

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/266729183>

# Lifts on double tangent bundle

Article in *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi* · January 2008

CITATIONS

2

READS

128

3 authors, including:



**Ismet Ayhan**

Pamukkale University

17 PUBLICATIONS 10 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



**A.ceylan Çöken**

Akdeniz University

55 PUBLICATIONS 518 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)

## DOUBLE TANJANT DEMET ÜZERİNE YÜKSELTMELELER

İsmet AYHAN\*, A. Ceylan ÇÖKEN\*\*, Şevket CİVELEK\*\*\*

\* P.A.Ü. Eğitim Fakültesi, Fen Bilgisi Öğretmenliği A.B.D., Denizli, Türkiye  
\*\* S.D.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 32260, Isparta, Türkiye  
\*\*\* P.A.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 20020, Denizli, Türkiye  
e-mail: iayhan@pau.edu.tr, ceylan@fef.sdu.edu.tr, scivelek@pau.edu.tr

*Alınış: 10 Mayıs 2007, Kabul: 24 Ekim 2007*

**Özet:** Bu çalışmada, diferensiyellenebilir bir manifold üzerinde tanımlı fonksiyon, vektör alanı ve 1-form gibi temel tensör alanlarının double tanjant demet üzerine yükseltilmişleri elde edildi.

**Anahtar kelimeler:** Sasaki-Riemann metriği, double tanjant demet, Levi-Civita koneksiyonu

## LIFTS ON DOUBLE TANGENT BUNDLE

**Abstract:** In this paper, it is obtained lifts from a differentiable manifold has basic tensor fields ie function, vector field, 1-form to its double tangent bundles.

**Key words:** Sasaki-Riemannian metric, the double tangent bundle, Levi-Civita connection

**Mathematics Subject Classification Number (2000):** 53C07, 53C50

### 1. GİRİŞ

SASAKİ (1958), diferensiyellenebilir bir manifold üzerindeki vektör alanı, 1-form, (2,0) tipindeki tensör alanlarının tam yükseltilmişlerini genişletilmiş tensörler olarak tanımladı ve manifold üzerinde tanımlı bu vektör alanı ve 1-formun tanjant demet üzerine dikey ve yatay yükseltilmişlerini bileşenler cinsinden verdi. DOMDROWSKİ (1962),  $TM$ 'nin tanjant uzayından,  $M$ 'nin tanjant uzayına türev dönüşümlerini kullanarak,  $TM$ 'nin tanjant uzayını, dikey ve yatay alt uzayların direkt toplamı olacak şekilde tanımladı ve  $M$ 'deki paralel vektör alanlarının genişletilmişlerinin yatay vektör alanları olduğunu gösterdi. OPROIU & PAPAGHIUC (1988),  $TM$ 'yi geren baz vektör alanlarının Lie parantez operatörü altındaki değerlerini bulduktan sonra  $(TM, g^C)$  (pseudo-)Riemann manifoldunun Levi-Civita koneksiyonu ve Riemann eğrilik tensörünü bileşenler cinsinden hesapladı. YANO & ISHIHARA (1970) da  $M$  manifoldunun tensör alanlarının cebirinden,  $TM$ 'nin tensör alanlarının cebrine dikey, tam ve yatay yükseltmeleri tanımlayarak yapılan tüm çalışmaları özetledi ve genişletti. Manifold üzerindeki fonksiyon, vektör alanı ve 1-formun double tanjant demet üzerine dikey ve tam yükseltilmişleri ESİN & CİVELEK (1989) tarafından ele alındı. (2,0),

(1,1), (0,2) tipinden tensör alanlarının double tanjant demet üzerine dikey ve tam yükseltilmişlerini AYHAN (1997, 2006) inceledi.

Bu çalışmada,  $(TM, g^D)$  Riemann manifoldu üzerinde  $g^D$  Sasaki metriğine bağlı  $\tilde{\nabla}$  Levi-Civita koneksiyonu kullanılarak TM deki temel tensör alanlarının TTM ye yatay yükseltilmişleri tanımlandı. M manifoldu flat kabul edilerek, M manifoldu üzerindeki temel tensör alanlarının TTM'ye yükseltilmişleri elde edildi.

## 2. TTM ÜZERİNDEKİ İNDİRGENMİŞ LOKAL KOORDİNAT SİSTEMİ

M n-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold, TM onun tanjant demeti olmak üzere  $p \in M$  nin U açık komşuluğu üzerindeki haritaya bağlı olarak M için bir lokal koordinat sistemi  $(x) = \{x^1, \dots, x^n\}$  olsun. O zaman  $\tau_M(Z_p) = p$  eşitliğini sağlayan  $\tau_M : TM \rightarrow M$  kanonik izdüşüm olmak üzere  $\tau_M^{-1}(U) = U'$  TM deki  $\tau_M^{-1}(\{p\})$  noktasının bir açık komşuluğudur. Böylece  $\forall Z_p \in U'$  noktası için,

$$(x, y)(Z_p) = (x^1(p), \dots, x^n(p), Z_p[x^1], \dots, Z_p[x^n]) \quad (1)$$

şeklinde tanımlı  $(x, y)$  dönüşümü  $U'$  üzerinde lokal bir harita olup  $(x^i, y^i; 1 \leq i \leq n)$  sistemi TM için indirgenmiş lokal koordinat sistemidir.

Ayrıca  $\tau_{TM}(A_Z) = Z$  eşitliğini sağlayan  $\tau_{TM} : TTM \rightarrow TM$  kanonik izdüşüm olmak üzere  $\tau_{TM}^{-1}(U') = U''$ , TTM deki  $\tau_{TM}^{-1}(\{Z\})$  noktasının bir açık komşuluğudur. Böylece  $\forall A_Z \in U'' \subset TTM$  noktası için

$$(x, y, z, t)(A_Z) = (x(p), y(Z), z(A_Z), t(A_Z)), \quad (1 \leq i \leq n) \quad (2)$$

olur.  $(x, y, z, t)$  dönüşümünün lokal koordinat fonksiyonları

$$\begin{aligned} x(p) &= x^i(p) \\ y(Z) &= Z_p[x^i] = y^i(Z) \\ z(A_Z) &= A_Z[x^i] = z^i(A_Z) \\ t(A_Z) &= A_Z[y^i] = t^i(A_Z) \quad (1 \leq i \leq n) \end{aligned} \quad (3)$$

şeklinde tanımlı olup  $(x, y, z, t)$ ,  $U''$  için bir haritadır. Böylece  $(x^i, y^i, z^i, t^i; 1 \leq i \leq n)$  sistemi TTM için indirgenmiş lokal koordinat sistemidir (CİVELEK 1988).

