T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATIK ANABILIM DALI

LİE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİN BAZI KATEGORİKSEL ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LISANS TEZI

PINAR KÜÇÜKER

DENİZLİ, HAZİRAN - 2023

T.C.
PAMUKKALE ÜNIVERSITESI
FEN BILIMLERI ENSTITÜSÜ
MATEMATIK ANABILIM DALI

LİE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİN BAZI KATEGORİKSEL ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LISANS TEZI

PINAR KÜÇÜKER

DENİZLİ, HAZİRAN - 2023

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

PINAR KÜÇÜKER

ÖZET

LİE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİN BAZI KATEGORİKSEL ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LISANS TEZI
PINAR KÜÇÜKER
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATIK ANABILIM DALI

(TEZ DANIŞMANI: DR. ÖĞR. ÜYESİ ALİ AYTEKİN)

DENİZLİ, HAZİRAN - 2023

Lie Çaprazlanmış Modüllerin Bazı Kategoriksel Özellikleri hakkında hazırlanan bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, Lie cebirleri ve çaprazlanmış modüller ile ilgili temel özelliklere yer verilmiştir. İkinci bölümde, bazı kategoriksel özellikler tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde, Lie çaprazlanmış modüller kategorisinde bazı kategoriksel özellikler incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Lie Cebirleri, Çaprazlanmış Modüller, Limit, Ko-limit.

ABSTRACT

SOME CATEGORICAL ASPECTS OF LIE CROSSED MODULES

MSC THESIS
PINAR KÜÇÜKER
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS

(SUPERVISOR: ASST. PROF. DR. ALİ AYTEKİN)

DENİZLİ, JUNE 2023

This thesis based on Some Categorical Aspects of Lie Crossed Modules consist of three chapters. In the first chapter, elementary properties were given about Lie algebras and their crossed modules. In the second chapter, some categorical aspects were introduced. In the third chapter, some categorical aspects were examined in the category of Lie crossed modules.

KEYWORDS: Lie Algebras, Crossed Modules, Limit, Colimit.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tez çalışmamın tüm aşamalarında bilgi ve tecrübesi ile yanımda olan, bana desteğini ve yardımlarını hiç esirgemeyen, her zaman sabırla yol gösteren ve danışmanlık eden çok kıymetli sayın hocam Dr. Öğr. Üyesi Ali AYTEKİN'e; tüm hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan, beni sonsuz saygı ve sevgi ile yetiştiren, daima geliştiren ve mutlu eden çok değerli sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

GİRİŞ

Lie cebirleri, sonsuz küçük dönüşümler kavramını incelemek üzere (Sophus Lie 1871) tarafından tanımlanmıştır ve (Killing 1880, 1885) tarafından Lie'den bağımsız bir şekilde keşfedilmiştir. Daha önceki çalışmalarda "sonsuz küçük grup" şeklinde ifade edilen cebirsel yapıya (Weyl 1931) tarafından "Lie cebir" ismi verilmiştir. Norveçli matematikçi Sophus Lie tarafından, Lie grupları ve cebirleri ile diferansiyel denklem sistemlerinin integrasyonuyla ilgili çalışmalar geliştirilmiştir. Lie cebirleri ve Lie teorisi matematiğin diferansiyel geometri, analiz, topoloji ve cebir gibi pek çok dalında çeşitli uygulamalara sahiptir. Diğer yandan (Adams 1982), (Samelson 1990), (Conway ve Sloane 1991), (Serre 2001), (Carter ve Carter 2005) gibi pek çok araştırmacı basit ve yarı basit Lie cebirleri ile ilgili çalışmalar yapmıştır. Sonlu boyutlu yarı basit Lie cebirleri ile ilgili (Löh 2006) tarafından araştırmalar yapılmıştır. (Bauerle, De Kerf and Kroode 1990) tarafından ise özel lineer Lie cebirlerinin genel yapısı incelenmiştir. Ayrıca (Formanek 1985) bir serbest cebir üzerine etki eden bir sonlu grubun sabit noktalarıyla alakalı sonuçlara ulaşmıştır. (Bryant 1991) ve (Drensky 1994) de serbest Lie cebirleri için benzer sonuçları ispat etmiştir. Ek olarak (Hall 1950) bir serbest Lie cebirinin bazını bulmuştur. (Shirshov 1962) tarafından da Lie cebirlerinde kompozisyon yöntemi geliştirilmiştir ve (Bokut 1972) tarafından yapılan çalışma ile son halini almıştır.

(Whitehead 1941, 1946) tarafından homotopi 2-tiplerin cebirsel modellemesinden bahsedilmiştir. Daha sonra, gruplar üzerinde çaprazlanmış modül kavramı ilk kez (Whitehead 1949) tarafından tanımlanmıştır. Whitehead tarafından yapılan çalışmada özellikle relatif homotopi gruplarının cebirsel yapıları üzerine çaprazlanmış modüllere yer verilmiştir. O dönemden sonra çaprazlanmış modül kavramı pek çok başka alanda yer almıştır. Çaprazlanmış modülleri temel cebirsel yapılardan biri şeklinde düşünmek mümkündür. Bu konudaki çalışmalardan bazıları (Brown ve Higgins 1981), (Brown ve Huebschmann 1981), (Loday 1982) ve (Brown 1982, 1984) tarafından yapılmış olup eskiye dayanmaktadır. Daha yakın tarihte (Ege 1998) tarafından da çaprazlanmış modüller üzerine çalışmalar yapılmıştır. Çaprazlanmış modüllerin homotopi teorisi, cebirsel K-teori, kombinatoriyel grup teori, gruplar üzerinde homoloji ve kohomoloji, devirli homoloji, ve diferansiyel geometri gibi matematiğin pek çok alanında önemli yer tutmaktadır. Ayrıca (Gerstenhaber 1966) ve (Lichtenbaum ve Schlessinger 1967) çalışmalarında ise asosyatif cebirler üzerinde çaprazlanmış modül kavramı yer almıştır. Değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modül kavramını (Porter 1986) tarafından tanımlamıştır ve (Arvasi ve Porter 1996) da çalışmalarında bu konuya dair pek çok önemli sonuca ulaşmıştır. Ek olarak (Lue 1979) ele alınan bir çaprazlanmış modülün otomorfizm grubunun çaprazlanmış modüllerin derivasyon grubuna etkisini göstermiş ve homoloji karenin bazı uygulamaları üzerine çalışmalar yürütmüştür. (Guin-Walery ve Loday 1981) çaprazlanmış kare kavramını cebirsel K-teorideki problemlerde uygulanması amacıyla tanımlamıştır. (Brown ve Loday 1987) ise homoloji karenin bazı uygulamaları üzerine çalışmalar yapmıştır. (Norrie 1987) aktör çaprazlanmış modül kavramını tanımlamıştır. Öte yandan (Conduche 1984) gruplar için 2-çaprazlanmış modüller kavramını tanımlamıştır. (Grandjean ve Vale 1986) tarafından da değişmeli cebirler için 2-çaprazlanmış modüllerin homolojisi üzerine çalışmalar yürütülmüştür. (Arvasi 1997), (Arvasi ve Porter 1998), (Mutlu ve Porter 1998, 2000) ve (Arvasi ve Ulualan 2007) gibi araştırmacılar da konu ile alakalı çalışmalar yapmıştır.

Lie cebirleri için çaprazlanmış modüller ise ilk defa (Kassel ve Loday 1982) tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra yapılan tanımlamanın üzerine (Porter 1978, 1986), (Casas 1990), (Ellis 1993), (Arvasi ve Porter 1996, 1997), (Casas ve Ladra 1998, 2000) ve (Akça ve Arvasi 2002) gibi çalışmalar yapılmıştır. Ayrıca (Shammu 1992) Lie cebir için çaprazlanmış kare tanımını vermiş ve farklı çalışmalarda bulunmuştur. Diğer taraftan (Kan 1958) tarafından simplisel gruplar tanımlanmıştır. (Ellis 1993) de simplisel Lie cebirlerini tanımlamış ve Moore kompleksi 1 olan simplisel Lie cebirler kategorisi ile Lie çaprazlanmış modüller kategorisinin doğal denkliğinin ispatını yapmış, Moore kompleksi 2 olan simplisel Lie cebirler kategorisi ile Lie 2-çaprazlanmış modüller kategorisinin doğal denkliğinin de ispatını yapmıştır.

Kategori teorisi, matematiksel yapılar ve bu yapılar arası ilişkiler ile soyut açıdan ilgilenen bir matematik kuramı olarak bilinmektedir. Farklı kategoriler, funktorlar aracılığıyla ilişkilendirilebilmektedir. Funktorlar, bir kategorinin her bir nesnesini diğer kategorinin bir nesnesi ile ve bir kategorideki morfizmi diğer kategorideki bir morfizm ile ilişkilendiren fonksiyonların bir genelleştirmesi olarak düşünülmektedir. Kategoriler, funktorlar ve doğal transformasyonlar (Eilenberg ve

MacLane 1945) tarafından ortaya atılmıştır. Özellikle cebirsel topolojide, geometrik ve sezgisel bir kavram olan homolojiden aksiyomatik bir yaklaşım olan homoloji teorisine geçiş için mühim bir yer tutmuştur. Kategoriksel özellikler, diğer matematiksel soyut terimler gibi yeni bir dil elde edilmesini sağlamaktadır. Bu dil, düşünce tasarrufuna yardım etmektedir ve farklı alanlarda araştırmacılar arasında daha kolay iletişim sağlanmasının yanı sıra görünüşte ilgisiz çeşitli teoremlerin ve yapıların altında yatan ortak temel fikirleri yüzeye çıkarmaktadır. Bu nedenle eski sorunları görmek için yeni bir bağlam ortaya koymaktadır. Böylece derin, güçlü, klasik sonuçların gerçekte ne olduğunu belirlemeye ve tasvir etmeye yardımcı olmaktadır. Kategoriksel özellikler ile ilgili (MacLane 1969, 1971), (Herrlich ve Strecker 1973) tarafından detaylı çalışmalar yapılmıştır. Ayrıca kategori ve funktorlarla ilgili (Brown 1982, 1984), (Mitchell 1972, 1978), (Amgott 1986) ve (Mosa 1986) gibi araştırmacılar çeşitli çalışmalarda bulunmuştur. Diğer taraftan, kategori teoride bir $M: A \to B$ funktorunun M ko-limiti $colimitM$ biçiminde gösterilmektedir ve bir $f: M \Rightarrow N$ sabit funktoruna giden bir doğal transformasyondur. Bu doğal transformasyonun da sabit funktorlar üzerinde evrensel olduğu bilinmektedir. Başka bir deyişle, eğer N' sabit funktoruna giden bir diğer doğal transformasyon $g: M \Rightarrow N'$ ise bu durumda $h: N' \Rightarrow N'$ doğal transformasyonunun var olduğu bilinmektedir. Tüm bunlara ek olarak ko-eşitleyici ve ko-çarpım, ko-limitin özel birer hali olarak kabul edilmektedir. (Brown ve Higgins 1987) tarafından verilen önerme ile ko-limitin, ko-eşitleyici ve ko-çarpım yardımıyla bulunabileceği gösterilmiştir. Öte yandan (Brown 1984) tarafından gruplar için ve (Shammu 1992) tarafından cebirler için sabit bir R objesi üzerinde çaprazlanmış modüller kategorisinde, ilişkili çaprazlanmış modüllerin kategoriksel özellikleri incelenmiştir.

Lie çaprazlanmış modüllerin bazı kategoriksel özellikleri hakkında yapılan bu çalışmada; Lie cebirleri ve çaprazlanmış modüller ile ilgili bazı temel kavramlara yer verilmiş, Lie cebirleri üzerinde çaprazlanmış modüller ile ilgili bazı kavramlar irdelenmiş, bazı kategoriksel özellikler ele alınmış ve Lie çaprazlanmış modüller kategorisinde kategoriksel özellikler incelenmiştir.

1. LİE CEBİRLERİ VE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

Bir cismin üzerine bir dönüşüm ile tanımlanan vektör uzayı Lie cebir olarak isimlendirilir. Çaprazlanmış modüller ise temel cebirsel yapılardan biri şeklinde düşünülebilir. Bu bölümde Lie cebirleri ve çaprazlanmış modüller ile ilgili bazı temel kavramlara, açıklamalara ve örneklere yer verilmiştir. Detaylı bilgi için (Samelson 1969), (Grandjean 1971), (Guin 1986), (Norrie 1987) ve (Casas 1990) bakılabilir.

1.1 Lie Cebirleri

Tanım 1.1.1 $\boldsymbol{k}$ birimli ve değişmeli bir halka, L bir $\boldsymbol{k}$-modül olmak üzere; her $a, b, c \in L$ için

i. $[a, a] = 0$

ii. $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$

özelliklerini sağlayan bir $[,]: L \times L \to L$ bilineer (iki-lineer) fonksiyonu var ise L ye $\boldsymbol{k}$ üzerinde bir Lie cebir veya Lie $\boldsymbol{k}$-cebir, $[,]$ fonksiyonuna da Lie çarpımı denir. Burada (ii) özelliğine jakobi özdeşliği denir.

(i) sebebiyle; $0 = [a + b, a + b] = [a, b] + [b, a]$ olduğu için,

iii. $[a, b] = -[b, a]$

iv. $[a, [b, c]] = [[a, b], c] + [b, [a, c]]$

elde edilir.

Bu çalışma boyunca Lie $\boldsymbol{k}$-cebir yerine Lie cebir ifadesini kullanacağız.

Örnek 1.1.1 L, $\boldsymbol{k}$ üzerinde bir cebir olmak üzere; ele alınan $[,]: L \times L \to L$ fonksiyonu $[a, b] = ab - ba$ biçiminde tanımlansın. $[,]$ fonksiyonu

i. $[x + x', y] = (x + x')y - y(x + x')$

$$= xy + x'y - yx - yx'$$

$$= xy - yx + x'y - yx'$$

$$= [x, y] + [x', y]$$

ii. $[x, y + y'] = x(y + y') - (y + y')x$

$$= xy + xy' - yx - y'x$$

$$= xy - yx + xy' - y'x$$

$$= [x, y] + [x, y']$$

iii. $r[x, y] = r(xy - yx) = rxy - ryx$

$$= rxy - yrx = [rx, y]$$

$$= xry - ryx = [x, ry]$$

olduğundan bilineerdir. Ayrıca

i. $[a, a] = aa - aa = 0$

ii. $\big[a, [b, c]\big] + \big[b, [c, a]\big] + \big[c, [a, b]\big]$

$$= [a, bc - cb] + [b, ca - ac] + [c, ab - ba]$$

$$= a(bc - cb) - (bc - cb)a + b(ca - ac) - (ca - ac)b + c(ab - ba) - (ab - ba)c = 0$$

olup L, $[,]$ ile birlikte bir Lie cebirdir.

Tanım 1.1.2 L bir Lie cebir olsun. Her $a, b \in L$ için $[a, b] = 0$ oluyor ise, L ye Abelyen (değişmeli) Lie cebir denir.

