T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

LATİSLERDE N.DERECEDEN TÜREVLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SÜLEYMAN YÜKSEL

DENİZLİ, AĞUSTOS - 2023

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

LATİSLERDE N.DERECEDEN TÜREVLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SÜLEYMAN YÜKSEL

DENİZLİ, AĞUSTOS - 2023

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

SÜLEYMAN YÜKSEL

ÖZET

LATİSLERDE N.DERECEDEN TÜREVLER
YÜKSEK LİSANS TEZİ
SÜLEYMAN YÜKSEL
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI:DR. ÖĞR. ÜYESİ ŞAHİN CERAN)

DENİZLİ, AĞUSTOS - 2023

Bu tezde n.dereceden türevlerin tanımı ifade edilmiş ve detaylı incelemeleri ele alınmıştır.

Birinci bölümde, kafesin tarihçesine ve kafes yapısının temel tanımlarına ve teoremlerine yer verilmiştir.

İkinci bölümde, kafeslerde türevlerin tanımları, konuya ait bazı teoremlere ve daha önce yapılmış olan çalışmalara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise; latislerde n. dereceden türevler üzerinde detaylı olarak durulmuş olup , son kısımda yapılan çalışmaların sonuçlarından bahsedilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Latis, Modüler,n −Türev,

ABSTRACT

IN LATTİCES N.ORDER DERİVATİVES
MSC THESIS
SÜLEYMAN YÜKSEL
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATİCS

(SUPERVISOR:DR. ŞAHİN CERAN)

DENİZLİ, AUGUST 2023

In this thesis, n. the definition of the degree derivatives has been expressed and their detailed investigations have been discussed.

In the first part, the history of the lattice and the basic definitions and theorems of the lattice structure were given.

In the second part, definitions of derivatives in lattices, some theorems related to the subject and previous studied were included.

In the third part, in the lattices n. the graded derivatives have been discussed in detail and the result of the studies have been mentioned in the last part.

KEYWORDS: Lattice, Modular, n −Derivation,

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\vee$	: Join , Veya
$\wedge$	: Meet, Ve
Đ	: Türev
đ	: İz
Δ	: n −Türev
δ	: n −Türevin izi

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmamda, bilgi ve deneyimlerini aktarmaktan geri kalmayan, sürecin tamamlanması yönünde tüm desteğini esirgemeyen ve çalışmalarından faydalanma imkanı bulduğum kıymetli hocalarıma ve ayrıca danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Şahin CERAN ‘a , süreçte takıldığım yerlerde tüm desteğini sağlayan hocam Dr. Öğr. Üyesi Ali AYTEKİN’e teşekkür ederim.

Ayrıca dostum Fatih ERDURAN’ a çalışmaya olan katkısından haberi olmamasına rağmen, varlığını hayatımda halen sürdüğü için ayrıca teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

1.1 Tarihçe

Kafes cebiri; başta kriptanaliz, mühendislik, ekonomi, ve diğer bir çok alanda karşımıza çıkmaktadır. Kafes yapısı öncelikle 1930'larda Garrett Birkhoff ile tanınmış, kafeslerde türev çalışmasını ise 1975 'te G.Szasz ortaya koymuştur. Buradan yola çıkarak Xin ve arkadaşları, kafeslerde tanımlanan bu yapıyı geliştirip, türevin modüler ve distribütiv kafeslerde izotonluğundan bahsedip, denk şartlarını sunmuşlardır.

Çeven ve Öztürk (2008) f $-$türevi sonrasında Çeven (2009) simetrik bi-türevi tanıttı. Modüler ve distribütiv kafesleri nitelemişlerdir.

Özbal ve Fırat (2010) kafeslerde simetrik bi f $-$türev kavramını sundular. Bu türev üzerinde modüler ve distribütiv kafesleri nitelediler. Daha sonra permuting tri-türevi sundular ve bu türevi permuting tri$-f$ $-$türeve uyguladılar.

Aşcı, Keçelioğlu ve Ceran ve kafesler üzerinde permuting tri – (f, g) $-$türevi ve oluşan verilerle de Aşcı ve Ceran kafeslerde genelleştirilmiş $(f, g)-$ türev kavramını sundular. Oluşan bu sonuçlarla modüler ve distribütiv kafes kavramını nitelediler.

Çeven kafeslerde n $-$türev, $(n, m)-$ türevi ve homomorfizm kavramını ve önemli karakteristik özellikleri açıklamıştır.

1.2 Temel Tanım ve Teoremler

Bu kısımda diğer bölümlerde kullanılacak olan tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 1.2.1 : Boş olmayan K kümesinde yansıma , geçişme ve antisimetrik şartlarını yerine getiren bağıntıya, kısmi sıralama bağıntısı veya sıralama bağıntısı denir. Elde edilen bu sıralama bağıntısı "$\leq$ " ile temsil edilir. $(K, \leq)$ sıralısı , K kümesinin " $\leq$" ilişkisiyle sıralandığını gösterir. Sonuç olarak K'ya kısmi sıralı küme veya poset denir.

Buradan $\xi, \psi, \varpi \in K$ için ,

a) $\xi \in K \quad \Rightarrow \xi \leq \xi$

b) $\xi \leq \psi , \psi \leq \xi \;\Rightarrow\; \xi = \psi$

c) $\xi \leq \psi ,\; \psi \leq \varpi \;\Rightarrow \xi \leq \varpi$

Örnek 1.2.1 : Q da adi sıralama işlemi

$$\leq = \{(\xi, \psi): \xi \leq \psi \;,\; \xi \in Q \; ve \; \psi \; \in Q\}$$

şeklinde tanımlansın. $\forall\, \xi, \psi, \varpi \; \in Q$ için **(a)** , **(b)** ve **(c)** özellikleri sağladığından $(Q, \leq)$ bağıntısı kısmi sıralıdır.

Örnek 1.2.2 : K küme ve $P(K)$ kuvvet kümesi ilişkisi ;

$$\subseteq = \{(\dot{S}, Ł): \dot{S} \subseteq Ł, \dot{S} \in P(K), Ł \in P(K)\}$$

olarak tanımlansın. $\forall\, \dot{S}, Ł, \dot{M} \; \in P(K)$ için , **(a)** , **(b)** ve **(c)** özellikleri sağladığından verilen bağıntı kısmi sıralıdır ve $(P(K), \subseteq)$ posettir.

Tanım 1.2.2 : K , $\wedge$ ve $\vee$ işlemleri ile tanımlı, boş olmayan küme olsun. Eğer $\forall\, \xi, \psi, \varpi \in K$ olmak üzere aşağıdaki şartlar yerine getirilirse, bu durumda K ‘ya kafes (latis) denir. $(K,\wedge,\vee)$ şeklinde ifade edilir.

- ✓ $\xi \wedge \xi = \xi$, $\xi \vee \xi = \xi$
- ✓ $\xi \wedge \psi = \psi \wedge \xi$, $\xi \vee \psi = \psi \vee \xi$
- ✓ $(\xi \wedge \psi) \wedge \varpi = \xi \wedge (\psi \wedge \varpi)$, $(\xi \vee \psi) \vee \varpi = \xi \vee (\psi \vee \varpi)$
- ✓ $(\xi \wedge \psi) \vee \xi = \xi$, $(\xi \vee \psi) \wedge \xi = \xi$

Örnek 1.2.3 : R , "$\cap$" ve " $\cup$ " işlemlerini gerçekleştirmek üzere, aşağıdaki şartlar altında $\forall\, \xi, \psi, \varpi \in R$ için , $(R,\cap,\cup)$ bir kafestir.

$\xi \cap \xi = \xi$, $\xi \cup \xi = \xi$

$\psi \cap \xi = \xi \cap \psi$, $\psi \cup \xi = \xi \cup \psi$

$(\xi \cap \psi) \cap \varpi = \xi \cap (\psi \cap \varpi)$, $(\xi \cup \psi) \cup \varpi = \xi \cup (\psi \cup \varpi)$

$\xi \cap (\xi \cup \psi) = \xi$, $\xi \cup (\xi \cap \psi) = \xi$

Örnek 1.2.4 : $(N,\wedge,\vee), \forall \xi, \psi, \varpi \in N$ için, $\xi \wedge \psi = (\xi, \psi)$ ve $\xi \vee \psi = [\xi, \psi]$ işlemleri altında kafestir.

- ✓ $\xi \wedge \xi = (\xi, \xi)$, $\xi \vee \xi = [\xi, \xi]$
- ✓ $\xi \wedge \psi = (\xi, \psi) = (\psi, \xi) = \psi \wedge \xi$, $\xi \vee \psi = [\xi, \psi] = [\psi, \xi] = \psi \vee \xi$
- ✓ **(i)** $(\xi \wedge \psi) \wedge \varpi = \big((\xi, \psi), \varpi\big) = \big(\xi, (\psi, \varpi)\big) = \xi \wedge (\psi \wedge \varpi)$

  (ii) $(\xi \vee \psi) \vee \varpi = \big[[\xi, \psi], \varpi\big] = [\xi, [\psi, \varpi]] = \xi \vee (\psi \vee \varpi)$

Tanım 1.2.3 : Aşağıdaki şartlar sağlanırsa verilen kafes distbüritivdir.

- ✓ $\xi \wedge (\psi \vee \varpi) = (\xi \wedge \psi) \vee (\xi \wedge \varpi)$
- ✓ $\xi \vee (\psi \wedge \varpi) = (\xi \vee \psi) \wedge (\xi \vee \varpi)$

Tanım 1.2.4 : Aşağıdaki şart sağlanırsa K kafesi modülerdir.

$\xi \leq \psi$ ise $\xi \vee (\psi \wedge \varpi) = (\xi \vee \psi) \wedge \varpi$

Tanım 1.2.5 : K kafesinin boş olmayan alt kümesi I , aşağıdaki şartlarda bir idealdir.

- ✓ $\xi \leq \psi \ , \ \psi \in I \ \Rightarrow \xi \in I$
- ✓ $\xi, \ \psi \in I \ \Rightarrow \xi \vee \psi \in I$

Tanım 1.2.6 : $(K,\wedge,\vee)$ bir kafes olsun. $\xi \leq \psi$ ile tanımlı "$\leq$" ikili ilişki $\Leftrightarrow \forall \xi, \psi \ \in K$ için $\xi \wedge \psi = \xi$ ve $\xi \vee \psi = \psi$ dir.

Lemma 1.1.1 : $(K,\wedge,\vee)$ kafes , $\xi \leq \psi$ ile tanımlı "$\leq$" ikili ilişki olsun. Bu taktirde , $(K, \leq)$ kısmi sıralamadır, $\forall \xi, \psi \ \in K$ için;

$\xi \wedge \psi$; $\{\xi, \psi\}$ nun ebobu , $\xi \vee \psi$; $\{\xi, \psi\}$ nun ekokudur.

Tanım 1.2.7 : K bir kafes , $Đ: K \times K \rightarrow K$ tanımlı bir dönüşüm için $\forall \xi, \psi \ \in K$ için $Đ(\xi, \psi) = Đ(\psi, \xi)$ sağlanırsa, bu işleme simetrik dönüşüm denir.