TM nin tanjant demeti TTM, TM üzerinde dikey dağılım olarak adlandırılan  $VTM = \text{Çek}(\tau_M)^*$  integrallenebilen altvektör demetine sahiptir. TM üzerinde bir non-lineer koneksiyon HTM dağılımı ile tanımlı olup VTM nin tamamlayıcısıdır. Bu dağılıma TM üzerinde yatay dağılım denir. Böylece

$$TTM = VTM \oplus HTM \quad (4)$$

dir. Bu direkt toplam ayrışımına uyarlanmış TM deki lokal çatı  $\{\delta_i, \partial_i; 1 \leq i \leq n\}$  dir.

Buradaki

$$\delta_i = \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^H = \frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - N_i^j \frac{\partial}{\partial y^j}, \quad N_i^j = y^k \Gamma_{ki}^j \quad (5)$$

HTM deki lokal çatı ve

$$\partial_i = \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^V = \frac{\partial}{\partial y^i} \quad (6)$$

VTM deki lokal çatıdır. Ayrıca  $\{\delta y^i, dx^i; 1 \leq i \leq n\}$  lokal 1-formlarının sistemi,

$$\delta y^i = dy^i + N^i_j dx^j, \quad N^i_j = y^k \Gamma_{kj}^i \quad (7)$$

olmak üzere  $\{\delta_i, \partial_i; 1 \leq i \leq n\}$  çatısının lokal dual çatısıdır.

TM nin tanjant uzayını geren lokal baz vektör alanlarının Lie parantez operatörü altındaki değerleri

$$[\delta_i, \delta_j] = y^l R_{jil}^h \partial_h, \quad (8)$$

$$[\delta_i, \partial_j] = \Gamma_{ji}^h \partial_h, \quad (9)$$

$$[\partial_i, \partial_j] = 0 \quad (10)$$

dır (OPROIU & PAPAGHIUC 1988).

### 3. TM ÜZERİNDE $g^D$ SASAKİ METRİĞİNE BAĞLI $\tilde{\nabla}$ LEVİ-CİVİTA KONEKSİYONU

M manifoldu üzerinde  $g_{ij}$  bileşenlerine sahip g metrik tensörünün TM üzerinde diagonal yükseltişi

$$g^D = g_{ij} dx^i dx^j + g_{ij} \delta y^i \delta y^j \quad (11)$$

olup TM nin uyarlanmış lokal baz vektör alanları üzerinde aldığı değerler

$$g^D \left( \frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j} \right) = g^D \left( \frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j} \right) = g_{ij} \quad (12)$$

$$g^D \left( \frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j} \right) = g^D \left( \frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\delta}{\delta x^j} \right) = 0$$

şekindedir.  $\Gamma_{ji}^h$ , g Riemann metriğine bağlı Kristoffel sembolleri ve  $R_{jil}^h$ , Riemann eğrilik tensörünün bileşenleri olmak üzere TM de  $g^D$  Sasaki metriğine bağlı  $\tilde{\nabla}$  Levi-Civita koneksiyonunun bileşenler cinsinden ifadesi

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\delta_i} \delta_j &= \Gamma_{ji}^h \delta_h + \frac{1}{2} y^l R_{jil}^h \partial_h, & \tilde{\nabla}_{\delta_i} \partial_j &= \frac{1}{2} y^l R_{jil}^h \delta_h + \Gamma_{ji}^h \partial_h, \\ \tilde{\nabla}_{\partial_i} \delta_j &= -\frac{1}{2} y^l R_{jil}^h \delta_h, & \tilde{\nabla}_{\partial_i} \partial_j &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

dir. TM üzerindeki lokal baz 1-formların kovaryant türevleri de

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\delta_i} dx^j &= -\Gamma_{ji}^h dx^h - \frac{1}{2} y^l R_{hil}^j \delta y^h, & \tilde{\nabla}_{\delta_i} \delta y^j &= -\frac{1}{2} y^l R_{hil}^j dx^h - \Gamma_{ji}^h \delta y^h, \\ \tilde{\nabla}_{\partial_i} dx^j &= \frac{1}{2} y^l R_{hil}^j dx^h, & \tilde{\nabla}_{\partial_i} \delta y^j &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

dir (YANO & ISHIHARA 1970).

### 4. M DEKİ TEMEL TENSÖR ALANLARININ TTM YE DİKEY VE TAM YÜKSELTİLMİŞLERİ

M üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunun, bir  $X = X^h \frac{\partial}{\partial x^h}$  vektör alanının ve bir  $\omega = \omega_i dx^i$

1-formunun TM ye dikey ve tam yükseltişi TM nin indirgenmiş ve uyarlanmış koordinatlarına göre lokal gösterimi sırasıyla;

$$\begin{aligned}
f^V &= f \circ \tau_M, & f^C &= y^i \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \right)^V, \\
X^V &= (X^h)^V \frac{\partial}{\partial y^h}, & X^C &= (X^h)^V \frac{\partial}{\partial x^h} + y^i \left( \frac{\partial X^h}{\partial x^i} \right)^V \frac{\partial}{\partial y^h} = (X^h)^V \frac{\delta}{\delta x^h} + y^i \left( \nabla_i X^h \right)^V \frac{\partial}{\partial y^h}, \\
\omega^V &= (\omega_i)^V dx^i, & \omega^C &= y^j \left( \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} \right)^V dx^i + (\omega_i)^V dy^i = (\omega_i)^V \delta y^i + y^j \left( \nabla_j \omega_i \right)^V dx^i
\end{aligned} \tag{15}$$

şeklindedir (YANO & ISHIHARA 1970).