Tanım 1.1.3 L_1 ve L_2 , $\boldsymbol{k}$ üzerinde iki Lie cebir ve $\partial: L_1 \to L_2$ bir $\boldsymbol{k}$-modül homomorfizmi olsun. Her $a, b \in L_1$ için $\partial([a, b]) = [\partial(a), \partial(b)]$ ise ∂ ye bir Lie cebir homomorfizmi denir. Eğer ∂ bir Lie cebir homomorfizmi ve birebir örten ise ∂ ye bir Lie cebir izomorfizmi, L_1 ve L_2 ye de izomorfiktirler denir.

Tanım 1.1.4 A bir Lie cebir olsun. $B \subseteq A$ olmak üzere, her $a, b \in B$ için $[a, b] \in B$ ve B, A nın alt modülü ise; B ye A nın bir Lie alt cebiri denir. B, A nın Lie alt cebiri ve her $a \in B$, $b \in A$ için $[a, b] \in B$ oluyorsa B ye A nın ideali denir.

1.2 Çaprazlanmış Modüller

Çaprazlanmış modüller, modüller ve ideallerin genişlemesidir. Aynı zamanda herhangi bir halka (cebir) da bir çaprazlanmış modüldür. Dolayısıyla çaprazlanmış modüller, halka kavramının genelleştirilmesi biçiminde düşünülebilir.

Tanım 1.2.1 Bir $\boldsymbol{k}$ sıfırdan farklı birimi olan değişmeli halka, L ve N iki Lie cebir olsun. O halde,

$$N \times L \to L$$

$$(n, l) \mapsto n \cdot l$$

dönüşümü her $k \in \boldsymbol{k}$, $l, l' \in L$, $n, n' \in N$ için

i. $k \cdot (n \cdot l) = (k \cdot n) \cdot l = n \cdot (k \cdot l)$
ii. $n \cdot (l + l') = n \cdot l + n \cdot l'$
iii. $(n + n') \cdot l = n \cdot l + n' \cdot l$
iv. $[n, n'] \cdot l = n \cdot (n' \cdot l) - n' \cdot (n \cdot l)$
v. $n \cdot [l, l'] = [n \cdot l, l'] + [l, n \cdot l']$

şartlarını sağlıyorsa, bu dönüşüme N nin L üzerinde Lie etkisi denir.

Tanım 1.2.2 L ve N iki Lie cebir olsun. $\alpha: L \to N$ bir $\boldsymbol{k}$-cebir morfizmi olmak üzere ve

$$N \times L \to L$$

$$(n, l) \mapsto n \cdot l$$

N nin L üzerine Lie etkisiyle beraber, her $l, l' \in L$ ve $n \in N$ için

i. $\alpha(n \cdot l) = [n, \alpha(l)]$

ii. $\alpha(l) \cdot l' = [l, l']$

şartları sağlanıyorsa (L, N, α) üçlüsüne Lie çaprazlanmış $\boldsymbol{k}$-modül (crossed *k* module) veya kısaca Lie çaprazlanmış modül denir. Yalnızca (i) şartını sağlayan (L, N, α) üçlüsüne Lie ön çaprazlanmış $\boldsymbol{k}$-modül (precrossed *k* module) denir. (ii) özelliğine ise Peiffer özdeşliği denir.

Örnek 1.2.1 L bir Lie cebir ve N, L nin bir ideali olsun. $n \in N$ ve $l \in L$ olmak üzere

$$\partial : N \to L$$

$$n \mapsto n$$

içine dönüşümü alınsın. L nin N üzerine etkisi

$$L \times N \to N$$

$$(l, n) \mapsto [l, n]$$

biçiminde Lie çarpım işlemi olarak verilsin. O halde çaprazlanmış modül aksiyomlarının sağlandığı

i. $\partial(l \cdot n) = \partial[l, n] = [l, n] = [l, \partial n]$

ii. $\partial l \cdot l' = l \cdot l' = [l, l']$

şeklinde gösterilir. Dolayısıyla (N, L, ∂) bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Örnek 1.2.2 L, herhangi bir $\boldsymbol{k}$-modül ve $l_1, l_2 \in L$ olmak üzere

$$L \times L \to \mathrm{L}$$

$$(l_1, l_2) \mapsto [l_1, l_2] = 0$$

çarpımı tanımlansın. L bir Lie cebir yapısı oluşturur.

Diğer taraftan

$$0: L \to N$$

$$x \mapsto 0(x) = 0$$

biçiminde verilen sıfır morfizmi ve

$$N \times L \to \mathrm{L}$$

$$(n, l) \mapsto n \cdot l = nl$$

etkisi her $n \in N,\ l, l' \in L$ için

i. $0(n \cdot l) = 0[n, l] = 0 = [n, 0l]$
ii. $\partial l \cdot l' = 0l' = 0 = [l, l']$

olduğundan $(L, N, 0)$ çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Örnek 1.2.3 L bir Lie N-cebir ve $\beta: L \to N$ ikinci izdüşüm fonksiyonu bir Lie N-cebir morfizmidir. N nin $N \ltimes L$ üzerine Lie etkisi $n' \in N$ ve $(n', l) \in N \ltimes L$ için

$$n' \cdot (l \cdot n) = (n' \cdot l \cdot [n', n])$$

biçiminde tanımlasın. O halde $(N \ltimes L, N, \beta)$ bir ön çaprazlanmış modüldür. Çoğunlukla $(N \ltimes L, N, \beta)$ bir çaprazlanmış modül değildir.

Teorem 1.2.1 (K, W, ∂) bir Lie çaprazlanmış modül olmak üzere, K/K^2 ve $\partial K/\partial K^2$ birer $W/\partial K$-modül yapısı oluşturur.

İspat: ∂K nin K/K^2 üzerine etkisinin incelenmesi için; $j, k \in K$ ve $k + K^2 \in K/K^2$ olup $a = \partial j \in \partial K$ olmak üzere

$$a(k + K^2) = ak + K^2 = \partial jk + K^2 = jk + K^2$$

bulunur. $j, k \in K^2$ ve $K^2/K^2 \cong \{\bar{0}\}$ olduğu için bulunan ifade sıfırı verir. Bu sebeple, ∂K nin K/K^2 üzerine etkisi sıfırdır.

O halde,

$$W/\partial \mathrm{K} \times K/K^2 \rightarrow K/K^2$$

$$(w+\partial k, k+K^2) \rightarrow (w+\partial k)\cdot(k+K^2) = wk+K^2$$

fonksiyonu ile

i. $(w+\partial k)\cdot(k_1+K^2+k_2+K^2) = (w+\partial k)\cdot((k_1+k_2)+K^2)$

$= w\cdot(k_1+k_2)+K^2$

$= (w\cdot k_1 + w\cdot k_2)+K^2$

$= w\cdot k_1 + K^2 + w\cdot k_2 + K^2$

$= (w+\partial k)\cdot(k_1+K^2) + (w+\partial k)\cdot(k_2+K^2)$

ii. $\big((w_1+\partial k)+(w_2+\partial k)\big)\cdot(k+K^2) = \big((w_1+w_2)\cdot\partial k\big)\cdot(k+K^2)$

$= (w_1+w_2)\cdot k + K^2$

$= (w_1\cdot k + w_2\cdot k)+K^2$

$= w_1\cdot k + K^2 + w_2\cdot k + K^2$

$= (w_1+\partial k)\cdot(k+K^2) + (w_2+\partial k)\cdot(k+K^2)$

iii. $\big((w_1+\partial k)\cdot(w_2+\partial k)\big)\cdot(k+K^2) \;=\; \big((w_1\cdot w_2)\cdot\partial k\big)\cdot(k+K^2)$

$= (w_1\cdot w_2)\cdot k + K^2$

$= w_1\cdot(w_2\cdot k)+K^2$

$= (w_1+\partial k)\cdot(w_2\cdot k + K^2)$

$= (w_1+\partial k)\cdot((w_2+\partial k)(k+K^2))$

eşitlikleri sağlandığı için, ∂K bir $W/\partial K$-modüldür. Benzer şekilde $\partial K/\partial K^2$ nin de $W/\partial K$-modül olduğu gösterilebilir.

Tanım 1.2.3 (L, N, α) ve (L', N', α') iki Lie çaprazlanmış modül olmak üzere,

$$f(n \cdot l) = g(n) \cdot f(l)$$

olup

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & L' \arrow[d, "\alpha'"] \\ N \arrow[r, "g"'] & N' \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Dolayısıyla,

$$\alpha' f(l) = g\alpha(l)$$

olacak biçimde $f: L \to L'$, $g: N \to N'$ Lie $\boldsymbol{k}$-cebir morfizmleri varsa

$$(f, g): (L, N, \alpha) \to (L', N', \alpha')$$

morfizmine çaprazlanmış modüller arasındaki morfizm adı verilir. Eğer f ve g örten ise (f, g) ye örten, f ve g bire bir ise (f, g) ye bire bir denir. f, g izomorfizma ise yani f ve g bire bir örten ise

$$(f, g): (L, N, \alpha) \to (L', N', \alpha')$$

morfizmine izomorfizm denir. O halde

$$(f, g)^{-1} = (f^{-1}, g^{-1}): (L', N', \alpha') \to (L, N, \alpha)$$

bir çaprazlanmış modül morfizmidir ve

$$(f, g)^{-1}(f, g) = (Id, Id) = (f, g)(f, g)^{-1}$$

olur. Böylece çaprazlanmış modüllerin kategorisi oluşturulabilir ve bu kategori ***LXMod(k)*** ya da ***LXMod*** biçiminde gösterilir.

Ayrıca $N = N'$ ve g birim dönüşüm ise, f de bir Lie $\boldsymbol{k}$-cebir morfizmi olduğu için

$$f(n \cdot l) = n \cdot f(l)$$

olur ve diyagram değişmeli olduğu için

$$\alpha' f(l) = \alpha(l)$$

eşitliğinin sağlandığı bilindiğinden, f bir çaprazlanmış Lie ***k***-modül morfizmidir. N üzerinde iki çaprazlanmış modülün bileşkesi bir çaprazlanmış Lie ***k***-modül morfizmi olduğu için ***LXMod(k)*** nin bir alt kategorisi bulunur ve bu kategori ***LXMod(k)/N*** ya da ***LXMod/N*** şeklinde gösterilir.

Örnek 1.2.4 (f, I): $(L, N, \alpha) \rightarrow (L', N', \alpha')$ bir çaprazlanmış modül homomorfizmiyse (L, L', f) bir çaprazlanmış modüldür. O halde L' nün L ye etkisi α' yardımıyla, yani her $l' \in L'$ ve $l \in L$ için

$$l' \cdot l = \alpha'(l') \cdot l$$

şeklindedir. $(Id_L, Id_N) : (L, N, \alpha) \rightarrow (L, N, \alpha)$ birim homomorfizmi (I, I) ile gösterilebilir.

Tanım 1.2.4 (L, N, α) bir çaprazlanmış modül olsun. Ayrıca L', L nin ve N', N nin bir alt Lie cebiri olmak üzere

$$\alpha' : \alpha|_L : L' \rightarrow \mathrm{N}'$$

α nın L ye kısıtlanışı ve N' nün L' ne etkisi N nin L üzerine etkisinin kısıtlanışı olmak üzere (L', N', α') çaprazlanmış modülüne, (L, N, α) çaprazlanmış modülünün alt Lie çaprazlanmış modülü kısaca alt çaprazlanmış modülü denir ve $(L', N', \alpha') \leq (L, N, \alpha)$ biçiminde gösterilir.

Örnek 1.2.5 K, N Lie cebirinin bir alt Lie cebiri olmak üzere, burada $(K, K, IdK), (0, K, i), (N, N, IdN)$ ve $(0, N, i)$ birer çaprazlanmış modüldür. Ayrıca (K, K, IdK), (N, N, IdN) nin bir alt çaprazlanmış modülü, $(0, K, i)$ de $(0, N, i)$ nin alt çaprazlanmış modülüdür.

Örnek 1.2.6 I, N Lie cebirinin herhangi bir ideali olsun. (I, N, i), (N, N, Id) çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülüdür.

Örnek 1.2.7 K ve J, N nin ideali; $J \subseteq K$ olmak üzere; (J, K, i), (K, N, i) çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülüdür.

Örnek 1.2.8 K, N-modül; J, K içinde N-alt modül olmak üzere; $(J, N, 0)$, $(K, N, 0)$ çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülüdür.

Tanım 1.2.5 (L, N, α) çaprazlanmış modül ve (L', N', α') alt çaprazlanmış modülü olmak üzere,

i. N', N cebirinin bir idealidir. Yani $N' \trianglelefteq N$ olur.
ii. Her $n \in N$ ve $l' \in L'$ için $n \cdot l' \in L'$
iii. Her $n' \in N'$ ve $l \in L$ için $n' \cdot l \in L'$

şartları sağlanıyorsa (L', N', α') alt çaprazlanmış modülüne, (L, N, α) çaprazlanmış modülünün ideali denir. Ve $(L', N', \alpha') \trianglelefteq (L, N, \alpha)$ biçiminde gösterilir. Burada $(L', N', \alpha') \trianglelefteq (L, N, \alpha)$ oluyorsa $l \in L$ ve $l' \in L$ için

$$[l, l'] = \alpha(l) \cdot l' \in L'$$

olduğundan L', L nin bir idealidir.

Örnek 1.2.9 I, N Lie cebirinin bir ideali olmak üzere (I, I, Id), (N, N, Id) nin ve $(0, I, i)$ de $(0, N, i)$ nin bir çaprazlanmış idealidir.

Örnek 1.2.10 W bir $\boldsymbol{k}$-cebir ve I, W nin ideali, $a \in I$ olmak üzere

$$i: I \to W$$

$$a \mapsto a$$

içine (inclusion) dönüşümü ve W nin I üzerine etkisi

$$W \times I \to I$$

$$(w, a) \mapsto w \cdot a = wa$$

ile birlikte her $w \in W$ ve $a \in I$ için çaprazlanmış modül aksiyomları

i. $\partial(w \cdot a) = \partial(wa) = wa = w\partial(a)$

ii. $\partial a \cdot a' = a \cdot a' = aa'$

olduğundan, (I, W, i) bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Tersine, herhangi bir $\partial: K \to W$ çaprazlanmış W-modül ele alındığında, $\partial K = I$ nın W de ideal olduğu açıktır.

Teorem 1.2.2 $(L', N', \alpha') \leq (L'', N'', \alpha'') \leq (L, N, \alpha)$ şeklindeki alt çaprazlanmış modülleri için; (L', N', α'), (L, N, α) nın ideali ise; (L', N', α'), (L'', N'', α'') nın idealidir.

İspat:

i. $n \in N, n' \in N', n'' \in N'', l \in L$ ve $l' \in L'$ için $(L', N', \alpha') \trianglelefteq (L, N, \alpha)$ olduğu için $N' \trianglelefteq N$ olur. $N' \leq N'' \leq N$ olduğu için $[n', n''] \in N'$ olup; N', N'' nin ideali olur. Yani $N' \trianglelefteq N''$ olur.

ii. $(L', N', \alpha') \trianglelefteq (L, N, \alpha)$ olduğu için $n. l' \in N'$ olur ve $N'' \leq N$ olduğu için $n'' \cdot l' \in L'$ olur.

iii. $n' \cdot l \in L$ ve $L' \leq L'' \leq L$ olduğu için $n' \cdot l'' \in L'$ olur.