Tanım 1.2.8 : K bir kafes olsun. $Đ: K \times K \times K \rightarrow K$ tanımlı bir dönüşüm $n \geq 3$ için $\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)$ birer permütasyonlar olmak üzere, $\forall \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in K$ için ,

$$Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = Đ\left(\xi_{\pi(1)}, \xi_{\pi(2)}, \dots, \xi_{\pi(n)}\right)$$

ifadesine permuting dönüşüm denir.

Tanım 1.2.9 : Đ permuting dönüşüm , $d : K \rightarrow K$ dönüşüm olmak üzere, $d(\xi) = Đ(\xi, \xi, \dots, \xi)$ ile tanımlanan ifadeye , Đ ‘ nin izi denir.

Tanım 1.2.10 : $(K, \wedge, \vee)$ ve $(S, \wedge, \vee)$ iki kafes olsun. $f: K \rightarrow S$ bir dönüşüm $\forall \xi, \psi \in K$ için,

$$f(\xi \wedge \psi) = f(\xi) \wedge f(\psi)$$

$$f(\xi \vee \psi) = f(\xi) \vee f(\psi)$$

sağlanırsa , f fonksiyonuna kafes homomorfizmi denir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu başlıkta çalışacağımız konuyla ilgili hazır bulunuşluğumuzu arttırmak için tanımlar, teorem ve önermeleri (ispatlı ve ispatsız) ve yayımlanan makalelerin yazar isimleri ve yayımlandığı yıllar belirtilerek bahsedilmiştir.

2.1 KAFESLERDE TÜREV

(Xin ve diğ. 2008) kafeslerde türev üzerinde, Ceven ve Öztürk (2008) kafeslerde f – türevi çalışmışlardır.

Tanım 2.1.1 : K bir kafes ve $Đ: K \rightarrow K$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall\ \xi, \psi \in K$ için verilen şart yerine gelirse Đ'ye K üzerinde bir türev denir.

$$Đ(\xi \wedge \psi) = (Đ(\xi) \wedge \psi) \vee (\xi \wedge Đ(\psi))$$

Önerme 2.1 : K bir kafes , $Đ: K \rightarrow K$ bir türev dönüşümü olmak üzere, $\forall\ \xi, \psi \in K$ için aşağıdaki şartlar sağlanır:

- ✓ $Đ(\xi) \leq \xi$
- ✓ $Đ(\xi) \wedge Đ(\psi) \leq Đ(\xi \wedge \psi) \leq Đ(\xi) \vee Đ(\psi)$
- ✓ K nin minimal elemanı 0 ise , $Đ(0) = 0$
- ✓ $Đ^2(\xi) = Đ(\xi)$

Önerme 2.1.2 : K bir kafes , $Đ: K \rightarrow K$ bir türev dönüşümü olmak üzere, $\xi \leq \psi$ ve $Đ(\psi) = \psi$ ise $Đ(\xi) = \xi$ dur.

Tanım 2.1.2 : K bir kafes , $Đ: K \rightarrow K$ bir türev dönüşümü olsun.

- ✓ $\xi \leq \psi$ iken $Đ(\xi) \leq Đ(\psi)$ ….(1)
- ✓ $Đ$, 1-1 ….(2)
- ✓ Đ örten ….(3)

(1) de izoton, (2) monomorfik, (3) epik türev olarak isimlendirilir.

Teorem 2.1 : K distribütiv kafes, Đ$: K \to K$ bir türev dönüşümü olsun. $\forall\, \xi, \psi \in K$ için aşağıdaki şartlar sağlanır:

- ✓ Đ izotondur.
- ✓ $Đ(\xi \wedge \psi) = Đ(\xi) \wedge Đ(\psi)$
- ✓ $Đ(\xi \vee \psi) = Đ(\xi) \vee Đ(\psi)$

2.1.1 KAFESLERDE $f -$ TÜREV

Tanım 2.1.1.1 : K bir kafes , Đ$: K \to K$ bir dönüşüm ve $f : K \to K$ fonksiyon olsun. Eğer, $\forall\, \xi, \psi \in K$ da verilen şart yerine getirilebiliyorsa Đ' ye K ' nın f – türevi denir.

$$Đ(\xi \wedge \psi) = (Đ(\xi) \wedge f(\psi)) \vee (f(\xi) \wedge Đ(\psi))$$

Önerme 2.1.1.1 : K bir kafes , Đ$: K \to K$ bir f – türev ve $\forall\, \xi, \psi \in K$ için aşağıdaki şartlar sağlanır:

- ✓ $Đ(\xi) \leq f(\xi)$
- ✓ $Đ(\xi \wedge \psi) \leq f(\xi) \vee f(\psi)$
- ✓ K' nın minimum elemanı 0 ve $f(0) = 0$ ise $Đ(0) = 0$

Önerme 2.1.1.2 : K' nın maksimum elemanı 1 olan bir kafes ; Đ$: K \to K$ bir f – türev ve $f(1) = 1$ olacak şekilde aşağıdaki şartlar sağlanır:

- ✓ $\xi \leq Đ(1)$ ise $Đ(\xi) = f(\xi)$
- ✓ $\xi \geq Đ(1)$ ise $Đ(\xi) \geq Đ(1)$

Teorem 2.1.1.1 : K bir modüler kafes, Đ$: K \to K$ bir f – türev ve $\forall\, \xi, \psi \in K$ için ;

- ✓ Đ izoton f – türev $\Leftrightarrow Đ(\xi \wedge \psi) = Đ(\xi) \wedge Đ(\psi)$
- ✓ Đ izoton f – türev ve $f(\xi \vee \psi) = f(\xi) \vee f(\psi)$ olursa,

$$Đ(\xi) = f(\xi) \implies Đ(\xi \vee \psi) = Đ(\xi) \vee Đ(\psi)$$

şartlar sağlanır.

2.1.2 KAFESLERDE SİMETRİK Bİ- TÜREV

Ceven (2009) kafeste simetrik bi–türev, Özbal ve Fırat (2010) kafeste simetrik bi - f – türevde çalıştılar.

Tanım 2.1.2.1 : K bir kafes , Đ: $K\ x\ K \rightarrow K$ bir simetrik fonksiyon, $\forall\ \xi, \psi, \varpi\ \in K$ için aşağıdaki şartlar sağlanırsa, Đ' ye K' nın simetrik bi-türevi denir.

$$Đ(\xi \wedge \psi, \varpi) = (Đ(\xi, \varpi) \wedge \psi) \vee (\xi \wedge Đ(\psi, \varpi))$$

İlaveten;

$$Đ(\xi, \psi \wedge \varpi) = (Đ(\xi, \psi) \wedge \varpi) \vee (\psi \wedge Đ(\xi, \varpi))$$

Önerme 2.1.2.2 : K bir kafes , Đ: $K\ x\ K \rightarrow K$ bir simetrik bi-türev, $\forall\ \xi, \psi \in K$ için aşağıdaki şartlar sağlanır:

- ✓ $Đ(\xi, \psi) \leq \xi$ ve $Đ(\xi, \psi) \leq \psi$
- ✓ $Đ(\xi, \psi) \leq \xi \wedge \psi$
- ✓ $đ(\xi) \leq \xi$
- ✓ $đ^2(\xi) = đ(\xi)$

Tanım 2.1.2.2 : K bir kafes , Đ: $K\ x\ K \rightarrow K$ simetrik bir fonksiyon, $\forall\ \xi, \psi, \varpi \in K$ için aşağıdaki şartlar sağlanırsa, Đ ' ye joinitiv (ortak) dönüşüm denir.

$$Đ(\xi \vee \psi, \varpi) = Đ(\xi, \psi) \vee Đ(\xi, \varpi)$$

Önerme 2.1.2.3 : K bir kafes ve đ , Đ: $K\ x\ K \rightarrow K$ joinitiv simetrik bi-türevinin izi ve $\forall\ \xi, \psi \in K$ için aşağıdaki şartlar sağlanır:

$$đ(\xi \vee \psi) = đ(\xi) \vee đ(\psi) \vee đ(\xi, \psi)$$

Teorem 2.1.2.1 : K bir kafes ve đ , Đ: $K\ x\ K \rightarrow K$ simetrik bi-türevinin izi ve $\forall\ \xi, \psi\ \in K$ için aşağıdaki şartlar sağlanır:

$$đ(\xi \wedge \psi) = đ(\psi \wedge đ(\xi)) \vee (\xi \wedge đ(\psi)) \vee Đ(\xi, \psi)$$

2.1.3 KAFESLERDE SİMETRİK Bİ -f- TÜREV

Tanım 2.1.3.1 : K bir kafes , $Đ: K \times K \rightarrow K$ ve $f: K \rightarrow K$ bir fonksiyon olmak üzere $\forall\ \xi, \psi, \varpi \in K$ için aşağıdaki şartlar sağlanırsa Đ' ye K' nın simetrik bi-f-türevi denir.

$$Đ(\xi \wedge \psi, \varpi) = (Đ(\xi, \varpi) \wedge f(\psi)) \vee (f(\xi) \wedge Đ(\psi, \varpi))$$

İlaveten;

$$Đ(\xi, \psi \wedge \varpi) = (Đ(\xi, \psi) \wedge f(\varpi)) \vee (f(\psi) \wedge Đ(\xi, \varpi))$$

Önerme 2.1.3.1 : K bir kafes , $Đ: K \times K \rightarrow K$ simetrik bi-f-türev ,
$\forall\ \xi, \psi \in K$ için aşağıdaki şartlar sağlanır:

- ✓ $Đ(\xi, \psi) \leq f(\xi)$ ve $Đ(\xi, \psi) \leq f(\psi)$
- ✓ $Đ(\xi, \psi) \leq f(\xi) \wedge f(\psi)$
- ✓ $đ(\xi) \leq f(\xi)$

Teorem 2.1.3.1 : K bir kafes ve đ , $Đ: K \times K \rightarrow K$ simetrik bi-f-türevinin izi ve $f(\xi \wedge \psi) = f(\xi) \wedge f(\psi)$ olacak şekilde, $\forall \xi, \psi \in K$ için aşağıdaki şart sağlanır:

$$đ(\xi \wedge \psi) = (f(\psi) \wedge đ(\xi)) \vee (f(\xi) \wedge đ(\psi)) \vee Đ(\xi, \psi)$$

Önerme 2.1.3.2 : K, maksimum elemanı 1 olan bir kafes ve $Đ: K \times K \rightarrow K$ simetrik bi-f-türev, $f(1) = 1$ olacak şekilde aşağıdaki şartlar sağanır:

- ✓ $f(\xi) \leq đ(1) \Rightarrow đ(\xi) = f(\xi)$
- ✓ $f(\xi) \geq đ(1) \Rightarrow đ(\xi) \leq đ(1)$
- ✓ $\xi \leq \psi$ ve f artan iken $đ(\psi) = f(\psi) \Rightarrow đ(\xi) = f(\xi)$.

