T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

FARK DİZİ UZAYLARI HAKKINDA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ELİF TOSGUN

DENİZLİ, MAYIS - 2022

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

FARK DİZİ UZAYLARI HAKKINDA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ELİF TOSGUN

DENİZLİ, MAYIS - 2022

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

ELİF TOSGUN

ÖZET

FARK DİZİ UZAYLARI HAKKINDA
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELİF TOSGUN
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI:PROF.DR.MEHMET ALİ SARIGÖL)

DENİZLİ, MAYIS - 2022

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde hazırlık amacıyla giriş verilmiştir.

İkinci bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan temel tanımlar ve lemmalar ifade edilmiştir.

Üçüncü bölümde Kızmaz (1981) ve Sarıgöl (1987)'ün fark dizi uzaylarını genelleştiren $c_0(d\Delta)$, $c(d\Delta)$ ve $l_\infty(d\Delta)$ dizi uzayları tanımlanarak bu uzayların sırasıyla c_0, c ve l_∞ uzaylarına lineer izomorf olduğu gösterilmiştir. Aynı zamanda bu uzaylarla ilgili bazı kapsama bağıntıları ile bunların dualleri elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde ise $c_0(d\Delta)$ ve $c(d\Delta)$ uzayları ile ilgili bazı matris sınıfları karakterize edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Dizi uzayı, Matris dönüşümü, Dual uzaylar.

ABSTRACT

ON DIFFERENCE SEQUENCE SPACES

MSC THESIS
ELİF TOSGUN
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATİCS

(SUPERVISOR:PROF. DR. MEHMET ALİ SARIGÖL)

DENİZLİ, MAY 2022

This thesis consists of four sections.

In the first chapter, the intruduction are given for preparation.

In the second chapter, the basic definitions and lemmas used in other chapters are given.

In the third chapter, by introducing the spaces $c_0(d\Delta)$, $c(d\Delta)$ and $l_\infty(d\Delta)$ generalizing the difference sequence spaces of Kızma (1981), and it is shown that these spaces are linear isomorphic to the tha spaces c_0, c ve l_∞, respectively. Further, inclusion relation related to these spaces and duals of these spaces are obtained.

In the fourth chapter, some classes related to the spaces $c_0(d\Delta)$, $c(d\Delta)$ and $l_\infty(d\Delta)$ are characterized.

KEYWORDS: Sequence spaces, Dual spaces, Matrix transformations

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\boldsymbol{w}$: Tüm reel veya kompleks terimli diziler uzayı

$\boldsymbol{\mathcal{F}}$: $\mathbb{N}$ de bütün sonlu alt kümelerin koleksiyonu

$\boldsymbol{c}$: Yakınsak diziler uzayı

$\boldsymbol{c_0}$: Sıfır diziler uzayı

$\boldsymbol{l}_\infty$: Sınırlı diziler uzayı

$\boldsymbol{l_1}$: Mutlak yakınsak seriler uzayı

$\boldsymbol{l_p}$: p. dereceden mutlak yakınsak seriler uzayı

$\boldsymbol{b_v}$: Sınırlı salınımlı diziler uzayı

$\boldsymbol{b_s}$: Sınırlı seriler uzayı

$\boldsymbol{c_s}$: Yakınsak seriler Uzayı

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$: x'in dizisinin A-dönüşümü

$(\boldsymbol{X}:\boldsymbol{Y})$: X 'den Y 'ye olan bütün matrislerin sınıfı

$\boldsymbol{X_A}$: A matrisinin X uzayı içindeki toplama alanı

$\|.\|_{\boldsymbol{X}}$: X uzayı üzerindeki norm

$\boldsymbol{X^\alpha}$: X dizi uzayının α- duali

$\boldsymbol{X^\beta}$: X dizi uzayının β- duali

$\boldsymbol{X^\gamma}$: X dizi uzayının γ – duali

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans programında hazırlanmıştır. Çalışma konusunun belirlenmesinde ve çalışmanın hazırlanma sürecinin her aşamasında bilgisini, tecrübesini ve değerli zamanını esirgemeyerek bana her zaman yardımcı olan değerli hocam Sayın Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL'e teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca tüm hayatım boyunca bana her zaman destek olan sevgili aileme ve arkadaşlarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

1.GİRİŞ

Dizi veya seri kavramı Matematiğin en temel kavramlarından biridir. Seriler 17. ve 18. yüzyıl boyunca incelenmiş ve kullanılmıştır. Dönemin matematikçileri bugün iyi bilinen yakınsaklık kavramının tanımlanmadığı periyotta rastgele dört işlemler yaparak serilerin toplamıyla ilgili çelişkili sonuçlar elde etmiş ve bu çelişkilerin üstesinden uzun süre gelememişlerdir. Gauss (1777-1855)'un kesirli bir n sayısı için $(1+x)^n$ ifadesinin serisel açılımını veren Binom teoremi ile mevcut çelişkilerin bir kısmının üstesinden gelinmiştir. Bu konunun öncü araştırmacılarından olan Cauchy (1789-1857) günümüzde halen kullanılan dizinin (serinin) yakınsaklık tanımını formülüze etmiştir. Cauchy'nin tanımı o dönemdeki birçok belirsizliği ortadan kaldırmasına rağmen beraberinde şu problemin doğmasına neden olmuştur: Acaba yakınsak olmayan seriler yani ıraksak seriler toplanabilir mi veya ıraksak seriye bir toplam karşılık getirilebilir miydi? Bu sorunun cevabı yakınsaklık kavramının genişletilmesiyle verilmiştir. Böylece toplanabilme teorisi doğmuştur. (Powel ve Shah 1988). Bu konuda öncü birçok dönüşüm kullanılmıştır. Abel, Cesàro, Riesz, Nörlund, Borel, Hölder, Hausdorff ve Euler dönüşümleri ilk akla gelenleridir. Örneğin, Euler

$$1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1}{1-x}\ (|x|<1)$$

formülünde $x=-1$ koyarak

$$1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{2}$$

eşitliğini elde etmiştir. Bu ise esasında Cauchy anlamında yanlıştır. Çünkü eşitliğin solundaki seri ıraksaktır. Ancak serinin (s_n) kısmi toplamalr dizisinin 1. Mertebeden Cesàro ortalaması ile elde edilen dönüşüm dizisi

$$t_n=\frac{1}{n+1}\sum_{v=0}^{n} s_v=\frac{1}{2}+\frac{1}{4(n+1)}[1+(-1)^n)]$$

olup bu dizi 1/2 sayısına yakınsaktır. Şu halde yukarıdaki ıraksak serinin bu metotla toplamı 1/2'dir. Bu örnek ıraksak serilerin toplanabileceğini göstermesi açısından büyük önem taşımasının yanında toplanabilme teorisinin doğmasıyla ilgili mihenk taşlarından biridir.

Dikkat edilirse sözü edilen dönüşüm bir lineer dönüşümdür ve bu dönüşüme aynı zamanda

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & : \ (0 \leq k \leq n) \\ 0 & : \ (k > n) \end{cases}$$

sonsuz matrisi karşılık gelmektedir. Bu örnekte olduğu gibi diziler arasındaki lineer dönüşümlere genel olarak sonsuz matrisler karşılık geldiğinden en önemli dönüşüm türleri matris dönüşümleridir. Bu kavramı ifade etmek gerekirse X ile Y iki dizi uzayı ve $A = (a_{nk})$ kompleks terimli sonsuz bir matris olsun. Eğer her $n \in \mathbb{N}$

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \quad (n \in \mathbb{N})$$

serisi yakınsak ise $\mathrm{A(x)} = (A_n(x))$ dizisine $x = (x_k) \in \mathrm{X}$ dizisinin dönüşüm dizisi denir. Eğer her $x \in \mathrm{X}$ için $\mathrm{A(x)} \in \mathrm{Y}$ ise A ya X den Y ye matris dönüşümü denir ve X den Y ye olan bütün matris dönüşümlerinin sınıfı (X, Y) ile gösterilir. Bu bağlamda son yıllarda özel matris dönüşümlerinin toplama alanları göz önüne alınarak birçok dizi ve seri uzayı tanımlanmış bunların cebirsel ve topolojik yapıları ile matris dönüşümleri incelenmiştir. Bu konuda önemli araştırma yapan bazı yazarlar Gökçe & Sarıgöl (2018), Hazar & Sarıgöl (2018), Hazar & Sarıgöl(2018), Kızmaz (1981), Malkowsky and Savaş (2004), Malkowsky (1997), Mursaleen and Suantai (2007), Mursaleen and Noman (2010), Ng and Lee (1978), Sarıgöl (1987,2011), Şengönül and Başar (2005), Wang (1978) sayılabilir.

Bu çalışmada Kızmaz (1981) ve Sarıgöl (1987)'ün uzaylarını genelleştiren $c_0(d\Delta)$, $c(d\Delta)$ ve $l_\infty(d\Delta)$ dizi uzayları tanımlanmış ve bu uzayların bazı topolojik yapıları incelenerek belirli matris dönüşümleri karakterize edilmiştir.