Ayrıca aynı temel tensör alanlarının TTM ye dikey ve tam yükseltilmişleri de TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre sırasıyla;

$$\begin{aligned}
f^{VV} &= f \circ \tau_M \circ \tau_{TM}, & f^{CV} &= y^i \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \right)^{VV}, \\
f^{VC} &= z^i \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \right)^{VV}, & f^{CC} &= y^i z^j \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right)^{VV} + t^i \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \right)^{VV},
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^{VV} = \frac{\partial}{\partial t^i}, \quad \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^{VC} = \frac{\partial}{\partial y^i}, \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^{CV} &= \frac{\partial}{\partial z^i}, & \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^{CC} &= \frac{\partial}{\partial x^i} \\
\left( dx^i \right)^{VV} &= dx^i, & \left( dx^i \right)^{VC} &= dz^i, \\
\left( dx^i \right)^{CV} &= dy^i, & \left( dx^i \right)^{CC} &= dt^i
\end{aligned} \tag{18}$$

şeklindedir (ESİN & CİVELEK 1989).

## 5. M ÜZERİNDE TANIMLI BİR FONKSİYONUNUN TTM YE YÜKSELTİLMİŞLERİ

Bu bölümde, önce,  $\tilde{\nabla}$ ,  $g^D$  Sasaki Riemann metriğine bağlı Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere TM üzerinde tanımlı  $C^\infty$  bir  $\tilde{f}$  fonksiyonunun, TTM ye yatay yükseltilmişleri tanımlandı. Sonra M üzerindeki  $f$  fonksiyonunun TTM ye VH, CH, HH yükseltilmişleri elde edildi.

**Tanım 5.1**  $\tilde{f}$  TM üzerinde tanımlı  $C^\infty$  fonksiyon olmak üzere,

$$\tilde{f}^C = z^i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i} + t^i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t^i} \tag{19}$$

şeklinde tanımlanan  $\tilde{f}^C$  fonksiyonuna,  $\tilde{f}$  nin TTM ye tam yükseltilmiş denir (ESİN & CİVELEK 1989).

**Tanım 5.2**  $\tilde{f}$  TM üzerinde tanımlı  $C^\infty$  fonksiyon ve  $\tilde{\nabla}$ ,  $g^D$  Sasaki Riemann metriğine bağlı Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere,

$$\tilde{f}^H = \tilde{f}^C - \tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} \tilde{f} \tag{20}$$

eşitliği ile tanımlı  $\tilde{f}^H$  fonksiyonuna  $\tilde{f}$  fonksiyonunun TTM ye yatay yükseltilmiş denir. Bu eşitlikteki,  $\tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} \tilde{f} = \tilde{\gamma}(\tilde{\nabla} \tilde{f})$  olup  $\tilde{\nabla} \tilde{f}$ ,

$$\tilde{\nabla} \tilde{f} = \left( \tilde{\nabla}_{\delta_i} \tilde{f} \right) dx^i + \left( \tilde{\nabla}_{\partial_i} \tilde{f} \right) \delta y^i \tag{21}$$

$\tilde{f}$  fonksiyonunun kovaryant diferensiyeli ve  $\tilde{\gamma}$  dönüşümü ise

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}: \quad \mathfrak{S}_1^2(TM) &\rightarrow \mathfrak{S}_0^2(TTM) \\ S = S_i^{jk} dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial y^k} &\rightarrow \tilde{\gamma}(S) = z^i S_i^{jk} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^V \otimes \left( \frac{\partial}{\partial y^k} \right)^V \\ S = S_i^{jk} \delta y^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial y^k} &\rightarrow \tilde{\gamma}(S) = t^i S_i^{jk} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^V \otimes \left( \frac{\partial}{\partial y^k} \right)^V \end{aligned} \quad (22)$$

şeklinde tanımlı lineer bir dönüşümdür.

**Teorem 5.1**  $\tilde{f}$  TM üzerinde tanımlı  $C^\infty$  fonksiyon ve  $\tilde{\nabla}$ ,  $g^D$  Sasaki Riemann metriğine bağlı Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere,  $\tilde{f}^H$  nin bileşenler cinsinden ifadesi

$$\tilde{f}^H = z^i y^j \Gamma_{ji}^h \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^h} \quad (23)$$

dir.

**İspat:** (5), (21) ve (22) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} \tilde{f} &= \tilde{\gamma}(\tilde{\nabla} \tilde{f}) = \tilde{\gamma} \left( \left( \tilde{\nabla}_{\delta_i} \tilde{f} \right) dx^i + \left( \tilde{\nabla}_{\partial_i} \tilde{f} \right) \delta y^i \right) \\ &= z^i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i} + t^i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^i} \\ &= z^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} - y^j \Gamma_{ji}^h \frac{\partial}{\partial y^h} \right) (\tilde{f}) + t^i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^i} \\ &= z^i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i} - z^i y^j \Gamma_{ji}^h \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^h} + t^i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^i} \end{aligned} \quad (24)$$

elde edilir.

(19), (20) ve (24) deki bağıntılar yardımıyla

$$\tilde{f}^H = z^i y^j \Gamma_{ji}^h \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^h} \quad (25)$$

bulunur.

**Teorem 5.2** M manifoldu üzerinde  $f$ ,  $C^\infty$  fonksiyon,  $\nabla$ , Levi-Civita koneksiyonu ve  $f$  in TM üzerine sırasıyla dikey, tam ve yatay yükseltilmişleri  $f^V, f^C, f^H$  olmak üzere  $f$  in TTM üzerine sırasıyla VH, CH, HH yükseltilmişleri,

i)  $f^{VH} = 0$ ,

ii)  $f^{CH} = z^i y^j \Gamma_{ji}^h \frac{\partial f}{\partial x^h}$ ,

iii)  $f^{HH} = 0$

dır.