2.1.4 KAFESLERDE PERMUTİNG TRİ – TÜREVLER

(Ozturk ve diğ. 2009) kafeslerde permuting tri-türevde, Khan ve Chaudhry (2011) kafeslerde permuting tri $-f$- türevde , (Aşcı ve diğ. 2011) kafeslerde permuting tri- (f, g)- türevde çalıştılar.

2.1.4.1 KAFESLERDE PERMUTİNG TRİ-TÜREV

Tanım 2.1.4.1.1: K bir kafes, Đ: $K \times K \times K \to K$ dönüşüm, $\forall\, \xi, \psi, \varpi, \mu \in K$ için aşağıdaki şart sağlanırsa Đ' ye K 'nın permuting tri-türevi denir.

$$Đ(\xi \wedge \psi, \varpi, \mu) = (Đ(\xi, \psi, \varpi) \wedge \mu) \vee (\xi \wedge Đ(\psi, \varpi, \mu))$$

İlaveten;

$$Đ(\xi, \psi \wedge \varpi, \mu) = (Đ(\xi, \psi, \mu) \wedge \varpi) \vee (\psi \wedge Đ(\xi, \varpi, \mu))$$

$$Đ(\xi, \psi, \varpi \wedge \mu) = (Đ(\xi, \psi, \varpi) \wedge \mu) \vee (\varpi \wedge Đ(\xi, \psi, \mu))$$

Önerme 2.1.4.1.1 : K bir kafes, Đ: $K \times K \times K$ permuting tri-türev, $\forall\, \xi, \psi, \varpi \in K$ için aşağıdaki şartlar sağlanır:

- ✓ $Đ(\xi, \psi, \varpi) \leq \xi$; $Đ(\xi, \psi, \varpi,) \leq \psi$; $Đ(\xi, \psi, \varpi) \leq \varpi$
- ✓ $Đ(\xi, \psi, \varpi) \leq \xi \wedge \psi \wedge \varpi$
- ✓ $đ(\xi) \leq \xi$
- ✓ $đ^2(\xi) = d(\xi)$

Tanım 2.1.4.1.2 : K bir kafes, Đ: $K \times K \times K \to K$ permuting fonksiyon, $\forall\, \xi, \psi, \varpi, \mu \in K$ için aşağıdaki şartlar sağlanırsa Đ' ye joinitiv (ortak) dönüşüm denir.

$$Đ(\xi \vee \psi, \varpi, \mu) = Đ(\, \xi, \varpi, \mu) \vee Đ(\psi, \varpi, \mu)$$

Önerme 2.1.4.1.2 : K bir kafes, đ, Đ: $K \times K \times K \to K$ joinitiv permuting tri-türevinin izi ve $\forall\, \xi, \psi \in K$ için aşağıdaki şart sağlanır:

$$đ(\xi \vee \psi) = đ(\xi) \vee đ(\psi) \vee Đ(\xi, \xi, \psi) \vee Đ(\xi, \psi, \psi)$$

Teorem 2.1.4.1.1 : K bir kafes, $đ$, $Đ::K\times K\times K\to K$ joinitiv permuting tri-türevinin izi ve $\forall\ \xi,\psi\in K$ için aşağıdaki şart sağlanır:

$$đ(\xi\wedge\psi)=(\psi\wedge đ(\xi))\vee(\xi\wedge đ(\psi))\vee Đ(\xi,\xi,\psi)\vee Đ(\xi,\psi,\psi)$$

2.1.4.2 LATİSLERDE PERMUTİNG TRİ – f- TÜREV

Tanım 2.1.4.2.1 : K bir kafes, $Đ:K\times K\times K\to K$ permuting dönüşüm ve $f:K\to K$ bir fonksiyon olmak üzere , $\forall\xi,\psi,\varpi,\mu\in K$ için aşağıdaki şart sağlanırsa Đ' ye K 'nın permuting tri-f-türevi denir.

$$Đ(\xi\wedge\psi,\varpi,\mu)=(Đ(\xi,\varpi,\mu)\wedge f(\psi))\vee(f(\xi)\wedge Đ(\psi,\varpi,\mu))$$

İlaveten;

$$Đ(\xi,\psi\wedge\varpi,\mu)=(Đ(\xi,\psi,\mu)\wedge f(\varpi))\vee(f(\psi)\wedge Đ(\xi,\varpi,\mu))$$

$$Đ(\xi,\psi,\varpi\wedge\mu)=(Đ(\xi,\psi,\varpi)\wedge f(\mu))\vee(f(\varpi)\wedge Đ(\xi,\psi,\mu))$$

Önerme 2.1.4.2.1 : K bir kafes, $Đ:K\times K\times K\to K$ permuting tri – f- türev , $\forall\ \xi,\psi,\varpi\in K$ için aşağıdaki şartlar sağlanır:

- ✓ $Đ(\xi,\psi,\varpi)\le f(\xi)$, $Đ(\xi,\psi,\varpi)\le f(\psi)$, $Đ(\xi,\psi,\varpi)\le f(\varpi)$
- ✓ $Đ(\xi,\psi,\varpi)\le f(\xi)\wedge f(\psi)\wedge f(\varpi)$
- ✓ $đ(\xi)\le f(\xi)$

Teorem 2.1.4.2.1 : K bir kafes, $đ, Đ:K\times K\times K\to K$ permuting tri-f-türevinin izi ve $\forall\ \xi,\psi\in K$ için aşağıdaki şart sağlanır:

$$đ(\xi\wedge\psi)=(f(\psi)\wedge đ(\xi))\vee(f(\xi)\wedge đ(\psi))\vee Đ(\xi,\xi,\psi)\vee Đ(\xi,\psi,\psi)$$

2.1.4.3 KAFESLERDE PERMUTİNG TRİ - (f, g)- TÜREV

Tanım 2.1.4.3.1 : K bir kafes, $Đ: K \times K \times K \to K$ permuting dönüşüm, $f: K \to K$ ve $g: K \to K$ birer fonksiyon olmak üzere , $\forall\, \xi, \psi, \varpi, \mu \in K$ için aşağıdaki şart sağlanırsa Đ ‘ye K ‘nın permuting tri-(f, g)-türevi denir.

$$Đ(\xi \wedge \psi, \varpi, \mu) = (Đ(\xi, \varpi, \mu) \wedge f(\psi)) \vee (g(\xi) \wedge Đ(\psi, \varpi, \mu))$$

İlaveten;

$$Đ(\xi, \psi \wedge \varpi, \mu) = (Đ(\xi, \psi, \mu) \wedge f(\varpi)) \vee (g(\psi) \wedge Đ(\xi, \varpi, \mu))$$

$$Đ(\xi, \psi, \varpi \wedge \mu) = (Đ(\xi, \psi, \varpi) \wedge f(\mu)) \vee (g(\varpi) \wedge Đ(\xi, \psi, \mu))$$

Önerme 2.1.4.3.1 : K bir kafes, $Đ: K \times K \times K \to K$ permuting tri-(f, g)-türev, $\forall\, \xi, \psi, \varpi \in K$ için aşağıdaki şartlar sağlanır:

- ✓ $Đ(\xi, \psi, \varpi) \leq f(\xi) \vee g(\xi)$, $Đ(\xi, \psi, \varpi) \leq f(\psi) \vee g(\psi)$, $Đ(\xi, \psi, \varpi) \leq f(\varpi) \vee g(\varpi)$
- ✓ $Đ(\xi, \psi, \varpi) \leq (f(\xi) \vee g(\xi)) \wedge (f(\psi) \vee g(\psi)) \wedge (f(\varpi) \vee g(\varpi))$
- ✓ $đ(\xi) \leq f(\xi) \vee g(\xi)$

Önerme 2.1.4.3.2 : K bir kafes, $Đ: K \times K \times K \to K$ permuting tri-(f, g)-türev, $\forall\, \xi, \psi, \varpi \in K$ için aşağıdaki şartlar sağlanır:

- ✓ $f(\xi) \leq Đ(1, \psi, \varpi)$ ve $g(\xi) \leq Đ(1, \psi, \varpi) \Longrightarrow Đ(\xi, \psi, \varpi) = f(\xi) \vee g(\xi)$
- ✓ $f(\xi) \geq Đ(1, \psi, \varpi)$ ve $g(\xi) \geq Đ(1, \psi, \varpi) \Longrightarrow Đ(\xi, \psi, \varpi) \geq Đ(1, \psi, \varpi)$

2.1.5 KAFESLERDE PERMUTİNG $n-$ TÜREVLER

Bu bölümde kafeslerde permuting $n-$türevlerin tanımı yapılarak bir kısım örnekler, bir kısım önermeleri ispatlarıyla ve bir kısmı da ispatsız olarak verilecektir.

Tanım 2.1.5.1 : K bir kafes ve $Đ: \underbrace{K \times K \times \ldots \times K}_{n-tan} \to K$ ‘ ya bir permuting dönüşüm ; $\forall\, \xi_1, \xi_1', \xi_2, \xi_2', \ldots, \xi_n, \xi_n' \in K$ için aşağıdaki şart sağlanırsa Đ ‘ ye K ‘nın permuting $n-$ türevi denir.

$$Đ(\xi_1 \wedge \xi_1', \xi_2, \ldots, \xi_n) = (\, Đ(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \wedge \xi_1') \vee (\xi_1 \wedge Đ(\xi_1', \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

Bir permuting türev;

$$Đ(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \wedge \xi_n') = (Đ(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \wedge \xi_n') \vee (\xi_n \wedge Đ(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n'))$$

şartını sağlar. Aşağıda bir permuting türev bir de türev olmayan iki örnek verelim.

Örnek 2.1.5.1 : K bir kafes , K üzerinde $\forall \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in K$ için Đ dönüşümü

$$Đ(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \ldots \wedge \xi_n$$

şeklinde verilen yapı bir Đ permuting $n-$türevdir.

Çözüm: $Đ(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \ldots \wedge \xi_n$ olduğundan

$$\begin{aligned} Đ(\xi_1 \wedge \xi_1', \xi_2, \ldots, \xi_n) &= ((\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \ldots \wedge \xi_n) \wedge \xi_1') \vee (\xi_1 \wedge (\xi_1' \wedge \xi_2 \wedge \ldots \wedge \xi_n)) \\ &= (Đ(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \wedge \xi_1') \vee (\xi_1 \wedge Đ(\xi_1', \xi_2, \ldots, \xi_n) \end{aligned}$$

olduğundan Đ permuting $n-$türevdir.

Örnek 2.1.5.2 : K bir kafes, $\psi \in K$ olmak üzere, $\forall\, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in K$ için Đ dönüşümü,

$$Đ(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = (\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \ldots \wedge \xi_n) \wedge \psi$$

şeklinde verilsin. Bu şartlar altında Đ permuting $n-$türevdir.

