\mu_1\mu_2...\mu_p}}{\partial x^\mu} dx^\mu \wedge dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_p} \tag{3.6}$$

olarak yazabiliriz. Dış türev operatörünün özellikleri şu şekildedir:

- $d(A_1 + A_2) = dA_1 + dA_2$

- $d(A_1 \wedge A_2) = dA_1 \wedge A_2 + (-1)^p A_1 \wedge dA_2$

- $d(dA) = d^2 A = 0$

- $df(x^\mu) = \frac{\partial f(x^\mu)}{\partial x^\nu} dx^\nu$

3.4 İç Çarpım

Yine Manifold üzerinde tanımlanan bir diğer diferansiyel geometrik kavram olan iç çarpım ise dış cebirde ι sembolüyle gösterilir ve p-formu $p-1$-forma indirger. Yani bir tane 1-formu yok eder.

$$\iota : \Lambda^p(M) \longrightarrow \Lambda^{p-1}(M) \tag{3.7}$$

İç çarpım, $\frac{\partial}{\partial X^a}$ bazına göre alınacağı için aşağıdaki kısaltma sembolünü kullanabiliriz.

$$\iota_a = \iota_{X_a} = \iota_{\frac{\partial}{\partial x^a}} \tag{3.8}$$

Genel bir A tensörünün iç çarpımı alındığında aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\iota_\mu A = \frac{1}{p!} A_{\mu\mu_2 \ldots \mu_p} dx^{\mu_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_p} \tag{3.9}$$

Örnek olarak 1-form olan e^a nın ι_b ile iç çarpımı Kroenecker delta δ^a_b ile ifade edilir.

$$\iota_b e^a = \iota^a e_b = \delta^a_b \tag{3.10}$$

1-formlar ile vektörler birbirine dualdır: V bir vektör alanı olsun, bir A p-formu için iç çarpım operatörü aşağıdaki özellikleri sahiptir:

- $\iota_a f = 0$

- $\iota_{fa} A = f \iota_a A$

- $e^a \wedge \iota_a A = pA$

- $\iota_a \iota_b A = -\iota_b \iota_a A$
- $\iota_a(A_1 \wedge A_2) = \iota_a A_1 \wedge A_2 + (-1)^p A_1 \wedge \iota_a A_2$
- $\iota_a e^b = \delta_a^b$
- $(\iota_a + \iota_b)A_1 = \iota_a A_1 + \iota_b A_1$
- $\iota_a(A_1 + A_2) = \iota_a A_1 + \iota_b A_2$

3.5 Hodge Star İşlemi

Hodge star ise bu $(*)$ simgesiyle gösterilir.

$$* : \Lambda^p(M) \longrightarrow \Lambda^{n-p}(M) \tag{3.11}$$

p-formu n boyutlu bir manifold için $n-p$ forma götüren bir işlemdir.

$$*A_{(p)} = \frac{1}{(n-p)!} A_{[a_1 \ldots a_p]} \varepsilon^{a_1 \ldots a_p}{}_{a_{p+1} \ldots a_n} e^{a_{p+1} \ldots a_n} \tag{3.12}$$

4-boyutta yönlendirilmiş hacim elemanı:

$$*1 = e^{0123} = e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \tag{3.13}$$

$$*1 = \frac{1}{4!} \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \tag{3.14}$$

olarak ifade edilir. e_a 1-fomunun e_{ab} 2-fromunun ve e_{abc} 3-fromunun Hodge star işlemi aşağıdaki gibidir.

1. $*e_a = \frac{1}{(4-1)!} \varepsilon_{abcd} e^{bcd}$
2. $*e_{ab} = \frac{1}{(4-2)!} \varepsilon_{abcd} e^{cd}$
3. $*e_{abc} = \frac{1}{(4-3)!} \varepsilon_{abcd} e^{d}$

Bu $*$ operatörü w p-fomu ve φ q-formu için aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- $w \wedge *\varphi = \varphi \wedge *w$
- $*w \wedge \varphi = *\varphi \wedge w$
- $**w = (-1)^{p(n-p)} w$

3.6 Kovaryant Dış Türev ve Eğrilik Tensörü

Eğri uzayda yeni bir türev kavramına ihtiyaç vardır, bu ise kovaryant dış türevdir. (p,q)-tipi bir A tensörünün kovaryant dış türevi, bağlantı (connection) 1-formları kullanılarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} DA_{a_1\cdots a_p}{}^{b_1\cdots b_q} &= dA_{a_1\cdots a_p}{}^{b_1\cdots b_q} + \omega^{b_1}{}_c \wedge A_{a_1\cdots a_p}{}^{cb_2\cdots b_q} + \cdots \\ &\quad -\omega^c{}_{a_1} \wedge A_{ca_2\cdots a_p}{}^{b_1\cdots b_q} - \cdots \,. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Eğri uzayda eğrilik tensörü 2-formu gravitasyonu temsil eden temel bir tensördür ve

$$R^a{}_b(\omega) := d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \tag{3.16}$$

olarak tanımlanır.

3.7 Burulma Tensörü

Yine başka bir diferansiyel geometrik kavram olan Burulma tensörü ise ortanormal 1-formlar olan e^a ların kovaryant dış türeviyle

$$T^a := De^a = de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b \tag{3.17}$$

olarak ifade edilir.

3.8 Varyasyon Hesabı

Dış cebir difransiyel hesabı, teorik fizik alanında kullanılan çok önemli ve güçlü bir araçtır. Bu nedenle tez çalışmasında dış cebiri kullanarak ilgilendiğimiz modeli tarif eden bir teori kurmak için bir eylem integralinden yararlanırız. Daha sonra bunun ekstramumunu alarak alan denklemlerini elde ederiz.

$$I = \int_M L \tag{3.18}$$

- I: eylem integrali
- L: Lagrange 4-formu
- M: 4-boyutlu M manifoldu

L Lagrange 4-formu ve $\mathcal{L}$ Lagrange fonksiyoneli arasında aşağıdaki gibi bir ilşiki vardır:

$$L = \mathcal{L} * 1 \tag{3.19}$$

Böylece eylem integrali aşağıdaki formu alır.

$$I = \int_M \mathcal{L} * 1 \tag{3.20}$$

Bu integralin ekstramumunu bulmak için eylemin varyasyonu alırız ve sıfıra eşitleriz.

$$\delta I = 0 \tag{3.21}$$

Burada δ sembolü varyasyon operatörünü ifade eder.

4. EINSTEIN'IN GRAVİTASYON TEORİSİ

Einstein'ın ortaya attığı Genel Görelilik kuramı, Newton'un çözemediği sorunları başarıyla açıklayabilmiş ve çok popüler bir teori haline gelmiştir. Önerilen bir gravitasyon teorisinin Lagrange formülasyonunun olması ve bir eylem ilkesiyle türetilebilmesi teorinin üstünlüğü olarak görülür ve aranan bir özelliğidir. Burada bir I eylemi (action), Lagrangianın manifold üzerinden integraliyle

$$I = \int_M (L + L_{mat} + \lambda_a \wedge T^a) \tag{4.1}$$

olarak ifade edilir. Burada L gravitasyonel Lagrangian, L_{mat} ise madde Lagrangianı olarak isimlendirilir. λ_a ise burulmasız bir geometriye yol açan Lagrange çarpanı 2-formudur.

Genel Görelilik teorisinde gravitasyonel Lagrangian 4-formu aşağıdaki Einstein-Hilbert Lagrangianı

$$L_{E-H} = \frac{1}{2\kappa^2} R^{ab}(\omega) \wedge *(e_a \wedge e_b) = \frac{1}{2\kappa^2} R * 1 \tag{4.2}$$

ile verilir. Burada κ^2 gravitasyonel sabit, R^{ab} eğrilik tensörü 2-formu, ve $R = \iota_b \iota_a R^{ab}$ ise eğrilik skalarıdır. Bu Lagrangianın varyasyonunu aldığımızda

$$\delta L_{E-H} = \delta e^a \wedge \ [\frac{1}{2\kappa^2} R_{bc}(\omega) \wedge *e^{abc}\ ] - \delta\omega^a{}_b \wedge [\frac{1}{2\kappa^2} T_c \wedge *e_a{}^{bc}] = 0 \tag{4.3}$$

gravitasyonel alan denklemi elde edilir. Bu eylemin ortonarmal 1-formlara göre varyasyonu

$$G^a = \kappa^2 \tau^a \tag{4.4}$$

ile verilen Einstein alan denklemi olarak bilinir. Burada

$$G^a = -\frac{1}{2} R_{bc}(\omega) \wedge *e^{abc} \qquad \tau_a = \frac{\delta L_{mat}}{\delta e^a} \tag{4.5}$$

olarak kısaltıldı. Ayrıca λ_a varyasyonu burulmanın sıfır olması koşulunu verir:

$$T^a = 0 \tag{4.6}$$

böylece bağlantı varyasyonundan elde edilen denklem sıfır olur.

4.1 Einstein-Maxwell Teorisi

Einstein'ın Gravitasyon toerisi $(0, 2)$-tipi metrik tensörün ikinci mertebeden türevlerini içeren bir tensör teorisidir. Bu teoriye Maxwell alanını da eklersek buna Einstein-Maxwell teorisi denir. Bu durumda diferansiyel form notasyonuyla bu teorinin Lagrangianı

$$L = \frac{1}{2\kappa^2} R * 1 - \frac{1}{2}\epsilon_0 F \wedge *F + \lambda^a \wedge T_a \tag{4.7}$$

olarak yazılır. Burada R eğrilik skaları, φ skalar alan, λ_a ise burulma tensörünü sıfır yapan, yani $T^a = 0$ veren Lagrange çarpanıdır. Bu Lagrangianın temel değişkenlere göre varyasyonu alınarak bu modelin alan denklemleri bulunur. Einstein-Maxwell teorisinde çoğu zaman boşluğun dielektrik sabiti $\epsilon_0 = 1$ alınarak hesaplar yapılır. Fakat biz burada ince yapı sabitinin ϵ_0 içerdiğini vurgulamak ve bu ϵ_0 sabitinin madde içinde ϵ olarak karşımıza çıkacağını göstermek istiyoruz. Buradaki madde kavramı, gravitasyonel etkilerin baskın olduğu durumu ifade eden özel bir ortam olarak düşünülecektir.