2. TEMEL TANIMLAR VE LEMMALAR

2.1 Temel Tanımlar

2.1.1 Tanım Boş olmayan bir X cümlesi, reel veya kompleks sayıların bir F cismi ve

$T : X \times X \to X$ ve $S : F \times X \to X$

fonksiyonları verilmiş olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa X 'e F cismi üzerinde bir lineer uzay veya vektör uzayı denir.

1. $T(x, y) = x + y$ işlemine göre X değişmeli gruptur yani $\forall x, y, z \in$ X için aşağıdaki şartlar sağlanır:

i. $x + y \in X$

ii. $x + y = y + x$

iii. $(x + y) + z = x + (y + z)$

iv. $x + e = e + x = x$ olacak şekilde bir tek $e \in X$ birim elemanı vardır.

v. $\forall x \in X$ için $x + (-x) = e$ olacak şekilde bir tek $-x \in X$ mevcuttur.

2. $S(a, x) = a * x$ skalerle çarpma işlemi göre, $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in$ F için

i. $a * x \in X$

ii. $(\alpha + \beta) * x = a * x + \beta * x$

iii. $(\alpha * \beta) * x = a * (\beta * x)$

iv. $1.x = x$

şartları sağlanır.

2.1.2 Tanım X boştan farklı bir küme ve $d: X \times X \to F$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer $\forall x, y, z \in X$ için

(M1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$

(M3) $d(x,y) \leq d(x,y) + d(y,z)$

şartları sağlanıyorsa d ye metrik, X 'e metrik uzay denir ve (X,d) ile gösterilir.

2.1.3 Tanım (X,d) bir metrik uzay ve $x = (x_n)$ bu uzayda bir dizi olsun.

Eğer her $\varepsilon > 0$ için $n,m > N$ olduğunda

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisine (X,d) metrik uzayında Cauchy dizisi denir.

X uzayındaki her $x = (x_n)$ Cauchy dizisi yakınsak ise (X,d) metrik uzayına tam metrik uzay veya kısaca tam uzay denir.

2.1.4 Tanım X, F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Eğer $\|.\| : X \to R$ fonksiyonu $\forall x, y \in X$ ve $\forall a \in F$ için

N1-] $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

N2-] $\|ax\| = |a|.\|x\|$

N3-] $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm $(X, \|.\|)$ ikilisine de normlu lineer uzay denir.

Norma göre tam olan uzaya Banach uzayı adı verilir.

2.1.5 Tanım X ve Y aynı F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. Eğer $\forall a, \beta \in$ F ve $\forall x, y \in X$ için

$$A(\alpha x + \beta y) = aA(x) + \beta A\,(y)$$

eşitliği sağlanıyorsa $A : X \rightarrow Y$ dönüşümüne bir lineer dönüşüm (veya lineer operatör) denir.

Özel olarak kompleks değerli lineer dönüşümlere lineer fonksiyonel adı verilir.

2.1.6 Tanım X ve Y iki normlu uzay ve $T : X \rightarrow Y$ lineer dönüşümü olsun.

Eğer $\forall x \in X$ için

$$\|T(x)\|_Y \leq M. \|x\|_X$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısı varsa T'ye sınırlı lineer dönüşüm denir ve sınırlı lineer dönüşümün normu

$$\|T\| = sup_{x\neq\theta} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}$$

şeklinde tanımlanır.

2.1.7 Tanım w kompleks terimli bütün dizilerin uzayı X ve Y w'nin nin keyfi iki alt kümesi ve $A = (a_{nk})$, reel veya kompleks terimli sonsuz matrisi olsun. Eğer $x = (x_k) \in X$ dizisi için

$$A_n(x) = \sum a_{nk}x_k \quad (n \in \mathbb{N})$$

serisi yakınsak ise $Ax = \{A_n(\mathrm{x})\}$ ' e $x = (x_k) \in X$ dizisinin A-dönüşümü denir. Aynı zamanda her $x = (x_k) \in X$ için $Ax = \{A_n(\mathrm{x})\} \in Y$ ise A 'ya X'ten Y'ye bir matris dönüşümü denir ve $A : X \rightarrow Y$ şeklinde gösterilir.

2.1.8 Tanım X ve Y iki dizi uzayı olsun. Bu durumda

$$M(X,Y) = \{a = (a_k) \in w : her\ x \in X\ için\ (a_k x_k) \in Y\}$$

kümesine X ve Y uzaylarının çarpım uzayı adı verilir.

Burada $Y \subset Z \subset X$ ise tanımdan dolayı

$M(X,Y) \subset M(X,Z)$ ve $M(X,Y) \subset M(Z,Y)$

olduğu açıktır. Aynı zamanda

$$X^{\alpha} = M(X, l) = \left\{ a \in w \colon \forall x \in X \text{ } için \ \sum_k |a_k x_k| \ < \ \infty \ \right\}$$

$$X^{\beta} = M(X, c) = \left\{ a \in w \colon \forall x \in X \text{ } için \ \sum_k a_k x_k \ yakınsaktır \ \right\}$$

$$X^{\gamma} = M(X, b_s) = \left\{ a \in w \colon \forall x \in X \text{ } için \ \sup_n \left| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right| \ < \ \infty \ \right\}$$

kümelerine sırasıyla X'in $\alpha, \beta \ ve \ \gamma$ duali adı verilir.

Bütün sınırlı, yakınsak ve sıfıra yakınsayan dizilerin uzayını sırasıyla $l_\infty, c \ , c_0$ ile gösterelim, yani

$$l_\infty = \left\{ x \in w : \sup_k |x_k| \ < \ \infty \right\}$$

$$c = \{ \ x \in w : (x_k) \ yakınsak \ \ \}$$

$$c_0 = \{ \ x \in w : \ x_k \to 0 \ (k \to \infty) \ \}$$

olsun. Bu uzaylar aynı zamanda

$$\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$$

normu ile normlu uzaylardır. Ayrıca $1 \le p < \infty$ için p. dereceden mutlak toplanabilen bütün serilerin uzayını l_p ile göstereceğiz, yani

$$l_p = \left\{ x \in w : \sum_k |x_k|^p \ < \ \infty \ \right\}.$$

Bu uzay aynı zamanda

$$\|x\|_{l_p} = \ \left(\sum_k |x_k|^p \right)^{1/p} \quad 1 \le p < \ \infty$$

normuyla normlu uzaydır.

Aşağıdaki kısımlarda kısalık için sonsuz toplamları 0 dan ∞ ‘ a kadar alınacaktır.

Kısmi toplamlar dizileri sınırlı ve yakınsak olan dizilerin uzayları sırasıyla m_s ve c_s ile gösterilir, yani

$$m_s = \left\{ x \in w : \sup_k \left| \sum_{n=1}^{k} x_n \right| < \infty \right\}$$

$$c_s = \left\{ x \in w : \lim_k \sum_{n=1}^{k} x_n \ mevcut \right\}$$

olsun. Aynı zamanda bu uzaylar

$$\|x\|_{m_s} = \sup_k \left| \sum_{n=1}^{k} x_n \right|$$

ve

$$\|x\|_{c_s} = \sup_k \left| \sum_{n=1}^{k} x_n \right|$$

normlarına göre normlu uzaylardır.

2.2 Temel Lemmalar

Bu kısımda matris sınıflarının karakterizasyonları ile ilgili temel teoremlerin ispatında önemli rol oynayan lemmaları ifade edeceğiz.

2.2.1 Lemma

(P_n), $P_n \longrightarrow \infty$ olacak şekilde monoton artan pozitif sayıların bir dizisi olsun. Eğer $\sup\limits_n \left|\sum_{v=1}^{n} c_v\right| < \infty \quad ise$

$$\sup_n \left(P_n \left| \sum_{k=1}^{\infty} {P_{n+k}}^{-1} c_{n+k-1} \right| \right) < \infty$$

(Kızmaz 1981).

2.2.2 Lemma

(P_n) dizisi Lemma 2.2.1 deki gibi tanımlanmış olsun Eğer $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ serisi yakınsak ise

$$\lim_n \left(P_n \sum_{k=1}^{\infty} {P_{n+k}}^{-1} c_{n+k-1} \right) = 0$$

(Kızmaz 1981).

2.2.3 Lemma

Her $n, k \geq 1$ için $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris olsun. Bu taktirde $A \in (c_0, \ell)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_N \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k \in N}^{\infty} a_{nk} \right| < \infty$$

olmasıdır (Stieglitz ve Tietz 1977).

2.2.4 Lemma

Her $n, k \geq 1$ için $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris olsun. Bu taktirde $A \in (c_0, l_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$$

olmasıdır (Stieglitz ve Tietz 1977).