Çözüm: $Đ(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = (\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \ldots \wedge \xi_n) \wedge \psi$ olduğundan

$$Đ(\xi_1 \wedge \xi_1', \xi_2, \ldots, \xi_n) = \big(((\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \ldots \wedge \xi_n) \wedge \psi) \wedge \xi_1'\big)$$

$$\vee (\xi_1 \wedge \big((\xi_1' \wedge \xi_2 \wedge \ldots \wedge \xi_n) \wedge \psi\big))$$

Böylece,

$$Đ(\xi_1 \wedge \xi_1', \xi_2, \ldots, \xi_n) = ((\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \ldots \wedge \xi_n) \wedge \xi_1') \vee (\xi_1 \wedge (\xi_1' \wedge \xi_2 \wedge \ldots \wedge \xi_n))$$

olduğundan Đ permuting n −türevdir.

Örnek 2.1.5.3 : K bir kafes, K üzerinde $\forall \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in K$ için Đ dönüşümü

$$Đ(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \xi_1 \vee \xi_2 \vee \ldots \vee \xi_n$$

şeklinde verilen yapı bir Đ permuting n −türev değildir.

Çözüm: $Đ(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = (\xi_1 \vee \xi_2 \vee \ldots \vee \xi_n)$ olduğundan

$$Đ(\xi_1 \wedge \xi_1', \xi_2, \ldots, \xi_n) = (\xi_1 \wedge \xi_1') \vee \ldots \vee \xi_n)$$

Diğer taraftan,

$$(Đ(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \wedge \xi_1') \vee \big(\xi_1 \wedge Đ(\xi_1', \xi_2, \ldots, \xi_n)\big) = \big((\xi_1 \vee \xi_2 \vee \ldots \vee \xi_n) \wedge \xi_1'\big)$$

$$\vee (\xi_1 \wedge (\xi_1' \vee \xi_2 \vee \ldots \vee \xi_n)$$

Buradan da ,

$$Đ(\xi_1 \wedge \xi_1', \xi_2, \ldots, \xi_n) \neq (Đ(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \wedge \xi_1') \vee \big(\xi_1 \wedge Đ(\xi_1', \xi_2, \ldots, \xi_n)\big)$$

olduğundan Đ permuting n −türev değildir.

Önerme 2.1.5.1 : K bir kafes ve K üzerindeki Đ permuting n −türevin izi đ olsun. Bu durumda $\forall \xi, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in K$ için aşağıdaki koşullar sağlanır.

- ✓ $Đ(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \leq \xi_1;\ \ldots;\ Đ(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \leq \xi_n$
- ✓ $Đ(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \leq (\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \ldots \wedge \xi_n)$
- ✓ $đ(\xi) \leq \xi$
- ✓ $đ^2(\xi) = đ(\xi)$

Önerme 2.1.5.2 : K bir kafes ve maksimum elemanı 1 olsun. Đ, K üzerinde permuting n −türev olsun.

Eğer $Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \xi_1 \wedge Đ(1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ise,

$Đ(\xi_1 \wedge \xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n) = Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \wedge Đ(\xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n s_n)$ dir.

İspat:

$$Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \xi_1 \wedge Đ(1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad \text{ise,}$$

$$Đ(\xi_1 \wedge \xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n) = (\xi_1 \wedge \xi_1') \wedge Đ(1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

olup kafes tanımında,

$$Đ(\xi_1 \wedge \xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n) = (\xi_1 \wedge Đ(1, \xi_2, \dots, \xi_n)) \wedge (\xi_1' \wedge Đ(1, \xi_2, \dots, \xi_n))$$

olur. Buradan ,

$$Đ(\xi_1 \wedge \xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n) = Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \wedge Đ(\xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n)$$

sonucu elde edilir.

Teorem 2.1.5.1 : K bir kafes ve K üzerindeki Đ permuting n −türevin izi đ olmak üzere $\forall \xi_1, \xi_1' \in K$ için aşağıdaki şart sağlanır.

$$đ(\xi_1 \wedge \xi_1') = (đ(\xi_1') \wedge \xi_1) \vee Đ(\xi_1, \xi_1', \dots, \xi_1') \vee \dots \vee Đ(\xi_1', \xi_1, \dots, \xi_1) \vee (đ(\xi_1) \wedge \xi_1')$$

İspat : İz tanımından,

$$đ(\xi_1 \wedge \xi_1') = Đ(\xi_1 \wedge \xi_1', \xi_1 \wedge \xi_1', \dots, \xi_1 \wedge \xi_1')$$

Türev tanımından,

$$đ(\xi_1 \wedge \xi_1') = (Đ(\xi_1, \xi_1 \wedge \xi_1', \dots, \xi_1 \wedge \xi_1') \wedge \xi_1') \vee (Đ(\xi_1', \xi_1 \wedge \xi_1', \dots, \xi_1 \wedge \xi_1') \wedge \xi_1)$$

şeklinde devam edilirse,

$$đ(\xi_1 \wedge \xi_1') = (đ(\xi_1) \wedge \xi_1') \vee (\xi_1 \wedge Đ(\xi_1, \xi_1', \dots, \xi_1') \wedge \xi_1') \vee \dots$$

$$\dots \vee (\xi_1' \wedge Đ(\xi_1', \xi_1, \dots, \xi_1) \wedge \xi_1) \vee (đ(\xi_1') \wedge \xi_1)$$

Önerme 2.5.1.1 den ,

$$D(\xi_1', \xi_1, \ldots, \xi_1) \leq \xi_1 \text{ ve } D(\xi_1', \xi_1, \ldots, \xi_1) \leq \xi_1'$$

olur. Burada "∧" işlemini uygularsak,

$$Đ(\xi_1', \xi_1, \ldots, \xi_1) \leq \xi_1 \wedge \xi_1'$$

olur. Diğer taraftan aynı işlemi,

$$Đ(\xi_1, \xi_1', \ldots, \xi_1') \leq \xi_1' \text{ ve } Đ(\xi_1, \xi_1', \ldots, \xi_1') \leq \xi_1$$

eşitsizliği içinde uygularsak,

$$Đ(\xi_1, \xi_1', \ldots, \xi_1') \leq \xi_1' \wedge \xi_1$$

olur. Sonuç olarak,

$$đ(\xi_1 \wedge \xi_1') = (đ(\xi_1') \wedge \xi_1) \vee Đ(\xi_1, \xi_1', \ldots, \xi_1') \vee \ldots \vee Đ(\xi_1', \xi_1, \ldots, \xi_1) \vee (đ(\xi_1) \wedge \xi_1')$$

elde edilir.

Önerme 2.1.5.3 : K bir kafes ve K üzerindeki Đ permuting n −türev olsun. $\xi_1' \leq \xi_1$ ve $Đ(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \xi_1$ ise $Đ(\xi_1', \xi_2, \ldots, \xi_n) = \xi_1'$ dir.

İspat : $\xi_1' \leq \xi_1$ ise $\xi_1' = \xi_1 \wedge \xi_1'$ olur. Bu takdirde,

$$Đ(\xi_1', \xi_2, \ldots, \xi_n) = Đ(\xi_1 \wedge \xi_1', \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

olur. Türev tanımını uygularsak,

$$(Đ(\xi_1', \xi_2, \ldots, \xi_n) \wedge \xi_1) \vee (Đ(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \wedge \xi_1')$$

şeklinde yazılabilir. Önerme 2.1.5.1 den

$$Đ(\xi_1', \xi_2, \ldots, \xi_n) \leq \xi_1' \leq \xi_1 = Đ(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

olur. Buradan da,

$$Đ(\xi_1', \xi_2, \ldots, \xi_n) = \xi_1' \vee Đ(\xi_1', \xi_2, \ldots, \xi_n) = \xi_1'$$

sonucuna ulaşılır.

Tanım 2.1.5.2 : K bir kafes ve K üzerinde $Đ: \underbrace{K \times K \times \ldots \times K}_{n-tane} \to K$ ' ya permuting bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall \xi_1, \xi_1', \xi_2, \xi_2', \ldots, \xi_n, \xi_n' \in K$ için aşağıdaki şart sağlanırsa Đ joinitivdir.

$$Đ(\xi_1 \vee \xi_1', \xi_2, \ldots, \xi_n) = Đ(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \vee Đ(\xi_1', \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

Benzer şekilde,

$$Đ(\xi_1, \xi_2, \dots., \xi_n \vee \xi_n') = Đ(\xi_1, \xi_2, \dots., \xi_n) \vee Đ(\xi_1, \xi_2, \dots., \xi_n')$$

dönüşümünün de joinitiv olduğu görülür.

Tanım 2.1.5.3 : K bir kafes olsun. K daki tüm permuting n −türev joinitiv ise K distbirütiv kafestir.

İspat : Örnek 2.1.5.1 deki Đ permuting n −türevini göz önüne aldığımızda ξ_1 yerine $\xi_1 \vee \xi_1'$ alınırsa,

$$Đ(\xi_1 \vee \xi_1', \xi_2, \dots., \xi_n) = (\xi_1 \vee \xi_1') \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_n$$

olur. Đ joinitiv olduğuna göre,

$$\begin{aligned} Đ(\xi_1 \vee \xi_1', \xi_2, \dots., \xi_n) &= Đ(\xi_1, \xi_2, \dots., \xi_n) \vee Đ(\xi_1', \xi_2, \dots., \xi_n) \\ &= (\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_n) \vee (\xi_1' \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_n) \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$(\xi_1 \vee \xi_1') \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_n = (\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_n) \vee (\xi_1' \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_n)$$

şeklinde yazılabilir. Bu da K nin distbirütiv olduğunu gösterir.

Sonuç 2.1.5.1 : K bir kafes olsun. K daki tüm permuting n −türev joinitiv ise K modüler kafestir.

İspat : Teorem 2.1.5.1 den K nin distbirütiv olduğunu göstermiştik. Her distbirütiv kafes modüler olduğundan K modülerdir.

Tanım 2.1.5.3 : K bir kafes ve Đ, K üzerinde permuting n −türev olsun.

- ✓ $\xi_1 \leq \xi_1'$ iken , $Đ(\xi_1, \xi_2, \dots., \xi_n) \leq Đ(\xi_1', \xi_2, \dots., \xi_n)$ ….(1)
- ✓ Đ, 1-1 ….(2)
- ✓ Đ, örten ….(3)

(1) ise izoton , (2) ise monomorfik, (3) ise epik n −türev denir.

Önerme 2.1.5.4 : K bir kafes ve Đ, K üzerinde izoton permuting n −türev olsun. Eğer,

$$Đ(\xi_1, \xi_2, \dots., \xi_n) = \xi_1 \quad \text{ve} \quad Đ(\xi_1', \xi_2, \dots., \xi_n) = \xi_1'$$

eşit olursa,

$$Đ(\xi_1 \vee \xi_1', \xi_2, \dots., \xi_n) = \xi_1 \vee \xi_1'$$

olur.