5. GRAVİTASYONEL ALANDA SKALAR ALANIN ELEKTROMANYETİK ALANA MİNİMAL OLMAYAN BAĞLANMASI

Dirac'ın 1937 yılındaki temel sabitlerin uzay-zamanla değişebileceğiyle ilgili önerisinden (Dirac (1937)) sonra bu alanda önemli çalışmalar ortaya çıkmıştır. Özellikle Sicim teorisinin düşük enerji limitinde kütlesiz skalar alanların varlığını öngörmesi önemli bir etkiye yol açmıştır. Skalar alanın varlığı alternatif gravitasyon modellerini akla getirmiştir. Bu modellerde ince yapı sabitinin nasıl değişeceği önemli hale gelmiştir. Bekenstein 1982 yılındaki çalışmasında özellikle bu ince yapı sabitinin değişebileceğini öngören bir teori ortaya koymuştur, Bekenstein (1982). Daha sonra bu çalışma Olive ve diğ. (2002), Sandvik ve diğ. (2002) yayınlarında kozmolojik durumlara genişletilmiştir. Son zamanlarda bu alandaki çalışmalar daha da artmıştır. Bu çalışmalarda özellikle skalar alanın elektromanyetik alan ile minimal olmayan çiftlenimi incelenmiştir (Anchordoqui ve diğ. (2003), Avelino (2008), Bento ve diğ. (2004), Chiba ve diğ. (2002), Copeland ve diğ. (2004), Lee ve diğ. (2004), Marra ve diğ. (2005), Mota (2004), Wetterich (2003)).

Bu tezde skalar alanın elektromanyetik alana minimal olmayan bağlanmasını içeren aşağıdaki Lagrangianı düşüneceğiz.

$$L = \frac{1}{2\kappa^2} R * 1 - \frac{1}{2} c_1 d\phi \wedge *d\phi + V(\phi) * 1 - \frac{1}{2}\epsilon_0 Y(\phi) F \wedge *F + \lambda_a \wedge T^a \tag{5.1}$$

Burada R Ricci skaları, ϕ boyutsuz skalar alan, $Y(\phi)$ ve $V(\phi)$ skalar alana bağlı fonksiyonlardır ve $V(\phi)$ skalar alanın potansiyel terimi olarak bilinir. F ise Maxwell tensörü 2-formu veya elektromanyetik alan tensörü olarak isimlendirilir ve $F = dA$ şeklinde bir A elektromanyetik potansiyel 1-formdan türetilebilir. Ayrıca c_1 çiftlenim sabitidir, ışık hızı ve uzunluk boyutu cinsinden $c_1 = \frac{c}{\ell^2}$ olarak tanımlanır ve bu modellerde $c_1 \approx 1$ (Sandvik ve diğ. (2002)) mertebesinde olduğu için bu hesapların sonunda $c_1 = 1$ alacağız.

$Y(\phi) = e^{-2\phi}$ olduğu durum için bu model ilk olarak Bekenstein tarafından önerilip Bekenstein (1982), daha sonra Sandvik-Barrow-Magueijo tarafından geliştirildiği için Bekenstein-Sandvik-Barrow-Magueijo (BSBM) modeli olarak bilinir Barrow ve diğ. (20021,2,3), Magueijo ve diğ. (20021,2).

Burada Maxwell Lagrangianı olan $F \wedge *F$ teriminin önündeki fonksiyon $Y(\phi) = 1$ iken, modeldeki elektrik yükünden kaynaklı Maxwell alanı F olur. Maxwell denklemi ise $\epsilon_0 d * F = 0$ ve elektrostatik yük için çözümü $F = Ee^{10} = \frac{q_0}{r^2}e^{10}$ haline gelir. Burada E elektrik alanı ifade eder. Fakat $Y(\phi) \neq 1$ olduğunda Maxwell denklemi $\epsilon_0 d * YF = 0$ olduğundan bunun çözümü ise aşağıda gösterildiği gibi $F = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 Yr^2}e^{10}$ haline gelir.

$$\begin{aligned}
\epsilon_0 d * YF &= 0 \\
\epsilon_0 \int_V d(*YF) &= 0 \\
\epsilon_0 \int_{\partial V} *YEe^{10} &= 0 \\
\epsilon_0 \int_{\partial V} YEe^{23} &= 0 \\
\epsilon_0 \int_{\partial V} YEr^2 sin(\theta) d\theta \wedge d\phi &= 0 \\
4\pi\epsilon_0 YEr^2 &= q_0
\end{aligned} \tag{5.2}$$

olduğu bulunur. Buradan elektrik alan E çekilip aşağıda yerine yazılır. Böylece

$$F = Ee^{10} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 Yr^2}e^{10} \tag{5.3}$$

olduğu gösterilmiş olur. Dikkat edilirse minimal olmayan bağlanma fonksiyonu $Y(\phi)$ nin varlığında, boşluktaki ϵ_0 dielektrik sabitini, madde içindeki dielektrik sabiti olan $\epsilon = \epsilon_0 Y(\phi)$ ile değiştirmek gerekir. Böylece minimal durumda ince yapı sabiti $\alpha_0 = \frac{e_0^2}{2\epsilon_0 \hbar c}$ iken minimal olmayan durumda $\alpha = \frac{e_0^2}{2\epsilon \hbar c}$ olur ve bunların oranı;

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} = \frac{1}{Y(\phi)} \tag{5.4}$$

olarak elde edilir. Böylece ince yapı sabitinin ϕ skalar alan ile değişiminin nasıl olacağı belirlenmiş olur. Sonuçta bu modelde ince yapı sabiti

$$\alpha(\phi) = \frac{\alpha_0}{Y(\phi)} \tag{5.5}$$

bağıntısıyla ϕ skalar alanına bağlı olarak değişir. Bu fonksiyonun şimdiki değeri olan $Y(\phi_0) = 1$ başlangıç koşulu kullanılarak, bu sabitin şimdiki değeri α_0 bulunur. Bu ince yapı sabitinin değerinin hassasiyeti için deneysel bir aralık bulunabilmektedir. Bu hassasiyet aralığı teoriyi test etmek için kullanılabilir. Bu çalışmada $Y(\phi) = e^{-2\phi}$ minimal olmayan fonksiyonunun, ince yapı sabitini nasıl etkilediği incelenecektir.

İlk olarak (5.1) Lagrangianının $e^a, \omega^a{}_b, \phi$ ve A temel potansiyel değişkenlerine göre varyasyonunu alalım. Bu varyasyon hesapları her bir terim için aşağıda tek tek hesaplanmıştır.

5.1 $\delta(R * 1)$ Varyasyonu

İlk olarak (5.1) eylemindeki ilk terimin varyasyonunu hesaplayalım. Bu terimi aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$R * 1 = R^a{}_b \wedge *e_a{}^b \tag{5.6}$$

Bu eşitlik Hodge yıldız işlemi ve diğer iç çarpım özellikleri kullanılarak gösterilebilir. Daha sonra varyasyonun dağılma özelliğini kullanılarak bunu

$$\delta(R * 1) = \delta R^a{}_b \wedge *e_a{}^b + R^a{}_b \wedge \delta * e_a{}^b \tag{5.7}$$

olarak ifade edebiliriz. Varyasyon işleminin devamı şöyledir:

$$\begin{aligned}
\delta(R * 1) &= \delta(d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b) \wedge *e_a{}^b + R^a{}_b \wedge \frac{1}{2}\varepsilon_a{}^b{}_{cd}\delta e^{cd} \\
&= \delta\omega^a{}_b \wedge d * e_a{}^b + \delta\omega^q{}_b \wedge \omega^b{}_c \wedge *e_a{}^c + \omega^a{}_c \wedge \delta\omega^c{}_b \wedge *e_a{}^b \\
&\quad + R^a{}_b \wedge \frac{1}{2}\varepsilon_a{}^b{}_{cd}\delta e^c \wedge e^d + R^a{}_b \wedge \frac{1}{2}\varepsilon_a{}^b{}_{cd} e^c \wedge \delta e^d
\end{aligned} \tag{5.8}$$

burada δe^c ve $\delta\omega^a{}_b$ parantezlerine alırız

$$\begin{aligned}
\delta(R * 1) &= \delta\omega^a{}_b \wedge (d * e_a{}^b + \omega^b{}_c \wedge *e_a{}^c - \omega^c{}_a \wedge *e^b{}_c) \\
&\quad + \delta e^c \wedge (R^a{}_b \wedge \frac{1}{2}\varepsilon_a{}^b{}_{cd} \wedge e^d - R^a{}_b \wedge \frac{1}{2}\varepsilon_a{}^b{}_{cd} e^c \wedge e^d) \\
&= \delta\omega^a{}_b \wedge D * e_a{}^b + \delta e^a \wedge R^c{}_b \wedge *e_c{}^b{}_a
\end{aligned} \tag{5.9}$$

olduğunu buluruz. Böylece ilk terimin varyasyonunu aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$\delta(\frac{1}{2\kappa^2}R * 1) = \delta\omega^a{}_b \wedge \frac{1}{2\kappa^2}D * e_a{}^b + \delta e^a \wedge \frac{1}{2\kappa^2}R^c{}_b \wedge *e_c{}^b{}_a \qquad (5.10)$$

5.2 $\delta(\frac{c_1}{2}d\phi \wedge *d\phi)$ Varyasyonu

Bu terimdeki $\frac{c_1}{2}$ sabit olduğu için kalan kısmın varayasyonunu alıp hesaplamaya en son ekleyebiliriz.

$$\begin{aligned} \delta(d\phi \wedge *d\phi) &= \delta d\phi \wedge *d\phi + \delta d\phi \wedge *d\phi \\ &\quad -\delta e^a \wedge [\iota_a d\phi \wedge *d\phi - (-1)^1 d\phi \wedge \iota_a * d\phi] \\ &= 2\delta d\phi \wedge *d\phi - \delta e^a \wedge [\iota_a d\phi \wedge *d\phi + d\phi \wedge \iota_a * d\phi] \qquad (5.11) \end{aligned}$$

(5.11) denkleminin sağ tarafdaki ilk terimi bir tam türevden (tam türevin integrali sınırlarda sıfır olup sonuca katkı vermediğinden tam türevi sıfıra eşitleyerek) aşağıdaki gibi türetebiliriz. Ayrıca d ile δ işleminin yerdeğiştirebileceğini hesaba katarak, yani $\delta d = d\delta$

$$\begin{aligned} d(\delta\phi \wedge *d\phi) &= 0 \\ d\delta\phi \wedge *d\phi + \delta\phi \wedge d * d\phi &= 0 \qquad (5.12) \end{aligned}$$

Sonuçta

$$d\delta\phi \wedge *d\phi = -\delta\phi \wedge d * d\phi \qquad (5.13)$$

olduğunu gösterebiliriz. Şimdi, (5.11) denkleminin sağ tarafındaki ilk terim yerine (5.13) eşitliği yazılarak, aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\begin{aligned} \delta(\frac{c_1}{2}d\phi \wedge *d\phi) &= -\delta e^a \wedge \frac{c_1}{2}[\iota_a d\phi \wedge *d\phi + d\phi \wedge \iota_a * d\phi] \\ &\quad -\delta\phi \wedge c_1 d * d\phi \qquad (5.14) \end{aligned}$$