**İspat i)** (25) eşitliğinde  $\tilde{f}$  yerine  $f^V$  alınırsa  $f^{VH} = z^i y^j \Gamma_{ji}^h \frac{\partial f^V}{\partial y^h}$  olur. M deki herhangi

bir X vektör alanı için  $X^V f^V = 0$  bağıntısından (YANO & ISHIHARA 1970),

$$f^{VH} = 0$$

olduğu görülür.

ii) (25) eşitliğinde  $\tilde{f}$  yerine  $f^C$  alınırsa  $f^{CH} = z^i y^j \Gamma_{ji}^h \frac{\partial f^C}{\partial y^h}$  olur. M deki herhangi bir X vektör alanı için  $X^V f^C = (Xf)^V$  bağıntısından (YANO & ISHIHARA 1970),

$$f^{CH} = z^i y^j \Gamma_{ji}^h \frac{\partial f}{\partial x^h}$$

elde edilir.

iii) M manifoldu üzerinde  $f$ ,  $C^\infty$  fonksiyon,  $\nabla$ , Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere  $f$  in yatay yükseltilmiş  $f^H = 0$  olduğundan (YANO & ISHIHARA 1970),

$$f^{HH} = 0$$

olur.

## 6. M ÜZERİNDE TANIMLI BİR VEKTÖR ALANININ TTM YE YÜKSELTİLMİŞLERİ

Bu bölümde, ilk olarak, TM üzerinde uyarlanmış koordinatlara göre verilen  $\tilde{X} = \tilde{X}^i \delta_i + \tilde{X}^{n+i} \partial_i$  vektör alanının TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre TTM ye tam yükseltilmiş bulundu. Sonra M üzerindeki  $X$  vektör alanının TTM ye TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre VC, CC, HC yükseltilmişleri elde edildi. İkinci olarak TTM üzerinde  $\tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} \tilde{X}$  vektör alanı elde edildi. Sonra  $\tilde{X}$  nin yerine sırasıyla  $X^V, X^C, X^H$  konularak TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre  $\tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} X^V, \tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} X^C, \tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} X^H$  vektör alanları bulundu. Son olarak M üzerindeki  $X$  vektör alanının TTM ye TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre VH, CH, HH yükseltilmişleri elde edildi.

**Tanım 6.1**  $\tilde{X}$  TM üzerinde tanımlı  $C^\infty$  vektör alanı ve  $\tilde{\nabla}, g^D$  Sasaki Riemann metriğine bağlı Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere,

$$\tilde{X}^H = \tilde{X}^C - \tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} \tilde{X} \quad (26)$$

eşitliği ile tanımlı  $\tilde{X}^H$  vektör alanına  $\tilde{X}$  vektör alanının TTM ye yatay yükseltilmiş denir.

**Teorem 6.1** TM üzerinde uyarlanmış koordinatlara göre verilen  $\tilde{X} = \tilde{X}^i \delta_i + \tilde{X}^{n+i} \partial_i$  vektör alanının TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre TTM ye tam yükseltilmiş,

$$\tilde{X}^C : \left( \begin{array}{c} \tilde{X}^i \\ \tilde{X}^{n+i} - y^j \tilde{X}^h \Gamma_{jh}^i \\ z^k \left( \frac{\partial \tilde{X}^i}{\partial x^k} \right) + t^k \left( \frac{\partial \tilde{X}^i}{\partial y^k} \right) \\ z^k \left( \frac{\partial (\tilde{X}^{n+i} - y^j \tilde{X}^h \Gamma_{jh}^i)}{\partial x^k} \right) + t^k \left( \frac{\partial (\tilde{X}^{n+i} - y^j \tilde{X}^h \Gamma_{jh}^i)}{\partial y^k} \right) \end{array} \right) \quad (27)$$

dir.

**İspat:**  $\tilde{X} = \tilde{X}^i \delta_i + \tilde{X}^{n+i} \partial_i$  vektör alanının tam yükseltilmiş

$$\begin{aligned}\tilde{X}^C &= (\tilde{X}^i)^C \left( \frac{\delta}{\partial x^i} \right)^V + (\tilde{X}^i)^V \left( \frac{\delta}{\partial x^i} \right)^C + (\tilde{X}^{n+i})^C \left( \frac{\partial}{\partial y^i} \right)^V + (\tilde{X}^{n+i})^V \left( \frac{\partial}{\partial y^i} \right)^C \\ &= \left( z^k \frac{\partial \tilde{X}^i}{\partial x^k} + t^k \frac{\partial \tilde{X}^i}{\partial y^k} \right) \left( \frac{\partial}{\partial z^i} - y^j \Gamma_{ji}^h \frac{\partial}{\partial t^h} \right) + \tilde{X}^i \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} - (y^j \Gamma_{ji}^h)^C \frac{\partial}{\partial t^h} - y^j \Gamma_{ji}^h \frac{\partial}{\partial y^h} \right\} + \\ &+ \left( z^k \frac{\partial \tilde{X}^{n+i}}{\partial x^k} + t^k \frac{\partial \tilde{X}^{n+i}}{\partial y^k} \right) \frac{\partial}{\partial t^i} + \tilde{X}^{n+i} \frac{\partial}{\partial y^i} \\ \tilde{X}^C &= \tilde{X}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + (\tilde{X}^{n+i} - y^j \tilde{X}^h \Gamma_{jh}^i) \frac{\partial}{\partial y^i} + \left( z^k \frac{\partial \tilde{X}^i}{\partial x^k} + t^k \frac{\partial \tilde{X}^i}{\partial y^k} \right) \frac{\partial}{\partial z^i} + \\ &+ z^k \left( \frac{\partial (\tilde{X}^{n+i} - y^j \tilde{X}^h \Gamma_{jh}^i)}{\partial x^k} \right) + t^k \left( \frac{\partial (\tilde{X}^{n+i} - y^j \tilde{X}^h \Gamma_{jh}^i)}{\partial y^k} \right) \frac{\partial}{\partial t^i}\end{aligned}$$

dir.