İspat : Đ izoton olsun. Bu durumda $\xi_1 \leq \xi_1 \vee \xi_1'$ ve $\xi_1' \leq \xi_1 \vee \xi_1'$ olduğundan,

$$Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \leq Đ(\xi_1 \vee \xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n)$$

$$Đ(\xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n) \leq Đ(\xi_1 \vee \xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n)$$

sonucuna ulaşılır. "$\vee$" işlemi uygulanırsa,

$$Đ(\xi_1 \vee \xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n) = \xi_1 \vee \xi_1'$$

olur. Buradan da,

$$Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \vee Đ(\xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n) = \xi_1 \vee \xi_1' \leq Đ(\xi_1 \vee \xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n) \leq \xi_1 \vee \xi_1'$$

$$Đ(\xi_1 \vee \xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n) = \xi_1 \vee \xi_1'$$

sonucuna ulaşılır.

2.1.6 KAFESLERDE PERMUTİNG $\boldsymbol{n-f}$ −TÜREV

Tanım 2.1.6.1: K bir kafes , $Đ: \underbrace{K \times K \times \dots \times K}_{n-tan} \to K$ bir permuting dönüşüm olsun. $\forall \xi_1, \xi_1', \xi_2, \xi_2', \dots, \xi_n, \xi_n' \in K$ için,

$$Đ(\xi_1 \wedge \xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n) = (Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \wedge f(\xi_1')) \vee (f(\xi_1) \wedge Đ(\xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n))$$

ifadesini sağlayacak bir $f: K \to K$ fonksiyonu varsa Đ'ye permuting $n-f$ −türev denir ve aşağıdaki verilen bağıntıyı sağlar.

$$Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \wedge \xi_n') = (Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \wedge f(\xi_n')) \vee (f(\xi_n) \wedge Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n'))$$

Örnek 2.1.6.1 : K bir kafes ve K üzerindeki $\forall \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in K$ için Đ dönüşümü, $Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = f(\xi_1) \wedge f(\xi_2) \wedge \dots \wedge f(\xi_n)$

türünde ele alındığında , $f: K \to K$ fonksiyonu için

$$f(\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_n) = f(\xi_1) \wedge f(\xi_2) \wedge \dots \wedge f(\xi_n)$$

şartını sağlarsa Đ , K üzerinde bir permuting $n-f$ −türevdir.

Çözüm :

$$Ð(\xi_1 \wedge \xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n) = f(\xi_1 \wedge \xi_1') \wedge f(\xi_2) \wedge \dots \wedge f(\xi_n)$$

$$= f(\xi_1) \wedge f(\xi_1') \wedge f(\xi_2) \wedge \dots \wedge f(\xi_n)$$

"$\vee$" işlemini uygularsak,

$$Ð(\xi_1 \wedge \xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n) = ((\xi_1) \wedge f(\xi_1') \wedge f(\xi_2) \wedge \dots \wedge f(\xi_n)) \vee$$

$$(f(\xi_1') \wedge \big(f(\xi_1) \wedge f(\xi_2) \wedge \dots \wedge f(\xi_n)\big))$$

oluşur. Bu eşitliğinde,

$$Ð(\xi_1 \wedge \xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n) = (Ð(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \wedge f(\xi_1')) \vee (f(\xi_1) \wedge Ð(\xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n))$$

ifadesine eşit olduğunu biliyoruz. Bu taktirde Ð permuting $n - f$ −türev olur.

Önerme 2.1.6.1 : K bir kafes ve K üzerindeki bir Ð permuting $n - f$ −türevin izi đ olsun. Bu şartlarda $\forall \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in K$ için aşağıdaki şartlar sağlanır.

- ✓ $Ð(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \leq f(\xi_1), \dots, Ð(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \leq f(\xi_n)$
- ✓ $Ð(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \leq \big(f(\xi_1) \wedge f(\xi_2) \wedge \dots \wedge f(\xi_n)\big)$
- ✓ $đ(\xi) \leq f(\xi)$

Bu önerme ifadesinden sonuçla,

Ð , maksimum elemanı 1 ve minimum elemanı 0 olan bir K üzerinde permuting $n - f$ −türev olsun. $f(0) = 0$ ve $f(1) = 1$ olacak şekilde,

i. $D(0, \xi_2, \dots, \xi_n) = 0$

ii. $D(1, \xi_2, \dots, \xi_n) \leq f(\xi_t)$, $(t \geq 2\ ,\ t \in N^+)$

İspat :

i. $0 = 0 \wedge 0$

$Ð(0, \xi_2, \dots, \xi_n) = Ð(0 \wedge 0, \xi_2, \dots, \xi_n)$ şeklinde yazılabilir. Türev uygulanmasıyla da,

$$Ð(0 \wedge 0, \xi_2, \dots, \xi_n) = (Ð(0, \xi_2, \dots, \xi_n) \wedge f(0)) \vee (f(0) \wedge Ð(0, \xi_2, \dots, \xi_n))$$

$f(0) = 0$ ve minimum eleman 0 olduğundan,

$$= (Ð(0, \xi_2, \dots, \xi_n) \wedge 0) \vee \big(0 \wedge Ð(0, \xi_2, \dots, \xi_n)\big) = 0 \vee 0 = 0$$

ii. $Ð(1, \xi_2, \dots, \xi_n) \leq f(1) \wedge f(\xi_2) \wedge \dots \wedge f(\xi_n)$

$f(1) = 1$ ve maksimum eleman 1 olduğundan,

$$Ð(1, \xi_2, \dots, \xi_n) \leq 1 \wedge f(\xi_2) \wedge \dots \wedge f(\xi_n) = f(\xi_2) \wedge \dots \wedge f(\xi_t) \wedge \dots \wedge f(\xi_n) \leq f(\xi_t)$$

olur. $Ð(1, \xi_2, \dots, \xi_n) \leq f(\xi_t)$ sonucuna ulaşılır.

Önerme 2.1.6.2 : K bir kafes, f artan bir fonksiyon olacak şekilde tanımlanmış Ð , K üzerinde bir permuting $n - f -$ türev olsun. Eğer, $\xi_1 \leq \xi_1'$ ve $Ð(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = f(\xi_1)$ ise $Ð(\xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n) = f(\xi_1')$ dir.

İspat : $\xi_1' \leq \xi_1$ ise **,** $\xi_1' \wedge \xi_1 \leq \xi_1$ şeklinde yazılabilir.

$$Ð(\xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n) = Ð(\xi_1 \wedge \xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n)$$

türev işlemi uygulanırsa,

$$Ð(\xi_1 \wedge \xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n) = (Ð(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \wedge f(\xi_1')) \vee (f(\xi_1) \wedge Ð(\xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n))$$

f artan bir fonksiyon olduğundan, önerme 2.1.6.1 den,

$$Ð(\xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n) \leq f(\xi_1') \leq f(\xi_1)$$

olur.

Buradan,

$$Đ(\xi_1', \xi_2, \ldots., \xi_n) = f(\xi_1') \vee Đ(\xi_1', \xi_2, \ldots., \xi_n)$$

Bu durumda,

$$f(\xi_1') \leq Đ(\xi_1', \xi_2, \ldots., \xi_n)$$

Ayrıca önerme 2.1.6.1 den

$$Đ(\xi_1', \xi_2, \ldots., \xi_n) \leq f(\xi_1')$$

Bu taktirde,

$$f(\xi_1') = Đ(\xi_1', \xi_2, \ldots., \xi_n)$$

sonucuna ulaşılır.

Teorem 2.1.6.1 : K bir kafes olsun. $f(\xi_1 \vee \xi_1') = f(\xi_1) \vee f(\xi_1')$ olduğunda K üzerindeki her permuting $n - f$ −türev joinitiv ise K distribütiv kafestir.

İspat:

$$Đ(\xi_1, \xi_2, \ldots., \xi_n) = f(\xi_1) \wedge f(\xi_2) \wedge \ldots \wedge f(\xi_n)$$

olduğunu biliyoruz. $\xi_1 = \xi_1 \vee \xi_1'$ alırsak,

$$Đ(\xi_1 \vee \xi_1', \xi_2, \ldots., \xi_n) = f(\xi_1 \vee \xi_1') \wedge f(\xi_2) \wedge \ldots \wedge f(\xi_n)$$

$$= (f(\xi_1) \vee f(\xi_1')) \wedge f(\xi_2) \wedge \ldots \wedge f(\xi_n)$$

D joinitiv olduğundan,

$$Đ(\xi_1 \vee \xi_1', \xi_2, \ldots., \xi_n) = Đ(\xi_1, \xi_2, \ldots., \xi_n) \vee Đ(\xi_1', \xi_2, \ldots., \xi_n)$$

olur. Böylelikle,

$$Đ(\xi_1 \vee \xi_1', \xi_2, \ldots., \xi_n) = (f(\xi_1) \wedge f(\xi_2) \wedge \ldots \wedge f(\xi_n)) \vee (f(\xi_1') \wedge f(\xi_2) \wedge \ldots \wedge f(\xi_n))$$

Bu durumda,

$$(f(\xi_1) \vee f(\xi_1')) \wedge f(\xi_2) \wedge \ldots \wedge f(\xi_n) = (f(\xi_1) \wedge f(\xi_2) \wedge \ldots \wedge f(\xi_n)) \vee$$

$$(f(\xi_1') \wedge f(\xi_2) \wedge \ldots \wedge f(\xi_n))$$

sonucunda K nin distribütiv olduğu görülür.

Sonuç olarak K üzerindeki tüm permuting $n-f-$ türev joinitiv ise K modülerdir.

Tanım 2.1.6.2 : K bir kafes ve Ð , K üzerinde bir permuting $n-f-$türev olsun.

- ✓ Eğer $\xi_1 \leq \xi_1'$ iken , $Ð(\xi_1, \xi_2, \ldots., \xi_n) \leq Ð(\xi_1', \xi_2, \ldots., \xi_n)$ …(1)
- ✓ Ð, 1-1 …(2)
- ✓ Ð, örten …(3)

(1) ise izoton , (2) ise monomorfik, (3) ise epik permuting $n-f-$permuting türev denir.

2.1.7 KAFESLERDE PERMUTİNG $\boldsymbol{n-(f,g)}$ −TÜREV

Tanım 2.1.7.1 : K bir kafes, $Ð : \underbrace{K \times K \times \ldots \times K}_{n-tane} \rightarrow K$ permuting bir dönüşüm, $\forall \xi_1, \xi_1', \xi_2, \xi_2', \ldots., \xi_n, \xi_n' \in K$ için,

$$Ð(\xi_1 \wedge \xi_1', \xi_2, \ldots., \xi_n) = (Ð(\xi_1, \xi_2, \ldots., \xi_n) \wedge f(\xi_1')) \vee (g(\xi_1) \wedge Ð(\xi_1', \xi_2, \ldots., \xi_n))$$

olacak şekilde , $f, g : K \rightarrow K$ fonksiyonları varsa Ð' ye K üzerinde bir permuting $n-(f,g)-$ türev denir ve bu türev verilen bağıntıyı sağlar.

$$D(\xi_1, \xi_2, \ldots., \xi_n \wedge \xi_n') = (D(\xi_1, \xi_2, \ldots., \xi_n) \wedge f(\xi_n')) \vee (g(\xi_n) \wedge D(\xi_1, \xi_2, \ldots., \xi_n'))$$

Örnek 2.1.7.1 : K bir kafes olsun. $\forall \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in K$ için,

$f, g : K \to K$ için,

$$f(\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_n) = f(\xi_1) \wedge f(\xi_2) \wedge \dots \wedge f(\xi_n)$$

$$g(\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_n) = g(\xi_1) \wedge g(\xi_2) \wedge \dots \wedge g(\xi_n)$$

fonksiyonları verilsin. K üzerindeki bir D dönüşümü,

$$Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = f(\xi_1) \wedge g(\xi_1) \wedge f(\xi_2) \wedge g(\xi_2) \wedge \dots \wedge f(\xi_n) \wedge g(\xi_n)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu taktirde Đ , K üzerinde bir permuting $n - (f, g)$ −türevdir.