Buradan (L', N', α'), (L'', N'', α'') nın ideali olduğu sonucuna ulaşılır ve $(L', N', \alpha') \trianglelefteq (L'', N'', \alpha'')$ biçiminde gösterilir.

Tanım 1.2.6 (L', N', α'), (L, N, α) nın bir ideali olmak üzere; N' nün, L/L' üzerine etkisi

$$N' \times L/L' \to L/L'$$

$$\big(n', (l + L')\big) \mapsto n' \cdot (l + L')$$

olmak üzere

$$n' \cdot (l + L') = n' \cdot l + L'$$

olup $n' \cdot l' \in L'$ olduğu için sıfır olur. Buradan, N/N' bölüm Lie cebiri L/L' üzerine

$$N/N' \times L/L' \ \to L/L'$$

$$\big((n+N'),(l+L')\big) \mapsto n \cdot l + L$$

biçiminde Lie etkisi vardır. Ayrıca

$$\bar{\alpha}: L/L' \to N/N'$$

$$(l+L') \mapsto \alpha(l) + N'$$

bölüm dönüşümü bir Lie cebir homomorfizmidir. Buradan, dönüşüm ve etki fonksiyonu gereğince

$$(L/L', N/N', \bar{\alpha}) \ = \frac{(L,N,\alpha)}{(L',N',\alpha')}$$

Lie çaprazlanmış modül yapısı oluşturulur ve bu yapıya bölüm çaprazlanmış modül denir.

Örnek 1.2.11 N', N nin ideali olmak üzere;

$$\frac{(0,N,i)}{(0,N',i)} = (0, N/N', i)$$

ve

$$\frac{N,N,Id}{N',N',Id} = (N/N', N/N', Id)$$

biçiminde bölüm çaprazlanmış modülleri elde edilir.

Tanım 1.2.7 (X,Y,α), (L,N,α') iki çaprazlanmış modül ve $X \times L$ ile $Y \times N$ Lie cebirlerin direkt çarpımı olsun. Bu durumda

$$\alpha \times \alpha': X \times L \to Y \times N$$

$$(x,l) \mapsto (\alpha(x), \alpha'(l))$$

dönüşümü ve

$$(Y \times N) \times (X \times L) \to Y \times N$$

$$((y, n), (x, l)) \mapsto (y, n) \cdot (x, l) = (y \cdot x, n \cdot l)$$

biçiminde verilmiş olan çaprazlanmış modüllerin indirgenen Lie etkileri ile beraber, $(X \times L, Y \times N, \alpha \times \alpha')$ çaprazlanmış modülü oluşturulabilir. Bu modüle ise (X, Y, α) ve (L, N, α') çaprazlanmış modüllerinin direkt çarpımı denir ve $(X, Y, \alpha) \times (L, N, \alpha')$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.2.8 Bir çaprazlanmış modül morfizmi (f, g): $(L, N, \alpha) \to (L', N', \alpha')$ olsun. Burada,

$$\alpha: Kerf \to Kerg$$

çaprazlanmış modülüne (f, g) morfizminin çekirdeği denir ve $Ker(f, g)$ şeklinde gösterilir.

Teorem 1.2.3 $Ker(f, g) = (Kerf,\ Kerg,\ \alpha)$ çaprazlanmış modülü, (L, N, α) nın bir idealidir.

İspat: $n \in N$, $n_1 \in Kerg$ için,

$$g([n, n_1]) = [g(n), g(n_1)] = [g(n), 0] = 0$$

olduğu için $[n, n_1] \in Kerg$ olur. O halde $Kerg$, N nin idealidir.

Ek olarak, $n \in N$ ve $l_1 \in Kerf$ için

$$f(n \cdot l_1) = g(n) \cdot f(l_1) = g(n) \cdot 0 = 0$$

olduğu için $n \cdot l_1 \in Kerf$ olur.

$n_1 \in Kerg$, $l \in L$ için

$$f(n_1 \cdot l) = g(n_1) \cdot f(l) = 0 \cdot f(l) = 0$$

olduğu için $n_1 \cdot l \in Kerf$ elde edilir.

Tanım 1.2.9 (f,g): $(L,N,\alpha) \to (L',N',\alpha')$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere;

$$\alpha' : Imf \to Img$$

çaprazlanmış modülüne (f,g) morfizminin görüntüsü denir ve $Im(f,g)$ şeklinde gösterilir.

Teorem 1.2.4 (f,g): $(L,N,\alpha) \to (L',N',\alpha')$ bir morfizm olmak üzere; burada $Im(f,g)$, (L',N',α') nın bir alt çaprazlanmış modülüdür.

Teorem 1.2.5 (f,g): $(L,N,\alpha) \to (L^*,N^*,\alpha^*)$ örten olmak üzere; burada (L',N',α'), (L,N,α) nın bir ideali ise $(f,g)(L',N',\alpha') = (f(L'),g(N'),\alpha')$ da (L^*,N^*,α^*) nın bir idealidir.

Tanım 1.2.10 (L',N',α') ve (L'',N'',α''), (L,N,α) nın alt çaprazlanmış modülü olmak üzere,

$$\alpha|_{L' \cap L''} : L' \cap L'' \to N' \cap N''$$

biçiminde indirgenen alt çaprazlanmış modüle (L',N',α') ile (L'',N'',α'') nın arakesiti denir ve $(L',N',\alpha') \cap (L'',N'',\alpha'')$ şeklinde gösterilir.

Teorem 1.2.6 (L',N',α') ve (L'',N'',α''), (L,N,α) çaprazlanmış modülünün ideali ise $(L',N',\alpha') \cap (L'',N'',\alpha'')$ arakesit çaprazlanmış alt modülü de (L,N,α) nın idealidir.

Örnek 1.2.12 N' ve N'' , N nin iki Lie alt cebiri olsun. Bu durumda

$$(0,N',i) \cap (0,N'',i) = (0,N' \cap N'',i)$$

ve

$$(N',N',Id) \cap (N'',N'',Id) = (N' \cap N'',N' \cap N'',Id)$$

olur.

Tanım 1.2.11 (L',N',α') ve (L'',N'',α''), (L,N,α) çaprazlanmış modülünün ideali, $L' + L''$, L de ideallerin toplamı ve $N' + N''$, N de ideallerin toplamı olmak üzere

$$\alpha|_{L'+L''} : L' + L'' \to N' + N''$$

dönüşümü ve N nin L üzerine etkisinden kaynaklanan $N' + N''$ nin $L' + L''$ üzerine etkisi ile birlikte oluşturulan çaprazlanmış modüle (L', N', α') ile (L'', N'', α'') çaprazlanmış modüllerinin toplamı denir ve $(L', N', \alpha') + (L'', N'', \alpha'')$ şeklinde gösterilir.

Örnek 1.2.13 N' ve N'' , N nin iki ideali olsun. Bu durumda

$$(0, N', i) + (0, N'', i) = (0, N' + N'', i)$$

ve

$$(N', N', Id) + (N'', N'', Id) = (N' + N'', N' + N'', Id)$$

olur.

Teorem 1.2.7 (X, Y, ∂) ve (W, B, ∂) çaprazlanmış modülleri (Z, N, ∂) çaprazlanmış modülünün idealleri olsun. Eğer

i. $(X, Y, \partial) + (W, B, \partial) \cong (Z, N, \partial)$
ii. $(X, Y, \partial) \cap (W, B, \partial) = 0$

ise $(Z, N, \partial) \cong (X, Y, \partial) \times (W, B, \partial)$ olur.

Tanım 1.2.12 (Z, N, ∂) çaprazlanmış modülü Teorem 1.2.7 nin şartlarını sağlıyorsa bu (Z, N, ∂) çaprazlanmış modülüne (X, Y, ∂) ve (W, B, ∂) ideallerinin iç çarpımı adı verilir.

Tanım 1.2.13 N bir Lie $\boldsymbol{k}$-cebir olsun ve $d: N \to L$, $\boldsymbol{k}$-lineer dönüşüm olsun. Her $n, n' \in N$ için,

$$d[n, n'] = nd(n') - n'd(n)$$

özelliği sağlanıyor ise d ye bir derivasyon denir. N den L ye tüm derivasyonların kümesi $Der(N)$ şeklinde gösterilir.

Teorem 1.2.8 (I. izomorfizm) $(f,g): (L,N,\alpha) \to (L',N',\alpha')$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere,

$$\frac{(L,N,\alpha)}{Ker(f,g)} \cong Im(f,g)$$

dir.

Teorem 1.2.9 (II. izomorfizm) $(L'',N'',\alpha'') \leq (L,N,\alpha)$ ve $(L',N',\alpha') \trianglelefteq (L,N,\alpha)$ ise

$$\frac{(L',N',\alpha') + (L'',N'',\alpha'')}{(L',N',\alpha')} \cong \frac{(L'',N'',\alpha'')}{(L',N',\alpha') \cap (L'',N'',\alpha'')}$$

dir.

Teorem 1.2.10 (III. izomorfizm) $(L'',N'',\alpha'') \leq (L',N',\alpha')$ ve $(L',N',\alpha') \trianglelefteq (L,N,\alpha)$, $(L'',N'',\alpha'') \trianglelefteq (L,N,\alpha)$ ise

$$\frac{(L,N,\alpha)/(L'',N'',\alpha'')}{(L',N',\alpha')/(L'',N'',\alpha'')} \cong \frac{(L,N,\alpha)}{(L',N',\alpha')}$$

dir.

Tanım 1.2.14 (L,N,α) ve (M,N,θ) çaprazlanmış iki Lie modül olsun ve $\lambda: L \to M$ bir $\boldsymbol{k}$-lineer dönüşüm olmak üzere; her $l, l' \in L$ için,

$$\lambda[l,l'] = \alpha(l).\lambda(l') - \alpha(l').\lambda(l)$$

oluyorsa λ ya L den M ye bir derivasyon denir. Tüm derivasyonların kümesi $Der_N(L,M)$ biçiminde gösterilir. Ayrıca $n \in N$, $\lambda \in Der_N(L,M)$ ve $ad_n: L \to N$ fonksiyonu $ad_n(l) = [n, \alpha(l)]$ biçiminde tanımlansın. Buradan, $\theta\big(\lambda(l)\big) = ad_n(l)$ yani $\theta\lambda = ad_n$ ise (λ, n) ikilisine $Der_N(L,M)$ nin konjugate (eşlenik) elemanı denir.

Tanım 1.2.15 Her $n, n' \in N$ için,

$$\alpha: N \to Der(N)$$

$$w \mapsto \alpha(w) = \alpha_w$$

olmak üzere, $\alpha(n)n' = nn'$ biçiminde tanımlı $\alpha(n) = \alpha_n : N \to N$ dönüşümüne iç (inner) derivasyon denir.

Teorem 1.2.11 $Der_N(L, M)$ nin konjugate elemanlarının oluşturduğu küme bir Lie $\boldsymbol{k}$-cebirdir denir.

Tanım 1.2.16 N nin $Der_N(L, M)$ üzerine etkisi $n \in N$, $(\lambda, y) \in Der_N(L, M)$ olmak üzere ve her $l \in L$ için,

$$\mu(l) = n \cdot \lambda(l) - \lambda(n \cdot l)$$

olmak üzere

$$n \cdot (\lambda, y) = (\mu, [n, y])$$

biçiminde tanımlanır (Casas 1990) ve bu etki Lie etkisidir (Guin 1986).

Teorem 1.2.12 $h(\lambda, n) = n$ biçiminde tanımlanmış olan $h: Der_N(L, M) \to N$ fonksiyonu bir Lie cebir homomorfizmidir ve $h(n(\lambda, y)) = [n, h(\lambda, y)]$ olur.

Teorem 1.2.13 (L, N, α) bir Lie ön çaprazlanmış modül ve (M, N, θ) çaprazlanmış bir Lie modülü olmak üzere, $Der_N(L, M)$ nin konjugati bir ön çaprazlanmış $\boldsymbol{k}$-modüldür.

2. KATEGORİKSEL ÖZELLİKLER

Kategori teorisi temelde genel yapılar ile ilgilidir. Bu bölümde bilinen bazı kategoriksel özelliklerden bahsedilmiştir. Detaylı bilgi için (MacLane 1971) ve (Herrlich ve Strecker 1973) bakılabilir.

$\mathcal{K}$ ile göstereceğimiz kategori aşağıdaki özellikleri sağlayan bir sistemdir.

i. $\mathcal{K}$-obje (ya da $Ob(\mathcal{K})$) elemanlarına obje diyeceğimiz sınıftır.

Bu sınıfın elemanları $A, B, C,$ ... ile gösterilecektir.

ii. $\mathcal{K}$-morfizm (ya da $Mor(\mathcal{K})$ ya da $\mathcal{K}(A, B)$) elemanlarına morfizm diyeceğimiz kümedir.

Bu kümenin elemanları $f, g, h,$ ... ile gösterilecektir.

iii. Her objeye karşılık bir morfizm var olmalıdır. Yani, ele alınan A objesi için

$$1_A: A \to A$$

morfizmi vardır. Bu morfizme birim morfizm adı verilir.

iv. Ele alınan $f: A \to B$ ve $g: B \to C$ morfizm çifti için bir tek

$$gf = gof: A \to C$$

morfizmi vardır. Bu morfizme f ve g nin kompozisyonu adı verilir.

Yani, kompozisyon

$$\mathcal{K}(A, B) \times \mathcal{K}(B, C) \overset{o}{\to} \mathcal{K}(A, C)$$

$$(f, g) \mapsto o(f, g) = gf = gof$$

şeklinde bir fonksiyondur.

Bu durumda $\mathcal{K}$ sistemi aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyorsa $\mathcal{K}$ ye bir kategori denir.

1. (Asosyatiflik) $f: A \to B$, $g: B \to C$ ve $h: C \to D$ morfizmleri için

$$h(gf) = (hg)f$$

dır. Yani

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h(gf)=(hg)f"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "gf" near start] & D \\
B \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, "hg"' near end] & C \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

diyagramı geçerlidir.

2. (Birimlilik) $f: A \to B$ morfizmi için

$$f1_A = 1_B f = f$$

dır. Yani

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f1_A = 1_B f = f"] \arrow[d, "1_A"'] \arrow[dr, "f1_A" near start] & B \\
A \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, "1_B f"' near end] & B \arrow[u, "1_B"']
\end{tikzcd}$$

diyagramı geçerlidir.

Şimdi bazı örnekleri inceleyelim.

$\mathcal{K} = Set$ kümeler kategorisi olmak üzere,

i. $\mathcal{K}$-obje tüm kümelerin sınıfıdır. Yani objeler kümelerdir.
ii. $\mathcal{K}$-morfizm tüm fonksiyonların sınıfıdır. Yani morfizmler fonksiyonlardır.

iii. Birim morfizm, birim fonksiyondur.

iv. Kompozisyon, morfizmler fonksiyon olduğundan bileşke işlemidir.

1. A, B, C, D birer küme olmak üzere

$$A \overset{h}{\to} B \overset{g}{\to} C \overset{f}{\to} D$$

fonksiyonları için $fo(goh) = (fog)oh$ olduğundan asosyatiflik şartı sağlanır.