**Teorem 6.2** M manifoldu üzerinde bir  $X$  vektör alanı ve  $X$  in TM ye dikey, tam ve yatay yükseltilmişleri sırasıyla  $X^V$ ,  $X^C$  ve  $X^H$  olmak üzere  $X$  in TTM üzerine VC, CC ve HC yükseltilmişleri sırasıyla

$$X^{VC} : \begin{pmatrix} 0 \\ X^i \\ 0 \\ z^k \frac{\partial X^i}{\partial x^k} \end{pmatrix}, X^{CC} : \begin{pmatrix} X^i \\ y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \\ z^k \frac{\partial X^i}{\partial x^k} \\ y^j z^k \frac{\partial^2 X^i}{\partial x^k \partial x^j} + t^k \frac{\partial X^i}{\partial x^k} \end{pmatrix}, X^{HC} : \begin{pmatrix} X^i \\ -y^j X^h \Gamma_{jh}^i \\ z^k \frac{\partial X^i}{\partial x^k} \\ -y^j z^k \frac{\partial (X^h \Gamma_{jh}^i)}{\partial x^k} - t^k X^h \Gamma_{kh}^i \end{pmatrix}$$

dir.

**İspat:**  $X$  vektör alanının TM ye dikey, tam ve yatay yükseltilmişleri TM nin uyarlanmış koordinatlarına göre

$$X^V : \begin{pmatrix} 0 \\ X^i \end{pmatrix}, X^C : \begin{pmatrix} X^i \\ y^j \nabla_j X^i \end{pmatrix} \text{ ve } X^H : \begin{pmatrix} X^i \\ 0 \end{pmatrix}$$

lokal bileşenlerine sahiptir. Bu vektör alanlarının bileşenlerini (27) eşitliğinde TM deki

$\tilde{X} : \begin{pmatrix} \tilde{X}^i \\ \tilde{X}^{n+i} \end{pmatrix}$  vektör alanının bileşenlerinin yerine konulursa teoremin doğruluğu kolayca görülür.

**Teorem 6.3** (M,g) flat Riemann manifoldu ve  $\tilde{\nabla}$ , TM üzerinde  $g^D$  Sasaki metriğine bağlı Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere, TM üzerinde uyarlanmış koordinatlara göre verilen  $\tilde{X} = \tilde{X}^i \delta_i + \tilde{X}^{n+i} \partial_i$  vektör alanı için  $\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{X}$  vektör alanının TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre bileşenler cinsinden ifadesi



$$\tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} \tilde{X} : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z^k \left( \frac{\partial \tilde{X}^i}{\partial x^k} + \tilde{X}^h \Gamma_{hk}^i \right) + t^k \frac{\partial \tilde{X}^i}{\partial y^k} \\ -y^j z^k \left( \frac{\partial \tilde{X}^h}{\partial x^k} + \tilde{X}^i \Gamma_{ik}^h \right) \Gamma_{jh}^i - y^j t^k \left( \frac{\partial \tilde{X}^h}{\partial y^k} \right) \Gamma_{jh}^i + z^k \left( \frac{\partial \tilde{X}^{n+i}}{\partial x^k} + \tilde{X}^{n+h} \Gamma_{hk}^i \right) + t^k \frac{\partial \tilde{X}^{n+i}}{\partial y^k} \end{pmatrix} \quad (28)$$

dir.

**İspat:** (M,g) Riemann manifoldu flat olduğu için, (13) ve (22) deki eşitlikler yardımıyla

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} \tilde{X} &= \tilde{\gamma} \left( \tilde{\nabla}_{\partial_k} (\tilde{X}^i \delta_i + \tilde{X}^{n+i} \partial_i) dx^k + \tilde{\nabla}_{\partial_k} (\tilde{X}^i \delta_i + \tilde{X}^{n+i} \partial_i) \delta y^k \right) \\ \tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} \tilde{X} &= \left( z^k \left\{ \delta_k (\tilde{X}^i) + \tilde{X}^h \Gamma_{hk}^i \right\} + t^k (\partial_k \tilde{X}^i) \right) \left( \frac{\partial}{\partial z^i} - y^j \Gamma_{ji}^h \frac{\partial}{\partial t^h} \right) + \\ &\quad + z^k \left\{ \delta_k (\tilde{X}^{n+i}) + \tilde{X}^{n+h} \Gamma_{hk}^i \right\} + t^k (\partial_k \tilde{X}^{n+i}) \frac{\partial}{\partial t^i} \\ &= \left( z^k \left\{ \delta_k (\tilde{X}^i) + \tilde{X}^h \Gamma_{hk}^i \right\} + t^k (\partial_k \tilde{X}^i) \right) \frac{\partial}{\partial z^i} + \left\{ -y^j z^k \left( \frac{\partial \tilde{X}^h}{\partial x^k} + \tilde{X}^i \Gamma_{ik}^h \right) \Gamma_{jh}^i - \right. \\ &\quad \left. - y^j t^k \left( \frac{\partial \tilde{X}^h}{\partial y^k} \right) \Gamma_{jh}^i + z^k \left( \frac{\partial \tilde{X}^{n+i}}{\partial x^k} + \tilde{X}^{n+h} \Gamma_{hk}^i \right) + t^k \frac{\partial \tilde{X}^{n+i}}{\partial y^k} \right\} \frac{\partial}{\partial t^i} \end{aligned}$$

elde edilir.

**Teorem 6.4** (M,g) flat Riemann manifoldu,  $\tilde{\nabla}$ , TM üzerinde  $g^D$  Sasaki metriğine bağlı Levi-Civita koneksiyonu,  $X$  vektör alanının TM ye dikey, tam ve yatay yükseltilmişleri sırasıyla  $X^V$ ,  $X^C$  ve  $X^H$  olmak üzere  $\tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} X^V$ ,  $\tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} X^C$ ,  $\tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} X^H$  vektör alanlarının TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre bileşenler cinsinden ifadesi

$$\begin{aligned} i) \tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} X^V &: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ z^k \nabla_k X^i \end{pmatrix} \\ ii) \tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} X^C &: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z^k \nabla_k X^i \\ y^j z^k \left\{ \frac{\partial (\nabla_j X^i)}{\partial x^k} - (\nabla_k X^h) \Gamma_{jh}^i - \Gamma_{jk}^l (\nabla_l X^i) + (\nabla_j X^h) \Gamma_{hk}^i \right\} + t^k \nabla_k X^i \end{pmatrix} \\ iii) \tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} X^H &: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z^k \nabla_k X^i \\ -y^j z^k \nabla_k X^h \Gamma_{jh}^i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dir.