Çözüm : $\xi_1 = \xi_1 \wedge \xi_2$ olduğundan,

$$Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = Đ(\xi_1 \wedge \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = f(\xi_1) \wedge g(\xi_1) \wedge \dots \wedge f(\xi_n) \wedge g(\xi_n)$$

olur.

$$Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = f(\xi_1 \wedge \xi_1) \wedge g(\xi_1 \wedge \xi_1) \wedge \dots \wedge f(\xi_n) \wedge g(\xi_n)$$

elde edilir. Buradan,

$$Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = ((f(\xi_1) \wedge g(\xi_1) \wedge \dots \wedge f(\xi_n) \wedge g(\xi_n)) \wedge f(\xi_1))) \vee$$
$$(g(\xi_1) \wedge \left(f(\xi_1) \wedge g(\xi_1) \wedge \dots \wedge f(\xi_n) \wedge g(\xi_n)\right))$$

sonucuna ulaşılır. O halde,

$$Đ(\xi_1 \wedge \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \wedge f(\xi_1')) \vee (g(\xi_1) \wedge Đ(\xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n))$$

olur. Bu da Đ permuting $n - (f, g)$ −türevdir.

Önerme 2.1.7.1 : K bir kafes ve đ, K üzerindeki Đ permuting $n-(f,g)$ −türevin izi için, $\forall\xi,\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n \in K$ için aşağıdaki şartlar sağlanır.

i. $Đ(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n) \leq f(\xi_1) \vee g(\xi_1),\dots,Đ(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n) \leq f(\xi_n) \vee g(\xi_n)$

ii. $Đ(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n) \leq \big(f(\xi_1) \vee g(\xi_1)\big) \wedge \dots \wedge (f(\xi_n) \vee g(\xi_n))$

iii. $đ(\xi) \leq f(\xi) \vee g(\xi)$

İspat :

i. $\xi_1 = \xi_1 \wedge \xi_1$ olduğundan,

$$Đ(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n) = Đ(\xi_1 \wedge \xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$$

Türev işlemi uygulanırsa,

$$Đ(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n) = (Đ(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n) \wedge f(\xi_1)) \vee (g(\xi_1) \wedge Đ(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n))$$

olur.

$$Đ(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n) \wedge f(\xi_1) \leq f(\xi_1)$$

$$g(\xi_1) \wedge Đ(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n) \leq g(\xi_1)$$

olduğundan, bu ifadelerin "$\vee$" altındaki sonuçları,

$$Đ(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n) \leq f(\xi_1) \vee g(\xi_1)$$

elde edilir. Aynı şekilde,

$$Đ(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n) \leq f(\xi_2) \vee g(\xi_2),\dots,Đ(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n) \leq f(\xi_n) \vee g(\xi_n)$$

sonucu da elde edilir.

Sonuç 2.1.7.1 : Đ , K üzerinde bir permuting $n-(f,g)$ −türev olsun. K’ nin minimum elemanı 0 ve maksimum elemanı 1 , $f(0)=0$, $g(0)=0$, $f(1)=1$, $g(1)=1$ ise,

i. $Đ(0,\xi_2,\dots,\xi_n)=0$

ii. $Đ(1,\xi_2,\dots,\xi_n)\le f(\xi_t)\vee g(\xi_t)$, $(\, t\ge 2 \,,\, t\in N^+ \,)$

İspat :

i. Önerme 2.1.7.1 den ve 0 ‘ ın minimum eleman olduğundan,

$$0\le Đ(0,\xi_2,\dots,\xi_n)\le f(0)\vee g(0)$$

$f(0)=0$, $g(0)=0$ olduğundan , $f(0)\vee g(0)=0\vee 0=0$ olur.

$$0\le Đ(0,\xi_2,\dots,\xi_n)\le 0$$

Buradan da,

$$Đ(0,\xi_2,\dots,\xi_n)=0$$

elde edilir.

ii. $Đ(1,\xi_2,\dots,\xi_n)\le f(\xi_t)\vee g(\xi_t)$

$$Đ(1,\xi_2,\dots,\xi_n)\le \underbrace{f(1)}_{1}\wedge\underbrace{g(1)}_{1}\wedge f(\xi_2)\wedge g(\xi_2)\wedge\dots$$

$$\dots\wedge f(\xi_t)\wedge g(\xi_t)\wedge\dots\wedge f(\xi_n)\wedge g(\xi_n)$$

$$f(\xi_2)\wedge g(\xi_2)\wedge\dots\wedge f(\xi_t)\wedge g(\xi_t)\wedge\dots\wedge f(\xi_n)\wedge g(\xi_n)\le f(\xi_t)\wedge g(\xi_t)$$

olduğundan, $Đ(1,\xi_2,\dots,\xi_n)\le f(\xi_t)\vee g(\xi_t)$ elde edilir.

Önerme 2.1.7.2 : K distribütiv bir kafes ve Đ , K üzerinde permuting $n-(f,g)$ −türev, f ve g artan fonksiyonlar olsun.

$\xi_1'\le\xi_1$ ve $Đ(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)=f(\xi_1)\vee g(\xi_1)$ ise ,

$$Đ(\xi_1',\xi_2,\dots,\xi_n)=f(\xi_1')\vee g(\xi_1')$$

İspat : $\xi_1' \leq \xi_1$ olup $\xi_1' = \xi_1 \wedge \xi_1' = \xi_1' \wedge \xi_1$ olduğundan,

$$Đ(\xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n) = Đ(\xi_1' \wedge \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = Đ(\xi_1 \wedge \xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n)$$

olur. "∨" işlemi uygulanırsa,

$$Đ(\xi_1 \wedge \xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n) = Đ(\xi_1 \wedge \xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n) \vee Đ(\xi_1' \wedge \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

olup, ifadeye türev tanımını kullanılarak,

$$Đ(\xi_1 \wedge \xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n) = (Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)) \wedge f(\xi_1')) \vee$$

$$(g(\xi_1) \wedge Đ(\xi_1' \wedge \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n))$$

elde edilir. Ayrıca,

$$Đ(\xi_1' \wedge \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (Đ(\xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n)) \wedge f(\xi_1)) \vee$$

$$(g(\xi_1') \wedge D(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n))$$

olur. "∨" işlemi uygulanırsa,

$$Đ(\xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n) = ((Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \wedge f(\xi_1')) \vee (g(\xi_1) \wedge Đ(\xi_1' \wedge \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n))) \vee$$

$$((Đ(\xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n)) \wedge f(\xi_1)) \vee (g(\xi_1') \wedge Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)))$$

K distribütiv olduğundan,

$$Đ(\xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n) = (Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \wedge (f(\xi_1') \vee g(\xi_1'))) \vee$$

$$((f(\xi_1) \vee g(\xi_1)) \wedge Đ(s_1', s_2, \dots, s_n))$$

f ve g artan fonksiyonlar olduğundan,

$$Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = f(\xi_1) \vee g(\xi_1)$$

olur. Önerme 2.1.7.1 den

$$Đ(\xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n) \leq f(\xi_1') \vee g(\xi_1') \leq f(\xi_1) \vee g(\xi_1) = Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

olur. Bu durumda,

$$Ð(\xi_1', \xi_2, \ldots, \xi_n) \leq (f(\xi_1') \vee g(\xi_1')) \vee Ð(\xi_1', \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

elde edilir. Böylece,

$$f(\xi_1') \vee g(\xi_1') \leq Ð(\xi_1', \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

olup, önerme 2.1.7.1 den

$$Ð(\xi_1', \xi_2, \ldots, \xi_n) \leq f(\xi_1') \vee g(\xi_1')$$

olur.

$$f(\xi_1') \vee g(\xi_1') = Ð(\xi_1', \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

sonucuna ulaşılır.

Tanım 2.1.7.2 : Ð , K üzerinde bir permuting $n - (f, g)$ −türev olsun.

i. $\xi_1 \leq \xi_1'$ iken , $Ð(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \leq Ð(\xi_1', \xi_2, \ldots, \xi_n)$ …(1)
ii. Ð, 1-1 … (2)
iii. Ð, örten …(3)

(1) ise izoton , (2) ise monomorfik, (3) ise epik permuting $n - (f, g) -$ türev denir.

Önerme 2.1.7.3 : K bir kafes ve Ð , K üzerinde izoton bir permuting $n - (f, g)$ −türev olsun.

Eğer,
$$f(\xi_1 \vee \xi_1') = f(\xi_1) \vee f(\xi_1')$$

$$g(\xi_1 \vee \xi_1') = g(\xi_1) \vee g(\xi_1')$$

olduğunda,

$$Ð(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = f(\xi_1) \vee g(\xi_1)$$

$$Ð(\xi_1', \xi_2, \ldots, \xi_n) = f(\xi_1') \vee g(\xi_1')$$

ise, $Ð(\xi_1 \vee \xi_1', \xi_2, \ldots, \xi_n) = f(\xi_1 \vee \xi_1') \vee g(\xi_1 \vee \xi_1')$ dir.

İspat : Đ izoton olduğunda, $\xi_1 \leq \xi_1 \vee \xi_1'$ ve $\xi_1' \leq \xi_1 \vee \xi_1'$ iken,

$$Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \leq Đ(\xi_1 \vee \xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n)$$

$$Đ(\xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n) \leq Đ(\xi_1 \vee \xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n)$$

olur. “∨” işlemi uygulanırsa,

$$Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \vee Đ(\xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n) \leq Đ(\xi_1 \vee \xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n)$$

olur. $Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = f(\xi_1) \vee g(\xi_1)$ ve $Đ(\xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n) = f(\xi_1') \vee g(\xi_1')$

olduğundan, $\big(f(\xi_1) \vee g(\xi_1)\big) \vee \big(f(\xi_1') \vee g(\xi_1')\big) \leq Đ(\xi_1 \vee \xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n)$

olup kafes tanımından,

$$(f(\xi_1) \vee g(\xi_1)) \vee (f(\xi_1') \vee g(\xi_1')) = (f(\xi_1) \vee f(\xi_1')) \vee (g(\xi_1) \vee g(\xi_1'))$$

elde edilir.

$$f(\xi_1 \vee \xi_1') = f(\xi_1) \vee f(\xi_1')$$

$$g(\xi_1 \vee \xi_1') = g(\xi_1) \vee g(\xi_1')$$

olduğundan, $(f(\xi_1) \vee g(\xi_1)) \vee (f(\xi_1') \vee g(\xi_1')) = f(\xi_1 \vee \xi_1') \vee g(\xi_1 \vee \xi_1')$

Böylece,

$$f(\xi_1 \vee \xi_1') \vee g(\xi_1 \vee \xi_1') \leq Đ(\xi_1 \vee \xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n)$$

olur. Önerme 2.1.7.1 den

$$Đ(\xi_1 \vee \xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n) \leq f(\xi_1 \vee \xi_1') \vee g(\xi_1 \vee \xi_1')$$

olur. Sonuç olarak,

$$f(\xi_1 \vee \xi_1') \vee g(\xi_1 \vee \xi_1') = Đ(\xi_1 \vee \xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n)$$

elde edilir.