2. A bir küme, $f: A \to B$ fonksiyon olmak üzere

$$1_A: A \to A$$

$$a \mapsto 1_A(a) = a$$

fonksiyonu her zaman vardır. Ayrıca her $x \in A$ için

$(fo1_A)(x) = f\big(1_A(x)\big) = f(x) \Rightarrow f1_A = f$

$(1_Bof)(x) = 1_B\big(f(x)\big) = f(x) \Rightarrow 1_Bf = f$

olduğundan birimlilik şartı sağlanır. Benzer şekilde, objeler sonlu kümeler alınırsa $\mathcal{K}$ sonlu kümeler kategorisi elde edilir.

$\mathcal{K} = Grp$ gruplar kategorisi olmak üzere,

i. $\mathcal{K}$-obje tüm grupların sınıfıdır. Yani objeler gruplardır.

ii. $\mathcal{K}$-morfizm tüm homomorfizmlerin kümesidir. Yani morfizmler gruplar arasındaki homomorfizmlerdir.

iii. Birim morfizm, birim homomorfizmdir.

iv. Kompozisyon, homomorfizm grup işlemini koruyan fonksiyon olduğundan bileşke işlemidir.

1. $(G,*), (H,\triangle), (K,\square), (M,\#)$ birer grup olmak üzere

$$(G,*) \overset{h}{\to} (H,\triangle) \overset{g}{\to} (K,\square) \overset{f}{\to} (M,\#)$$

homomorfizmaları için $(fog)oh = fo(goh)$ dır. Çünkü

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "(fog)oh = fo(goh)"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "goh"] & M \\
H \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, "fog"'] & K \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

diyagramı geçerlidir. Ayrıca iki grup homomorfizmasının bileşkesinin de bir grup homomorfizması olduğunu göstermeliyiz. Bu sebeple

$$(G,*) \xrightarrow{h} (H,\triangle) \xrightarrow{g} (K,\square)$$

homomorfizmalarının bileşkesi

$$goh: (G,*) \to (K,\square)$$

nin grup homomorfizması olduğunu göstermeliyiz.

Yani, her $a_1, a_2 \in G$ için

$$\begin{aligned}
(goh)(a_1 * a_2) &= g(h(a_1 * a_2)) \\
&= g\big(h(a_1) \triangle h(a_2)\big) \ (\because h\ homomorfizma) \\
&= g\big(h(a_1)\big)\square g\big(h(a_2)\big) \ (\because g\ homomorfizma) \\
&= (goh)(a_1)\square(goh)(a_2)
\end{aligned}$$

geçerlidir.

2. G bir grup, $f: G \to H$ grup homomorfizması olmak üzere

$$1_G: G \to G$$

$$g_1 \mapsto 1_A(g_1) = g_1$$

ve

$$1_H : H \to H$$

$$h_1 \mapsto 1_B(h_1) = h_1$$

grup homomorfizmi vardır. Ayrıca her $x \in G$ için

$(fo1_G)(x) = f\big(1_G(x)\big) = f(x) \Rightarrow f1_G = f$

$(1_H of)(x) = 1_H\big(f(x)\big) = f(x) \Rightarrow 1_H f = f$

olduğundan birimlilik şartı sağlanır. Benzer şekilde, objeler Abelyen gruplar alınırsa $\mathcal{K}$ Abelyen gruplar kategorisi elde edilir.

Şimdi bazı kavramları inceleyelim.

$\mathcal{K}$ bir kategori olsun. $\mathcal{K}$ nin her X objesi için bir tek

$$B \overset{\exists!}{\to} X$$

morfizmi varsa B ye $\mathcal{K}$ nin ilk (başlangıç, initial) objesi denir ve 0 ile gösterilir.

Diğer bir deyişle $\mathcal{K}$ bir kategori, I bir $\mathcal{K}$-obje olsun. Eğer her A bir $\mathcal{K}$-obje iken

$$\mathcal{K}(I, A) = \{f \mid f : I \to A\ morfizm\}$$

tek elemanlı ise I ya $\mathcal{K}$ nin ilk objesi denir.

$\mathcal{K}$ bir kategori olsun. $\mathcal{K}$ nin her X objesi için bir tek

$$X \overset{\exists!}{\to} V$$

morfizmi varsa V ye $\mathcal{K}$ nin son (varış, terminal) objesi denir ve 1 ile gösterilir.

Diğer bir deyişle $\mathcal{K}$ bir kategori, S bir $\mathcal{K}$-obje olsun. Eğer her A bir $\mathcal{K}$-obje iken

$$\mathcal{K}(A, S) = \{f \mid f : A \to S\ morfizm\}$$

tek elemanlı ise S ye $\mathcal{K}$ nin son objesi denir.

2.1 Funktorlar

Funktor, bir $\mathcal{K}$ kategorisinden bir $\mathcal{D}$ kategorisine giden bir ok olarak tanımlanır. Diğer bir deyişle funktor, bir matematiksel yapıdan diğer bir matematiksel yapıya giden bir dönüşümdür. Homomorfizm, cebirsel özellikleri koruyan dönüşüm ise funktorlar da kategoriksel özellikleri koruyan dönüşümdür.

$\mathcal{K}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori olmak üzere,

$$F: \mathcal{K}-morfizm \rightarrow \mathcal{D}-morfizm$$

fonksiyonu

i. (Birimlerin korunması) $\mathcal{K}$ nin her A objesi için $F(1_A) = 1_{F(A)}$

ii. (Kompozisyonların korunması) fog, $\mathcal{K}$ nin bir kompozisyonuysa $F(fog) = F(f)oF(g)$

şartlarını sağlıyorsa F ye $\mathcal{K}$ kategorisinden $\mathcal{D}$ kategorisine bir funktor denir ve

$$F: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{D} \vee \mathcal{K} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \vee (\mathcal{K}, F, \mathcal{D})$$

ile gösterilir.

2.2 Eşitleyici ve Ko-eşitleyici

Tanım 2.2.1 $\mathcal{K}$ bir kategori olmak üzere, $C \xrightarrow{f} D$ ve $C \xrightarrow{g} D$ birbirinden farklı $\mathcal{K}$-morfizm çifti olsun. Bir (E, e) ikilisi, aşağıdaki koşulları sağlıyorsa $\mathcal{K}$ deki f ve g nin eşitleyici objesi (equalizer) olarak adlandırılır.

i. $e: E \rightarrow C$ bir $\mathcal{K}$-morfizm,

ii. $f \circ e = g \circ e$,

iii. Herhangi bir $\mathcal{K}$-morfizm için, $e': E' \rightarrow C$ olmak üzere $f \circ e' = g \circ e'$ ve

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[d, dashed, "\bar{e}"'] \arrow[dr, "e'"] & & \\
E \arrow[r, "e"'] & C \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & D
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde biricik (unique) $\bar{e}: E' \to E$ bir $\mathcal{K}$-morfizm vardır.

Örnek 2.2.1 $\mathcal{K}$ kümeler kategorisi olmak üzere,

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[d, dashed, "k"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
E \arrow[r, "j"'] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

$$E = \{x \in X \,|\, f(x) = g(x) \subseteq X\}$$

kümesi tanımlansın. Buradan

$$j: E \to X$$

$$x \mapsto j(x) = x$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} fj(x) &= f(x) \\ &= g(x) \\ &= g(j(x)) \\ &= gj(x) \end{aligned}$$

olduğundan $fj = gj$ olur. Ayrıca

$$k: Z \to E$$

$$z \mapsto k(z) = h(z)$$

ve

$fh = gh \Rightarrow f\big(h(z)\big) = g(h(z)) \Rightarrow h(z) \in H$

olduğundan $k(z) = h(z)$ biçiminde tanımlanır. O halde, her $z \in Z$ için

$$
\begin{aligned}
jk(z) &= j(k(z)) \\
&= k(z) \\
&= h(z)
\end{aligned}
$$

olduğundan $jk = h$ olur. Buradan, verilen diyagramın değişmeli olduğu sonucuna ulaşılır. Şimdi k nin biricik olduğunu gösterelim.

k' ile k aynı özelliğe sahip iki fonksiyon olmak üzere, $k': Z \to E$ bir morfizm ve $jk' = h$ olur. Buradan, her $z \in Z$ için

$$
\begin{aligned}
jk'(z) &= j(k'(z)) \\
&= k'(z) \\
&= h(z) \\
&= j(k(z)) \\
&= k(z)
\end{aligned}
$$

olduğundan $k'(z) = k(z)$ olur dolayısıyla $k' = k$ olduğundan k biriciktir.

Örnek 2.2.2

$$
\begin{aligned}
f&: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
&(x, y) \mapsto x^2 + y^2 \\
g&: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
&(x, y) \mapsto 1
\end{aligned}
$$

fonksiyonları ele alındığında eşitleyici objesi

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,\big|\, f(x, y) = g(x, y) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1\}$$

biçimindeki birim çemberdir. Buradan

$$j: E \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto (x, y)$$

$$k: Z \to E$$

$$z \mapsto k(z) = h(z)$$

$$h: Z \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$z \mapsto h(z) = (x, y)$$

olur.

Bazı kategorilerde eşitleyici obje yoktur.

Örnek 2.2.3 Objeleri iki elemanlı kümelerden oluşan bir $\mathcal{K}$ kategorisi olmak üzere,

$$E = (e_1, e_2) \to X = (x_1, x_2) \rightrightarrows Y = (y_1, y_2)$$

$(E, j), (f, g)$ nin eşitleyicisi olsun. O halde $f = g$ olur ki bu çelişkidir ($f \neq g$ olmalıdır).

Yani, $\mathcal{K}$ kategorisinin eşitleyici objesi yoktur.

Tanım 2.2.2 $\mathcal{K}$ bir kategori olmak üzere, $C \xrightarrow{f} D$ ve $C \xrightarrow{g} D$ birbirinden farklı $\mathcal{K}$-morfizm çifti olsun. Eğer $j: D \to J$ olmak üzere, ancak ve ancak $j \circ f = j \circ g$ sağlanıyorsa ve her j' morfizmi için $j' \circ f = j' \circ g$ olacak şekilde biricik j bulunabiliyorsa (j, J) ikilisi $\mathcal{K}$ deki f ve g nin ko-eşitleyici objesi (coequalizer) olarak adlandırılır.

2.3 Çarpım ve Ko-çarpım

Teorem 2.3.1 (C, D) küme çiftinin kartezyen çarpımı, $\pi_c: P \to C$ ve $\pi_D: P \to D$ iki izdüşüm fonksiyonu ile birlikte bir $P = C \times D$ kümesidir ve şu özelliğe sahiptir; H herhangi bir küme ve $f: H \to C, g: H \to D$ fonksiyonlar ise, o zaman biricik $h: H \to P$ fonksiyonu vardır ve

$$\begin{tikzcd}
& C \\
H \arrow[ur, "f"] \arrow[r, dashed, "h"'] \arrow[dr, "g"'] & P \arrow[u, "\pi_c"'] \arrow[d, "\pi_D"] \\
& D
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir.

Tanım 2.3.1 $\mathcal{K}$ bir kategori, (C, D) ikilisi $\mathcal{K}$ nin objeleri, ayrıca (P, π_c, π_D) üçlüsünde P bir $\mathcal{K}$-obje olmak üzere; $\pi_c: P \to C, \pi_D: P \to D$ de $\mathcal{K}$-morfizmler olsun. O halde; H bir $\mathcal{K}$-obje ve $f: H \to C, g: H \to D$ keyfi $\mathcal{K}$-morfizmler olmak üzere, burada

$$\begin{tikzcd}
& C \\
H \arrow[ur, "f"] \arrow[r, dashed, "\langle f, g\rangle"'] \arrow[dr, "g"'] & P \arrow[u, "\pi_c"'] \arrow[d, "\pi_D"] \\
& D
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde biricik $\langle f, g\rangle: H \to P$ morfizmi varsa P ye (C, D) nin çarpım objesi (product) denir. Çoğu zaman (P, π_c, π_D) üçlüsü $C \times D$ ile gösterilir. $C \times D$ sembolünün yalnızca P objesini temsil etmek için kullanılması yanlıştır. Unutmamalıdır ki bu çarpım sadece bir obje değil üçlüdür.

Örnek 2.3.1 $\mathcal{K}$ kümeler kategorisi olmak üzere X, Y birer $\mathcal{K}$-obje ve

$$Z = X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

kümesinin X ve Y nin çarpım objesi olduğunu gösterelim.

W kümesi ve $f: W \to X, g: W \to Y$ fonksiyonları verilsin. Buradan

$$\begin{tikzcd}
& X \\
W \arrow[ur, "f"] \arrow[r, dashed] \arrow[dr, "g"'] & Z \arrow[u, "j"'] \arrow[d, "k"] \\
& Y
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde biricik $h: W \to Z$ fonksiyonu var olmalıdır. Bu durumda

$$j: Z = X \times Y \to X$$

$$(x, y) \mapsto x$$

ve

$$k: Z = X \times Y \to Y$$

$$(x, y) \mapsto y$$

olduğundan

$$h: W \to X \times Y$$

$$w \mapsto (f(w), g(w))$$

fonksiyonunun var olduğu bilinmektedir. O halde

$$jh(w) = j\big(f(w), g(w)\big) = f(w)$$

$$kh(w) = k\big(f(w), g(w)\big) = g(w)$$

olduğundan verilen diyagram değişmelidir. Şimdi h nin biricik olduğunu gösterelim.

h' ile h aynı özelliğe sahip olmak üzere

$$h' \colon W \to X \times Y$$

$$w \mapsto (x, y)$$

alalım ve $jh' = f, kh' = g$ olsun. Buradan

$$jh'(w) = j(x, y) = x = f(w)$$

$$kh'(w) = k(x, y) = y = g(w)$$

olduğundan

$$h'(w) = (x, y) = \big(f(w), g(w)\big) = h(w)$$

olur. O halde, $w \in W$ keyfi seçildiği için $h = h'$ olup h biriciktir denir. Buradan X ve Y nin çarpım objesinin $X \times Y$ kümesi olduğu sonucuna ulaşılır.

Örnek 2.3.2 $\mathcal{K}$ gruplar kategorisi olmak üzere A, B birer $\mathcal{K}$-obje ve

$$Z = A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

kümesi

$$(a, b)(a', b') = (aa', bb')$$

işlemine göre bir gruptur. A ve B nin çarpım objesinin verilen küme olduğunu gösterelim.

W bir grup ve $f \colon W \to A, g \colon W \to B$ grup homomorfizmi verilsin. O halde

$$\begin{tikzcd}
 & X \\
W \arrow[ur, "f"] \arrow[r, dashed] \arrow[dr, "g"'] & A \times B \arrow[u, "j"'] \arrow[d, "k"] \\
 & Y
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde biricik $h \colon W \to A \times B$ grup homomorfizmi var olmalıdır. O halde,

$$h: W \to A \times B$$

$$w \mapsto (f(w), g(w))$$

fonksiyonu her $a, b \in W$ için

$$h(ab) = \big(f(ab), g(ab)\big)$$

$$= (f(a)f(b), g(a)g(b))$$

$$= \big(f(a), g(a)\big), (f(b), g(b))$$

$$= (h(a)h(b))$$

olduğundan h bir grup homomorfizmidir.