5.3 $\delta(V(\phi) * 1)$ Varyasyonu

Skalar alanın potansiyel terimi olan $V(\phi) * 1$ ifadesinin varyasyonuna bakalım.

$$\delta(V(\phi) \wedge *1) = \delta V(\phi) \wedge *1 + \delta e^a \wedge V(\phi) \wedge \iota_a * 1 \tag{5.15}$$

Burada $\iota_a f = 0$ ve $\iota_a * 1 = *e_a$ özelliklerini kullanabiliriz. Ayrıca $\delta V(\phi)$ aşağıdaki türevli ifadeyi yazıyoruz.

$$\delta V(\phi) = \frac{dV}{d\phi}\delta\phi \tag{5.16}$$

Böylece potansiyel teriminin varyasyonu şöyle olur.

$$\delta(V(\phi) \wedge *1) = \delta\phi \wedge \frac{\partial V}{\partial\phi} * 1 + \delta e^a \wedge V(\phi) * e_a \tag{5.17}$$

5.4 $\delta(Y(\phi)F \wedge *F)$ Varyasyonu

Maxwell Lagrangianının, skalar alanın herhangi bir fonksiyonu olan $Y(\phi)$ ile bağlanmış halinin varyasyonuna bakalım. Bu hesaplarda kolaylık olması açısından $\epsilon_0 = 1$ alınmıştır.

$$\delta(Y(\phi)F \wedge *F) \;=\; \frac{1}{2}(\delta Y(\phi))F \wedge *F + \frac{1}{2}Y\delta(F \wedge *F) \tag{5.18}$$

Burada $\delta Y(\phi)$ yerine onun türevini şöyle alırız:

$$\delta Y(\phi) = \frac{dY}{d\phi}\delta\phi \tag{5.19}$$

Daha sonra sağ tarafdaki ikinci terimin varyasyonunu aşağıdaki gibi hesaplıyoruz.

$$\begin{aligned}\delta(F \wedge *F) &= \delta F \wedge *F + \delta F \wedge *F - \delta e^a \wedge [\iota_a F \wedge *F - F \wedge \iota_a * F] \\ &= 2\delta F \wedge *F - \delta e^a \wedge [\iota_a F \wedge *F - F \wedge \iota_a * F]\end{aligned} \tag{5.20}$$

Şimdi bunları (5.18) denkleminde yerine yerleştiriyoruz.

$$\begin{aligned}\delta(Y(\phi)F \wedge *F) &= \delta\phi\frac{1}{2}\frac{dY}{d\phi}F \wedge *F + \; Y\delta F \wedge *F - \delta e^a[\iota_a F \wedge *F - F \wedge \iota_a * F] \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial Y}{\partial\phi}\delta\phi \wedge F \wedge *F - \delta e^a \wedge \frac{1}{2}Y[\iota_a F \wedge *F - F \wedge \iota_a * F] \\ &\quad +Y\delta F \wedge *F\end{aligned} \tag{5.21}$$

Burada elektromanyetik tensör $F = dA$, şeklinde A elektromaynatik potansiyel 1-formundan elde edilir. Şimdi (5.21) denklemindeki son terimi açıkça yazalım:

$$\delta F \wedge Y * F = \delta dA \wedge Y * F = (d\delta A) \wedge (Y * F) \tag{5.22}$$

Bu terimin eşitini aşağıdaki gibi bir tam türev kullanarak türetebiliriz.

$$d[\delta A \wedge Y * F] = d\delta A \wedge Y * F - \delta A \wedge d(Y * F) \tag{5.23}$$

Böylece (5.21) denklemindeki son terim

$$d\delta A \wedge Y * F = \delta A \wedge d(Y * F) + mod(d) \tag{5.24}$$

olarak elde edilir ve varyasyonun sonucu hesaplanır.

$$\begin{aligned} \delta(\frac{Y(\phi)}{2} F \wedge *F) &= \delta\phi \frac{1}{2}\frac{\partial Y}{\partial \phi} F \wedge *F - \delta e^a \wedge \frac{Y}{2}[\iota_a F \wedge *F - F \wedge \iota_a * F] \\ &\quad + \delta A \wedge d(Y * F) \end{aligned} \tag{5.25}$$

5.5 $\delta(\lambda_a \wedge T^a)$ Varyasyonu

Son olarak teoride burulma tensörü sıfır olduğu için, burulmayı sıfıra kısıtlayan $\lambda_a \wedge T^a$ ifadesinin varyasyonunu hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \delta(\lambda_a \wedge T^a) &= \delta\lambda_a \wedge T^a + \lambda_a \wedge \delta(de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b) \\ &= \delta\lambda_a \wedge T^a + \delta de^a \wedge \lambda_a + \delta\omega^a{}_b \wedge \lambda_a \wedge e^b \\ &\quad + \omega^a{}_b \wedge \delta e^b \wedge \lambda_a \end{aligned} \tag{5.26}$$

Denklemin sağ tarafındaki son terimde a ve b indislerinin yerlerini değiştirip $\delta d = d\delta$ ve $\omega^a{}_b \wedge e^b = -e^b \wedge \omega^a{}_b$ özelliklerini kullanarak varyasyonu yeniden şöyle yazırız:

$$\begin{aligned} \delta(\lambda_a \wedge T^a) &= \delta\lambda_a \wedge T^a + d\delta e^a \wedge \lambda_a + \delta\omega^a{}_b \wedge \lambda_a \wedge e^b \\ &\quad - \delta e^a \wedge \omega^b{}_a \wedge \lambda_b \end{aligned} \tag{5.27}$$

sonra δe^a parantezine alırız.

$$\delta(\lambda_a \wedge T^a) = \delta\lambda_a \wedge T^a + \delta\omega^a{}_b \wedge \lambda_a \wedge e^b + \delta e^a \wedge D\lambda_a + mod(d) \tag{5.28}$$

5.6 Toplam Varyasyon

Sonuç olarak modelin toplam varyasyonunu elde edebilmek için yukarıda terim terim hesapladığımız varyasyonları topluyoruz.

$$\begin{aligned}
\delta L \;=\;& \delta\omega^a{}_b \wedge \frac{1}{2\kappa^2} D * e_a{}^b + \delta e^a \wedge \frac{1}{2\kappa^2} R^c{}_b \wedge *e_c{}^b{}_a + \delta\phi \wedge c_1 d * d\phi \\
& + \delta e^a \wedge \frac{c_1}{2}[\iota_a d\phi \wedge *d\phi + d\phi \wedge \iota_a * d\phi] + \delta\phi \wedge \frac{\partial V}{\partial \phi} * 1 \\
& - \delta e^a \wedge V(\phi) \wedge *e_a + \delta\phi \wedge \frac{1}{2}\frac{\partial Y}{\partial \phi} F \wedge *F + \delta A \wedge d(Y * F) \\
& - \delta e^a \wedge \frac{Y(\phi)}{2}[\iota_a F \wedge *F - F \wedge \iota_a * F] + \delta\lambda_a \wedge T^a \\
& + \delta\omega^a{}_b \wedge \lambda_a \wedge e^b + \delta e^a \wedge D\lambda_a + mod(d)
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Daha sonra $\delta\omega^a{}_b, \delta e^a, \delta\phi, \delta A, \delta\lambda_a$ varyasyonlarını aynı parantez altında aşağıdaki gibi topluyoruz:

$$\begin{aligned}
\delta L \;=\;& \delta\omega^{ab} \wedge (\frac{1}{2\kappa^2} D * e_{ab} + \lambda_a \wedge e_b) + \delta e^a \wedge [\frac{1}{2\kappa^2} R^c{}_b \wedge *e_c{}^b{}_a + \frac{c_1}{2}\iota_a d\phi \wedge *d\phi \\
& + \frac{c_1}{2} d\phi \wedge \iota_a * d\phi - V(\phi) \wedge *e_a - \frac{Y(\phi)}{2}(\iota_a F \wedge *F - F \wedge \iota_a * F) + D\lambda_a] \\
& + \delta\phi \wedge [c_1 d * d\phi + \frac{dV}{d\phi} * 1 - \frac{1}{2}\frac{dY}{d\phi} F \wedge *F] \\
& + \delta A \wedge d(Y(\phi) * F) + \delta\lambda_a \wedge T^a
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Modelin alan denklemleri, varyasyonu sıfıra eşitleyerek bulunur, $\delta L = 0$. Sırasıyla bağlantı, koçerçeve, skalar alan, elektromanyetik alan ve burulmayı sıfır yapan koşul aşağıdaki gibi elde edilir.

- $\delta\omega^a{}_b$

$$\frac{1}{2\kappa^2} D * e_a{}^b + \lambda_a \wedge e^b = 0 \tag{5.31}$$

- δe^a

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\kappa^2} R^c{}_b \wedge *e_c{}^b{}_a + \frac{c_1}{2}[\iota_a d\phi \wedge *d\phi + d\phi \wedge \iota_a * d\phi] \\
& - V(\phi) \wedge *e_a - \frac{Y(\phi)}{2}[\iota_a F \wedge *F - F \wedge \iota_a * F] + D\lambda_a = 0
\end{aligned} \tag{5.32}$$

- $\delta\phi$

$$c_1 d * d\phi - \frac{dV}{d\phi} * 1 + \frac{1}{2}\frac{dY}{d\phi} F \wedge *F = 0 \tag{5.33}$$

- δA

$$d(Y(\phi) * F) = 0 \tag{5.34}$$

- $\delta\lambda_a$

$$T^a = 0 \tag{5.35}$$

Burada (5.31) denkleminden λ_a yı çözdüğümüzde

$$\lambda_a = 0 \tag{5.36}$$

bulunur. Çünkü $D * e_a{}^b = T^c * e_a{}^b{}_c$ olduğundan ve $T^c = 0$ eşitliği kullanılmıştır. Buradan $D\lambda_a = 0$ olur ve böylece geriye gravitasyonel alana, skalar alana ve elektromanyetik alana ait aşağıdaki üç denklem kalır.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\kappa^2} R^c{}_b \wedge *e_c{}^b{}_a + \frac{c_1}{2}[\iota_a d\phi \wedge *d\phi + d\phi \wedge \iota_a * d\phi] \\
&-V(\phi) \wedge *e_a - \frac{Y}{2}[\iota_a F \wedge *F - F \wedge \iota_a * F] = 0 && (5.37) \\
&c_1 d * d\phi - \frac{dV}{d\phi} * 1 + \frac{1}{2}\frac{dY}{d\phi} F \wedge *F = 0 && (5.38) \\
&d(Y * F) = 0 && (5.39)
\end{aligned}$$

Bu çalışmada ince yapı sabitinin ϕ skalar alanına bağlı olarak değişimini inceleyeceğiz. Bu incelemeyi evrenin zamanla evrimini ifade eden Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) metriğini kullanalarak yapacağız.