2.2.5 Lemma

Her $n, k \geq 1$ için $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris olsun. Bu taktirde $A \in (c_0, c)$ olması için gerek ve yeter şart

i−) Her bir k için $lim_n a_{nk}$ mevcut,

ii−) $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$

olmasıdır (Stieglitz ve Tietz 1977).

3. FARK DİZİ UZAYLARI

Bu kısımda Kızmaz (1981) 'ın dizi uzaylarını kapsayan Sarıgöl (1987) tarafından verilen fark dizi uzaylarının bazı topolojik özellikleri ile ilgili matris dönüşümlerini inceleyeceğiz.

3. 1. $c_0(\Delta_q)$, $c(\Delta_q)$ ve $l_\infty(\Delta_q)$ Fark Dizi Uzayları

Fark dizi uzayları ilk kez Kızmaz tarafından 1981 yılında aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir:

$$c_0(\Delta) = \{\, x = (x_k) : \Delta x = (x_k - x_{k+1}) \in c_0 \,\}$$

$$c(\Delta) = \{\, x = (x_k) : \Delta x = (x_k - x_{k+1}) \in c \,\}$$

$$l_\infty(\Delta) = \{\, x = (x_k) : \Delta x = (x_k - x_{k+1}) \in l_\infty \,\}$$

Bu uzaylar 1987 yılında Sarıgöl tarafından genelleştirilerek aşağıdaki uzaylar tanımlanmıştır:

$$c_0(\Delta_q) = \left\{\, x = (x_k) : \Delta_q x = (k^q(x_k - x_{k+1})) \in c_0 \,, q \,<\, 1 \right\}$$

$$c(\Delta_q) = \left\{\, x = (x_k) : \Delta_q x = (k^q(x_k - x_{k+1})) \in c \,, q \,<\, 1 \right\}$$

$$l_\infty(\Delta_q) = \left\{\, x = (x_k) : \Delta_q x = (k^q(x_k - x_{k+1})) \in l_\infty \,, q \,<\, 1 \right\}$$

Bu kümelerin bilinen toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre birer lineer uzay olduğu ve ayrıca q ya bağlı olarak bu uzaylar arasında kapsama ilişkilerinin bulunduğu açıktır. Gerçekten, kapsama ilişkisine bakarsak,

$0 < q < 1$ için

$c_0(\Delta_q) \subset c_0(\Delta)$, $c(\Delta_q) \subset c(\Delta)$ ve $l_\infty(\Delta_q) \subset l_\infty(\Delta)$

ve

$q < 0$ için

$c_0(\Delta_q) \supset c_0(\Delta)$, $c(\Delta_q) \supset c(\Delta)$ ve $l_\infty(\Delta_q) \supset l_\infty(\Delta)$,

ve aynı zamanda $q = 0$ için Kızmaz' ın uzaylarına indirgenir, yani

$c_0(\Delta_0) = c_0(\Delta)$, $c(\Delta_0) = c(\Delta)$ ve $l_\infty(\Delta_0) = l_\infty(\Delta)$

elde edilir.

Şimdi $S(x) = (0, x_2, x_3, \dots)$ eşitliği ile tanımlı S: $l_\infty(\Delta_q) \longrightarrow l_\infty(\Delta_q)$ dönüşümünü göz önüne alalım. Kolayca gösterileceği gibi S sınırlı lineer dönüşümdür ve üstelik $\| S \|=1$. Öte yandan $q < 1$ için

$$sc_0(\Delta_q) = \{x = (x_k) \in c_0(\Delta_q) : \mathrm{x}_1 = 0\}$$

$$sc(\Delta_q) = \{x = (x_k) \in c(\Delta_q) : \mathrm{x}_1 = 0\}$$

$$sl_\infty(\Delta_q) = \{x = (x_k) \in l_\infty(\Delta_q) : \mathrm{x}_1 = 0\}$$

uzayları sırasıyla $c_0(\Delta_q)$, $c(\Delta_q)$ ve $l_\infty(\Delta_q)$ uzaylarının alt uzayıdır ve aynı zamanda

$$\| \mathrm{S} \|_{\Delta_q} = |\, \mathrm{x}_1 | + \sup_k |(k^q(x_k - x_{k+1})|$$

normuna göre Banach uzayıdır. Örnek olarak $c(\Delta_q)$ uzayının Banach uzayı olduğunu gösterelim. Bunun için $c(\Delta_q)$ uzayından keyfi bir $(x^{(n)})$ Cauchy dizisi seçelim. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x^{(n)} = (x_k{}^{(n)}) = (x_1{}^{(n)}, x_2{}^{(n)}, \dots, x_k{}^{(n)}, \dots) \in c(\Delta_q)$$

olmak üzere

$$\left\|x^{(n)} - x^{(m)}\right\|_{\Delta_q} = \left|x_1{}^{(n)} - x_1{}^{(m)}\right|$$

$$+ \sup_k k^q \left|\left(x_k{}^{(n)} - x_k{}^{(m)}\right) - x_{k+1}{}^{(n)} - x_{k+1}{}^{(m)} \right| \to 0$$

$$(m, n \to \infty)$$

Buradan ise her $k \in \mathbb{N}$ için $\left|(x_k{}^{(n)} - x_k{}^{(m)})\right| \to 0 \quad m, n \to \infty$ elde edilir. Bu demektir ki $x_k{}^{(n)} = (x_k{}^{(1)}, x_k{}^{(2)}, \ldots, x_k{}^{(n)}, \ldots)$ kompleks terimli dizisi bir Cauchy dizisidir. Fakat bu dizi, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesinin tam olması nedeniyle her k için bir x_k kompleks sayısına yakınsaktır. Diyelim ki $\lim_n x_k{}^{(n)} = x_k$ olsun. Dolayısıyla her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır ki, her $m, n \geq N$ ve her bir k için

$$\left|x_1{}^{(n)} - x_1{}^{(m)}\right| < \varepsilon \qquad ,$$

$$\left|(x_{k+1}{}^{(n)} - x_{k+1}{}^{(m)}) - (x_k{}^{(n)} - x_k{}^{(m)})\right| < k^{-q}\varepsilon \, .$$

Buradan da her $n \geq N$ için limite geçilirse

$$\lim_m \left|x_1{}^{(n)} - x_1{}^{(m)}\right| = \left|x_1{}^{(n)} - x_1\right| \leq \varepsilon \quad , \tag{1.1}$$

yani

$$\lim_m k^q \left|\left(x_{k+1}{}^{(n)} - x_{k+1}{}^{(m)}\right) - \left(x_k{}^{(n)} - x_k{}^{(m)}\right)\right|$$

$$= k^q \left|(x_{k+1}{}^{(n)} - x_{k+1}) - (x_k{}^{(n)} - x_k)\right| \leq \varepsilon$$

elde edilir. Bu demektir ki $n \geq N$ için $\left\|x^{(n)} - x\right\|_{\Delta_q} \leq 2\varepsilon$. Bu ise $x = (x_k)$ olmak üzere $x^{(n)} \to x \quad (n \to \infty)$ demektir. Şimdi $x \in c(\Delta_q)$ yani $(k^q(x_k - x_{k+1})) \in c$ olduğunu göstermeliyiz. c 'nin tam uzay olması nedeniyle $(k^q(x_k - x_{k+1}))$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu göstermek yeterlidir. Gerçekten, $(x_k{}^{(N)}) \in c\left(\Delta_q\right)$ olduğuna göre $(k^q(x_k{}^{(N)} - x^{(N)}{}_{k+1}))$ bir Cauchy dizisidir. Buna göre $i, j \geq M(\varepsilon)$ için (1.1) den dolayı

$$\left|i^q(x_i{}^{(N)} - x_{i+1}{}^{(N)}) - j^q(x_j{}^{(N)} - x_{j+1}{}^{(N)})\right| < \varepsilon$$

olup dolayısıyla

$$\left|i^q(x_i - x_{i+1}) - j^q\left(x_j - x_{j+1}\right)\right|$$

$$\leq i^q\left|\left(x_{i+1}{}^{(N)} - x_{i+1}\right) - \left(x_i{}^{(N)} - x_i\right)\right|$$

$$+j^q\left|\left(x_{j+1}{}^{(N)} - x_{j+1}\right) - \left(x_j{}^{(N)} - x_j\right)\right|$$

$$+\left|i^q\left(x_i{}^{(N)} - x_{i+1}{}^{(N)}\right) - j^q\left(x_j{}^{(N)} - x_{j+1}{}^{(N)}\right)\right|$$

$$< 3\varepsilon$$

elde edilir. Bu ise $(k^q(x_k - x_{k+1}))$ dizisinin $\mathbb{C}$ de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Bu da ispatı tamamlar.

3. 2. $c_0(\Delta_q)$, $c(\Delta_q)$ ve $l_\infty(\Delta_q)$ Dizi Uzaylarının Dualleri

Bu kısımda fark dizi uzaylarının α, β ve γ duallerini içeren teoremleri ve ispatlarını vereceğiz.