**İspat:**  $X$  vektör alanının TM ye dikey, tam ve yatay yükseltilmişleri TM nin uyarlanmış koordinatlarına göre

$$X^V : \begin{pmatrix} 0 \\ X^i \end{pmatrix}, X^C : \begin{pmatrix} X^i \\ y^j \nabla_j X^i \end{pmatrix} \text{ ve } X^H : \begin{pmatrix} X^i \\ 0 \end{pmatrix}$$

lokal bileşenlerine sahiptir. Bu vektör alanlarının bileşenlerini (28) eşitliğinde TM deki  $\tilde{X} : \begin{pmatrix} \tilde{X}^i \\ \tilde{X}^{n+i} \end{pmatrix}$  vektör alanının bileşenlerinin yerine konulursa teoremin doğruluğu kolayca görülür.

**Teorem 6.5** (M,g) flat Riemann manifoldu,  $\tilde{\nabla}$ , TM üzerinde  $g^D$  Sasaki metriğine bağlı Levi-Civita koneksiyonu,  $X$  vektör alanının TM ye dikey, tam ve yatay yükseltilmişleri sırasıyla  $X^V$ ,  $X^C$  ve  $X^H$  olmak üzere  $X^{VH}$ ,  $X^{CH}$ ,  $X^{HH}$  vektör alanlarının TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre bileşenler cinsinden ifadesi

$$\begin{aligned} \text{i) } X^{VH} &= \begin{pmatrix} 0 \\ X^i \\ 0 \\ -z^k X^i \Gamma_{ki}^h \end{pmatrix}, \\ \text{ii) } X^{CH} &= \begin{pmatrix} X^i \\ y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \\ -z^k X^i \Gamma_{ki}^h \\ -y^j z^k \left\{ \frac{\partial (X^i \Gamma_{ki}^h)}{\partial x^k} - (\nabla_k X^h) \Gamma_{jh}^i - \Gamma_{jk}^l (\nabla_l X^i) + (\nabla_j X^h) \Gamma_{hk}^i \right\} \end{pmatrix}, \\ \text{iii) } X^{HH} &= \begin{pmatrix} X^i \\ -y^j X^h \Gamma_{jh}^i \\ -z^k X^h \Gamma_{hk}^i \\ -y^j z^k X^h \left\{ \frac{\partial \Gamma_{jh}^i}{\partial x^k} - \Gamma_{kh}^i \Gamma_{ji}^h \right\} - t^k X^h \Gamma_{kh}^i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dır.

**İspat:** Tanım 6.1 de verilen denklemde Teorem 6.2 ve Teorem 6.4 deki eşitliklerin kullanılmasıyla  $X$  vektör alanının TM ye dikey, tam ve yatay yükseltilmişleri  $X^V$ ,  $X^C$  ve  $X^H$  in TTM ye yatay yükseltilmişleri  $X^{VH}$ ,  $X^{CH}$ ,  $X^{HH}$ , TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre, bileşenler cinsinden elde edilir.

## 7. M ÜZERİNDE TANIMLI BİR 1-FORMUN TTM YE YÜKSELTİLMİŞLERİ

Bu bölümde, ilk olarak, TM üzerinde uyarlanmış koordinatlara göre verilen  $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_i dx^i + \tilde{\omega}_{n+i} \delta y^i$  1-formunun TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre TTM ye tam yükseltilmişleri bulundu. Sonra M üzerindeki  $\omega$  1-formunun TTM ye TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre VC, CC, HC yükseltilmişleri elde edildi. İkinci olarak TTM üzerinde  $\tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} \tilde{\omega}$  1-formu elde edildi. Sonra  $\tilde{\omega}$  nin yerine sırasıyla  $\omega^V, \omega^C, \omega^H$  konularak TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre  $\tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} \omega^V, \tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} \omega^C, \tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} \omega^H$  1-formları bulundu. Son olarak M üzerindeki  $\omega$  1-formunun TTM ye TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre VH, CH, HH yükseltilmişleri elde edildi.

**Tanım 7.1**  $\tilde{\omega}$  TM üzerinde tanımlı  $C^\infty$  1-form ve  $\tilde{\nabla}$ ,  $g^D$  Sasaki Riemann metriğine bağlı Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere,

$$\tilde{\omega}^H = \tilde{\omega}^C - \tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} \tilde{\omega} \quad (29)$$

eşitliği ile tanımlı  $\tilde{\omega}^H$  1-formuna  $\tilde{\omega}$  1-formunun TTM ye yatay yükseltilmiş denir.

**Teorem 7.1** TM üzerinde uyarlanmış koordinatlara göre verilen  $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_i dx^i + \tilde{\omega}_{n+i} \delta y^i$  1-formunun TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre TTM ye tam yükseltilmiş,

$$\tilde{\omega}^C : \left( z^k \frac{\partial(\tilde{\omega}_i + \tilde{\omega}_{n+h} y^j \Gamma_{ji}^h)}{\partial x^k} + t^k \frac{\partial(\tilde{\omega}_i + \tilde{\omega}_{n+h} y^j \Gamma_{ji}^h)}{\partial y^k} \quad z^k \frac{\partial \tilde{\omega}_{n+i}}{\partial x^k} + t^k \frac{\partial \tilde{\omega}_{n+i}}{\partial y^k} \quad \tilde{\omega}_i + \tilde{\omega}_{n+h} y^j \Gamma_{ji}^h \quad \tilde{\omega}_{n+i} \right)$$

dir.