6. İNCE YAPI SABİTİNİN EVRENİN EVRİMİ SÜRECİNDE SKALAR ALANLA DEĞİŞİMİ

Aşağıdaki FLRW metriğinin düşünelim:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{6.1}$$

Burada $a(t)$ evrenin genişlemesini zamana bağlı olarak ifade eden ölçek çarpanıdır (scale factor). Elektromanyetik alanın varlığı uzay-zaman geometrisinde bir anizotropiye ve tercihli bir yöne neden olur. Gerçekte, bu yön ile uyumlu yani aynı simetriye sahip anizotropik bir metrik kullanmak gerekir. Fakat evrenin genişlemesi ile ilgili kabul görmüş genel kanı, izotropiklikten çok küçük sapmaların olduğuna dair fikirler ileri sürülse de; izotropik olduğu yönündedir. Bu nedenle yukarıdaki homojen izotropik metriği kullanacağız. Bu durumda ortanormal ko-çerçeve 1-formları

$$e^0 = dt, \;\; e^1 = a(t)dx, \;\; e^2 = a(t)dy, \;\; e^3 = a(t)dz \tag{6.2}$$

alınır ki bunun uzay kısmını genel bir ifadeyle aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$e^0 = dt, \qquad e^i = a(t)dx^i, \qquad i = 1, 2, 3 \tag{6.3}$$

Böylece (6.1) metriğini koordinat haritasından bağımsız olarak ortonormal koordinatlar cinsinden

$$ds^2 = -e^0 \otimes e^0 + e^1 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2 + e^3 \otimes e^3 \tag{6.4}$$

veya

$$ds^2 = \eta_{ab} e^a \otimes e^b \tag{6.5}$$

olarak yazabiliriz. Buradaki η_{ab} metrik tensörünün bileşenlerinin matris temsili şöyle olur:

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

Şimdi yukarıdaki (6.3) ile verilen ortanormal 1-formların dış türevini sırasıyla alalım. İlk olarak

$$de^0 = d^2t = 0 \tag{6.7}$$

ve diğer 1-formlar için şöyle yazıyoruz:

$$de^i = da(t) \wedge dx^i = \frac{da(t)}{dt} dt \wedge dx^i \tag{6.8}$$

(i=1,2,3). Yukardaki dx^i yerine $\frac{e^i}{a(t)}$ yazarak

$$de^i = \frac{\dot{a}}{a} e^{0i} \tag{6.9}$$

olduğunu buluruz. Daha sonra

$$\omega^i{}_0 = \omega_{i0} = -\omega_{0i} = \omega^0{}_i \tag{6.10}$$

$$\omega^i{}_j = \omega_{ij} = -\omega_{ji} = -\omega^j{}_i \tag{6.11}$$

özelliklerini sağlayan antisimetrik Levi-Civita bağlantı 1-formlarını (3.17) bağıntısında burulmanın sıfır olduğunu kullanarak

$$T^a = de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b = 0 \tag{6.12}$$

aşağıdaki gibi buluruz.

- $a = 0$

$$de^0 + \omega^0{}_1 \wedge e^1 + \omega^0{}_2 \wedge e^2 + \omega^0{}_3 \wedge e^3 = 0 \tag{6.13}$$

  birinci terim (6.7) ifadesine göre sıfır olur $de^0 = d(dt) = 0$.

- $a = 1$

$$de^1 + \omega^1{}_0 \wedge e^0 + \omega^1{}_2 \wedge e^2 + \omega^1{}_3 \wedge e^3 = 0 \tag{6.14}$$

  ilk terim (6.9) sonucuna göre $de^1 = \frac{\dot{a}}{a} e^{0i}$ olur,

- $a = 2$

$$de^2 + \omega^2{}_0 \wedge e^0 + \omega^2{}_1 \wedge e^1 + \omega^2{}_3 \wedge e^3 = 0 \tag{6.15}$$

burda da yukarıdaki gibi ilk terim $de^2 = \frac{\dot{a}}{a} e^{02}$ olur.

- $a = 3$

$$de^3 + \omega^3{}_0 \wedge e^0 + \omega^3{}_1 \wedge e^1 + \omega^3{}_2 \wedge e^2 = 0 \tag{6.16}$$

Bu denklemleri düzenleyip çözersek bilinmeyen bağlantı bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\omega^0{}_i = \omega^i{}_0 = \frac{\dot{a}}{a} e^i \tag{6.17}$$

Bunlar sadece sıfırdan farklı olan terimlerdir diğer terimler sıfır bulunur. Şimdi Riemann eğrilik 2-formu tanımı olan

$$R^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \tag{6.18}$$

ifadesini kullanarak bunun bileşenlerini hesaplayalım. İlk olarak $R^0{}_i$ bileşenini bulalım (i=1,2,3):

- $R^0{}_i = ?$

$$\begin{aligned} R^0{}_i &= d\omega^0{}_i + \omega^0{}_c \wedge \omega^c{}_i \\ &= d\omega^0{}_i + \omega^0{}_1 \wedge \omega^1{}_i + \omega^0{}_2 \wedge \omega^2{}_i + \omega^0{}_3 \wedge \omega^3{}_i \end{aligned} \tag{6.19}$$

yukarıda bulduğumuz bağlantı formlarını kullanarak

$$\begin{aligned} R^0{}_i &= d(\frac{\dot{a}}{a} e^i) \\ &= (\frac{\dot{a}}{a})^{\cdot} dt \wedge e^i + \frac{\dot{a}^2}{a^2} e^{0i} \end{aligned} \tag{6.20}$$

haline gelir. Burada türevi açıkça yazdığımızda

$$R^0{}_i = \frac{\ddot{a}}{a} e^{0i} \tag{6.21}$$

olduğunu buluruz ve burda $R^0{}_i = R^{0i} = R^i{}_0 = R_{i0}$ birbirine eşittir. Daha sonra sırasıyla $R^1{}_2$, $R^1{}_3$ ve $R^2{}_3$ bileşenlerini aşağıdaki gibi hesaplarız.

- $R^1{}_2 =?$

$$
\begin{aligned}
R^1{}_2 &= d\omega^1{}_2 + \omega^1{}_c \wedge \omega^c{}_2 \\
&= \omega^1{}_0 \wedge \omega^0{}_2 + \omega^1{}_1 \wedge \omega^1{}_2 + \omega^1{}_2 \wedge \omega^2{}_2 + \omega^1{}_3 \wedge \omega^3{}_2 \\
&= \frac{\dot{a}}{a} e^1 \wedge \frac{\dot{a}}{a} e^2 \\
&= \frac{\dot{a}^2}{a^2} e^{12}
\end{aligned}
\tag{6.22}
$$

Burada $\omega^i{}_j = 0$ olduğundan $d\omega^i{}_j = 0$ eşitliği kullanılmıştır.

- $R^1{}_3 =?$

$$
\begin{aligned}
R^1{}_3 &= d\omega^1{}_3 + \omega^1{}_c \wedge \omega^c{}_3 \\
&= \omega^1{}_0 \wedge \omega^0{}_3 + \omega^1{}_1 \wedge \omega^1{}_3 + \omega^1{}_2 \wedge \omega^2{}_3 + \omega^1{}_3 \wedge \omega^3{}_3 \\
&= \frac{\dot{a}}{a} e^1 \wedge \frac{\dot{a}}{a} e^3 \\
&= \frac{\dot{a}^2}{a^2} e^{13}
\end{aligned}
\tag{6.23}
$$

Son olarak $R^2{}_3$ bileşenine bakalım.

- $R^2{}_3 =?$

$$
\begin{aligned}
R^2{}_3 &= d\omega^2{}_3 + \omega^2{}_c \wedge \omega^c{}_3 \\
&= \omega^2{}_0 \wedge \omega^0{}_3 + \omega^2{}_1 \wedge \omega^1{}_3 + \omega^2{}_2 \wedge \omega^2{}_3 + \omega^2{}_3 \wedge \omega^3{}_3 \\
&= \frac{\dot{a}}{a} e^2 \wedge \frac{\dot{a}}{a} e^3 \\
&= \frac{\dot{a}^2}{a^2} e^{23}
\end{aligned}
\tag{6.24}
$$

Bu eğrilik bileşenlerini genel formda şöyle yazabiliriz:

$$R^{ij} = \frac{\dot{a}^2}{a^2} e^{ij} \tag{6.25}$$

Bu eğrilik tensörü 2-formlarını kullanarak Ricci eğrilik 1-formlarını aşağıdaki formülden hesaplayabiliriz.

$$R_a = \iota_b R^b{}_a \tag{6.26}$$

$\iota_j e^j = \delta^i_j$ özelliğini kullanarak, her bir Ricci 1-formu sırasıyla $a = 0, 1, 2, 3$ yazarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} R_0 &= \iota_b R^b{}_a \\ &= \iota_0 R^0{}_0 + \iota_1 R^1{}_0 + \iota_2 R^2{}_0 + \iota_3 R^3{}_0 \\ &= \Big((\frac{\dot{a}}{a})^{\cdot} + (\frac{\dot{a}}{a})^2\Big)\iota_1 e^{01} + \Big((\frac{\dot{a}}{a})^{\cdot} + (\frac{\dot{a}}{a})^2\Big)\iota_2 e^{02} \\ &\quad + \Big((\frac{\dot{a}}{a})^{\cdot} + (\frac{\dot{a}}{a})^2\Big)\iota_3 e^{03} \\ &= -3\frac{\ddot{a}}{a}e^0 \end{aligned} \tag{6.27}$$

Burada eğrilik tensörü antisimetrik olduğundan simetrik bileşen olan $R^0{}_0$ sıfıra eşittir.

$$\begin{aligned} R_1 &= \iota_0 R^0{}_1 + \iota_1 R^1{}_1 + \iota_2 R^2{}_1 + \iota_3 R^3{}_1 \\ &= \Big((\frac{\dot{a}}{a})^{\cdot} + (\frac{\dot{a}}{a})^2\Big)\iota_0 e^{01} + (\frac{\dot{a}}{a})^2 \iota_2 e^{21} + (\frac{\dot{a}}{a})^2 \iota_3 e^{31} \\ &= \Big((\frac{\dot{a}}{a})^{\cdot} + (\frac{\dot{a}}{a})^2\Big)e^1 + (\frac{\dot{a}}{a})^2 e^1 + (\frac{\dot{a}}{a})^2 e^1 \\ &= (\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2})e^1 \end{aligned} \tag{6.28}$$