Teorem 3.2.1.

Her $k \geq 1$ için

$$\mathrm{R}_k = \sum_{v=k+1}^{\infty} \mathrm{a}_v$$

ve

$$\mathrm{L}_k = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-q} \, | \, \mathrm{R}_k |$$

olsun. Bu taktirde

1−) $\left(sl_\infty(\Delta_q)\right)^\alpha = \left\{a = (a_k): \sum_{k=1}^{\infty} k^{1-q} \, | \, \mathrm{a}_k | < \infty\right\} = \mathrm{D}_1$

2−) $(sl_\infty(\Delta_q))^\beta = \left\{a = (a_k): \sum_{k=1}^{\infty} k^{1-q} a_k \ yakınsak, \mathrm{L}_k < \infty \right\} = \mathrm{D}_2$

3−) $(sl_\infty(\Delta_q))^\gamma = \left\{a = (a_k): \sup_n | \sum_{k=1}^{n} k^{1-q} a_k | < \infty, \mathrm{L}_k < \infty\right\} = \mathrm{D}_3.$

İspat.

(1) Kabul edelim ki $a = (a_k) \in (Sl_\infty(\Delta_q))^\alpha$ olsun. Bu durumda her

$x \in Sl_\infty(\Delta_q)$ ve $q < 1$ için $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| < \infty$ olur. Şimdi $x_1 = 0$, $x_k = k^{1-q}$ ve

$k \geq 2$ alınırsa $(x_k) \in Sl_\infty(\Delta_q)$ elde edilir. Gerçekten, Ortalama Değer teoremi nedeniyle k *ile* $k+1$ arasında öyle bir ξ sayı vardır ki $k^q\{(k+1)^{1-q} - k^{1-q}\} = k^q(1-q)((k+1)-k)\xi^{-q}$ yazılabilir. Buna göre,

$q \geq 0$ için

$$0 < k^q\{(k+1)^{1-q} - k^{1-q}\}$$

$$= (1-q)\left(\frac{k}{\xi}\right)^q \leq 1-q$$

$q < 0$ için

$$0 < k^q\{(k+1)^{1-q} - k^{1-q}\}$$

$$= (1-q)\left(\frac{\xi}{k+1}\right)^{-q}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{-q}$$

$$\leq 2^{-q}(1-q)$$

olur. Öte yandan bu dizi için $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k x_k| = \sum_{k=1}^{\infty} k^{1-q}|a_k| < \infty$ olduğuna göre $a = (a_k) \in D_1$. O halde $(Sl_\infty(\Delta_q))^\alpha \subset D_1$. Şimdi bu kapsamanın tersini lemma 2.2.5 'i kullanarak ispatlayalım. $a \in D_1$ olsun. Bu durumda her $x = (x_k) \in Sl_\infty(\Delta_q)$ için

$$x_k = \begin{cases} 0 & , \quad k = 1 \\ -\sum_{i=1}^{k-1} \dfrac{y_i}{i^q} & , \quad k \geq 2 \end{cases}$$

olacak şekilde bir ve yalnız bir $y = (y_k) \in l_\infty$ vardır. $q < 1$ olsun. Biliyoruz ki

$$\lim_n \left(n^{q-1} \sum_{v=1}^{n} v^{-q} \right) = (1-q) \tag{3.1}$$

dır. Bu limiti göz önüne alırsak

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k x_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty}|a_k| \sum_{i=1}^{k}\frac{|y_i|}{i^q}$$

$$= 0(1)\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| \,(k^{q-1}\sum_{i=1}^{k} i^{-q})\, k^{1-q}$$

$$= 0(1)\sum_{k=1}^{\infty} k^{1-q}|a_k|$$

$$= 0(1)$$

elde edilir. Bu ise $D_1 \subset (Sl_\infty(\Delta_q))^\alpha$ demektir.

(2) $a \in D_2$ olsun. Keyfi bir $x \in (Sl_\infty(\Delta_q))$ alalım. Bu durumda

$$x_k = \begin{cases} 0 & , \quad k = 1 \\ -\sum_{i=1}^{k-1} i^{-q} y_i & , \quad k \geq 2 \end{cases}$$

olacak şekilde bir ve yalnız bir $y = (y_k) \in l_\infty$ vatdır. Buradan

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k \quad = -\sum_{k=2}^{n} a_k (\sum_{i=1}^{k-1} i^{-q} y_i) = -\sum_{i=1}^{n-1} i^{-q} y_i \sum_{v=i+1}^{n} a_v \qquad (3.2)$$

$$= -\sum_{i=1}^{n-1} i^{-q} R_i y_i + R_n \sum_{i=1}^{n-1} i^{-q} y_i$$

yazılabilir. Eğer Lemma 2.2.2 de $P_k = k^{1-q}\; c_k = (k+1)^{1-q} a_{k+1}$ koyarsak

$(n \to \infty)$ için $n^{1-q} R_n \to 0$ olacağından

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k = -\sum_{i=1}^{\infty} i^{-q} R_i y_i$$

bulunur. $a \in D_2$ olduğuna göre bu eşitliğin sağ tarafındaki seri yakınsaktır ve dolayısıyla $a = (a_k) \in (Sl_\infty(\Delta_q))^\beta$ yani $D_2 \subset (Sl_\infty(\Delta_q))^\beta$ bulunur.

Tersine $a = (a_k) \in (Sl_\infty(\Delta_q))^\beta$ olsun. Bu durumda her $x \in Sl_\infty(\Delta_q)$ için $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ serisi yakınsaktır. Eğer özel olarak

$$x_k = \begin{cases} 0 & , \quad k = 1 \\ k^{1-q} & , \quad k \geq 2 \end{cases}$$

alınırsa $\sum_{k=1}^{\infty} k^{1-q} a_k$ serisi yakınsaktır ve dolayısıyla Lemma 2.2.2 den $(n \to \infty)$ için $n^{1-q} R_n = o(1)$ olur. Buna göre (3.2) den $\sum_{v=1}^{\infty} v^{-q} |R_v| < \infty$. Bu demektir ki $a = (a_k) \in D_2$. Şu halde $(Sl_\infty(\Delta_q))^\beta \subset D_2$.

(3) Lemma (2.2.1) kullanılarak benzer olarak (3) şartı da elde edilir. Böylece teoremimizin ispatı tamamlanmış olur.

İspatta seçilen özel dizilerin özelliğinden $r = \alpha, \beta$ ve γ için

$$(sl_\infty(\Delta_q)\big)^r = (sc(\Delta_q)\big)^r$$

olur. Ayrıca bu dual uzaylarındaki şartlar sonlu sayıdaki terimlerin atılmasından etkilenmeyeceğinden Z, $l_\infty(\Delta_q)$, $c(\Delta_q)$ ve $c_0(\Delta_q)$ uzaylarından birini göstermek üzere $(sZ)^r = Z$ olur.

Ayrıca dikkat edelim ki bu teoremde $q = 0$ alınırsa Kızmaz (1981)'ın uzaylarının duallerini veren aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 3.2.2.

Her $k \geq 1$ için

$$\mathrm{R}_k = \sum_{v=k+1}^{\infty} \mathrm{a}_v$$

ve

$$\mathrm{L}_k = \sum_{k=1}^{\infty} |\, \mathrm{R}_k|$$

olsun.

Bu taktirde

$$i-)\ \left(sl_\infty(\Delta)\right)^{\alpha} = \left\{a = (a_k):\ \sum_{k=1}^{\infty} k|\, \mathrm{a}_k| < \infty\right\} = \mathrm{D}_1$$

$$ii-)\ (sl_\infty(\Delta))^{\beta} = \left\{a = (a_k):\ \sum_{k=1}^{\infty} ka_k\ \ yak\imath nsak, \mathrm{L}_k < \infty\right\} = \mathrm{D}_2$$

$$iii-)(sl_\infty(\Delta))^{\gamma} = \left\{a = (a_k): \sup_n |\sum_{k=1}^{n} ka_k| < \infty, \mathrm{L}_k < \infty\right\} = \mathrm{D}_3.$$

3. 3. $c(\Delta_q)$ ve $l_\infty(\Delta_q)$ Uzaylarının Matris Dönüşümleri

E ve F, l_∞ ve c uzaylarından birini ve E'_q, $c(\Delta_q)$ ve $l_\infty(\Delta_q)$ uzaylarından birini göstersin. Bu durumda aşağıdaki teoremler Sarıgöl (1987) tarafından ifade edilmiş ve ispatlanmıştır.

Teorem 3.3.1.

Her $k,n \geq 1$ için $A = (a_{nk})$ bir sonsuz matris olsun. Ayrıca $q < 1$ olmak üzere

$$A_n(k^{1-q}) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{1-q} a_{nk}$$

ve

$$R = (r_{nk}) = \left(\sum_{v=k+1}^{\infty} a_{nv}\right)$$

olsun.