Ayrıca

$$j: A \times B \to A$$

$$(a, b) \mapsto a$$

$$k: A \times B \to B$$

$$(a, b) \mapsto b$$

$$h: W \to A \times B$$

$$w \mapsto (f(w), g(w))$$

homomorfizmlerinin olduğu bilindiğinden

$$jh(w) = j\big(f(w), g(w)\big) = f(w)$$

$$kh(w) = k\big(f(w), g(w)\big) = g(w)$$

olur ve diyagram değişmelidir denir. Şimdi h nin biricik olduğunu gösterelim.

h' ile h aynı özelliğe sahip olmak üzere

$$h': W \to A \times B$$

$$w \mapsto (a, b)$$

alınsın ve

$$jh' = f$$

$$kh' = g$$

olsun. Buradan

$$jh'(w) = j(a, b) = a = f(w)$$

$$kh'(w) = k(a, b) = b = g(w)$$

olduğundan

$$h'(w) = (a, b) = \big(f(w), g(w)\big) = h(w)$$

olur. O halde, $w \in W$ keyfi seçildiği için $h = h'$ olup h biriciktir denir. Buradan A ve B nin çarpım objesinin $A \times B$ çarpım grubu olduğu sonucuna ulaşılır.

Tanım 2.3.2 $\mathcal{K}$ bir kategori, (C, D) ikilisi $\mathcal{K}$ nin objeleri, ayrıca (α_c, α_D, R) üçlüsünde R bir $\mathcal{K}$-obje olmak üzere; $\alpha_c: C \to R, \alpha_D: D \to R$ de birer $\mathcal{K}$-morfizm olsun. O halde, H bir $\mathcal{K}$-obje ve $f: C \to R, g: D \to R$ keyfi $\mathcal{K}$-morfizmler olmak üzere

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[d, "\alpha_c"'] \arrow[dr, "f"] & \\
R \arrow[r, dashed, "{[f, g]}"'] & H \\
D \arrow[u, "\alpha_D"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde biricik $[f, g]: R \to H$ morfizmi varsa R ye (C, D) nin ko-çarpım objesi (coproduct) denir.

Ek olarak; (α_c, α_D, R) üçlüsü ve genellikle sadece R, sıklıkla $C \sqcup D$ ile gösterilir.

Örnek 2.3.3 $\mathcal{K}$ kümeler kategorisi olmak üzere

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[d, "i_1"'] \arrow[dr, "f_C"] & \\
C \sqcup D \arrow[r, dashed, "\alpha"'] & H \\
D \arrow[u, "i_2"] \arrow[ur, "f_D"'] &
\end{tikzcd}$$

diyagramını ele alalım. $C' = C \times \{1\}$ ve $D' = D \times \{2\}$ kümelerini tanımlayalım.

$$C \sqcup D = C' \cup D', C' \cap D' = \emptyset$$

ve

$$i_1: C \to C \sqcup D$$

$$c \mapsto (c, 1)$$

$$i_2: D \to C \sqcup D$$

$$d \mapsto (d, 2)$$

içine fonksiyonları olsun. O halde

$\alpha: C \sqcup D \to H$

$$h \mapsto \alpha(h) = \begin{Bmatrix} f_C(c); h = (c, 1), c \in C \\ f_D(d); h = (d, 2), d \in D \end{Bmatrix}$$

fonksiyonu için

$$\alpha i_1(c) = \alpha\big((c, 1)\big) = f_C(c)$$

$$\alpha i_2(d) = \alpha\big((d, 2)\big) = f_D(d)$$

olduğundan verilen diyagram değişmelidir. Diğer taraftan α nın biricik olduğunu gösterelim.

Bunun için aynı özellikte α ile α' fonksiyonlarını ele alalım. Yani

$$\alpha' : C \sqcup D \to H$$

ve

$$\alpha' i_1 = f_C$$

$$\alpha' i_2 = f_D$$

olmak üzere, $c \in C$ için

$$\alpha' i_1(c) = \alpha'\big((c,1)\big) = f_C(c)$$

ve $d \in D$ için

$$\alpha' i_2(d) = \alpha'\big((d,2)\big) = f_D(d)$$

olduğundan

$$\alpha'(h) = \begin{Bmatrix} f_C(c); h = (c,1), c \in C \\ f_D(d); h = (d,2), d \in D \end{Bmatrix} = \alpha(h)$$

olup $\alpha = \alpha'$ sonucuna ulaşılır. Buradan, C ve D kümelerinin ko-çarpım objesinin C ve D nin birleşimi olduğu görülür.

Örnek 2.3.4 $\mathcal{K}$ toplamsal Abelyen gruplar kategorisi ve A ve B toplamsal Abelyen gruplar olmak üzere

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "i_1"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A \oplus B \arrow[r, dashed, "\alpha"'] & H \\
B \arrow[u, "i_2"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

diyagramını ele alalım.

$$i_1 : A \to A \bigoplus B$$

$$a \mapsto (a, 0)$$

$$i_2 : B \to A \bigoplus B$$

$$b \mapsto (0, b)$$

fonksiyonları için

$$\begin{aligned} i_1(a_1 + a_2) &= (a_1 + a_2, 0) \\ &= (a_1, 0) + (a_2, 0) \\ &= i_1(a_1) + i_1(a_2) \end{aligned}$$

olduğundan i_1 bir homomorfizmdir. Benzer biçimde i_2 nin de homomorfizm olduğu gösterilebilir. O halde

$$\alpha : A \bigoplus B \to D$$

$$(a, b) \mapsto f(a) + g(b)$$

fonksiyonu

$$\begin{aligned} \alpha((a, b) + (a', b')) &= \alpha(a + a', b + b') \\ &= f(a + a') + g(b + b') \\ &= f(a) + f(a') + g(b) + g(b') \\ &= f(a) + g(b) + f(a') + g(b') \\ &= \alpha\big((a, b)\big) + \alpha((a', b')) \end{aligned}$$

olduğu için α grup homomorfizmidir. Ayrıca

$$\alpha i_1(a) = \alpha(a, 0) = f(a) + g(0) = f(a)$$

olduğu için $\alpha i_1 = f$ olur. Benzer biçimde

$$\alpha i_2(b) = \alpha(0, b) = f(0) + g(b) = g(b)$$

olduğu için $\alpha i_2 = g$ olur. Dolayısıyla verilen diyagram değişmelidir. Diğer taraftan α nın biricik olduğunu gösterelim.

α ile α' aynı özellikte olmak üzere,

$$\alpha' : A \oplus B \to D$$

$$(a, b) \mapsto d$$

grup homomorfizmi $\alpha' i_1 = f$ ve $\alpha' i_2 = g$ olsun. Buradan

$$\alpha' i_1(a) = \alpha'((a, 0)) = f(a)$$

$$\alpha' i_2(b) = \alpha'((0, b)) = f(b)$$

olduğu için

$$\begin{aligned} \alpha'\big((a, b)\big) &= \alpha'((a, 0)) + \alpha'((0, b)) \\ &= f(a) + g(a) \\ &= \alpha((a, b)) \end{aligned}$$

olduğundan $\alpha = \alpha'$ olup α biriciktir. Dolayısıyla A ve B Abelyen gruplarının ko-çarpım objesi $A \oplus B$ (direkt toplam) olur.

2.4 Limit ve Ko-limit

Tanım 2.4.1 $\mathcal{K}$ bir kategori, X bir $\mathcal{K}$-obje ve $(f_i : X \to X_i)_I$ bir $\mathcal{K}$-morfizm olmak üzere $(X, (f_i)_I)$ çiftine $\mathcal{K}$ deki bir kaynak (source) adı verilir. Benzer biçimde, kaynağın duali (ikilisi) olan (f_i, X) çiftine $\mathcal{K}$ deki bir kavşak (sink) adı verilir.

Tanım 2.4.2 $\mathcal{J}$ ve $\mathcal{K}$ birer kategori ve $N: \mathcal{J} \to \mathcal{K}$ bir funktor olsun. N, $\mathcal{K}$ deki $(L, (I_i)_{i \in Ob(I)})$ için bir kaynak olmak üzere; her $i \in Ob(I)$, $I_i: L \to N(i)$ ve $\mathcal{J}$ daki tüm morfizmler $n: i \to j$ için bir doğal kaynak (natural source) adı verilir ve

$$\begin{tikzcd} & N(i) \arrow[dd, "N(n)"] \\ L \arrow[ur, "I_i"] \arrow[dr, "I_j"'] & \\ & N(j) \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Başka bir deyişle; $L: \mathcal{J} \to \mathcal{K}$ her objedeki değeri L olan sabit funktor ve her morfizmdeki değeri 1_L olmak üzere, $(L, (I_i)_{i \in Ob(I)})$ $\mathcal{K}$ deki bir kaynak olsun. Buradan, ancak ve ancak $((I_i)_{i \in Ob(I)})$, L den N ye doğal bir dönüşüm ise $(L, (I_i)_{i \in Ob(I)})$, N için bir doğal kaynaktır.

Tanım 2.4.3 $\mathcal{J}$ ve $\mathcal{K}$ birer kategori ve $((m_i)_{i \in Ob(I)})$, N den sabit funktor olan $M: \mathcal{J} \to \mathcal{K}$ ye doğal bir dönüşüm olmak üzere; kavşak $((m_i)_{i \in Ob(I)})$ ye, N için bir doğal kavşak (natural sink) adı verilir ve

$$\begin{tikzcd} N(i) \arrow[dd, "N(m)"'] \arrow[dr, "I_i"] & \\ & M \\ N(j) \arrow[ur, "I_j"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Gösterimi basitleştirmek için genellikle, $N(i)$ yerine N_i yazılır. Ayrıca, doğal kaynak olan $(L, (I_i)_{i \in Ob(I)})$ yı belirtmek için de $(L, (I_i)_I)$ veya (L, I_i) yazılabilir.

Tanım 2.4.4 $\mathcal{J}$ ve $\mathcal{K}$ birer kategori ve $N: \mathcal{J} \to \mathcal{K}$ bir funktor ve $(\hat{L}, \hat{I}_i)$, N nin herhangi bir doğal kaynağı olsun. Her bir $j \in Ob(\mathcal{J})$ için

$$\begin{tikzcd}
\hat{L} \arrow[d, dashed, "h"'] \arrow[dr, "\hat{I}_i"] & \\
L \arrow[r, "I_j"'] & N_j
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak biçimde biricik $h: \hat{L} \to L$ morfizmi varsa N için bir doğal kaynak olan (L, I_i), N nin limiti olarak adlandırılır.

Tanım 2.4.5 N funktorlarının biricik olmasını tüm doğal kavşaklar sağlıyorsa; bir doğal kavşak olan (m_i, M), N nin ko-limiti (colimit) olarak adlandırılır.

Örnek 2.4.1 $\mathcal{M}$ kategorisinde $\{A, B\}$ bir $\mathcal{M}$-obje ve $1_A: A \to A, 1_B: B \to B$ birer $\mathcal{M}$-morfizm olsun. $N: \mathcal{M} \to \mathcal{K}$ funktorunun doğal kaynağı $f: \Delta_K \Rightarrow N$ doğal dönüşüm yani

$$\begin{tikzcd}
 & N(A) \\
L \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] & \\
 & N(B)
\end{tikzcd}$$

ve benzer biçimde doğal kavşağı

$$\begin{tikzcd}
N(A) \arrow[dr, "g_1"] & \\
 & L \\
N(B) \arrow[ur, "g_2"'] &
\end{tikzcd}$$

olur.

Ayrıca

$$
\begin{tikzcd}
 & N(A) \\
K \arrow[ur] \arrow[r, dashed] \arrow[dr] & L \arrow[u] \arrow[d] \\
 & N(B)
\end{tikzcd}
$$

diyagramından $N(A) \times N(B) = L = LimN$ ve

$$
\begin{tikzcd}
 & N(A) \arrow[d] \\
K \arrow[ur] \arrow[dr] & L \arrow[l, dashed] \\
 & N(B) \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

diyagramından $N(A) + N(B) = ColimN$ olur.

Örnek 2.4.2 $\mathcal{M}$ kategorisi boş kategori olsun. O halde

$$N: \mathcal{M} \to \mathcal{K}$$

$$\{\} \mapsto O$$

funktoru için

$$
\begin{tikzcd}
 & \{\} \\
O \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \{\}
\end{tikzcd}
$$

diyagramı geçerli olduğundan doğal kaynağı O objesidir. Buradan $O = LimN \Leftrightarrow O$, $\mathcal{K}$ nin son objesi olur. Aynı zamanda; $O = ColimN \Leftrightarrow O$, $\mathcal{K}$ nin ilk objesi olur.

Örnek 2.4.3 $\mathcal{M}$ kategorisi $\{A, C\}$ bir $\mathcal{M}$-obje ve $m_A: A \to C, m_B: A \to C$ birer $\mathcal{M}$-morfizm olsun. $N: \mathcal{M} \to \mathcal{K}$ funktoru yani $N(\mathcal{M})$

$$\begin{tikzcd}
 & N(A) \arrow[dd, shift right, "n_A"'] \arrow[dd, shift left, "n_B"] \\
P \arrow[ur, "p_A"] \arrow[dr, "p_C"'] & \\
 & N(B)
\end{tikzcd}$$

diyagramına eşittir. $N(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{K}$ olduğu için N üzerinde doğal kaynak $p: \Delta_P \Rightarrow N$ doğal dönüşüm olduğundan

$$\begin{tikzcd}
 & N(A) \arrow[dd, shift right, "n_A"'] \arrow[dd, shift left, "n_B"] \\
P \arrow[ur, "p_A"] \arrow[dr, "p_C"'] & \\
 & N(C)
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Benzer biçimde doğal kaynağın duali (ikilisi) olan doğal kavşak

$$\begin{tikzcd}
 & N(A) \arrow[dl, "o_A"'] \arrow[dd, shift right, "n_A"'] \arrow[dd, shift left, "n_B"] \\
O & \\
 & N(C) \arrow[ul, "o_c"]
\end{tikzcd}$$

diyagramı şeklindedir. Buradan $(P, p_C, p_A) = LimN \Leftrightarrow (P, p_C), n_A, n_B$ eşitleyicidir. Benzer biçimde $(O, o_C, o_A) = ColimN \Leftrightarrow (O, o_C), n_A, n_B$ ko-eşitleyicidir.

Limitler ve ko-limitler temelde benzersiz olduğu için, geri çekmeler ve ileri itmeler ile ilişkilidir. Bu nedenle, var olduklarında, genellikle bir çift morfizmin geri çekmesinden (veya ileri itmesinden) söz edilir.

2.5 Geri Çekme ve İleri İtme

Tanım 2.5.1 $\mathcal{K}$ bir kategori olmak üzere, $\mathcal{K}$ deki

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "u_2"'] & S_1 \arrow[d, "f_1"] \\
S_2 \arrow[r, "f_2"'] & S_0
\end{tikzcd}
$$

kare diyagramı verilsin. $\mathcal{I}$ bir kategori olmak üzere, $(U,(u_i)_{i=0,1,2})$ nun $S\colon \mathcal{I} \to \mathcal{K}$ fonksiyonunun bir limiti olması durumunda bu diyagram geri çekme karesi (pullback square) olarak adlandırılır. Buradan, $S(m) = f_1, S(n) = f_2, u_0 = f_1 \circ u_1 = f_2 \circ u_2$ olmak üzere; verilen herhangi bir değişmeli kare

$$
\begin{tikzcd}
\hat{U} \arrow[r, "\hat{u}_1"] \arrow[d, "\hat{u}_2"'] & S_1 \arrow[d, "f_1"] \\
S_2 \arrow[r, "f_2"'] & S_0
\end{tikzcd}
$$

için

$$
\begin{tikzcd}
\hat{U} \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, "\hat{u}_2"] \arrow[ddr, "\hat{u}_1"'] & & \\
& U \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "u_2"'] & S_1 \arrow[d, "f_1"] \\
& S_2 \arrow[r, "f_2"'] & S_0
\end{tikzcd}
$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde biricik $h\colon \hat{U} \to U$ morfizmi varsa $(u_1, u_2), (f_1, f_2)$ nin geri çekmesidir. Burada U ise geri çekme objesi (pullback) olarak adlandırılır.