Benzer şekilde $a = 1$ için b indisi üzeriden toplam yazılıp iç çarpım özelliği kullanılarak yukarıdaki sonuç bulunmuştur. $a = 2$ alındığında

$$\begin{aligned} R_2 &= \iota_0 R^0{}_2 + \iota_1 R^1{}_2 + \iota_2 R^2{}_2 + \iota_3 R^3{}_2 \\ &= \iota_0\Big((\frac{\dot{a}}{a})^{\cdot} + (\frac{\dot{a}}{a})^2\Big)e^{02} + \iota_1(\frac{\dot{a}}{a})^2 e^{12} + \iota_3(\frac{\dot{a}}{a})^2 e^{32} \\ &= \Big((\frac{\dot{a}}{a})^{\cdot} + (\frac{\dot{a}}{a})^2\Big)e^2 + (\frac{\dot{a}}{a})^2 e^2 + (\frac{\dot{a}}{a})^2 e^2 \\ &= (\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2})e^2 \end{aligned} \tag{6.29}$$

elde edilir. Aynı işlem $a = 3$ için tekrarlanır.

$$\begin{aligned} R_3 &= \iota_0 R^0{}_3 + \iota_1 R^1{}_3 + \iota_2 R^2{}_3 + \iota_3 R^3{}_3 \\ &= \iota_0\Big((\frac{\dot{a}}{a})^{\cdot} + (\frac{\dot{a}}{a})^2\Big)e^{03} + \iota_1\Big((\frac{\dot{a}}{a})^2 e^{13}\Big) + \iota_2\Big((\frac{\dot{a}}{a})^2 e^{23}\Big) \\ &= \Big((\frac{\dot{a}}{a})^{\cdot} + (\frac{\dot{a}}{a})^2\Big)e^3 + (\frac{\dot{a}}{a})^2 e^3 + (\frac{\dot{a}}{a})^2 e^3 \\ &= (\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2})e^3 \end{aligned} \tag{6.30}$$

Bu Ricci Eğrilik 1-formundan Ricci eğrilik skalarına aşağıdaki bağılantı yardımıyla ulaşılabilir.

$$R = \iota_a R^a \tag{6.31}$$

Yine yukarıda hesaplanan Ricci 1-fromları kullanılarak Ricci eğrilik skaları

$$\begin{aligned} R &= \iota_0 R^0 + \iota_1 R^1 + \iota_2 R^2 + \iota_3 R^3 \\ &= -3\Big((\frac{\dot{a}}{a})^{\cdot} + (\frac{\dot{a}}{a})^2\Big)\iota_0 e^0 + \Big((\frac{\dot{a}}{a})^{\cdot} + 3(\frac{\dot{a}}{a})^2\Big)\iota_1 e^1 + \Big((\frac{\dot{a}}{a})^{\cdot} + 3(\frac{\dot{a}}{a})^2\Big)\iota_2 e^2 \\ &\quad + \Big((\frac{\dot{a}}{a})^{\cdot} + 3(\frac{\dot{a}}{a})^2\Big)\iota_3 e^3 \\ R &= 6\frac{\ddot{a}}{a} + 6\frac{\dot{a}^2}{a^2} \end{aligned} \tag{6.32}$$

olarak elde edilir.

Bu sonuçları (5.37) ile elde ettiğimiz Gravitasyonel alan denkleminde yerine yazarak bu alan denkleminden elde edilen diferansiyel denklemlere ulaşacağız. Gravitasyonel alan denklemindeki ilk terim $\frac{1}{2\kappa^2}R^c{}_b \wedge *e_c{}^b{}_a$ olan Einstein tensörünü bileşen bileşen hesaplayalım.

- $a = 0$ için

$$\begin{aligned} R^c{}_b \wedge *e_c{}^b{}_0 &= R^0{}_i \wedge *e_0{}^i{}_0 + R^i{}_0 \wedge *e_i{}^0{}_0 + R^i{}_j \wedge *e_i{}^j{}_0 \\ &= R^1{}_2 \wedge *e_1{}^2{}_0 + R^1{}_3 \wedge *e_1{}^3{}_0 + R^2{}_1 \wedge *e_2{}^1{}_0 + \\ &\quad R^2{}_3 \wedge *e_2{}^3{}_0 + R^3{}_1 \wedge *e_3{}^1{}_0 + R^3{}_2 \wedge *e_3{}^2{}_0 \\ &= (\frac{\dot{a}}{a})^2 e^{12} \wedge *e_1{}^2{}_0 + (\frac{\dot{a}}{a})^2 e^{13} \wedge *e_1{}^3{}_0 + (\frac{\dot{a}}{a})^2 e^{21} \wedge *e_2{}^1{}_0 \\ &\quad (\frac{\dot{a}}{a})^2 e^{23} \wedge *e_2{}^3{}_0 + (\frac{\dot{a}}{a})^2 e^{31} \wedge *e_3{}^1{}_0 + (\frac{\dot{a}}{a})^2 e^{32} \wedge *e_3{}^2{}_0 \\ &= 6\frac{\dot{a}^2}{a^2} e^{123} \end{aligned} \tag{6.33}$$

- $a = 1$ için

$$
\begin{aligned}
R^c{}_b \wedge *e_c{}^b{}_1 &= R^0{}_2 \wedge *e_0{}^2{}_1 + R^2{}_0 \wedge *e_2{}^0{}_1 + R^0{}_3 \wedge *e_0{}^3{}_1 + \\
& \quad R^3{}_0 \wedge *e_3{}^0{}_1 + R^2{}_3 \wedge *e_2{}^3{}_1 + R^3{}_2 \wedge *e_3{}^2{}_1 \\
&= \Big((\frac{\dot a}{a})^{\cdot} + (\frac{\dot a}{a})^2\Big)e^{02} \wedge *e_0{}^2{}_1 + \Big((\frac{\dot a}{a})^{\cdot} + (\frac{\dot a}{a})^2\Big)e^{20} \wedge *e_2{}^0{}_1 + \\
& \quad \Big((\frac{\dot a}{a})^{\cdot} + (\frac{\dot a}{a})^2\Big)e^{03} \wedge *e_0{}^3{}_1 + \Big((\frac{\dot a}{a})^{\cdot} + (\frac{\dot a}{a})^2\Big)e^{03} \wedge *e_3{}^0{}_1 + \\
& \quad (\frac{\dot a}{a})^2 e^{23} \wedge *e_2{}^3{}_1 + (\frac{\dot a}{a})^2 e^{32} \wedge *e_3{}^2{}_1 \\
&= -(4\frac{\ddot a}{a} + 2\frac{\dot a^2}{a^2})e^{023} \qquad (6.34)
\end{aligned}
$$

- $a = 2$ için

$$
\begin{aligned}
R^c{}_b \wedge *e_c{}^b{}_2 &= R^0{}_1 \wedge *e_0{}^1{}_2 + R^1{}_0 \wedge *e_1{}^0{}_2 + R^0{}_3 \wedge *e_0{}^3{}_2 + \\
& \quad R^3{}_0 \wedge *e_3{}^0{}_2 + R^1{}_3 \wedge *e_1{}^3{}_2 + R^3{}_1 \wedge *e_3{}^1{}_2 \\
&= -(4\frac{\ddot a}{a} + 2\frac{\dot a^2}{a^2})e^{013} \qquad (6.35)
\end{aligned}
$$

Benzer şekilde $a = 3$ için işlemler tekrarlanırsa

$$
R^c{}_b \wedge *e_c{}^b{}_3 = -(4\frac{\ddot a}{a} + 2\frac{\dot a^2}{a^2})e^{012} \qquad (6.36)
$$

olduğu bulunur. Şimdi (5.37) gravitasyonel alan denklemini tekrar yazalım.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\kappa^2}R^c{}_b \wedge *e_c{}^b{}_a &= -\frac{c_1}{2}[\iota_a d\phi \wedge *d\phi + d\phi \wedge \iota_a * d\phi] + V(\phi) \wedge *e_a \\
& \quad + \frac{Y}{2}[\iota_a F \wedge *F - F \wedge \iota_a * F] \qquad (6.37)
\end{aligned}
$$

Bu denklemin sağ tarafındaki enerji-momentum tensörünün elektromanyetik alandan kaynaklanan kısmının bileşenlerini bulalım.

$$
\tau_a(F) = \frac{Y}{2}[\iota_a F \wedge *F - F \wedge \iota_a * F] =? \qquad (6.38)
$$

Bu çalışmada izotropik olan FLRW metriği kullanılarak yukarıdaki hesaplar yapılmıştır. Fakat bu çalışmaya bir elektromanyetik alan eklediğimizde, uzay-zamanda bir yön tercihli hale gelir. Yani; elektromanyetik dalganın ilerlediği yön diğerlerinden farklı olduğu için bu alan izotropiyi bozar. Bu ise metrik ile uyumsuzluğa neden olur. Bu nedenle anizotropiye neden olan elektromanyetik alanların uzaysal bir hacim üzerinden ortalaması alınarak bu alanlara ait izotropik enerji momentum tensörü elde edilir. Bu ortalama alma prosedürü ilk olarak Tolman ve Ehrenfest tarafından 1930 yılında önerilmiştir (Tolman ve diğ. 1930). E_i ve B_i elektrik ve manyetik alanın üç uzaysal bileşeni olmak üzere her yöndeki bu bileşenlerin ortalamaları sıfır alınır.

$$< E_i >= \lim_{V\to V_0} \frac{1}{V} \int E_i a^3 d^3x = 0, \quad < B_i >= \lim_{V\to V_0} \frac{1}{V} \int B_i a^3 d^3x = 0 \quad (6.39)$$

Burada $V = \int a^3 d^3x$ ve V_0 bu bağıntıların sağlanabileceği kadar yeterince geniş bir uzaysal hacimdir. Bunlarla birlikte aşağıdaki kabuller kullanılabilir.

$$< E_i E_j >= \frac{1}{3} E^2 \eta_{ij} \qquad < B_i B_j >= \frac{1}{3} B^2 \eta_{ij} \qquad < B_i E_j >= 0 \qquad (6.40)$$

Bu durumda (5.37) alan denklemindeki elektromanyetik radyasyon için enerji-momentum tensörü, hacimsel ortalama alınarak hesaplanır.

$$\frac{Y}{2}(\iota_a F \wedge *F - F \wedge \iota_a * F) \implies \frac{Y}{2} < F_a \wedge *F - F \wedge \imath_a * F > \qquad (6.41)$$

Bu hacimsel ortalama, radyasyonu izotropik radyasyon akışkanına dönüştürerek radyasyonun enerji yoğunluğu ve basınç cinsinden aşağıdaki gibi yazılmasına imkan sağlar.