Bu taktirde $A \in (E'_q, F)$ olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartların sağlanmasıdır:

$i-)$ $(a_{n1}) \in$ F ve $A_n(k^{1-q}) \in$ F

$ii-)$ $R_q = (v^{-q} r_{nv}) \in$ (E, F).

İspat: $A \in (E_q{}', F)$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ serisi yakınsak ve her $x = (x_k) \in E_q{}'$ için $(A_n(x)) \in F$ dır. Dolayısıyla özel olarak $E_q{}'$ uzayına ait $x = (x_k) = (1,0,0,\dots)$ ve $x' = (x'_k) = (k^{1-q})$ dizileri için $(A_n(x)) = (a_{n1}) \in F$ ve $(A_n(x'_k)) = (\sum_{k=1}^{\infty} k^{1-q} a_{nk}) \in$ F olur. Diğer yandan Teorem 3.2.1 kullanılarak her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-q} |r_{nk}| < \infty$ elde edilir. Şimdi $x \in SE_q{}' \subset E_q{}'$olsun. Bu durumda

$$x_k = \begin{cases} 0 & , \quad k = 1 \\ -\sum_{v=1}^{k-1} v^{-q} y_v & , \quad k \geq 2 \end{cases}$$

olacak şekilde bir ve yalnız bir $y = (y_k) \in E$ vardır. Dolayısıyla

$$\sum_{k=1}^{m} a_{nk} x_k = -\sum_{k=1}^{m-1} r_{nk} k^{-q} y_k + r_{nm} \sum_{k=1}^{m-1} k^{-q} y_k \qquad (3.2)$$

yazılabilir. Lemma 2.2.2 nedeniyle $k \to \infty$ için $k^{1-q} r_{nk} = o(1)$ olduğuna göre her $n \in \mathbb{N}$ için (3.2) de limite geçilirse

$$\lim_m \sum_{k=1}^{m} a_{nk} x_k = A_n(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k^{-q} r_{nk} y_k$$

elde edilir. Yani eşitliğin sağındaki seri yakınsaktır. Şu halde kabulümüzden $(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-q} r_{nk} y_k) \in F$. Bu ise $R_q = (k^{-q} r_{nk}) \in (E, F)$ demektir. .

Tersine kabul edelim ki (i) ve (ii) şartları sağlansın. $x = (x_k) \in {E_q}'$ verilmiş olsun. Bu durumda $x' = (x'_k) \in {SE_q}'$ ve $x_1 \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} x_1 & , \quad k = 1 \\ x' & , \quad k \geq 2 \end{cases}$$

ifade edilebilir. Dolayısıyla aşağıdaki eşitliği yazıbilir.

$$\sum_{k=1}^{m} a_{nk} x_k = a_{n1} x_1 - \sum_{k=1}^{m-1} k^{-q} r_{nk} y_k + r_{nm} \sum_{k=1}^{m-1} k^{-q} y_k$$

Böylece son eşitlikte Lemma 2.2.1 göz önüne alınarak m⟶∞ için limite geçilirse her $x \in {E_q}'$

$$A_n(x) = a_{n1} x_1 - \sum_{k=1}^{\infty} k^{-q} r_{nk} y_k$$

elde edilir. Böylece (i) ve (ii) şartlarından ise $A \in (E'_q, F)$ elde edilir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

4. GENİŞLETİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI

Çalışmanın orijinal kısmını oluşturan bu bölümde Kızmaz (1981) ve Sarıgöl (1987)'ün uzaylarını genişleterek bu uzayların α, β ve γ dual uzaylarını belirleyeceğiz ve aynı zamanda bazı matris dönüşümlerini karakterize edeceğiz. Bölüm boyunca (d_n), $n \to \infty$ için

$$D_0 = 0\,, D_n = \sum_{v=1}^{n} {d_v}^{-1} = {d_1}^{-1} + {d_2}^{-1} + \cdots + {d_n}^{-1} \to \infty$$

olacak şekilde pozitif sayıların dizisini gösterecektir. Bu durumda her $v \geq 1$ için $\Delta x_v = x_v - x_{v+1}$ olmak üzere

$$c_0(d\Delta) = \{\, x = (x_v) \in w : (d_v \Delta x_v) \in c_0\}$$

$$c(d\Delta) = \{\, x = (x_v) \in w : (d_v \Delta x_v) \in c\,\}$$

$$l_\infty(d\Delta) = \{\, x = (x_v) \in w : (d_v \Delta x_v) \in l_\infty\}$$

uzaylarını tanımlayalım. Dikkat edelim ki , özel olarak her $v \geq 1$ için $d_v = 1$ alınırsa bu uzaylar sırasıyla Kızmaz'ın $c_0(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $l_\infty(\Delta_q)$ uzaylarına $d_v = v^q$ alınırsa , Sarıgöl (1987)'ün $c_0(\Delta_q)$, $c(\Delta_q)$ ve $l_\infty(\Delta_q)$ uzaylarına indirgenir. Öte yandan bu uzayların bilinen metotlar uygulanarak

$$\|x\| = |x_1| + sup_v |d_v \Delta x_v|$$

normuna göre Banach uzayı olduğu kolayca gösterilebilir. Aynı zamanda

$$Sc_0(d\Delta) = \{\, x \in c_0(d\Delta)\,, x_1 = 0\,\}$$

$$Sc(d\Delta) = \{\, x \in c(d\Delta)\,, x_1 = 0\,\}$$

$$Sl_\infty(d\Delta) = \{\, x \in l_\infty(d\Delta)\,, x_1 = 0\,\}$$

alt uzayları ise $\|x\| = sup_v |d_v \Delta x_v|$ normuna göre normlu uzaylardır ve sırasıyla c_0 , c ve l_∞ uzaylarına izomorftur. Yani $Sc_0(d\Delta) \simeq c_0$, $Sc(d\Delta) \simeq c$ ve $Sl_\infty(d\Delta) \simeq l_\infty$. Gerçekten $d\Delta(x) = (d_v \Delta x_v)$ şeklinde tanımlanan $d\Delta : Sc_0(d\Delta) \to c_0$, $d\Delta : Sc(d\Delta) \to c$ ve $d\Delta : Sl_\infty(d\Delta) \to l_\infty$ dönüşümleri normu koruyan izomorfizmlerdir. Örneğin , $d\Delta : Sl_\infty(d\Delta) \to l_\infty$; $d\Delta(x) = (y_v) = (d_v \Delta x_v)$ dönüşümünün birebir, örten ve lineerliği açıktır. Ayrıca her $x \in Sl_\infty(d\Delta)$ için $\|d\Delta(x)\|_{l_\infty} = sup_n |d_n \Delta x_n| = \|x\|_{Sl_\infty(d\Delta)}$ olduğuna göre $d\Delta$ dönüşümü normu korumaktadır.

Öncelikle bu uzayların duallerini hesaplayalım.

Teorem 4.1

(d_n) , $n \to \infty$ için $D_n = {d_1}^{-1} + {d_2}^{-1} + \cdots + {d_n}^{-1} \to \infty$ olacak şekilde

pozitif reel sayıların bir dizisi ve $a = (a_v) \in w$ için

$$R_n = \sum_{v=n+1}^{\infty} a_v \ ; n = 1,2, \ldots$$

olsun. Ayrıca

$$H_1 = \left\{ a \in w : \sum_{v=2}^{\infty} D_{v-1} \, |a_v| < \infty \right\}$$

$$H_2 = \left\{ a \in w : \sum_{v=2}^{\infty} D_{v-1} \, a_v \ yakınsak , \sum_{v=1}^{\infty} {d_v}^{-1} \, |R_v| < \infty \right\}$$

$$H_3 = \left\{ a \in w : \sup_n \left| \sum_{v=2}^{\infty} D_{v-1} \, a_v \right| < \infty , \sum_{v=1}^{\infty} {d_v}^{-1} \, |R_v| < \infty \right\}$$

diyelim. Bu takdirde

$$i-) \quad (\mathrm{Sl}_\infty(d\Delta))^\alpha = H_1$$

$$ii-) \quad (Sl_\infty(d\Delta))^\beta = H_2$$

$$iii-) \quad (Sl_\infty(d\Delta))^\gamma = H_3$$

İspat.