**İspat:**  $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_i dx^i + \tilde{\omega}_{n+i} \delta y^i$  1-formunun tam yükseltilmiş

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}^C &= (\tilde{\omega}_i)^C (dx^i)^V + (\tilde{\omega}_i)^V (dx^i)^C + (\tilde{\omega}_{n+i})^C (\delta y^i)^V + (\tilde{\omega}_{n+i})^V (\delta y^i)^C \\ &= \left( z^k \frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial x^k} + t^k \frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial y^k} \right) dx^i + \tilde{\omega}_i dz^i + \left( z^k \frac{\partial \tilde{\omega}_{n+i}}{\partial x^k} + t^k \frac{\partial \tilde{\omega}_{n+i}}{\partial y^k} \right) \left\{ (dy^i)^V + y^j \Gamma_{jh}^i (dx^h)^V \right\} + \\ &+ \tilde{\omega}_{n+i} \left\{ (dy^i)^C + \left[ (y^j)^C (\Gamma_{jh}^i)^V + (y^j)^V (\Gamma_{jh}^i)^C \right] (dx^h)^V + y^j \Gamma_{jh}^i (dx^h)^C \right\} \\ &= \left( z^k \frac{\partial(\tilde{\omega}_i + \tilde{\omega}_{n+h} y^j \Gamma_{ji}^h)}{\partial x^k} + t^k \frac{\partial(\tilde{\omega}_i + \tilde{\omega}_{n+h} y^j \Gamma_{ji}^h)}{\partial y^k} \right) dx^i + \\ &+ \left( z^k \frac{\partial \tilde{\omega}_{n+i}}{\partial x^k} + t^k \frac{\partial \tilde{\omega}_{n+i}}{\partial y^k} \right) dy^i + (\tilde{\omega}_i + \tilde{\omega}_{n+h} y^j \Gamma_{ji}^h) dz^i + \tilde{\omega}_{n+i} dt^i \end{aligned}$$

dir.

**Teorem 7.2** M manifoldu üzerinde bir  $\omega$  1-formu ve  $\omega$  nın TM ye dikey, tam ve yatay yükseltilmişleri sırasıyla  $\omega^V$ ,  $\omega^C$  ve  $\omega^H$  olmak üzere  $\omega$  nın TTM üzerine VC, CC ve HC yükseltilmişleri sırasıyla

$$i) \quad \omega^{VC} = \left( z^k \frac{\partial \omega_i}{\partial x^k} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right)$$

$$ii) \quad \omega^{CC} = \left( y^j z^k \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x^k \partial x^j} + t^k \frac{\partial \omega_i}{\partial x^k} \quad z^k \frac{\partial \omega_i}{\partial x^k} \quad y^j \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} \quad 0 \right)$$

$$iii) \quad \omega^{HC} = \left( y^j z^k \left\{ \frac{\partial \omega_h}{\partial x^k} \Gamma_{ji}^h + \omega_h \frac{\partial \Gamma_{ji}^h}{\partial x^k} \right\} + t^k \omega_h \Gamma_{ki}^h \quad z^k \frac{\partial \omega_i}{\partial x^k} \quad y^j \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} \quad \omega_i \right)$$

dir.

**İspat:**  $\omega$  1-formunun TM ye dikey, tam ve yatay yükseltilmişleri TM nin uyarlanmış koordinatlarına göre

$$\omega^V : (\omega_i \quad 0), \quad \omega^C : (y^j \nabla_j \omega_i \quad \omega_i) \quad \text{ve} \quad \omega^H : (0 \quad \omega_i)$$

lokal bileşenlerine sahiptir. Bu 1-formların bileşenlerini Teorem 7.2 de TM deki  $\tilde{\omega}:(\tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_{n+i})$  1-formunun bileşenlerinin yerine konulursa teoremin doğruluğu kolayca görülür.

**Teorem 7.3** (M,g) flat Riemann manifoldu ve  $\tilde{\nabla}$ , TM üzerinde  $g^D$  Sasaki metriğine bağlı Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere, TM üzerinde uyarlanmış koordinatlara göre verilen  $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_i dx^i + \tilde{\omega}_{n+i} \delta y^i$  1-formu için  $\tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} \tilde{\omega}$  1-formunun TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre bileşenler cinsinden ifadesi

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} \tilde{\omega} : \begin{pmatrix} z^k \left\{ \delta_k(\tilde{\omega}_i) - \tilde{\omega}_h \Gamma_{ki}^h \right\} + t^k \left( \frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial y^k} \right) + & z^k \left\{ \delta_k(\tilde{\omega}_{n+i}) - \tilde{\omega}_{n+h} \Gamma_{ik}^h \right\} + t^k \left( \frac{\partial \tilde{\omega}_{n+i}}{\partial y^k} \right) & 0 & 0 \\ + y^j z^k \left\{ \delta_k(\tilde{\omega}_{n+h}) - \tilde{\omega}_{n+i} \Gamma_{hk}^i \right\} \Gamma_{ji}^h + y^j t^k \left( \frac{\partial \tilde{\omega}_{n+i}}{\partial y^k} \right) \Gamma_{ji}^h & & & \end{pmatrix}$$

dir.

**İspat:** (M,g) Riemann manifoldu flat olduğu için, (14) ve (22) deki eşitlikler yardımıyla

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} \tilde{X} &= \tilde{\gamma} \left( \tilde{\nabla}_{\delta_k} (\tilde{\omega}_i dx^i + \tilde{\omega}_{n+i} \delta y^i) dx^k + \tilde{\nabla}_{\partial_k} (\tilde{\omega}_i dx^i + \tilde{\omega}_{n+i} \delta y^i) \delta y^k \right) \\ &= \left( z^k \left\{ \delta_k(\tilde{\omega}_i) - \tilde{\omega}_h \Gamma_{ki}^h \right\} + t^k \left( \frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial y^k} \right) + y^j z^k \left\{ \delta_k(\tilde{\omega}_{n+h}) - \tilde{\omega}_{n+i} \Gamma_{hk}^i \right\} \Gamma_{ji}^h + \right. \\ &\quad \left. + y^j t^k \left( \frac{\partial \tilde{\omega}_{n+i}}{\partial y^k} \right) \Gamma_{ji}^h \right) dx^i + \left( z^k \left\{ \delta_k(\tilde{\omega}_{n+i}) - \tilde{\omega}_{n+h} \Gamma_{ik}^h \right\} + t^k \left( \frac{\partial \tilde{\omega}_{n+i}}{\partial y^k} \right) \right) dy^i \end{aligned}$$

elde edilir.