$$< F_a \wedge *F - F \wedge \imath_a * F >= (\rho_F + p_F) u_a * u + p_F * e_a \qquad (6.42)$$

Burada $u = u_a e^a$ ve u_a zamansal birim vektör alanıdır. Buradaki elektromanyetik alanın enerji yoğunluğu ρ_F ve basıncı p_F

$$\rho_F = E^2 + B^2 \qquad (6.43)$$

$$p_F = \rho_F / 3 \qquad (6.44)$$

ile verilir. Burada $E^2 =< E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 >$ ve $B^2 =< B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 >$ tanımları kullanılmıştır. Böylece Maxwell enerji-momentum tensörü bileşenleri (Sert (2020))

$$\tau_a(F) = \frac{Y}{2} < F_a \wedge *F - F \wedge \imath_a * F >= \frac{Y}{2}(\frac{4\rho_F}{3}u_a * u + \frac{\rho_F}{3} * e_a) \qquad (6.45)$$

ifadesinden

$$\begin{aligned} \tau_0(F) &= \frac{Y}{2}(\frac{4\rho_F}{3}u_0 * u + \frac{\rho_F}{3} * e_0) \\ &= -\frac{Y}{2}\rho_F e^{123}, \end{aligned} \qquad (6.46)$$

$$\begin{aligned} \tau_i(F) &= \frac{Y}{2}(\frac{4\rho_F}{3}u_i * u + \frac{\rho_F}{3} * e_i) \\ &= \frac{Y}{6}\rho_F * e_i \end{aligned} \qquad (6.47)$$

olarak elde edilir. (5.38) Skalar alan denklemini tekrar hatırlayacak olursak

$$c_1 d * d\phi - \frac{dV}{d\phi} * 1 + \frac{1}{2}\frac{dY}{d\phi}F \wedge *F = 0 \qquad (6.48)$$

buradaki $F \wedge *F = \frac{1}{2}F_{mn}F^{mn}$ teriminin ortalaması

$$< F \wedge *F >= \frac{1}{2} < F_{mn}F^{mn} >= (B^2 - E^2) \qquad (6.49)$$

bulunur. Bu terim sadece elektrik alanın yada manyetik alanın baskın olduğu kaynağın varlığında sıfırdan farklı olur. Evrenin başlangıcındaki enflasyonel genişleme evresinde bu terimler sıfırdan farklı etkilere sebep olabilir. Fakat, sonraki geç evren evresinde ve elektromanyetik radyasyonun denge durumunda elektrik ve manyetik bileşenlerden aynı büyüklükte katkı geleceğinden, yani; $E^2 = B^2$ olduğundan bu terim ortadan kalkar ve alan denklemlerine katkıda bulunmaz.

Şimdi ise (5.37) alan denklemindeki skalar alan enerji-momentum tensörünün bileşenlerini hesaplayalım.

$$\tau_a(\phi) = -\frac{c_1}{2}[\iota_a d\phi \wedge *d\phi + d\phi \wedge \iota_a * d\phi] + V(\phi) * e_a =? \qquad (6.50)$$

Bu işlemde kullanılacak bazı ifadeleri önce hesaplayıp sonra yerine yazabiliriz.

- $\phi = \phi(t) \to d\phi = \frac{d\phi}{dt}dt = \dot{\phi}dt, dt = e^0 \to d\phi = \dot{\phi}e^0$

- $\tau_a e^b = \delta_a^b$,$a = b \to \delta_a^b = 1$ ve $a \neq b \to \delta_a^b = 0$

- $*e^0 = \varepsilon^0{}_{123}e^{123} = -\varepsilon_{0123}e^{123} = -e^{123}, *e_0 = e^{123}$

- $*e_1 = -e^{023}$ ve $*e_2 = e^{013}$ ve $*e_3 = -e^{012}$

$\tau_a(\phi)$ enerji-momentum tensörünü sırasıyla $a = (0, 1, 2, 3)$ için hesaplaylım.

$$\begin{aligned} \tau_0(\phi) &= -\frac{c_1}{2}\iota_0 d\phi \wedge *d\phi + V(\phi) * e_0 \\ &= -\frac{c_1}{2}\dot{\phi}^2 * e^0 - V(\phi) * e^0 \\ &= (\frac{c_1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi))e^{123} \end{aligned} \tag{6.51}$$

Yukarıda iç çarpım ve Hodge yıldız işleminin özellikleri kullanılmıştır. Sıradaki $a = 1, 2, 3$ bileşenleri ise

$$\begin{aligned} \tau_1(\phi) &= -\frac{c_1}{2}[\iota_1 d\phi \wedge *d\phi + d\phi \wedge \iota_1 * d\phi] + V(\phi) * e_1 \\ &= -\frac{c_1}{2}\dot{\phi}^2 * e^1 + V(\phi) * e^1 \\ &= +\frac{c_1}{2}\dot{\phi}^2 e^{023} - V(\phi)e^{023}, \end{aligned} \tag{6.52}$$

$$\begin{aligned} \tau_2(\phi) &= \frac{c_1}{2}[\iota_2 d\phi \wedge d\phi + d\phi \wedge \iota_2 d\phi] - V(\phi) * e_2 \\ &= \frac{c_1}{2}[(-\dot{\phi}) * e^{13} + (-\dot{\phi}) * e^{23}] - V(\phi) * e_2 \\ &= \frac{c_1}{2}\dot{\phi}^2 e^{013} - V(\phi)e^{013}, \end{aligned} \tag{6.53}$$

$$\begin{aligned} \tau_3(\phi) &= \frac{c_1}{2}[\iota_3 d\phi \wedge d\phi + d\phi \wedge \iota_3 d\phi] - V(\phi) * e_3 \\ &= \frac{c_1}{2}[(-\dot{\phi}) * e^{12} + (\dot{\phi}) * e^{23}] - V(\phi)e_3 \\ &= -\frac{c_1}{2}\dot{\phi}^2 e^{012} + V(\phi)e^{012} \end{aligned} \tag{6.54}$$

olarak elde edilir. Yukarıda FLRW metriği kullanılarak ve sırasıyla $(a = 0, 1, 2, 3)$ alınarak hesaplanan bu souçlar, (5.37) alan denkleminde yerine yazılır. Böylece $a = 0$ için ko-çerçeve denklemi

$$\frac{3}{\kappa^2}\frac{\dot{a}^2}{a^2}e^{123} = \left(\frac{c_1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) + \frac{Y}{2}\rho_F\right)e^{123} \tag{6.55}$$

olur. Burada e^{123} parantezindeki kısımlar sıfıra eşitlenerek $a = 0$ denklemi

$$\frac{3}{\kappa^2}\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{Y}{2}\rho_F + \frac{c_1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \tag{6.56}$$

ve $a = i = 1, 2, 3$ için ko-çerçeve denklemi

$$\frac{1}{\kappa^2}(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}) = -\frac{Y}{6}\rho_F - \frac{c_1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \tag{6.57}$$

olur. (6.48) Skalar alan denklemi ise

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0 \tag{6.58}$$

haline gelir. Şimdi bu üç diferansiyel denkleme (6.56,6.57,6.58) çözüm arayabiliriz.

6.1 Üstel Potansiyel Altında Radyasyon Baskın Evrende Çözümler

Evrenin radyasyon-baskın döneminde, relativistik olmayan hızlardaki madde ve vakum enerji yoğunluğu ihmal edilebilir. Radyasyon baskın evrende aşağıdaki ölçek fonksiyonu kullanılır. Aşağıdaki hesaplar Barrow ve Li (2008) makalesinde bulunabilir.

$$a(t) = a_0 t^{1/2} \tag{6.59}$$

Bu ölçek fonksiyonu bize

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{2t} \tag{6.60}$$

ile değişen Hubble parametresini verir. Ayrıca skalar alan potansiyeli olarak aşağıdaki üstel potansiyeli kullanırız, (Barrow ve Li (2008)).

$$V(\phi) = V_0 e^{-\lambda\phi} \tag{6.61}$$

Ayrıca $Y(\phi)$ fonksiyonunu ise

$$Y(\phi) = e^{-2\phi} \tag{6.62}$$

ve buradaki radyasyonun enerji yoğunluğunu

$$\rho_F = 2\rho_0 \frac{t_0^2}{t^2} e^{2\phi} \tag{6.63}$$

alırsak, (6.56,6.57) denklemleri $\frac{1}{t^2}$ parantezine alınabilecek hale gelir. Yine skalar alan fonksiyonunun

$$\phi(t) = \phi_0 + \frac{2}{\lambda} ln \frac{t}{t_0} \tag{6.64}$$

formunda olduğunu önerirsek bu denklemleri çözebilmek için gerekli olan $\frac{1}{t^2}$ parantezine alabilmemize imkan sağlar. Burada, ϕ_0 bir sabit, t_0 bir referans zamanı ve λ bir sabit parametredir. Kolaylık olsun diye $\kappa^2 = c_1 = 1$ alarak, bu önerilen ölçek fonksiyonu, skalar alan fonksiyonu, potansiyel fonksiyonu ve minimal olmayan bağlanım fonksiyonunu (6.56,6.57,6.58) diferansiyel denklemlerinde yerine yazarsak: (6.56) denkleminden

$$\frac{3}{4t^2} = \tilde{\rho}_0 \frac{t_0^2}{t^2} + \frac{2}{\lambda^2 t^2} + \frac{\tilde{V_0} t_0^2}{t^2} \tag{6.65}$$

(6.57) denkleminden

$$-\frac{1}{4t^2} = -\tilde{\rho}_0 \frac{t_0^2}{3t^2} + \frac{2}{\lambda^2 t^2} + -\frac{\tilde{V_0} t_0^2}{t^2} \tag{6.66}$$

ve (6.58) denkleminden

$$V_0 t_0^2 = \frac{1}{\lambda^2} \tag{6.67}$$

koşulu bulunur. (6.67) sonucunu (6.66) ve (6.65) denklemlerinde yerine yazıp düzenlediğimizde

$$\rho_0 t_0^2 = \frac{3(\lambda^2 - 4)}{4\lambda^2} \tag{6.68}$$

koşulunu elde ederiz. Böylece yukarıdaki koşullar altında çözümün sağlandığını göstermiş oluruz. Bu çözüm için ince yapı sabitinin nasıl değiştiğine bakalım. Bu modelde ince yapı sabiti skalar alan ile (5.5) denkleminden de görüleceği gibi

$$\alpha(\phi) = \frac{\alpha_0}{Y(\phi)} \tag{6.69}$$

ifadesine göre değişiyordu. Burada $Y(\phi) = e^{-2\phi}$ için bir çözüm elde ettik. (6.64) çözümünü burada yerine koyarsak ince yapı sabitinin evrenin evrimi sırasındaki radyasyon baskın döneminde kozmolojik sabitle

$$\alpha(\phi) = \alpha_0 e^{2\phi} = \alpha_0 e^{\phi_0} (\frac{t}{t_0})^{4/\lambda} \tag{6.70}$$

olarak değiştiğini buluruz. (6.68) koşullarında ρ_0 pozitif olan radyasyon enerji yoğunluğu olduğu için λ, $\lambda^2 > 4$ koşulunu sağlayacak aralıklarda değerler alabilir, $\lambda < -2$ veya $\lambda > 2$.