Örnek 2.5.1 $\mathcal{K}$ kümeler kategorisi, X, Y, Z birer $\mathcal{K}$-obje, u, v birer $\mathcal{K}$-morfizm ve

$$ud_1 = vd_2$$

olmak üzere (u, v) nin geri çekmesi

$$W = X \times_Z Y = \{(x, y) \mid u(x) = v(y)\}$$

olur. Çünkü

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[dr, dashed, "d"] \arrow[drr, bend left, "d_2"] \arrow[ddr, bend right, "d_1"'] & & \\
& W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "v"] \\
& X \arrow[r, "u"'] & Z
\end{tikzcd}$$

diyagramını ele alalım ve

$$f: X \times_Z Y \to X$$

$$(x, y) \mapsto x$$

$$g: X \times_Z Y \to Y$$

$$(x, y) \mapsto y$$

fonksiyonları için

$$uf(x, y) = u(x) = v(y) = v\big(g(x, y)\big) = vg(x, y)$$

olduğundan $uf = vg$ olur. Diğer taraftan

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "d_1"'] & Y \arrow[d, "v"] \\
X \arrow[r, "u"'] & Z
\end{tikzcd}$$

diyagramı ve

$$d: Q \to X \times_Z Y$$

$$q \mapsto d(q) = (d_1(q), d_2(q))$$

fonksiyonu için

$$fd(q) = f\big(d_1(q), d_2(q)\big) = d_1(q)$$

olup $fd = d_1$ olur. Benzer biçimde

$$gd(q) = g\big(d_1(q), d_2(q)\big) = d_2(q)$$

olduğundan $gd = d_2$ olur. Şimdi d nin biricik olduğunu gösterelim.

d ve d' aynı özellikte iki fonksiyon olmak üzere

$$d': Q \to X \times_Z Y$$

$$q \mapsto d'(q) = (x, y)$$

olduğundan

$$fd' = d_1$$

ve

$$gd' = d_2$$

olur. Ayrıca

$$fd'(q) = f(x, y) = x = d_1(q)$$

$$gd'(q) = g(x, y) = y = d_2(q)$$

olursa

$$h'(q) = (x, y) = \big(d_1(q), d_2(q)\big) = h(q)$$

olduğundan $d = d'$ olup d biriciktir. Sonuç olarak (u, v) nin geri çekmesi W dir.

Örnek 2.5.2 $\mathcal{K}$ gruplar kategorisi, X, Y, H birer $\mathcal{K}$-obje ve u, v birer $\mathcal{K}$-morfizm olmak üzere (u, v) nin geri çekmesi $(x, y)(x', y') = (xx', yy')$ işlemiyle beraber bir grup olan

$$T = X \times_Z Y = \{(x, y) \mid u(x) = v(y)\}$$

kümesidir. Çünkü

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[dr, dashed, "d"] \arrow[drr, bend left, "d_2"] \arrow[ddr, bend right, "d_1"'] & & \\
& T \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "v"] \\
& X \arrow[r, "u"'] & Z
\end{tikzcd}$$

diyagramını ele alalım. O halde

$$\begin{aligned}
d(qq') &= (d_1(qq'), d_2(qq')) \\
&= (d_1(q)d_1(q'), d_2(q)d_2(q')) \\
&= (d_1(q), d_2(q)) \cdot (d_1(q'), d_2(q')) \\
&= d(q)d(q')
\end{aligned}$$

olduğundan d bir $\mathcal{K}$-morfizm olur. Şimdi d nin biricik olduğunu gösterelim.

d ve d' aynı özellikte iki fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned}
d'(qq') &= (d_1(qq'), d_2(qq')) \\
&= (d_1(q)d_1(q'), d_2(q)d_2(q')) \\
&= (d_1(q), d_2(q)) \cdot (d_1(q'), d_2(q')) \\
&= d'(q)d'(q')
\end{aligned}$$

olduğu için $d' = d_1$ ve $d' = d_2$ olup $d = d'$ olduğundan d biriciktir. Sonuç olarak (u, v) nin geri çekmesi T dir.

Tanım 2.5.2 $\mathcal{K}$ bir kategori, f_2 nin f_1 boyunca direkt görüntüsü ileri itmelere sahip olmak üzere $\mathcal{K}$ deki

$$\begin{tikzcd} S_0 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & S_1 \arrow[d, "v_1"] \\ S_2 \arrow[r, "v_2"'] & V \end{tikzcd}$$

kare diyagramı verilsin. $\mathcal{J}$ bir kategori olmak üzere, $(V, (v_i)_{i=0,1,2})$ nin $S: \mathcal{J} \to \mathcal{K}$ fonksiyonunun bir ko-limiti olması durumunda bu diyagram ileri itme karesi (pushout square) olarak adlandırılır. Buradan, $S(m) = f_1, S(n) = f_2, v_0 = v_1 \circ f_1 = v_2 \circ f_2$ olmak üzere verilen herhangi bir değişmeli kare

$$\begin{tikzcd} S_0 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & S_1 \arrow[d, "\hat{v}_1"] \\ S_2 \arrow[r, "\hat{v}_2"'] & \hat{V} \end{tikzcd}$$

için

$$\begin{tikzcd} S_0 \arrow[r, "v_1"] \arrow[d, "v_2"'] & S_1 \arrow[d, "f_1"] \arrow[ddr, "\hat{v}_2"] & \\ S_2 \arrow[r, "f_2"'] \arrow[drr, "\hat{v}_1"'] & V \arrow[dr, dashed, "h"] & \\ & & \hat{V} \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde biricik $h: V \to \hat{V}$ morfizmi varsa $(v_1, v_2), (f_1, f_2)$ nin ileri itmesidir. Burada V ise ileri itme objesi (pushout) olarak adlandırılır.

Örnek 2.5.3 $\mathcal{K}$ modüller kategorisinde ileri itme objesi bulunur. $X \oplus Y$ direkt toplam, $f_1 : Z \to X, f_2 : Z \to Y$ modül homomorfizmleri olmak üzere

$$v : Z \to X \oplus Y$$

$$z \mapsto (f_1(z), -f_2(z))$$

homomorfizmi tanımlansın. Buradan $v(z) \in Keru$ olmak üzere,

$$Z \xrightarrow{v} X \oplus Y \xrightarrow{u} (X \oplus Y)/Imv$$

$$Keru = Imv$$

$$(f_1(z), -f_2(z)) = (f_1(z), 0) - (0, f_2(z)) = v(z)$$

$$u((f_1(z), 0) - \big(0, f_2(z)\big)) = 0 \Leftrightarrow u(f_1(z), 0) = u(0, f_2(z))$$

olur. Yani,

$$X \xrightarrow{i_1} X \oplus Y \xrightarrow{u} W = (X \oplus Y)/Imv$$

$$g_2 : ui_1 : X \to W$$

ve

$$Y \xrightarrow{i_2} X \oplus Y \xrightarrow{u} W = (X \oplus Y)/Imv$$

$$g_1 : ui_2 : Y \to W$$

homomorfizmleri bulunur. Ayrıca

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & X \arrow[d, "g_2"] \\ Y \arrow[r, "g_1"'] & W \end{tikzcd}$$

diyagramı verilsin. Her $z \in Z$ için

$$
\begin{aligned}
(g_1 f_2)(z) &= (u i_2 f_2)(z) \\
&= (u i_2)(f_2(z)) \\
&= u(i_2(f_2(z))) \\
&= u(0, f_2(z)) \\
&= u(f_1(z), 0) \\
&= u(i_1(f_1(z))) \\
&= (u i_1)(f_1(z)) \\
&= (u i_1 f_1)(z) \\
&= (g_2 f_1)(z)
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$(g_1 f_2) = (g_2 f_1)$$

olur. O halde verilen diyagram değişmelidir. Ek olarak $(h_1 f_2) = (h_2 f_1)$ olduğundan verilen

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & X \arrow[d, "h_2"] \\
Y \arrow[r, "h_1"'] & Q
\end{tikzcd}
$$

diyagramı da değişmelidir. Buradan

$$h_2 \oplus h_1 : X \oplus Y \to Q$$

$$(x, y) \mapsto h_2(x) + h_1(y)$$

homomorfizmi tanımlansın. O halde

$$\begin{tikzcd}
X \oplus Y \arrow[r, "h_2 \oplus h_1"] \arrow[d, "u"'] & Q \\
X \oplus Y/Imf \arrow[ur, dashed, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

diyagramı oluşturulabilir. Şimdi h nin biricik olduğunu gösterelim. Evrensellik özelliği gereğince

$$(h_2 \oplus h_1)(Imf) = \{0\}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. O halde

$$v: Z \to X \oplus Y$$

$$z \mapsto (f_1(z), -f_2(z))$$

olup

$$Imv \trianglelefteq X \oplus Y$$

ve

$$(h_2 \oplus h_1)(Imf) = \{0\}$$

olduğundan diyagram değişmeli olacak biçimde biricik

$$h: X \oplus Y/Imv \to Q$$

homomorfizmi vardır. Şimdi $(h_2 \oplus h_1)(Imv) = \{0\}$ olduğunu gösterelim. Her $z \in Z$ için

$$\begin{aligned}
(h_2 \oplus h_1)\big(v(z)\big) &= (h_2 \oplus h_1)(f_1(z), -f_2(z)) \\
&= h_2(f_1(z)) - h_1(f_2(z)) \\
&= (h_2 f_1)(z) - (h_1 f_2)(z) \\
&= 0 \ (\because \ h_2 f_1 = h_1 f_2)
\end{aligned}$$

dır. Buradan $(h_2 \oplus h_1)(Imv) = \{0\}$ olur. O halde

$$h: W \to Q$$

$$[(x, y)] \mapsto h_1(x) + h_1(y)$$

biricik homomorfizminin var olduğu görülmektedir. Şimdi verilen diyagramın değişmeli olduğu gösterelim. $hg_1 = h_1$ ve $hg_2 = h_2$ olmak üzere

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & X \arrow[d, "g_2"] \arrow[ddr, "h_2"] & \\
Y \arrow[r, "g_1"'] \arrow[drr, "h_1"'] & (X \oplus Y)/Imf \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
& & Q
\end{tikzcd}$$

diyagramı verilsin. Her $y \in Y$ için

$$\begin{aligned}
(hg_1)(y) &= h(g_1(y)) \\
&= h((ui_2)(y)) \\
&= h(u(i_2(y))) \\
&= h(u(0, y)) \\
&= h([(0, y)]) \\
&= h_2(0) + h_1(y) \\
&= 0 + h_1(y) \\
&= h_1(y)
\end{aligned}$$

olduğundan $hg_1 = h_1$ olur. Her $x \in X$ için

$$\begin{aligned}
(hg_2)(x) &= h(g_2(x)) \\
&= h((ui_1)(x))
\end{aligned}$$

$$= h(u(i_1(x)))$$

$$= h(u(x,0))$$

$$= h([(x,0)])$$

$$= h_2(x) + h_1(0)$$

$$= h_2(x) + 0$$

$$= h_2(x)$$

olduğundan $hg_2 = h_2$ olur. Buradan (f_1, f_2) nin ileri itmesi $(X \oplus Y)/Imv$ olur.

3. LİE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER KATEGORİSİNDE KATEGORİKSEL ÖZELLİKLER

Bu bölümde, birinci ve ikinci bölümde bulunan temel yapılar kullanılarak L sabit tabanlı Lie cebirlerinin ***LXMod/L*** kategorisi tanımlanmıştır. Bu kategoride objeler, L sabit tabanlı Lie cebirlerinin çaprazlanmış modülleridir. ***LXMod/L*** nin bir nesnesine (M, L, β) çaprazlanmış L-modülü denir ve kısaca (M, β) ile gösterilir. Çaprazlanmış L-modülleri (M, β) ve (M', β') arasındaki morfizm, Lie cebirlerinin $f: M \to M'$ homomorfizmi olmak üzere

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, "\beta"] \arrow[dd, "f"'] & \\
& L \\
M' \arrow[ur, "\beta'"'] &
\end{tikzcd}
$$

diyagramı değişmelidir.

Teorem 3.1 ***LXMod/L*** kategorisinde aynı çaprazlanmış modüller arasındaki iki morfizma bir eşitleyiciye sahiptir.

İspat: ***LXMod/L*** kategorisinde $f, g: (M, \beta) \to (M', \beta')$ iki morfizma

$$E = \{m \in M: f(m) = g(m)\} \text{ ve } \gamma = \beta\big|_E: E \to L$$

olmak üzere, her $l \in L, e \in E, l \cdot e \in E$ için

$$f(l \cdot e) = l \cdot f(e) = l \cdot g(e) = g(l \cdot e)$$

dir. Diğer taraftan her $l \in L$ ve $e, e' \in E$ için

i. $\gamma(l \cdot e) = \beta(l \cdot e) = [l, \beta(e)] = [l, \gamma(e)]$
ii. $\gamma(e) \cdot e' = \beta(e) \cdot e' = [e, e']$

olduğundan (E,γ) bir çaprazlanmış L-modüldür. Ek olarak, $h:(E,\gamma)\to(M,\beta)$ morfizmi için

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "h"'] & L \arrow[d, equal, "Id_L"] \\ M \arrow[r, "\beta"'] & L \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. O halde, (E',γ') bir çaprazlanmış L-modül ve tanımlanan $v:(E',\gamma')\to(M,\beta)$ morfizmi için $fv=gv$ olur. O halde

$$u: E'\to E$$

$$e'\mapsto u(e')=v(e')$$

morfizmi olmak üzere, her $e'\in E'$ için $(hu)(e')=h\big(u(e')\big)=h\big(v(e')\big)=v(e')$ olduğundan $hu=v$ olur. Şimdi u nun biricik olduğunu gösterelim.

u' ile u aynı özellikte iki morfizma olmak üzere $v=hu$ ve $v=hu'$ olup $hu=hu'$ olur. Ayrıca, her $e'\in E'$ için

$$v(e')=(hu)(e')=(hu')(e')$$

$$h\big(u(e')\big)=h\big(u'(e')\big)$$

$$u(e')=u'(e')$$

olduğundan $u=u'$ olur. Dolayısıyla u biriciktir. Bu morfizm

$$\begin{tikzcd} (E,\gamma) \arrow[r, "h"] & (M,\beta) \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & (M',\beta') \\ (E',\gamma') \arrow[u, dashed, "u"] \arrow[ur, "v"'] & & \end{tikzcd}$$

diyagramıyla gösterilebilir. Buradan (E,h), (f,g) nin eşitleyicisidir.

Teorem 3.2 ***LXMod/L*** kategorisi geri çekmelere sahiptir.