**Teorem 7.4** (M,g) flat Riemann manifoldu,  $\tilde{\nabla}$ , TM üzerinde  $g^D$  Sasaki metriğine bağlı Levi-Civita koneksiyonu,  $\omega$  1-formunun TM ye dikey, tam ve yatay yükseltilmişleri sırasıyla  $\omega^V$ ,  $\omega^C$  ve  $\omega^H$  olmak üzere  $\tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} \omega^V$ ,  $\tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} \omega^C$ ,  $\tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} \omega^H$  1-formlarının TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre bileşenler cinsinden ifadesi

$$\begin{aligned} i) \tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} \omega^V &: \left( z^k \left( \frac{\partial \omega_i}{\partial x^k} - \omega_h \Gamma_{ki}^h \right) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right), \\ ii) \tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} \omega^C &: \left( y^j z^k \left\{ \frac{\partial (\nabla_j \omega_i)}{\partial x^k} - \Gamma_{jk}^h (\nabla_h \omega_i) - \Gamma_{ki}^h (\nabla_j \omega_h) + (\nabla_k \omega_h) \Gamma_{ji}^h \right\} + t^k (\nabla_k \omega_i) \quad z^k (\nabla_k \omega_i) \quad 0 \quad 0 \right), \\ iii) \tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} \omega^H &: (y^j z^k \nabla_k \omega_h \Gamma_{ji}^h \quad z^k \nabla_k \omega_i \quad 0 \quad 0) \end{aligned}$$

dir.

**İspat:**  $\omega$  1-formunun TM ye dikey, tam ve yatay yükseltilmişleri TM nin uyarlanmış koordinatlarına göre

$$\omega^V : (\omega_i \quad 0), \quad \omega^C : (y^j \nabla_j \omega_i \quad \omega_i) \quad \text{ve} \quad \omega^H : (0 \quad \omega_i)$$

lokal bileşenlerine sahiptir. Bu 1-formların bileşenlerini Teorem 7.4 de TM deki  $\tilde{\omega}:(\tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_{n+i})$  1-formunun bileşenlerinin yerine konulursa teoremin doğruluğu kolayca görülür.

**Teorem 7.5** (M,g) flat Riemann manifoldu,  $\tilde{\nabla}$ , TM üzerinde  $g^D$  Sasaki metriğine bağlı Levi-Civita koneksiyonu,  $\omega$  1-formunun TM ye dikey, tam ve yatay yükseltilmişleri sırasıyla  $\omega^V$ ,  $\omega^C$  ve  $\omega^H$  olmak üzere  $\omega^{VH}$ ,  $\omega^{CH}$ ,  $\omega^{HH}$  1-formlarının TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre bileşenler cinsinden ifadesi

$$i) \omega^{VH} = (z^k \omega_h \Gamma_{ki}^h \quad 0 \quad \omega_i \quad 0),$$

$$ii) \omega^{CH} = \left( -y^j z^k \left\{ \frac{\partial(\omega_h \Gamma_{ji}^h)}{\partial x^k} - \Gamma_{jk}^h (\nabla_h \omega_i) - \Gamma_{ki}^h (\nabla_j \omega_h) + (\nabla_k \omega_h) \Gamma_{ji}^h \right\} + t^k \omega_h \Gamma_{kh}^i \quad z^k \omega_h \Gamma_{kh}^i \quad y^j \omega_h \Gamma_{jh}^i \quad \omega_i \right),$$

$$iii) \omega^{HH} = \left( y^j z^k \left\{ \omega_h \left( \frac{\partial \Gamma_{ji}^h}{\partial x^k} + \Gamma_{kh}^i \Gamma_{ji}^h \right) \right\} + t^k \omega_h \Gamma_{ki}^h \quad z^k \omega_h \Gamma_{ki}^h \quad y^j \omega_h \Gamma_{ji}^h \quad \omega_i \right)$$

dir.

**İspat:** Tanım 7.1 de verilen denklemde Teorem 7.3 ve Teorem 7.5 deki eşitliklerin kullanılmasıyla,  $\omega$  1-formunun TM ye dikey, tam ve yatay yükseltilmişleri  $\omega^V$ ,  $\omega^C$  ve  $\omega^H$  in yatay yükseltilmişleri  $\omega^{VH}$ ,  $\omega^{CH}$ ,  $\omega^{HH}$  1-formları, TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre bileşenler cinsinden elde edilir.

## KAYNAKLAR

- AYHAN İ, 1997. Derivasyonlar ve tensör alanlarının ikinci mertebeden yükseltilmişleri, Yüksek Lisans Tezi, PAÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Denizli, s.67.
- AYHAN İ, 2006. Semi-Riemann manifoldların tanjant ve kotanjant demetlerinin geometrisi üzerine, Doktora Tezi, S.D.Ü, Fen Bilimleri Enstitüsü, Isparta, s.142.
- DOMBROWSKI P, 1962. On the geometry of the tangent bundle, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 210, 73-88.
- ESİN E, CİVELEK Ş, 1989. The lifts on the second order tangent bundles, *Jour. Math. Stat. Fac. Art. Sc. Gazi Univ.*, Vol.2, 117-135.
- OPROIU V, PAPAGHIUC N, 1998. On the geometry of tangent bundle of a (pseudo)-Riemannian manifold, *An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi*, Ser.Noua, Mat. 36, No.3, 265-276.
- SASAKI, SHIGEO, 1958. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds., *Tohoku Mathematical Journal*, II. Ser. 10, 338-354.
- YANO K, ISHIHARA S, 1973. *Tangent and Cotangent Bundles*, Marcel Decker. Inc., New York, pp.392.