6.2 Üstel Potansiyel Altında Madde-Baskın Evrende Çözümler

Zamanla, evrenin soğuduğu ve yoğunluğunun düştüğü duruma bakalım. Bu evre madde baskın evren olarak isimlendirilir. Maddenin baskın olduğunda, ölçek faktörü a maddenin yoğunluğuna bağlı olarak genişler ve madde yoğunluğu zamanla azalır. Bu nedenle, $a \propto t^{2/3}$ ilişkisi geçerlidir. Bu evrede genişleme fonksiyonu

$$a(t) = a_0 t^{2/3} \tag{6.71}$$

olarak alınır. Bu hesaplar Barrow ve Li (2008) makalesinde bulunabilir. Hubble parametresi, kozmolojik modelleme sırasında sıklıkla kullanılan bir parametredir ve kozmik ölçek faktörü olan a'nın zamana göre türevinin kendisine oranıdır ve

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{\frac{2}{3} a_0 t^{-1/3}}{a_0 t^{2/3}} = \frac{2}{3t} \tag{6.72}$$

olarak bulunur. Potansiyel fonksiyonunu $V(\phi) = V_0 e^{-\lambda\phi}$ olarak alacağız, burada V_0 ve λ sabit değerlerdir ve ϕ bağımsız değişkendir. Potansiyelin ϕ'ye göre türevi,

$$\frac{dV}{d\phi} = \frac{d}{d\phi}\left(V_0 e^{-\lambda\phi}\right) = -\lambda V_0 e^{-\lambda\phi}$$

olarak bulunur.

Verilen iki farklı ölçek faktörü $a(t)$, farklı kozmolojik evrim senaryolarını temsil eder ve bu nedenle madde-baskın evren için farklı yoğunluk ve basınç profilleri oluşur. Madde baskın evrende ρ_F yerine ρ_m madde yoğunluğu gelir p_F ise sıfır alınır.

$$\rho_m = \rho_{m0}\frac{t_0^2}{t^2} \tag{6.73}$$

Yine yukarıdaki (6.64) skalar alan fonksiyonu için buradaki koşulları elde edelim. Bu fonksiyonun birinci türevi, zamanla değişimin hızını verir ve şu şekilde yazılabilir:

$$\dot{\phi}(t) = \frac{2}{\lambda t} \tag{6.74}$$

İkinci türev ise, zamanla değişimin hızının değişimini verir ve şu şekilde yazılabilir:

$$\ddot{\phi}(t) = -\frac{2}{\lambda}\frac{1}{t^2} \tag{6.75}$$

Bu ifadeleri (6.58) skalar alan denkleminde yerine yazarsak

$$\frac{2}{\lambda^2} = \tilde{V_0}{t_0}^2 \tag{6.76}$$

koşulu bulunur. Burada $\tilde{V_0} = V_0 e^{-\lambda\phi_0}$ olarak kısaltılmıştır. Bu koşulu (6.57) ve (6.56) denklemlerinde yerine yazıp düzenlediğimizde

$$\rho_{m0}t_0^2 = \frac{4(4-\lambda^2)}{3\lambda^2} \tag{6.77}$$

koşulunu elde ederiz. Yine bu evrede enerji yoğunluğu ρ_0 pozitif olduğu için λ, $\lambda^2 > 4$ koşulunu sağlayacak aralıklarda değerler alabilir, $\lambda < -2$ veya $\lambda > 2$. Böylece madde baskın evrende üstel potansiyel altında modelin çözümünü bulmuş oluruz.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde ince yapı sabitinin ϕ skalar alanına bağlı olarak değişimi incelendi. Bu inceleme evrenin zamanla evrimini ifade eden Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) metriğini kullanarak yapıldı. İlk önce gravitasyonun temel kavramları diferansiyel formların cebriyle birlikte öğrenildi. Daha sonra, BSBM modeli olarak bilinen skalar alanın Maxwell alanına minimal olmayan bağlanmasını içeren eylem integrali yazıldı. Bu eylemin varyasyonu alınarak her bir alan için ayrı ayrı alan denklemleri türetilerek modelin alan denklemleri elde edildi. Elektromanyetik alanlar ortalama alma prosedürü kullanılarak izotropik geometriyle uyumlu hale getirildi. Radyasyon baskın evrende elektrik ve manyetik katkıların birbirine eşdeğer olacağı varsayımıyla alan denklemlerine çözüm araştırıldı. FLRW metriği için alan denklemlerinden Barrow ve Li (2008) makalesinde verilen diferansiyel denklemler türetildi ve Barrow ve Li (2008) makalesinde ortaya çıkarılan çözümlerin bu diferansiyel denklemleri sağladığı görüldü. Böylece ince yapı sabitinin skalar alana bağlı değişimi ve kozmolojik zamana bağlı değişimi elde edildi. Sonraki çalışmalarda bu modelin farklı bağlanma fonksiyonları için yine benzer geometrilerde çözümler araştırılabilir.

8. KAYNAKLAR

Abbott, B.P. ve diğ. (128 yazar), "GW150914: The Advanced LIGO Detectors in the Era of First Discoveries", *Phys. Rev. Lett.*116, 131103, (2016).

Abbott, B.P. ve diğ. (130 yazar), "GW150914: ASTROPHYSICAL IMPLICATIONS OF THE BINARY BLACK HOLE MERGER ", *Ast. Rev. Lett.*818, L22, (2016).

Adak, M., Sert, Ö, "A solution to symmetric teleparallel gravity", *Turk. J. Phys.* , 29, 1-7, (2005).

Adak, M., Kalay, M., Sert, Ö, "Lagrange formulation of the symmetric teleparallel gravity", *Int. J. Mod. Phys. D* , 15, 619, (2006).

Albrecht, A., Steinhardt, P. J., "Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking", *Phys. Rev. Lett.*48, 1220, (1982).

Albrecht,A. J., Magueijo, J. "Time varying speed of light as a solution to cosmological puzzles" *Phys. Rev.* D 59, 043516 (1999)

Allemandi, G., Borowiec, A., Francaviglia, M., "Accelerated Cosmological Models in Ricci squared Gravity", *Phys. Rev. D* 70, 103503, (2004).

Arapoglu, S., Deliduman, C., Yavuz Ekşi, K., "Constraints on perturbative f(R) gravity via neutron stars", *JCAP* 1107:020, (2011).

Alavirad, H., Weller, J.M., "Modified gravity with logarithmic curvature corrections and the structure of relativistic stars", *Phys. Rev. Lett.*D88, 124034, (2013).

Amanullah, R., Lidman, C., Rubin, D. ve diğ., "New Constraints on Ω_M, Ω_Λ, and w from an Independent set of 11 High-Redshift Supernovae Observed with the Hubble Space Telescope", *Astrophys. J.* 716, 712, (2010).

Anchordoqui, L., Goldberg, H., "Time variation of the fine structure constant driven by quintessence", *Phys. Rev.*D68, 083513 (2003).

Astashenok, A., ve diğ. (5 yazar), "Further stable neutron star models from f(R) gravity ", *JCAP* 1312:040, (2013).

Astashenok, A., ve diğ. (6 yazar), "Magnetic Neutron Stars in f(R) gravity", *ASS* 355, (2014).

Astashenok, A., ve diğ. (6 yazar), "Extreme neutron stars from Extended Theories of Gravity", *JCAP* 1501:001, (2015).

Avelino, P. P., "Cosmological evolution of α and μ and the dynamics of dark energy", *Phys. Rev.*D78, 043516 (2008).

Baer, H., Choi, K.-Y., Kim, J.E., Roszkowski, L., "Dark matter production in the early Universe: beyond the thermal WIMP paradigm", *Class. Physics Reports* 555, 1, (2015).

Barrow, John D., "Cosmologies with varying light speed" *Phys. Rev.* D 59, 043515 (1999).

Barrow, J. D., ve diğ.(2 yazar), "Behavior of varying-alpha cosmologies" *Phys. Rev. Lett.* D65, 063504 (2002).

Barrow, J. D., ve diğ.(2 yazar), "Anthropic reasons for nonzero flatness and λ" *Phys. Rev. Lett.* D 65, 123501 (2002).

Barrow, J. D., ve diğ.(2 yazar), "Variations of alpha in space and time" *Phys. Rev. Lett.* D 66, 043515 (2002).

Barrow, J.D., ve Li, B., "Varying-alpha cosmologies with potentials" Phys. Rev. D 78,083536 (2008)

Brill, D.R., Gowdy, R.H., "Quantization of general relativity", *Rep. Prog. Phys* 33, 413, (1970).

Bekenstein, J. D., "Fine-structure constant: Is it really a constant? ", *Phys. Rev.*D25, 1527 (1982).

Bento, M. C., Bertolami, O.,Santos, N. M.C., "Time evolution of the fine structure constant in a two-field quintessence model", *Phys. Rev.*D70, 107304 (2004).

Cognola, G., Elizalde, E., Nojiri, S. ve diğ., "One-loop $f(R)$ gravity in de Sitter universe", *JCAP* 0502:010, (2005).

Capozziello, S., Cardone, V.F., Carloni, S., Troisi, A., "Can higher order curvature theories explain rotation curves of galaxies?", *Phys.Lett. A* 326, 292-296, (2004).

Capozziello, S., Cardone, V.F., Troisi, A., "Low surface brightness galaxy rotation curves in the low energy limit of R^n gravity: no need for dark matter?", *Mon. Not. R. Ast. Soc.* 375, 1423–1440, (2007).

Capozziello, S., Cardone, V.F., Troisi, A., "Dark energy and dark matter as curvature effects", *JCAP*0608:001, (2006).

Capozziello, S., Ritis, R., "Relation between the potential and nonminimal coupling in inflationary cosmology", *Phys. Lett. A* 177, 1, (1993).

Capozziello, S., Ritis, R., Rubano, C., Scudellaro, P., "Nöther symmetries in cosmology", *La Rivista del Nuovo Cimento(1978-1999)*, 19, 1–114, (1996).

Capozziello, S., Nesseris, S., Perivolaropoulos, L., "Reconstruction of the Scalar-Tensor Lagrangian from a ΛCDM Background and Noether Symmetry", *JCAP* 0712:009, (2007).