İspat: ***LXMod/L*** kategorisinde $f:(M,\beta)\to(M',\beta')$ ve $g:(N,\gamma)\to(M',\beta')$ iki morfizm olmak üzere

$$S = M\times_{M'} N = \{(m,n): f(m) = g(n)\}$$

ve S üzerindeki braket (parantez) işlemi her $(m,n),(m',n')\in S$ için $[(m,n),(m',n')] = ([m,m'],[n,n'])$ olup

$$\alpha: S\to L$$

$$(m,n)\mapsto \alpha(m,n) = \beta(m) = \gamma(n)$$

morfizmi ile L nin S üzerine etkisi her $l\in L$ ve $(m,n)\in S$ için

$$l\cdot(m,n) = (l\cdot m, l\cdot n)$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca her $(m,n),(m',n')\in S$ için

i. $$\begin{aligned}\alpha\big(l\cdot(m,n)\big) &= \alpha(l\cdot m, l\cdot n)\\ &= \beta(l\cdot m)\\ &= [l,\beta(m)]\\ &= [l,\alpha(m,n)]\end{aligned}$$

ii. $$\begin{aligned}\alpha(m,n)\cdot(m',n') &= \beta(m)\cdot(m',n')\\ &= (\beta(m)\cdot m', \beta(m)\cdot n')\\ &= (\beta(m)\cdot m', \gamma(n)\cdot n')\\ &= ([m,m'],[n,n'])\\ &= [(m,n),(m',n')]\end{aligned}$$

olduğu için (S,α) bir çaprazlanmış L-modüldür. Ek olarak, $f(m) = g(n)$ için

$$\begin{tikzcd}
(S,\alpha) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & (M,\beta) \arrow[d, "f"] \\
(N,\gamma) \arrow[r, "g"'] & (M',\beta')
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Buradan, her $l \in L$ ve $(m,n) \in S$ için

$$(\beta u)(m,n) = \beta\big(u(m,n)\big) = \beta(m) = \alpha(m,n) = (1_L\alpha)(m,n)$$

ve

$$u\big(l \cdot (m,n)\big) = \alpha(l \cdot m, l \cdot n) = l \cdot m = 1_L(l) \cdot u(m,n)$$

olduğundan u bir çaprazlanmış L-modül homomorfizmi olur. Benzer biçimde v nin de bir çaprazlanmış L-modül homomorfizmi olduğu gösterilebilir. Şimdi (S',α') nın bir çaprazlanmış L-modül olduğunu gösterelim.

$fu' = gv'$ olduğundan

$$\begin{tikzcd}
(S',\alpha') \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "v'"'] & (M,\beta) \arrow[d, "f"] \\
(N,\gamma) \arrow[r, "g"'] & (M',\beta')
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Buradan, her $(m',n') \in S$ ve $\big(u'(m',n'), v'(m',n')\big) \in S$ için

$$\begin{aligned}
(fu')(m',n') &= f(u'(m',n')) \\
&= f(m') \\
&= g(n') \\
&= g(v'(m',n')) \\
&= (gv')(m',n')
\end{aligned}$$

olur.

d bir L-modül morfizmi olmak üzere

$$w: S' \to S$$

$$d \mapsto w(d) = (u'(d), v'(d))$$

olursa

$$\begin{tikzcd}
(S', \alpha') \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "v'"'] \arrow[dr, dashed, "w"] & (M, \beta) \\
(N, \gamma) & (M', \beta') \arrow[l, "v"] \arrow[u, "u"']
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Şimdi w nin biricik olduğunu gösterelim.

w' ve w aynı özellikte olmak üzere, her $d \in S'$ için

$$uw = u'$$

$$uw' = u'$$

$$w(d) = \big(u'(d), v'(d)\big) = w'(d)$$

olur. Dolayısıyla w biriciktir. Buradan

$$\begin{tikzcd}
(S', \alpha') \arrow[dr, dashed, "w"] \arrow[drr, "u'"] \arrow[ddr, "v'"'] & & \\
& (S, \alpha) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"] & (M, \beta) \arrow[d, "f"] \\
& (N, \gamma) \arrow[r, "g"'] & (M', \beta')
\end{tikzcd}$$

diyagramı geçerlidir. O halde (S, α), (f, g) nin geri çekmesidir.

Teorem 3.3 ***LXMod/L*** kategorisi sonlu çarpımlara sahiptir.

İspat: ***LXMod/L*** kategorisinde (M,β) ve (N,γ) çaprazlanmış modüller olsun. Buradan β ve γ nın çarpım objesinin $(p: M \times_L N \to L)$ objesi olduğu gösterelim. O halde,

$$M \times N = \{(m,n): m \in M, n \in N\}$$

olmak üzere,

$$f: M \times_L N \to L$$

$$(m,n) \mapsto f(m,n) = \beta(m) = \gamma(n)$$

morfizmi ve

$$L \times (M \times_L N) \to L$$

$$\big(l,(m,n)\big) \mapsto l \cdot (m,n) = (l \cdot m, l \cdot n)$$

Lie etkisiyle birlikte $p: M \times_L N \to L$ çaprazlanmış modüldür. Ayrıca, çaprazlanmış L-modülün

$$u: M \times N \to M$$

$$(m,n) \mapsto m$$

ve

$$v: M \times N \to N$$

$$(m,n) \mapsto n$$

iki homomorfizmi olmak üzere

$$\beta \overset{u}{\leftarrow} (p: M \times_L N \to L) \overset{v}{\rightarrow} \gamma$$

olup

$$
\begin{tikzcd}
& \beta \\
\delta \arrow[ur, "f"] \arrow[r, dashed, "h"'] \arrow[dr, "g"'] & p \arrow[u, "u"'] \arrow[d, "v"] \\
& \gamma
\end{tikzcd}
$$

değişmeli diyagramı elde edilir. Çünkü

$$h: S \to M \times N$$

$$s \mapsto h(s) = (f(s), g(s))$$

olmak üzere,

$$(uh)(s) = u\big(h(s)\big) = u\big(f(s), g(s)\big) = f(s)$$

ve

$$(vh)(s) = v\big(h(s)\big) = v\big(f(s), g(s)\big) = g(s)$$

olduğundan $uh = f$ ve $vh = g$ olur. Ek olarak her $l \in L, s \in S$ için

$$
\begin{aligned}
h(l \cdot s) &= \big(f(l \cdot s), g(l \cdot s)\big) \\
&= (l \cdot f(s), l \cdot g(s)) \\
&= l \cdot (f(s), g(s)) \\
&= l \cdot h(s)
\end{aligned}
$$

olduğundan h bir homomorfizmdir. Şimdi h nin biricik olduğunu gösterelim.

h' ve h aynı özellikte olmak üzere,

$$h': S \to M \times N$$

$$s \mapsto h(s) = (f(s), g(s))$$

olup $uh' = f$ ve $vh' = g$ olsun. O halde,

$$(uh')(s) = u\big(h'(s)\big) = u\big(f(s), g(s)\big) = f(s)$$

$$(vh')(s) = v\big(h'(s)\big) = v\big(f(s), g(s)\big) = g(s)$$

$$h'(s) = \big(f(s), g(s)\big) = h(s)$$

olduğundan $h = h'$ olur. Dolayısıyla h biriciktir. Buradan, $(p: M \times_L N \to L)$ objesi $\beta: (M \to L)$ ve $\gamma: (N \to L)$ objelerinin çarpım objesidir.

Sonuç 3.1 ***LXMod/L*** kategorisi sonlu tamdır (complete). Diğer bir deyişle bu kategori sonlu limitlere sahiptir.

İspat: ***LXMod/L*** kategorisi eşitleyici ve çarpıma sahip olduğu için sonlu limitlere sahiptir.

Teorem 3.4 ***LXMod/L*** kategorisinde aynı çaprazlanmış modüller arasındaki iki morfizma bir ko-eşitleyiciye sahiptir.

İspat: ***LXMod/L*** kategorisinde $f, g: (M, \beta) \to (N, \gamma)$ iki morfizma ve $\{f(m) - g(m): m \in M\}$ tarafından üretilen ideal Q olmak üzere

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "\beta"'] & J \arrow[dl, "\varphi"] \\ L & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Her $m \in M$ için $\varphi\big(f(m) - g(m)\big) = 0$ olup

$$Q \subseteq Ker\varphi$$

olur. Ayrıca J/Q bir Lie cebiri olmak üzere her $j + Q, j' + Q \in J/Q$ için

$$[j + Q, j' + Q] = [j, j'] + Q$$

olur. O halde $l \in L, j + Q \in J/Q$ için

$$\gamma : J/Q \to L$$

$$j + Q \mapsto \gamma(j + Q) = \varphi(j)$$

ve

$$L \times J/Q \to J/Q$$

$$(l, j + Q) \mapsto l \cdot (j + Q) = l \cdot j + Q$$

tanımlansın. Bu durumda $j + Q, j' + Q \in J/Q$ için

i. $\gamma(l \cdot (j + Q)) = \gamma(l \cdot j + Q)$

$= \varphi(l \cdot j)$

$= [l, \varphi(j)]$

$= [l, \gamma(j + Q)]$

ii. $\gamma(j + Q) \cdot (j' + Q) = \varphi(j) \cdot (j' + Q)$

$= \varphi(j) \cdot j' + Q$

$= [j, j'] + Q$

$= [j + Q, j' + Q]$

olduğundan $(J/Q, \gamma)$ bir çaprazlanmış L-modüldür. Buradan, $\alpha(j) = j + Q$ olacak şekilde α morfizmi için

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[dr, "\beta"'] & J \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"] & J/Q \arrow[dl, "\gamma"] \\
 & L &
\end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramı vardır.

Ek olarak, çaprazlanmış L-modülde $\delta: J \to D$ homomorfizmi için $\delta f = \delta g$ olmak üzere

$$u: J/Q \to D$$

$$j + Q \mapsto u(j + Q) = \delta(j)$$

morfizmi olsun. Her $j \in J$ için

$$(u\alpha)(j) = u\big(\alpha(j)\big) = u(j + Q) = \delta(j)$$

olup $u\alpha = \delta$ olur. Buradan

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & J \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\delta"'] & J/Q \arrow[d, dashed, "u"] \\
 & & D
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Ayrıca, her $j \in J$ için u nun biricik olduğunu gösterelim.

u' ile u aynı özellikte iki morfizm olmak üzere

$$u\alpha = \delta = u'\alpha$$

$$(u\alpha)(j) = (u'\alpha)(j)$$

$$u(j + Q) = u'(j + Q)$$

olduğundan $u = u'$ olur. Dolayısıyla u biriciktir. Buradan J/Q, (f, g) nin ko-eşitleyicisidir.

Teorem 3.5 ***LXMod/L*** kategorisi sonlu ko-çarpımlara sahiptir.

İspat: ***LXMod/L*** kategorisinde (M, β) ve (N, γ) çaprazlanmış modüller olsun. O halde, her $m \in M$ ve $n \in N$ için M nin N üzerinde γ aracılığıyla

$$n \cdot m = \gamma(n) \cdot m$$

biçiminde bir etkisi vardır. Bu etki yardımıyla

$$M \rtimes N = \{(m,n) : m \in M, n \in N\}$$

kümesi her $(m,n),(m',n') \in M \rtimes N$ için

$$[(m,n),(m',n')] = ([m,m'] + n \cdot m' - n' \cdot m, [n,n'])$$

$$= ([m,m'] + \gamma(n) \cdot m' - \gamma(n') \cdot m, [n,n'])$$

braketi ile birlikte bir Lie cebir yapısı oluşturur. Ayrıca her $l \in L$, $(m,n) \in M \rtimes N$ için L nin $M \rtimes N$ üzerine etkisi

$$l \cdot (m,n) = (l \cdot m, l \cdot n)$$

şeklindedir. İki morfizm

$$u : N \to M \rtimes N$$

$$n \mapsto (0,n)$$

ve

$$v : M \to M \rtimes N$$

$$m \mapsto (m,0)$$

olmak üzere her $m,m' \in M, n,n' \in N$ için

$$u([n,n']) = (0,[n,n'])$$

$$= ([0,0],[n,n'])$$

$$= [(0,n),(0,n')]$$

$$= [u(n),u(n')]$$

ve

$$v([m,m']) = ([m,m'],0)$$

$$= ([m,m'],[0,0])$$

$$= [(m,0),(m',0)]$$

$$= [v(m),v(m')]$$

olduğundan u ve v Lie cebir homomorfizmidir. Şimdi

$$\alpha' : M \rtimes N \to L$$

$$(m,n) \mapsto \alpha'(m,n) = \beta(m) + \gamma(n)$$

olmak üzere, $m' \in M, n \in N$ için

$$(\beta(m') \cdot n, \gamma(n) \cdot m')$$

olup I ve R, $M \rtimes N$ nin idealidir. Böylece

$$\alpha : M \rtimes N/R \to L$$

$$(m,n) + R \mapsto \alpha\big((m,n) + R\big) = \alpha'(m,n) = \beta(m) + \gamma(n)$$

homomorfizmi tanımlanabilir. Buradan, her $l \in L$ ve $(m,n),(m',n') \in M \rtimes N$ için

i. $\alpha\Big(l \cdot \big((m,n) + R\big)\Big) = \alpha((l \cdot m, l \cdot n) + R)$

$= \alpha'(l \cdot m, l \cdot n)$

$= \beta(l \cdot m) + \gamma(l \cdot n)$

$= [l, \beta(m)] + [l, \gamma(n)]$

$= [l, \beta(m) + \gamma(n)]$

$= [l, \alpha'(m,n)]$

$= [l, \alpha((m,n) + R)]$

ii. $\alpha\big((m,n)+R\big)\cdot\big((m',n')+R\big)=\alpha'(m,n)\cdot\big((m',n')+R\big)$

$=(\beta(m)+\gamma(n))\cdot\big((m',n')+R\big)$

$=\big((\beta(m)+\gamma(n)\big)\cdot m',(\beta(m)+\gamma(n))\cdot n')$

$=(\beta(m)\cdot m'+\gamma(n)\cdot m',\beta(m)\cdot n'+\gamma(n)\cdot n')$

$=([m,m']+\gamma(n)\cdot m',\beta(m)\cdot n'+[n,n'])$

$=([m,m'],[n,n'])+\gamma(n)\cdot m',\beta(m)\cdot n')$

$=([m,m'],[n,n'])+R$

$=[(m,n),(m',n')]+R$

$=[(m,n)+I,(m',n')+R]$

olduğundan $((M\rtimes N)/R,\alpha)$ çaprazlanmış L-modüldür.

Diğer taraftan

$$u_1\colon N\to(M\rtimes N)/R$$
$$n\mapsto(0,n)+R$$
$$v_1\colon M\to(M\rtimes N)/R$$
$$m\mapsto(m,0)+R$$

ve

$$h\colon(M\rtimes N)/R\to S$$
$$(m,n)+R\mapsto h\big((m,n)+R\big)=f(m)+g(n)$$

olmak üzere

$$
\begin{tikzcd}
(M,\beta) \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "v_1"] & \\
((M \rtimes N)/R, a) \arrow[r, dashed, "h"'] & (S,\delta) \\
(N,\gamma) \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "u_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

diyagramı oluşturulur ve bu diyagram her $m \in M, n \in N$ için

$$(hu_1)(n) = h(u_1(n)) = h\big((0,n) + R\big) = f(0) + g(n) = g(n)$$

ve

$$(hv_1)(m) = h(v_1(m)) = h\big((m,0) + R\big) = f(m) + g(0) = f(m)$$

olduğundan değişmelidir. Şimdi h nin biricik olduğunu gösterelim.

h' ve h aynı özellikte olmak üzere,

$$h' : (M \rtimes N)/R \to S$$

$$(m,n) + R \mapsto s$$

olup h' çaprazlanmış modül morfizmi $h'u_1 = g$ ve $h'v_1 = f$ olduğundan $h = h'$ olur. Dolayısıyla h biriciktir. Sonuç olarak, $((M \rtimes N)/R, \alpha)$ objesi (M,β) ve (N,γ) objelerinin ko-çarpım objesidir.