İ-) $a \in H_1$ olsun. Keyfi bir $x \in \mathrm{Sl}_\infty(d\Delta)$ alalım. Bu durumda $x \in \mathrm{Sl}_\infty(d\Delta)$ için

$$x_v = \begin{cases} 0 & , \quad k = 1 \\ \sum_{r=1}^{v-1} {d_r}^{-1} y_r & , \quad 2 \leq r \leq v \end{cases} \tag{4.1}$$

olacak şekilde bir ve yalnız bir $y \in l_\infty$ vardır. Buradan

$$\sum_{v=1}^{\infty} |a_v x_v| \leq \sum_{v=2}^{\infty} \left| a_v \sum_{r=1}^{v-1} (y_r/d_r) \right|$$

$$\leq \sum_{v=2}^{\infty} |a_v| \sum_{r=1}^{v-1} {d_r}^{-1} |y_r|$$

$$= O(1) \sum_{v=2}^{\infty} |a_v| \sum_{r=1}^{v-1} {d_r}^{-1}$$

$$= O(1) \sum_{v=2}^{\infty} D_{v-1} |a_v| < \infty$$

olduğuna göre $a \in (\mathrm{Sl}_\infty(d\Delta))^\alpha$. Bu ise $H_1 \subset \left(\mathrm{Sl}_\infty(d\Delta)\right)^\alpha$ demektir.

Tersine $a \in (\mathrm{Sl}_\infty(d\Delta))^\alpha$ alalım. Bu durumda her $x \in \mathrm{Sl}_\infty(d\Delta)$ için

$\sum_{v=1}^{\infty} |a_v x_v| < \infty$. Özel olarak $x_1 = 0$, $v \geq 2$ için $x_v = D_{v-1}$ alınırsa $d_v \Delta x_v = d_v \Delta D_v = -1$ olup $x \in c$ ve dolayısıyla $x \in \mathrm{Sl}_\infty(d\Delta)$. Buradan $\sum_{v=1}^{\infty} D_{v-1}|a_v| < \infty$ olduğu göz önüne alınırsa $a \in H_1$ bulunur. Bu ise $(\mathrm{Sl}_\infty(d\Delta))^\alpha \subset H_1$ demektir.

İİ-) $a \in (Sl_\infty(\Delta))^\beta$ olsun. Bu durumda her $x \in \mathrm{Sl}_\infty(d\Delta)$ için $\sum_{v=1}^{\infty} a_v x_v$ serisi yakınsaktır. Özel olarak, $x_1 = 0$, $v \geq 2$ için $x_v = D_{v-1}$ alınırsa İ-) den dolayı $x \in \mathrm{Sl}_\infty(d\Delta)$ olacağından $\sum_{v=1}^{\infty} D_{v-1} a_v$ yakınsaktır. Öte yandan Lemma 2.2.2 den $P_v = D_{v-1}$ ve $c_{v-1} = D_{v-1} a_v$ alınırsa $n \to \infty$ için $D_{n-1} R_n \to 0$ bulunur. Buna göre (4.1) ifadesinden

$$\sum_{v=1}^{n} a_v x_v = \sum_{v=2}^{n} a_v \sum_{r=1}^{v-1} d_r^{-1} y_r$$

$$= \sum_{r=1}^{n-1} \left(\sum_{v=r+1}^{n} a_v \right) d_r^{-1} y_r$$

$$= -\sum_{v=1}^{n-1} R_v d_v^{-1} y_v + R_n \sum_{v=1}^{n-1} d_v^{-1} y_v$$

yazılabilir. Eğer bu eşitlikte $n \to \infty$ için limite geçilirse her $y \in l_\infty$

$$\sum_{v=1}^{\infty} a_v x_v = -\sum_{v=1}^{\infty} R_v d_v^{-1} y_v$$

elde edilir. Tekrar $y_v = sgnR_v$ alınırsa $\sum_{v=1}^{\infty} d_v^{-1}|R_v| < \infty$ bulunur. Şu halde $a \in D_2$ yani $(Sl_\infty(d\Delta))^\beta \subset H_2$.

Tersine $a \in H_2$ ise her $x \in \mathrm{Sl}_\infty(d\Delta)$ için ii-) nin ispatında olduğu gibi her $y \in l_\infty$ için

$$\sum_{v=1}^{\infty} a_v x_v = -\sum_{v=1}^{\infty} R_v {d_v}^{-1} y_v$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağındaki seri yakınsaktır çünkü

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left| R_v {d_v}^{-1} y_v \right| = O(1) \sum_{v=1}^{\infty} \left| R_v {d_v}^{-1} \right| < \infty.$$

Dolayısıyla $\sum_{v=1}^{\infty} a_v x_v$ serisi yakınsaktır. Bu demektir ki $a \in (Sl_\infty(d\Delta))^\beta$ yani $H_2 \subset (Sl_\infty(d\Delta))^\beta$.

iii-) $a \in (Sl_\infty(d\Delta))^\gamma$ olsun. Bu durumda her $x \in \mathrm{Sl}_\infty(d\Delta)$ için $\sum_{v=1}^{\infty} a_v x_v$ serisi yakınsaktır. Özel olarak $x_1 = 0$, $v \geq 2$ için $x_v = D_{v-1}$ alınırsa i-) den dolayı $x \in \mathrm{Sl}_\infty(d\Delta)$ olacağına göre $\sum_{v=1}^{\infty} D_{v-1} a_v$ serisi yakınsaktır ve dolayısıyla

$$sup_n \left| \sum_{v=1}^{n} D_{v-1} a_v \right| < \infty .$$

Eğer $P_v = D_{v-1}$ ve $c_{v-1} = D_{v-1} a_v$ alınırsa $sup_n \left| \sum_{v=1}^{n} c_{v-1} \right| < \infty$ olduğu göz önüne alınırsa Lemma 2.2.1 den dolayı $sup_n \left| D_{n-1} R_n \right| < \infty$ bulunur. Buna göre (4.1) ifadesinden

$$\sum_{v=1}^{n} a_v x_v = \sum_{v=2}^{n} a_v \sum_{r=1}^{v-1} {d_r}^{-1} y_r$$

$$= \sum_{r=1}^{n-1} \left(\sum_{v=r+1}^{n} a_v \right) {d_r}^{-1} y_r$$

$$= -\sum_{v=1}^{n-1} R_v {d_v}^{-1} y_v + R_n \sum_{v=1}^{n-1} {d_v}^{-1} y_v$$

yazılabilir. Fakat her n için

$$\left| R_n \sum_{v=1}^{n-1} d_v{}^{-1} y_v \right| \leq |R_n| \sum_{v=1}^{n-1} d_v{}^{-1} |\, y_v|$$

$$\leq sup|\, y_v|\, |R_n| D_{n-1}$$

$$= O(1)$$

olduğuna göre her $y \in l_\infty$ için

$$sup_n \left| \sum_{v=1}^{n-1} R_v d_v{}^{-1} y_v \right| < \infty$$

bulunur. Burada özel olarak $y_v = sgnR_v$ alınırsa $y \in l_\infty$ olur ve dolayısıyla $\sum_{v=1}^{\infty} d_v{}^{-1} |\, R_v| < \infty$ elde edilir. Bu ise $a \in H_3$ yani $(Sl_\infty(d\Delta))^\gamma \subset H_3$ demektir.

Tersine $a \in H_3$ ise her $x \in \mathrm{Sl}_\infty(d\Delta)$ için 2-) nin ispatında olduğu gibi (A) ve (B) den dolayı $sup_n |\sum_{v=1}^{n} a_v x_v| < \infty$ elde edilir. Bu ise $a \in (Sl_\infty(d\Delta))^\gamma$ yani $H_3 \subset (Sl_\infty(d\Delta))^\gamma$ demektir. Böylece ispat tamamlanır.

Dikkat edelim ki bu teoremde her $v \geq 1$ için $d_v = 1$ ve $d_v = v^q$ alınırsa, sırasıyla Kızmaz ve Sarıgöl'ün sırasıyla Teorem 3.2.1 ve Teorem 3.2.2 elde edilir.

Teorem 4.2

(d_n) , $n \to \infty$ için $D_n = d_1{}^{-1} + d_2{}^{-1} + \cdots + d_n{}^{-1} \to \infty$ olacak şekilde pozitif reel sayıların bir dizisi ve $a = (a_v) \in w$ için

$$R_n = \sum_{v=n+1}^{\infty} a_v \;\; ; n = 1,2, \ldots$$

olsun. Ayrıca

$$H_1 = \left\{ a \in w : \sum_{r=2}^{\infty} |a_v| D_{v-1} \ < \ \infty \right\}$$

$$H_2 = \left\{ a \in w : \sum_{v=1}^{\infty} a_v \ yakınsaktır \ , sup_m \sum_{r=1}^{m-1} |R_r - R_m| \ {d_r}^{-1} < \ \infty \right\}$$

$$H_3 = \{ a \in w : a \in H_2 \, , lim_m R_m D_{m-1} = 0 \}$$

alalım. Bu taktirde

$$i-) \quad (\mathrm{Sc}_0(d\Delta))^{\alpha} = H_1$$

$$ii-) \quad \left(Sc_0\left((d\Delta)\right)^{\beta} = H_2\right.$$

$$iii-) \quad \left(Sc_0\left((d\Delta)\right)^{\gamma} = H_3\right.$$

İspat.