Önerme 2.1.7.4 : K , maksimum elemanı 1 olan bir kafes ve Đ , K üzerinde izoton permuting $n-(f,g)$ −türev, $f(1)=1$, $g(1)=1$ olsun.

Ayrıca, $\xi_1 \in K$ için , $f(\xi_1) \geq g(\xi_1)$ ve $f(\xi_1) \leq g(\xi_1)$ ise,

$$Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (f(\xi_1) \vee g(\xi_1)) \wedge Đ(1, \xi_2, \dots, \xi_n).$$

İspat : Đ izoton ve maksimum elemanı 1 olduğundan,

$$Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \leq Đ(1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

olur. $f(\xi_1) \geq g(\xi_1)$ olsun. Önerme 2.1.7.1 den,

$$Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \leq f(\xi_1) \vee g(\xi_1) = f(\xi_1)$$

olur. "$\wedge$" işlemi uygulanırsa,

$$Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \leq f(\xi_1) \wedge Đ(1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

olup, $\xi_1 \leq \xi_1 \vee 1$ olduğundan $\xi_1 = (\xi_1 \vee 1) \wedge \xi_1$ olur. Buradan,

$$Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = Đ((\xi_1 \vee 1) \wedge \xi_1), \xi_2, \dots, \xi_n)$$

olup türev tanımından,

$$Đ((\xi_1 \vee 1) \wedge \xi_1), \xi_2, \dots, \xi_n) = (Đ(\xi_1 \vee 1), \xi_2, \dots, \xi_n) \wedge f(\xi_1)) \vee$$
$$(g(\xi_1 \vee 1) \wedge Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n))$$

olur. Maksimum eleman 1 olduğundan,

$$Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (Đ(1, \xi_2, \dots, \xi_n) \wedge f(\xi_1)) \vee (g(1) \wedge Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n))$$

olur. $g(1)=1$ ve maksimum eleman olduğundan,

$$Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (Đ(1, \xi_2, \dots, \xi_n) \wedge f(\xi_1)) \vee Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

Buradan,

$$Đ(1, \xi_2, \dots, \xi_n) \wedge f(\xi_1) \leq Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

elde edilir.

$$Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = Đ(1, \xi_2, \dots, \xi_n) \wedge f(\xi_1)$$

olup, $f(\xi_1) \geq g(\xi_1)$ olduğundan, $f(\xi_1) = f(\xi_1) \vee g(\xi_1)$ olur.

Böylece,

$$Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (f(\xi_1) \vee g(\xi_1)) \wedge Đ(1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

elde edilir.

Önerme 2.1.7.5 : Đ , K distribütiv kafesi üzerinde bir permuting $n-(f,g)-$türev olsun. Aşağıdaki şart sağlanır:

$$Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \wedge Đ(\xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n) \leq Đ(\xi_1 \wedge \xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n)$$

İspat : Önerme 2.1.7.1 den,

$$Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \leq f(\xi_1) \vee g(\xi_1)$$

olduğundan,

$$Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \wedge Đ(\xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n) \leq (f(\xi_1) \vee g(\xi_1)) \wedge Đ(\xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n)$$

olur. $\xi_1 \wedge \xi_1' = \xi_1' \wedge \xi_1$ olduğundan,

$$Đ(\xi_1 \wedge \xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n) = Đ(\xi_1' \wedge \xi_1 s, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

olup türev tanımı kullanılırsa,

$$Đ(\xi_1' \wedge \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \wedge f(\xi_1')) \vee (g(\xi_1) \wedge Đ(\xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n))$$

olur. Buradan,

$$Đ(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \wedge f(\xi_1') \leq Đ(\xi_1' \wedge \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

$$g(\xi_1) \wedge Đ(\xi_1' \wedge \xi_1, \xi_2, \dots., \xi_n) \leq Đ(\xi_1 \wedge \xi_1', \xi_2, \dots., \xi_n)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$Đ(\xi_1 \wedge \xi_1', \xi_2, \dots., \xi_n) = (Đ(\xi_1' \wedge \xi_1, \xi_2, \dots., \xi_n) \wedge f(\xi_1)) \vee (g(\xi_1') \wedge Đ(\xi_1, \xi_2, \dots., \xi_n))$$

olur.

3. KAFESLER $\boldsymbol{n}-$ TÜREVLER ve $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m})-$ TÜREVLER

3.1 KAFESLERDE $\boldsymbol{n}-$TÜREVLER

Bu bölümde kafeslerdeki $n-$ türevin tanım, teoremleri ve örneklemlerle açıklamalarına yer verilmiştir.

K bir kafes, $Đ: K \times K \rightarrow K$ bir dönüşüm olmak üzere , $\forall\, \xi, \psi \in K$ için $Đ(\xi,\psi) = Đ(\psi,\xi)$ şartını sağlayan her dönüşüme simetrik dönüşüm denir. $d: K \rightarrow K$ dönüşümü tanımlı olacak şekilde $đ(\xi) = Đ(\xi,\xi)$ ifadesinde, Đ dönüşümünün izi đ ile tanımlanan simetrik bir eşlemedir.

$\forall n \geq 2$ sabit pozitif tam sayı olmak üzere , $K^n: \underbrace{K \times K \times \ldots \times K}_{n-tane}$ şeklinde tanımlanır.

Δ: $K^n \rightarrow K$ dönüşümünün simetrik veya permuting olduğu söylenir. Eğer denklem ;

$$\Delta(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n) = \Delta\big(\xi_{\pi(1)},\xi_{\pi(2)},\ldots\ldots,\xi_{\pi(n)}\big)$$

ifadesi $\forall\, \xi_t \in K$ olacak şekilde $\{\pi(1),\pi(2),\ldots,\pi(n)\}$ ve tüm permütasyonları için geçerlidir.

Tanım 3.1.1 : Δ: $K^n \rightarrow K$ dönüşümü , $\forall\ \xi_t\,, \psi \in K$ ve Δ dönüşümü tüm bileşenlere göre bir türev ise,

$$\Delta\big(\xi_1 \wedge \psi, \xi_2, \ldots, \xi_n\big) = (\Delta\big(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\big) \wedge \psi) \vee (\xi_1 \wedge \Delta\big(\psi,\xi_2,\ldots,\xi_n\big))$$

$$\Delta\big(\xi_1, \xi_2 \wedge \psi, \ldots\ldots, \xi_n\big) = (\Delta\big(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\big) \wedge \psi) \vee (\xi_2 \wedge \Delta\big(\xi_1,\psi,\ldots\ldots,\xi_n\big))$$

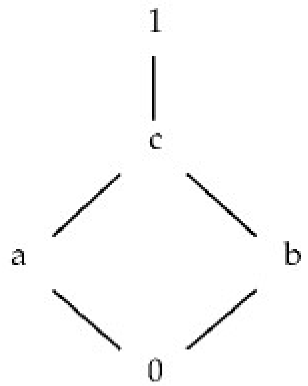
$$\vdots$$

$$\Delta\big(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n \wedge \psi\big) = \big(\Delta\big(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\big) \wedge \psi\big) \vee \Big(\xi_n s \wedge \Delta\big(\xi_1,\xi_2,\ldots,\psi\big)\Big)$$

şeklindeki dönüşüme $n-$ türev denir.

Burada kafesteki, bi-türevi tanımladık. Eğer , Δ dönüşümü simetrik ise, yukarıdaki eşitlikler birbirine eşdeğerdir. Bu durumda ,eğer $n = 2$ alınırsa , Δ, bi-türev ; $n = 3$ alınırsa da Δ, permuting tri-türev olur.

Örnek 3.1.1 : $K = \{0, a, b, c, 1\}$ aşağıdaki şekle sahip bir kafes olsun.



Δ tarafından K üzerinde, $\Delta(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots\dots \wedge \xi_n \wedge a$ bir dönüşüm tanımlabilir. Buradan da kolayca bunun bir $n -$türev olduğu kolayca görülebilir.

Çeven (2009) , bir kafes için simetrik bi-türevi ve onun izini tanımladı. Bazı sonuçları kanıtladı. Aşağıdaki tanım ve teoremleri $n -$türeve genişletti (Ceven 2018).

Tanım 3.1.2 : Δ , K üzerinde tanımlı bir $n -$türev olsun.

$\delta: K \to K$ bir tanımlı dönüşüm olmak üzere , $\delta(\xi) = \Delta(\xi, \xi, \dots, \xi)$ ifadesine, Δ ‘nın izi denir.

Önerme 3.1.1 : Δ , K üzerinde tanımlı bir $n-$türev , δ da $n-$türevin izi olsun. $\delta(\xi) \leq \xi$ dir.

İspat : Öncelikle biz , $\delta(\xi) = \Delta(\xi, \xi, \dots, \xi)$ olduğunu biliyoruz.

$$\delta(\xi) = \Delta(\xi, \xi, \dots, \xi) = \Delta(\xi \wedge \xi, \xi, \dots, \xi)$$

$$= (\Delta(\xi, \xi, \dots, \xi) \wedge \xi) \vee \big(\xi \wedge \Delta(\xi, \xi, \dots, \xi)\big)$$

$$= (\Delta(\xi, \xi, \dots, \xi) \wedge \xi)$$

$$= \delta(\xi) \wedge \xi$$

Buradan da, $\delta(\xi) \leq \xi$ olduğunu görebiliriz.

Önerme 3.1.2 : Δ , K üzerinde tanımlı bir n $-$türev olsun.
$\forall\, t \in \{1,2,\dots,n\}$ olmak üzere $\Delta(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \leq \xi_t$ olur.

İspat :

$$\Delta(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \Delta(\xi_1 \wedge \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$
$$= (\Delta(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \wedge \xi_1) \vee (\xi_1 \wedge (\Delta(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n))$$
$$= \xi_1 \wedge (\Delta(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

Buradan, $\Delta(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \leq \xi_1$ olduğu sonucuna ulaşabiliyoruz.
Bu işlemin her bir $\forall\, t \in \{1,2,..,n\}$, ξ_t ‘ ler için sağlandığını tek tek uygulayıp aynı sonucu elde edebiliriz. Böylelikle de ispat tamamlanmış olur.