Teorem 3.6 ***LXMod/L*** kategorisi ileri itmelere sahiptir.

İspat: ***LXMod/L*** kategorisinde $f : (M,\beta) \to (U,\alpha)$ ve $g : (M,\beta) \to (V,\eta)$ iki morfizm olmak üzere her $u \in U, v \in V, m \in M$ için

$$(\alpha(u) \cdot v, \eta(v) \cdot u)$$

ve

$$(g(m), -f(m))$$

tarafından üretilen ideal W olsun. Buradan

$$\varphi\colon \frac{V \rtimes U}{W} \to L$$

$$(v,u)+W \mapsto \varphi\big((v,u)+W\big)=\alpha(u)+\eta(v)$$

homomorfizmi ile birlikte $(\frac{V\rtimes U}{W},\varphi)$ bir çaprazlanmış L-modüldür. Ayrıca

$$h_1\colon V \to \frac{V \rtimes U}{W}$$

$$v \mapsto (v,0)+W$$

$$h_2\colon U \to \frac{V \rtimes U}{W}$$

$$u \mapsto (0,u)+W$$

morfizmleri olmak üzere, her $m \in M$ için

$$\big(g(m),-f(m)\big)=-\big(0,f(m)\big)+(g(m),0)\in W$$

olur ve $h_2 f = h_1 g$ olup

$$\begin{tikzcd}
(M,\beta) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & (U,\alpha) \arrow[d, "h_2"] \\
(V,\eta) \arrow[r, "h_1"'] & (\frac{V\rtimes U}{W},\varphi)
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir.

Ek olarak $w_1\colon U \to S, w_2\colon V \to S$ morfizmleri olmak üzere

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[d, "h_1"'] \arrow[dr, "w_2"] & \\
\frac{V \rtimes U}{W} \arrow[r, dashed, "w"'] & S \\
U \arrow[u, "h_2"] \arrow[ur, "w_1"'] &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak biçimde

$$w: \frac{V \rtimes U}{W} \to L$$

$$(v,u) + W \mapsto w\big((v,u) + W\big) = w_1(u) + w_2(v)$$

morfizmi tanımlanabilir. Şimdi w nin biricik olduğunu gösterelim.

w' ve w aynı özellikte olmak üzere,

$$w': \frac{V \rtimes U}{W} \to L$$

$$(v,u) + W \mapsto l$$

olup w' çaprazlanmış modül morfizmi $w'h_2 = w_1$ ve $w'h_1 = w_2$ olduğundan $w = w'$ olur. Dolayısıyla w biriciktir. O halde

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & U \arrow[d, "h_2"] \arrow[ddr, "w_1"] & \\
V \arrow[r, "h_1"'] \arrow[drr, "w_2"'] & \frac{V \rtimes U}{W} \arrow[dr, dashed, "w"'] & \\
 & & S
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olup $(\frac{V \rtimes U}{W})$, (f,g) nin ileri itmesidir.

Sonuç 3.2 ***LXMod/L*** kategorisi sonlu ko-tamdır (cocomplete). Diğer bir deyişle bu kategori sonlu ko-limitlere sahiptir.

İspat: ***LXMod/L*** kategorisi ko-eşitleyici ve ko-çarpıma sahip olduğundan sonlu ko-limitlere sahiptir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Lie çaprazlanmış modüllerin bazı kategoriksel özellikleri ele alındı. İlk olarak Lie cebirleri ve çaprazlanmış modüller ile ilgili temel kavramlara ve özelliklere yer verildi. Sonra eşitleyici, ko-eşitleyici, çarpım, ko-çarpım, limit, ko-limit, geri çekme, ileri itme gibi bazı kategoriksel özellikler tanıtıldı. En son ise Lie çaprazlanmış modüller kategorisinde bazı kategoriksel özellikler incelendi.

KAYNAKLAR

Adams, J. F., *Lectures on Lie groups*, USA: University of Chicago Press, (1982).

Akça, İ. and Arvasi, Z., "Simplicial and Crossed Lie Algebras,Homology", *Homotopy and Applications*, 4 (1), 43-57, (2002).

Amgott, S. M., "Separable categories", *Journal of Pure and Applied Algebra*, 40, 1-14, (1986).

Arvasi, Z., "Crossed Squares and 2-Crossed Modules of Commutative Algebras", *Theory and Applications of Categories*, 3 (7), 160-181, (1997).

Arvasi, Z. and Porter, T., "Freeness Conditions for 2-Crossed Modules of Commutative Algebras", *Applied Categorical Structures*, 6 (4), 455-471, (1998).

Arvasi, Z. and Porter, T., "Higher dimensional Peiffer elements in simplicial commutative algebras", *Theory and Applications of Categories*, 3 (1), 1-23, (1997).

Arvasi, Z. and Porter, T., "Simplicial and Crossed Resolutions of Commutative Algebras", *Journal of Algebras*, 181, 426-448, (1996).

Arvasi, Z. and Ulualan, E., "Quadratic and 2-Crossed Modules of Algebras", *Algebra Colloquium*, 14 (4), 669-686, (2007).

Aytekin, A., "Categorical structures of Lie-Rinehart crossed module", *Turkish Journal of Mathematics*, 43, 511-522, (2019).

Aytekin, A., "(Co)Limits of Hom-Lie Crossed Module", *Turkish Journal of Mathematics*, 45 (5), 2140-2153, (2021).

Aytekin, A., "Lie Cebirlerinin Çaprazlanmış Modülleri", Yüksek Lisans Tezi, *Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, (2005).

Aytekin, A., "Lie-Rinehart Cebirlerin Çaprazlanmış Modülleri", Doktora Tezi, *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, (2010).

Bäuerle, G. G., de Kerf, E. and ten Kroode, A. P. E., *Lie algebras: finite and infinite dimensional Lie algebras and applications in physics*, North-Holland: Sole distributors for the U.S.A. and Canada, Elsevier Science Pub. Co., (1990).

Bokut, L. A. E., "Unsolvability of the equality problem and subalgebras of finitely presented Lie algebras", *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya*, 36 (6), 1173-1219, (1972).

Brown, R., "Coproducts of Crossed P-modules: Applications to second Homotopy Groups and to the Homology of Groups", *Topology*, 23, 337-345, (1984).

Brown, R., "Higher Dimensional Group Theory, Low Dimensional Topology", *London Math. Soc. Lecture Note Series*, 48, 215-238, (1982).

Brown, R. and Higgins, P. J., "Colimit Theorems for Relative Homotopy Groups", *J. Pure Appl. Algebra*, 22, 249-370, (1981).

Brown, R. and Higgins, P. J., "Tensor products and homotopies for ω-groupoids and crossed complexes", *Journal of Pure and Applied Algebra*, 47 (1), 1-33, (1987).

Brown, R. and Huebschmann, J., "Identities among Relations", *J. Pure Appl. Algebra*, 21, 233-260, (1981).

Brown, R. and Loday, J. L., "Homotopical Excision and Hurwicz Theorems for n-cubes of Spaces", *Proc. LondonMath. Soc.*, 54 (3), 176-192, (1987).

Brown, R. and Loday, J. L., "Van Kampen Theorems for Diagrams of Spaces", *Topology*, 26, 311-335, (1987).

Bryant, R. M., "On the fixed points of a finite group acting on a free Lie algebra", *Journal of the London Mathematical Society*, 2 (2), 215-224, (1991).

Carter, R. and Carter, R. W., *Lie algebras of finite and affine type,* (No. 96), United Kingdom: Cambridge University Press, (2005).

Casas, J. M., "Invariantes de módulos cruzados en Álgebras de Lie", Ph.D.Thesis, *Unıversity of Santiago*, 173, (1990).

Casas, J. M. and Ladra, M., “Colimits in the Crossed Modules Category in Lie Algebras”, *Georgian Mathematical Journal,* 7 (3), 461-474, (2000).

Casas, J. M. and Ladra, M., “The Actor of a CrossedModule in Lie Algebras”, *Communications in Algebra,* 26 (7), 2065-2089, (1998).

Conduchè, D., “Modules Croisès Gènèralisès de Longueur 2”, *J. Pure Appl. Algebra,* 34, 155-178, (1984).

Conway, J. H. and Sloane, N. J. A., “Lattices with few distances”, *Journal of Number Theory,* 39 (1), 75-90, (1991).

Demirci, M., “Değişmeli Cebirler Üzerinde Çaprazlanmış Modüllerin Kategoriksel Özellikleri”, Yüksek Lisans Tezi, *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, (2011).

Drensky, V., “Fixed algebras of residually nilpotent Lie algebras”, *Proceedings of the American Mathematical Society,* 120 (4), 1021-1028, (1994).

Eckes, C., “Groupes, invariants et géométries dans l'œuvre de Weyl: Une étude des écrits de Hermann Weyl en mathématiques, physique mathématique et philosophie, 1910-1931”, PhD Thesis, *Lyon 3*, (2011).

Ege, U., “Çaprazlanmış Modüller”, Yüksek Lisans Tezi, *Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, (1998).

Eilenberg, S. and MacLane, S., “General theory of natural equivalences”, *Transactions of the American Mathematical Society,* 58, 231-294, (1945).

Ellis, G. J., “Homotopical Aspects of Lie Algebras”, *J. Austral. Math. Soc. (Series A),* 54, 393-419, (1993).

Formanek, E., “Noncommutative invariant theory”, *Contemp. Math,* 43, 87-119, (1985).

Gerstenhaber, M., “On the Deformation of Rings and Algebras”, *Annals of Math. Soc.*, 84, 1-19, (1966).

Grandjean, A. R., “Reticulo de ideales de un objeto en una R-categoria”, *Rev. Math. Hisp. Amer. T.*, 32, 14-20, (1971).

Grandjean, A. R. and Vale, M. J., “2-Modulos Cruzados en la Cohomologia de André-Quillen”, *Memorias de la Real Academia de Ciencias*, 22, 1-28, (1986).

Guin, D., *Cohomologie non abelienne des algebras de Lie*, Strasbourg: Universite Louis Pasteur, Irma., (1986).

Guin-Waléry, D. and Loday, J. L., “Algebraic K-Theory (Evanston 1980)”, *Lecture Notes in Math*, 854, 179-216, (1981).

Hall, M., “A basis for free Lie rings and higher commutators in free groups”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1 (5), 575-581, (1950).

Helgason, S., “Sophus Lie, the mathematician”, *Contenido en Proceedings of The Sophus Lie Memorial Conference, Oslo*, 3-21, (1994).

Herrlich, H. and Strecker, G. E., *Category Theory*, Boston: Allyn and Bacon Inc., 100-140, (1973).

Kan, D. M., “A Combinatorial Definition of Homotopy Groups”, *Annals of Maths.*, 6, 288-312, (1958).

Kassel, C. and Loday, J. L., “Extensions Centrales d’algébres de Lie”, *Ann. Inst. Fourier. Grenable*, 32 (4), 119-142, (1982).

Killing, W., *Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung*, Dresden: BG Teubner, (1885).

Killing, W., “Die Rechnung in den Nicht-Euklidischen Raumformen”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 89, 265-287, (1880).

Lichtenbaum, S. and Schlessinger, M., “The Cotangent Complex of a Morphism”, *Trans Amer. Math. Soc.*, 128, 41-70, (1967).

Lie, S., “On a class of geometric transformations”, PhD thesis, *University of Oslo*, (1871).

Loday, J. L., “Spaces with Finitely many non-trivial Homotopy Groups”, *J. Pure and Applied Algebra*, 24, 179-202, (1982).

Löh, C., “Isomorphisms in I^ 1-homology”, arXiv preprint math/0612589, (2006).

Lue, T., “Semi-Complete Crossed Modules and Holomorphs of Groups”, *Bull. London Math. Society*, 11, 8-16, (1979).

MacLane, S., *Categories for the Working Mathematician*, New York: Springer-Verlag New York Inc., (1971).

MacLane, S., et al., “Set-theoretical foundations of category theory”, *Reports of the midwest category seminar III. Springer Berlin Heidelberg*, (1969).

Mitchell, B., “Rings with several objects”, *Advances in Mathematics*, 8 (1), 1-161, (1972).

Mitchell, B., “Some applications of module theory to functor categories”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 84 (6), 867-885, (1978).

Mosa, G. H., *Higher dimensional algebroids and Crossed complexes*, United Kingdom: ProQuest Dissertations Publishing, Bangor University, (1986).

Mutlu, A. and Porter, T., “Freeness Conditions for 2-CrossedModules and Complexes”, *Theory and Applications of Categories*, 4 (8), 174-194, (1998).

Mutlu, A. and Porter, T., “Freeness Conditions for Crossed Squares and Squared Complexes”, *Kluwer Academic Publishers*, 20, 345-368, (2000).

Norrie, K. J., “Crossed Modules and Analogues of Group Theorems”, Ph.D.Thesis, *King’s College*, (1987).

Porter, T., “Homology of Commutative Algebras and an Invariant of Simis and Vasconceles”, *J. Algebra*, 99, 458-465, (1986).

Porter, T., “Some Categorical Results in the Category of Crossed Modules in Commutative Algebra”, *J. Algebra*, 109, 415-429, (1978).

Samelson, H., *Generalities. In: Notes on Lie Algebras*, New York: Universitext, Springer, NY, (1990).

Samelson, H., “Notes on Lie Algebra”, *University of Crete Department of Mathematics*, 165, 1-3, (1969).

Serre, J. P., *Complex semisimple Lie algebras*, Berlin: Springer Science & Business Media, (2001).

Shammu, N. M., “Algebraic and Categorical Structure of Category of Crossed Modules of Algebras”, Ph.D.Thesis, *U.C.N.W.*, (1992).

Shirshov, A. I., “On the bases of a free Lie algebra”, *Algebra i Logika*, 1 (1), 14-19, (1962).

Walery, D. and Loday, J. L., “Obstructions Áléxcision en K-théorie Algébrique”, *Springer Lecture Notes in Mathematics*, 854, 179-216, (1981).

Weyl, H., *The theory of groups and quantum mechanics*, London: Methuen & co. ltd., (1931).

Whitehead, J. H. C., “Combinatorial Homotopy”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55, 453-496, (1949).

Whitehead, J. H. C., “Note on a previous paper entitled on adding relations to homotopy groups”, *Annals of Mathematics*, 806-810, (1946).

Whitehead, J. H. C., “On incidence matrices, nuclei and homotopy types”, *Annals of Mathematics*, 1197-1239, (1941).

Zmmo, M., “Lie cebirleri ve sınıfları”, Yüksek Lisans Tezi, *Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, (2017).