Capozziello, S., Lambiase, G., "Higher–Order Corrections to the Effective Gravitational Action from Noether Symmetry Approach", *Gen.Rel.Grav.* 32, 295-311, (2000).

Capozziello, S., De Felice, A., "$f(R)$ cosmology by Noether's symmetry", *JCAP* 0808:016, (2008).

Capozziello, S., "Curvature Quintessence", *Int. J. Mod. Phys. D*, 11, 483-492, (2002).

Capozziello, S., Carloni, S., Troisi, A., "Quintessence without scalar fields", *Recent Res.Dev.Astron.Astrophys.* 1:625, (2003).

Capozziello, S., Cardone, V.F., Carloni, S., Troisi, A., "Curvature quintessence matched with observational data", *Int.J.Mod.Phys.D* 12:1969-1982, (2003).

Carroll, S.M., Duvvuri, V., Trodden, M., Turner, M., "Is Cosmic Speed-Up Due to New Gravitational Physics?", *Phys.Rev.D* 70:043528, (2004).

Capozziello, S., Stabile, A., Troisi, A.,"Spherically symmetric solutions in $f(R)$-gravity via Noether Symmetry Approach", *Class. Quant. Grav.* 24:2153-2166, (2007).

Cartan, E., "On manifolds with an affine connection and the theory of general relativity", edited 1986, *Bibliopolis*, Italy, (1923).

Chiba, T., Kohri, K., "Quintessence Cosmology and Varying α", *Prog. Theor. Phys.*107, 631 (2002).

Copeland, E. J., Nunes, N. J.,Pospelov, M., "Models of quintessence coupled to the electromagnetic field and the cosmological evolution of alpha", *Phys. Rev.*D69, 023501 (2004).

Chand, H. ve diğ. (3 yazar), "Probing the cosmological variation of the fine-structure constant: Results based on VLT-UVES sample" *Astron. Astrophys.* 417, 853 (2004).

Dereli, T., "Diferensiyel Formlar ve Maxwell Denklemleri, Ders Notları", TÜBİTAK Lisansüstü Yaz Okulu, 18-28 Sep, (1984).

Dereli, T., Önder, M., Tucker, R.W., "Solutions for neutral axi-dilaton gravity in four dimensions", *Class. Quant. Grav.* , 12, L25, (1995).

Dereli, T., Önder, M., Schray, J., Tucker, R.W. , Wang, C., "Non-Riemannian Gravity and the Einstein-Proca system", *Class. Quant. Grav.* , 13, L103, (1996).

Dirac, P. A. M., "The Cosmological Constants", *Nature* 139, 323 (1937).

Damour, T., Dyson, F., "The Oklo bound on the time variation of the fine-structure constant revisited"*Nucl. Phys.* B,480, 37 (1996).

Fiziev, P., "Collapsing spherical stars in f(R) gravity", *Phys. Rev. Lett.*D87, 044053, (2013).

Flanders, H., "DiferantialForms with Applications to the Physical Sciences", ISBN 0122596501, Academic Press, New York, USA, (1963).

Ganguly, A., ve diğ. (3 yazar), "Neutron stars in Starobinsky model", *Phys. Rev. Lett.*D89, 064019, (2014).

Goswami, R., ve diğ. (3 yazar), "Collapsing spherical stars in f(R) gravity", *Phys. Rev. Lett.*D90, 084011, (2014).

Guth, A.H., "The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems", *Phys. Rev. D*23, 347, (1981).

Hubble, E.P., "A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae", *Proc. US Nat. Acad. Sci.*15, 168-173, (1929).

Isham, C. J., "Quantum Gravity 2: A Second Oxford Symposium", edited by Isham, C. J., Penrose, R., and Sciama, D. W., *Clarendon Press*, Oxford, (1981).

Knop, R. A, Aldering, G., Amanullah, R. ve diğ., "New Constraints on Ω_M, Ω_Λ, and w from an Independent set of 11 High-Redshift Supernovae Observed with the Hubble Space Telescope", *Astrophys. J.* 598, 102, (2003).

Kerner, R., "Cosmology without Singularity and Nonlinear Gravitational Lagrangians", *Gen. Rel. Grav.* 14, 453–469, (1982).

Linde, A.D., "A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems", *Phys. Lett. B*108, 389, (1982).

Lee, S., Olive, K. A., Pospelov, M., "Quintessence models and the cosmological evolution of α", *Phys. Rev.*D70, 083503 (2004).

Murphy, M. T., ve diğ. (7 yazar), "Possible evidence for a variable fine-structure constant from QSO absorption lines: motivations, analysis and results " *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 327, 1208 (2001).

Murphy, M. T., ve diğ.(3 yazar), "Comment on “Limits on the Time Variation of the Electromagnetic Fine-Structure Constant in the Low Energy Limit from Absorption Lines in the Spectra of Distant Quasars" *Phys. Rev. Lett.* 99, 239001 (2007).

Murphy, M. T., ve diğ.(2 yazar), "Revision of VLT/UVES constraints on a varying fine-structure constant" *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 384, 1053 (2008).

Magueijo, J., Barrow, J.D. ve Sandvik, H.B., "A cosmological tale of two varying constants"*Phys. Lett.* B 541, 201 (2002).

Magueijo, J., Barrow, J.D. ve Sandvik, H.B., "Is it e or is it c? Experimental tests of varying alpha"*Phys. Lett.* B 549, 284 (2002).

Marra, V., Rosati, F., "Cosmological evolution of alpha driven by a general coupling with quintessence", *JCAP* 0505:011, (2005).

Mota, David F., Barrow, John D., "Local and global variations of the fine-structure constant", *Mon. Roy. Astron. Soc.*349, 291 (2004).

Moffat, J. W. "Superluminary universe: A possible solution to the initial value problem in cosmology"*Int. J. Mod. Phys.* D2, 351 (1993).

Nojiri, S., Odintsov, S.D., "Where new gravitational physics comes from: M-theory?", *Phys. Lett. B* ,576,5, (2003).

Nojiri, S., Odintsov, S.D, "Modified gravity with lnR terms and cosmic acceleration", *Gen. Rel. Grav.* 36:1765-1780, (2004).

Overduin, J.M., Wesson, P.S., "Dark Matter and Background Light", *Class. Physics Reports*402, 267, (2004).

Oleg, A., ve diğ. (6 yazar), "Exact Einstein scalar field solutions for formation of black holes in a cosmological setting", *CQG* 12:1739-1752, (1995).

Olive, K. A., Pospelov, M., "Evolution of the fine structure constant driven by dark matter and the cosmological constant", *Phys. Rev.*D65, 085044 (2002).

Pound, R.V., Rebka, G.A., Jr., "Gravitational Red-Shift in Nuclear Resonance", *Phys. Rev. Lett.*3, 439, (1959).

Perlmutter, S., Aldering, G., Goldhaber ve diğ., "Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae", *Astrophys. J.*517, 565, (1999).

Roshan, M., Shojai, F., "Palatini $f(R)$ cosmology and Noether symmetry", *Phys.Lett. B* 668, 238, (2008).

Riess, A. G., Filippenko, A.V., Challis, P. ve diğ., "Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant", *Astron. J.*116, 1009, (1998).

Sandvik, H. B., ve diğ. (2 yazar) "Behavior of varying-alpha cosmologies", *Phys. Rev.*D65, 063504 (2002).

Sert, Ö, "Radiation fluid stars in the non-minimally coupled $Y(R)F^2$ gravity", *Eur. Phys. J. C* , 77: 97, (2017).

Sert, Ö, "Compact stars in the non-minimally coupled electromagnetic fields to gravity", *EPJ C* , 78: 241, (2018).

Sert, Ö., "Inflation of the Universe by the Non-minimal Y(R)F2 Models" Modern Physics Letters A Vol. 35, No. 07, 2050037 (2020).

Sert, Ö., "Genel rölativitenin simetrik teleparalel eşdeğeri ve Dirac denklemi", Yüksek Lisans Tezi *Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Fizik Anabilim Dalı, Denizli, (2005).

Schwarz, D.J., Copi, C.J., Huterer, D., Starkman, G.D., "CMB anomalies after Planck", *Class. Quant. Grav.*33 184001, (2016).

Starobinsky, A.A., "A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity", *Phys. Rev. Lett.*91, 99, (1980).

Stephani, H., Kramer, D., "Exact Solutions of Einstein's Field Equations", (2rd Edition), ISBN 0978-0521467025, 78:241., Cambridge University Press, (2009).

Shapiro, I.I., Ash, M.E., Ingalls, R.P. ve diğ., "Fourth Test of General Relativity: New Radar Result", *Phys. Rev. Lett.*26(18):1132-1135, (1971).

Sandvik, H.B., Barrow, J. D., ve Magueijo, J., "A Simple Cosmology with a Varying Fine Structure Constant"*Phys. Rev. Lett.* 88, 031302 (2002).

Sotiriou, T.P., "Modified Actions for Gravity: Theory and Phenomenology", PhD thesis, 230 pages, (2007).

Starobinsky, A.A., "A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity", *Phys. Rev. Lett.*91, 99, (1980).

Sommerfeld, A., "Zur Quartterttheorie der Spektrattiniew", *Annalen der Physik*4, 51, (1916).

Srianand, R., ve diğ. (3 yazar), "Limits on the Time Variation of the Electromagnetic Fine-Structure Constant in the Low Energy Limit from Absorption Lines in the Spectra of Distant Quasars" *Phys. Rev. Lett.* 92, 121302 (2004).

Thring, W., "Classical Mathematical Physics: Dynamical Systems and Field Theories", (3rd Edition), ISBN 0-397-94843-0, 539p., Springer-Verlag, (1997).

Trautman, A., "On the Einstein-Cartan equations", I-IV, Bull. Acad. Polon. Scie., 20, 185, 503, 895, (1972a, b, c, 1973a) *ibid.21 345* .

Tolman, Richard C., Ehrenfest, Paul, "Temperature equilibrium in a static gravitational field", *Phys. Rev.*36, 1791 (1930).

Vakili, B., "Noether symmetry in $f(R)$ cosmology", *Phys. Lett. B.* 664, (2008).

Weinberg, D.H., Mortonson, M.J., Eisenstein, D.J. ve diğ., "Observational Probes of Cosmic Acceleration", *Physics Reports*530, 87, (2013).

Wetterich, C., "Crossover quintessence and cosmological history of fundamental “constants” , *Phys. Lett.*B 561, 10 (2003).

Webb, J. K. ve diğ.(4 yazar) "Search for Time Variation of the Fine Structure Constant" *Phys. Rev. Lett.* 82, 884 (1999)