İ-) $x \in \mathrm{Sc}_0(d\Delta)$ ise

$$x_v = \begin{cases} 0 & , \quad v = 1 \\ \sum_{r=1}^{v-1} {d_r}^{-1} y_r & , \quad 2 \le r \le v \end{cases}$$

olacak şekilde bir ve yalnız bir $y \in \mathrm{c}_0$ vardır. Ayrıca $C = (\mathrm{c}_{\mathrm{mr}})$ matrisini

$$c_{mv} = \begin{cases} a_m {d_v}^{-1} & , \quad 1 \le v \le m-1 \\ 0 & , \quad v > m-1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlarsak

$$a_m x_m = \ a_m \sum_{v=1}^{m-1} {d_v}^{-1} y_v$$

$$= \sum_{v=1}^{m-1} c_{mr} y_r = C_m(y)$$

yazılabilir. Buna göre $a \in (\mathrm{Sc}_0)^{\alpha} \Leftrightarrow (a_m x_m) \in \ell \Leftrightarrow$ Her $y \in \mathrm{c}_0$ için $C(y) \in \ell$, yani $C \in (\mathrm{c}_0, \ell)$. Bu ise Lemma 2.2.2 nedeniyle

$$sup_N \sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{v \in N} \mathrm{c}_{mv} \right| < \infty \Leftrightarrow \sum_{m=1}^{\infty} |a_{\mathrm{m}}| \, \mathrm{D}_{\mathrm{m}-1} < \infty$$

ifadesine denktir yani $(Sc_0)^{\alpha} = H_1$ demektir. Bu ispatı tamamlar.

ii-) $a \in \left(Sc_0\big((d\Delta)\big)\right)^{\beta}$ olsun. Her $x \in \mathrm{Sc}_0(d\Delta)$ için $\sum_{v=1}^{\infty} a_v x_v$ yakınsaktır. Özel olarak $x = (1,1,\dots) \in \mathrm{Sc}_0(d\Delta)$ olduğuna göre $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ yakınsaktır. Keyfi bir $x \in \mathrm{Sc}_0(d\Delta)$ alalım. Bu durumda $x \in \mathrm{Sc}_0(d\Delta)$ için

$$x_v = \begin{cases} 0 & , \quad k = 1 \\ \displaystyle\sum_{r=1}^{v-1} {d_r}^{-1} y_r & , \quad 2 \le r \le v \end{cases}$$

olacak şekilde bir ve yalnız bir $y \in \mathrm{c}_0$ vardır. Eğer $C = (c_{mr})$ matrisini

$$c_{mv} = \begin{cases} (R_r - R_m){d_r}^{-1} & , \quad 1 \le r \le m-1 \\ 0 & , \quad r > m-1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlarsak

$$\sum_{v=1}^{m} a_v x_v = \sum_{v=2}^{m} a_v \sum_{r=1}^{v-1} d_r{}^{-1} y_r$$

$$= \sum_{r=1}^{m-1} \left(\sum_{v=r+1}^{m} a_v \right) d_r{}^{-1} y_r$$

$$= \sum_{r=1}^{m-1} (R_r - R_m) d_r{}^{-1} y_r$$

$$= \sum_{r=1}^{m-1} c_{mr} y_r$$

$$= C_m(y)$$

yazılabilir. Buna göre $a \in (Sc_0)^{\beta} \Leftrightarrow$ Her $y \in c_0$ için $C(y) \in c$, yani $C \in (c_0, c)$. Dolayısıyla Lemma 2.2.5 göz önüne alınırsa $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ yakınsaktır ve $sup_m \sum_{r=1}^{m-1} |R_r - R_m| d_r{}^{-1} < \infty$ bulunur. Bu ise $a \in H_2$ olup $(Sc_0)^{\beta} \subset H_2$ demektir.

Bu kapsamın tersi ise benzer şekilde ispatlanır.

iii-) (4.1) den dolayı $a \in (Sc_0)^{\gamma}$ olması için gerek ve yeter şart her $y \in c_0$ için $C(y) \in l_\infty$ yani $C \in (c_0, l_\infty)$. Bu ise Lemma 2.2.4 dan dolayı denk olarak $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ yakınsaktır, $lim_m R_m D_{m-1} = 0$ ve $sup_m = \sum_{r=1}^{m-1} |R_r - R_m| d_r{}^{-1} < \infty$.

Aynı zamanda dual uzayların tanımları dikkate alınırsa aşağıdaki sonuç ifade edilebilir.

Sonuç 4.3

$E \in \{l_\infty(d\Delta), c(d\Delta), c_0(d\Delta)\}$ ve $\theta \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ olsun. Bu durumda

$$(SE)^{\theta} \quad = \quad E^{\theta}$$

$$(Sl_{\infty}((d\Delta))^{\theta} \quad = \quad (Sc((d\Delta))^{\theta}.$$

Şimdi $E(d\Delta) \in \{l_{\infty}(d\Delta), (d\Delta)\}$ ve $F \in \{l_{\infty}, c\}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki matris sınıfını karakterize eden teoremi verebiliriz.

Teorem 4.4

(d_n), $n \to \infty$ için $D_n = {d_1}^{-1} + {d_2}^{-1} + \cdots + {d_n}^{-1} \to \infty$ olacak şekilde pozitif reel sayıların bir dizisi ve $A = (a_{nv})$ kompleks terimli bir sonsuz matris olsun. Ayrıca $n, v = 1,2, \dots$ için $R^d = ({r_{nv}}^d)$ matrisini

$$\begin{aligned} {r_{nv}}^d &= {d_1}^{-1} r_{nv} \\ &= {d_1}^{-1} \sum_{i=v+1}^{\infty} a_{ni} \; : \; n, v = 1,2, \dots \end{aligned}$$

biçiminde tanımlayalım ve

$$A_n(D) = \sum_{v=1}^{\infty} a_{nv} D_{v-1} \qquad , \qquad D_0 = 0$$

olsun. Bu taktirde

$$A \in (E(d\Delta), F) \Leftrightarrow \begin{cases} i-) \; (a_{n1}) \quad , \; A(D) \in F \\ ii-) \;\; R^d \; \in (E, F) \end{cases} .$$

İspat

$A \in (E(d\Delta), F)$ olsun. Bu durumda her $x \in E(d\Delta)$ için $A_n(x) = \sum_{v=1}^{\infty} a_{nv} x_v$ $(n = 1,2, \dots)$ serisi yakınsak ve $A(x) = (A_n(x)) \in F$. Şimdi özel olarak $x_1 = {x_1}' = 0$ ve her $v \geq 2$ için $x_v = 0$, ${x_v}' = D_{v-1}$ alırsak $x, x' \in E(\Delta)$ olacağından $A(x) = (a_{n\iota}), A(D) = \left(A_n(x')\right) = (\sum_{v=1}^{\infty} a_{nv} D_{v-1}) \in F$ bulunur. Şu halde İ-) ve ii-) elde edilir.

Tersine İ-) ve İİ-) sağlansın. Bu durumda İİ-) ve Teorem 1 den dolayı her n için $\sum_{v=1}^{\infty} d_v^{-1}|r_{nv}| < \infty$. Şimdi keyfi bir $x \in E(d\Delta)$ alalım. Eğer $x_1{}' = 0$ ve her $n \geq 2$ için $x_v{}' = x_v$ alınırsa $x' \in SE(d\Delta)$ olur ve aynı zamanda (4.1) dan dolayı

$$x_v{}' = \begin{cases} 0 & , \quad k = 1 \\ \displaystyle\sum_{r=1}^{v-1} d_r{}^{-1} y_r & , \quad 2 \leq r \leq v \end{cases}$$

olacak şekilde bir ve yalnız bir $y \in E$ vardır. Buna göre

$$\sum_{v=1}^{m} a_{nv} x_v = a_{n1} x_1 + \sum_{v=2}^{m} a_{nv} x_v{}'$$

$$= a_{n1} x_1 + \sum_{v=2}^{m} a_{nv} \sum_{r=1}^{v-1} d_r{}^{-1} y_r$$

$$= \sum_{r=1}^{m-1} \left(\sum_{v=r+1}^{m} a_{nv} \right) d_r{}^{-1} y_r$$

$$= a_{n1} x_1 + \sum_{r=1}^{m-1} r_{nv}\, d_r{}^{-1} y_r - r_{nm} \sum_{r=1}^{m-1} d_r{}^{-1} y_r \qquad (4.2)$$

elde edilir. Öte yandan, Lemma 2.2.2 nedeniyle $m \to \infty$ için $D_{m-1} r_{nm} \to 0$ olduğuna göre (4.2) ifadesinde $m \to \infty$ için limite geçilirse her n için

$$A_n(x) = \sum_{v=1}^{\infty} a_{nv} x_v = a_{n1} x_1 + \sum_{v=1}^{\infty} r_{nv} d_v{}^{-1} y_v$$

olur. Böylece i-) ve ii-) göz önüne alınırsa $\left(\sum_{r=1}^{\infty} r_{nv} d_r{}^{-1} y_r\right) \in F$ elde edilir. Bu ise $R^d \in (E, F)$ olması demektir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.5

(d_n) , $n \to \infty$ için $D_n = d_1{}^{-1} + d_2{}^{-1} + \cdots + d_n{}^{-1} \to \infty$ olacak şekilde pozitif reel sayıların bir dizisi ve $A = (a_{nv})$ kompleks terimli bir sonsuz matris olsun. Ayrıca

$$\bar{A}(D) = \left(\sum_{v=1}^{\infty} d_n \left(a_{n+1,v} - a_{nv}\right) D_{v-1} \right) \quad , \qquad D_0 = 0 \, ,$$

ve

$$\overline{R}_d = \left(d_v{}^{-1} \overline{r}_{nv}\right) = \left(d_v{}^{-1} \sum_{i=v+1}^{\infty} d_n \left(a_{n+1,v} - a_{nv}\right) \right)$$

olsun. Bu taktirde

$$A \in (E(d\Delta), F) \Leftrightarrow \begin{cases} i-) & \left(d_n \left(a_{n+1,1} - a_{n1}\right)\right) \, , \overline{A}(D) \in F \\ ii-) & \overline{R}_d \in (E, F) \, . \end{cases}$$

İspat.

$A \in (E(d\Delta), F(d\Delta))$ olsun. Bu durumda her $x \in E(d\Delta)$için

$$A_n(x) = \sum_{v=1}^{\infty} a_{nv} x_v \, ; n = 1,2, \ldots$$

serisi yakınsak ve $A(x) = (A_n(x)) \in F(d\Delta)$. Çünkü

$$d\Delta A(x) = \{(d_n \left(A_{n+1}(x) - A_n(x)\right)) \} \in F$$

dır. Eğer her $n, v \geq 1$ için $\overline{a}_{nv} = d_n \left(a_{n+1,v} - a_{nv}\right)$ dersek bu taktirde

$$\bar{A}_n(x) = \sum_{v=1}^{\infty} \bar{a}_{nv} x_v = \sum_{v=1}^{\infty} d_n\,(a_{n+1,v} - a_{nv}) x_v \quad (4.3)$$

$$= d_n\,(A_{n+1}(x) - A_n(x))$$

olacağından $\bar{A}_n(x) = (\bar{A}_n(x)) \in F$ olur. Bu ise $\bar{A} \in (E(d\Delta), F)$ demektir.

Tersine, $\bar{A} \in (E(d\Delta), F)$ ise (4.3) den dolayı $A(x) = (A_n(x))$ dizisi mevcut ve $A(x) \in F(d\Delta)$ yani $A \in (E(d\Delta), F(d\Delta))$. Böylece ispat Teorem 4.4 den elde edilir.

Teorem 4.6

(d_n), $n \to \infty$ için $D_n = {d_1}^{-1} + {d_2}^{-1} + \cdots + {d_n}^{-1} \to \infty$ olacak şekilde pozitif reel sayıların bir dizisi ve $A = (a_{nv})$ kompleks terimli bir sonsuz matris olsun. Ayrıca $n, v = 1,2, \ldots$ için $R^d = ({r_{nv}}^d)$ matrisini

$${r_{nv}}^d = {d_v}^{-1} r_{nv} = {d_v}^{-1} \sum_{i=v+1}^{\infty} a_{ni} \; : \; n, v = 1,2, \ldots$$

biçiminde tanımlayalım. Bu taktirde

$$A \in (c_0\,(d\Delta), c_0) \Leftrightarrow \begin{cases} i-) & \text{Her n için } \sum_{v=1}^{\infty} a_{nv} \text{ yakınsaktır} \\ ii-) & sup_m \sum_{v=1}^{m-1} |r_{nv} - r_{nm}|\, {d_v}^{-1} < \infty \\ iii-) & (a_{n1}) \in c_0 \\ iv-) & R^d \in (c_0, c_0) \end{cases}$$

İspat.

$A \in (c_0\,(d\Delta), F)$ verilmiş olsun. Bu durumda her $x \in c_0\,(d\Delta)$ için $A_n(x) = \sum_{v=1}^{\infty} a_{nv} x_v$; $(n = 1,2, \ldots)$ serisi yakınsak ve $A(x) = (A_n(x)) \in c_0$ yani $A_n = (a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nv}, \ldots) \in (c_0(d\Delta))^{\beta}$ ve $A(x) = (A_n(x)) \in c_0$. Burada $A_n \in (c_0(d\Delta))^{\beta}$ olduğuna göre Teorem 2 den dolayı Teorem i-) ve İİ-) şartları sağlanır. Öte yandan eğer $x \in c_0\,(d\Delta)$ ise $x_1{}' = 0$ ve her $v \geq 2$ için $x_v{}' = x_v$ alınırsa $x' \in Sc_0(d\Delta)$ olur ve dolayısıyla (4.1) nedeniyle

$$x_v{}' = \begin{cases} 0 & , \quad k = 1 \\ \displaystyle\sum_{r=1}^{v-1} d_r{}^{-1} y_r & , \quad 2 \leq r \leq v \end{cases}$$

olacak şekilde bir ve yalnız bir $y \in c_0$ vardır. Buna göre

$$\sum_{v=1}^{m} a_{nv} x_v = a_{n1} x_1 + \sum_{v=2}^{m} a_{nv} x_v{}'$$

$$= a_{n1} x_1 + \sum_{v=2}^{m} a_{nv} \sum_{i=1}^{v-1} d_i{}^{-1} y_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} \Big(\sum_{v=i+1}^{m} a_{nv} \Big) d_i{}^{-1} y_i$$

$$= a_{n1} x_1 + \sum_{v=1}^{m-1} (r_{nv} - r_{nm})\, d_v{}^{-1} y_v$$

$$= a_{n1} x_1 + \sum_{v=1}^{m-1} (r_{nv}{}^{d} - d_v{}^{-1} r_{nm}) y_v$$

elde edilir. Burada $m \to \infty$ için $r_{nm} \to 0$ olduğu göz önüne alınıp limite geçilirse her n için

$$A_n(x) = \sum_{v=1}^{\infty} a_{nv} x_v$$

$$= a_{n1} x_1 + \sum_{v=1}^{\infty} r_{nv}{}^{d} y_v$$

$$= a_{n1} x_1 + R_n{}^{d}(y)$$

elde edilir. Böylece iii-) ve iv-) şartlarından ispat tamamlanır.

5. KAYNAKLAR

Gökçe, F. and Sarıgöl, M.A., "Generalization of the space l(p) derived by absolute Euler summability and matrix operators", *Journal of Inequalities and Applications,* 2018, 133-145, (2018).

Hazar, G.C. and Sarıgöl, M.A., "On absolute Nörlund spaces and matrix Operators", *Acta Math. Sinica,* 34 (5), 812–826, (2018).

Hazar, G.C. and Sarıgöl, M.A., "Absolute Cesàro series spaces and matrix operators", *Acta Appl. Math*., 154, 153–165, (2018).

Kızmaz, H., "On certain sequence spaces", *Canad. Math. Bull.,* 24 (2), 169-176, (1981).

Malkowsky, E. and Savaş, E., "Matrix transformations between sequence spaces of generalized weighted means", *Appl. Math. Comput.,* 147 (2), 333-345, (2004).

Malkowsky, E., "Recent results in the theory of matrix transformations in sequence spaces", *Mat. Vesnik,* 49, 187-196, (1997).

Malkowsky, E., Mursaleen, M. and Suantai, S., "The dual spaces of sets of difference sequences of order m and matrix transformations", *Acta Math.Sinica,* 23 (3), 521- 532, (2007).

Maddox, I. J., *Elements of Functional Analysis*, 2nd ed., Cambridge: The University Press, (1988).

Mursaleen, M. and Noman, A.K., "On the spaces of λ −convergent and bounded sequences", *Thai J. Math*., 8 (2), 311-329, (2010).

Mursaleen, M. and Noman, A.K., "On some new difference sequence spaces of non-absolute type", *Math. Comput. Model*., 52, 603-617, (2010).

Ng, P.-N. and Lee, P.-Y., “Cesaro sequence spaces of non-absolute type”, *Comment. Math. Prace Mat*., 20(2), 429-433, (1978).

Sarıgöl, M.A., “On difference spaces”, *J. Karadeniz Tech. Univ. Fac. Art. Sci. Ser. Math. – Phy.*, 10, 63-71, (1987).

Sarıgöl, M.A., “Matrix transformations on fields of absolute weighted mean summability”, *Studia Sci. Math. Hungarica*, 48 (3), 331-341, (2011).

Stieglitz, M. and Tietz, H., “Matrixtransformationen von folgenräumen eine ergebnisübersicht”, *Math. Z.*, 154, 1-16, (1977).

Wilansky, A., *Summability Through Functional Analysis*, North-Holland Mathematics Studies, vol 85, Elsevier Science Publishers, Oxford, (1984).