Verdiğimiz önerme 3.1 ve 3.2 yardımıyla bir takım sonuçları da elde etmiş olduk. Δ bir $n-$türev ve δ bu $n-$türevin izi olacak şekilde aşağıdaki şartlar sağlanır.

- ✓ $\forall\, t \in \{1,2,..,n\}$ için $\Delta(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \leq \xi_t$
- ✓ $\delta(\xi) \leq \xi$

Tüm bunların ışığında doğal bir sonuç olarak aşağıdaki sonucu da elde etmiş oluruz.

Sonuç 3.1.1 : Δ , K üzerinde tanımlı bir n −türev olsun.

$\Delta(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \leq \bigwedge_{t \in F} \xi_t$ olmak üzere $F = \{1,2, \dots, n\}$ olur.

Bir kafes yapısı için joinitivlik tanımlarını daha önce vermiştik. Şimdi de bir kafesin n −türevi için n −joinitiv kavramını aşağıdaki gibi tanımlayıp ve ilgili bazı sonuçlarını gösterelim.

Tanım 3.1.3 : $\Delta: K^n \to K$ bir n −joinitiv dönüşüm ($\vee$ homohorfizm) olsun. $\forall\, \xi_t, \psi \in K$ olmak üzere aşağıdaki şart sağlanırsa Δ 'ya n −türevi için n −joinitivdir denir.

$$\Delta(\xi_1 \vee \psi, \xi_2, \dots, \xi_n) = \Delta(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \vee \Delta(\psi, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

$$\Delta(\xi_1, \xi_2 \vee \psi, \dots, \xi_n) = \Delta(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \vee \Delta(\xi_1, \psi, \dots, \xi_n)$$

$$\vdots$$

$$\Delta(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \vee \psi) = \Delta(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \vee \Delta(\xi_1, \xi_2, \dots, \psi)$$

Teorem 3.1.1 : Δ , K üzerinde tanımlı bir permuting ve jointiv n −türev , δ da n −türevin izi olsun. $\forall\, \xi, \psi \in K$ olmak üzere aşağıdaki şart sağlanır.

$$\delta(\xi \vee \psi) = \delta(\xi) \vee \Delta\left(\underbrace{\xi, \xi, \dots.}_{n-1\ tane}, \psi\right) \vee \Delta\left(\underbrace{\xi, \xi, \dots.}_{n-2\ tane}, \psi, \psi\right) \vee \dots \vee \Delta(\xi, \underbrace{\psi, \psi, \dots, \psi}_{n-1\ tane}) \vee \delta(\psi)$$

İspat:

$$\delta(\xi \vee \psi) = \Delta\left(\underbrace{\xi \vee \psi, \xi \vee \psi, \dots, \xi \vee \psi}_{n\ tane}\right)$$

$$= \Delta\left(\xi, \underbrace{\xi \vee \psi, \dots, \xi \vee \psi}_{n-1\ tane}\right) \vee \Delta\left(\psi, \underbrace{\xi \vee \psi, \dots, \xi \vee \psi}_{n-1\ tane}\right)$$

$$= \Delta\left(\xi, \xi, \underbrace{\xi \vee \psi, \dots, \xi \vee \psi}_{n-2\ tane}\right) \vee \Delta\left(\xi, \psi, \underbrace{\xi \vee \psi, \dots, \xi \vee \psi}_{n-2\ tane}\right) \vee$$

$$\Delta\left(\psi, \psi, \underbrace{\xi \vee \psi, \dots, \xi \vee \psi}_{n-2\ tane}\right)$$

$$\vdots$$

$$= \Delta\left(\underbrace{\xi, \xi, \dots, \xi}_{n\ tane}\right) \vee \Delta\left(\underbrace{\xi, \xi, \dots}_{n-1\ tane}, \psi\right) \vee \Delta\left(\underbrace{\xi, \xi, \dots}_{n-2\ tane}, \psi, \psi\right) \vee$$

$$..\vee \Delta(\xi, \underbrace{\psi, \psi, \dots, \psi}_{n-1\ tane}) \vee \Delta\left(\underbrace{\psi, \psi, \dots, \psi}_{n\ tane}\right)$$

$$= \delta(\xi) \vee \Delta\left(\underbrace{\xi, \xi, \dots}_{n-1\ tane}, \psi\right) \vee \Delta\left(\underbrace{\xi, \xi, \dots}_{n-2\ tane}, \psi, \psi\right) \vee \dots \vee \Delta(\xi, \underbrace{\psi, \psi, \dots, \psi}_{n-1\ tane}) \vee \delta(\psi)$$

Teorem 3.1.2 : K distribütiv kafes, Δ bir permuting $n-$türev , δ da $n-$türevin izi olsun. $\forall \xi, \psi \in K$ olmak üzere aşağıdaki şart sağlanır.

$$\delta(\xi \wedge \psi) = \delta(\xi) \vee \Delta\left(\underbrace{\xi, \xi, \dots}_{n-1\ tane}, \psi\right) \vee \Delta\left(\underbrace{\xi, \xi, \dots}_{n-2\ tane}, \psi, \psi\right) \vee \dots \vee \Delta(\xi, \underbrace{\psi, \psi, \dots, \psi}_{n-1\ tane}) \vee \delta(\psi)$$

İspat :

$$\delta(\xi \wedge \psi) = \Delta\left(\underbrace{\xi \wedge \psi, \xi \wedge \psi, \dots, \xi \wedge \psi}_{n\ tane}\right)$$

$$= (\xi \wedge \Delta\left(\psi, \underbrace{\xi \wedge \psi, \xi \wedge \psi, \dots, \xi \wedge \psi}_{n-1\ tane}\right)) \vee (\Delta\left(\xi, \underbrace{\xi \wedge \psi, \xi \wedge \psi, \dots, \xi \wedge \psi}_{n-1\ tane}\right) \wedge \psi)$$

$$= \Delta\left(\psi, \underbrace{\xi \wedge \psi, \xi \wedge \psi, \dots, \xi \wedge \psi}_{n-1\ tane}\right) \vee \Delta\left(\xi, \underbrace{\xi \wedge \psi, \xi \wedge \psi, \dots, \xi \wedge \psi}_{n-1\ tane}\right)$$

$$= \left(\xi \wedge \Delta\left(\psi, \psi, \underbrace{\xi \wedge \psi, \xi \wedge \psi, \dots, \xi \wedge \psi}_{n-2\ tane}\right)\right) \vee \left(\Delta\left(\psi, \xi, \underbrace{\xi \wedge \psi, \xi \wedge \psi, \dots, \xi \wedge \psi}_{n-2\ tane}\right) \wedge \psi\right)$$

$$\vee\ (\xi \wedge \Delta\left(\xi, \psi, \underbrace{\xi \wedge \psi, \xi \wedge \psi, \dots, \xi \wedge \psi}_{n-2\ tane}\right)) \vee (\Delta\left(\xi, \xi, \underbrace{\xi \wedge \psi, \xi \wedge \psi, \dots, \xi \wedge \psi}_{n-2\ tane}\right) \wedge \psi)$$

$$= \Delta\left(\psi, \psi, \underbrace{\xi \wedge \psi, \xi \wedge \psi, \dots, \xi \wedge \psi}_{n-2\ tane}\right) \vee \Delta\left(\psi, \xi, \underbrace{\xi \wedge \psi, \xi \wedge \psi, \dots, \xi \wedge \psi}_{n-2\ tane}\right)$$

$$\vee\ \Delta\left(\xi, \xi, \underbrace{\xi \wedge \psi, \xi \wedge \psi, \dots, \xi \wedge \psi}_{n-2\ tane}\right)$$

$$= \Delta\left(\psi, \psi, \psi, \underbrace{\xi \wedge \psi, \xi \wedge \psi, \dots, \xi \wedge \psi}_{n-3\ tane}\right) \vee \Delta\left(\psi, \psi, \psi, \underbrace{\xi \wedge \psi, \xi \wedge \psi, \dots, \xi \wedge \psi}_{n-3\ tane}\right)$$

$$\vee\ \Delta\left(\psi, \xi, \xi, \underbrace{\xi \wedge \psi, \xi \wedge \psi, \dots, \xi \wedge \psi}_{n-3\ tane}\right) \vee \Delta\left(\psi, \xi, \psi, \underbrace{\xi \wedge \psi, \xi \wedge \psi, \dots, \xi \wedge \psi}_{n-3\ tane}\right)$$

$$\vee\ \Delta\left(\xi, \xi, \xi, \underbrace{\xi \wedge \psi, \xi \wedge \psi, \dots, \xi \wedge \psi}_{n-3\ tane}\right) \vee \Delta\left(\xi, \xi, \psi, \underbrace{\xi \wedge \psi, \xi \wedge \psi, \dots, \xi \wedge \psi}_{n-3\ tane}\right)$$

$$\vdots$$

$$= \delta(\xi) \vee \Delta\left(\underbrace{\xi, \xi, \dots.}_{n-1\ tane}, \psi\right) \vee \Delta\left(\underbrace{\xi, \xi, \dots.}_{n-2\ tane}, \psi, \psi\right) \vee \dots \vee \Delta(\xi, \underbrace{\psi, \psi, \dots, \psi}_{n-1\ tane}) \vee \delta(\psi)$$

Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.1.2 : Δ , K üzerinde tanımlı bir n −türev , δ da n −türevin izi olsun.

i. $\exists \xi_t = 0$ olacak şekilde $\Delta(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = 0$.

ii. Eğer , Δ ; n −türev permuting ve joinitiv ise ; $\delta(\xi) \vee \delta(\psi) \leq \delta(\xi \vee \psi)$.

iii. Eğer , Δ ; n −türev permuting ise ; $\delta(\xi) \vee \delta(\psi) \leq \delta(\xi \wedge \psi)$.

iv. Eğer K bir distribütiv kafes ve Δ ; n −türev permuting ise $\delta^2(\xi) = \delta(\xi)$.

İspat : Önerme 3.1.2 den **(i)** , teorem 3.1.1 den **(ii)** ve teorem 3.1.2 den de **(iii)** varlığını gösterilmiştir.

iv. Biz önerme 3.1.1 den; $\delta^2(\xi) = \delta(\delta(\xi)) \leq \delta(\xi)$

$$\delta^2(\xi) = \delta(\delta(\xi)) = \delta(\xi \wedge \delta(\xi))$$

$$= \delta(\xi) \vee \Delta\left(\underbrace{\xi, \xi, \dots}_{n-1\ tane}, \delta(\xi)\right) \vee \Delta\left(\underbrace{\xi, \xi, \dots.}_{n-2\ tane}, \delta(\xi), \delta(\xi)\right) \vee \dots$$

$$\vee \Delta(\xi, \underbrace{\delta(\xi), \delta(\xi), \dots \delta(\xi)}_{n-1\ tane}) \vee \delta^2(\xi)$$

$$= \delta(\xi)$$

3.2 KAFESLERDE (n, m) −TÜREV HOMOMORFİZMALARI

Li ve Xu (2006) birleşmeli bir halkada $(n, m)-$ türev homomorfizmi kavramını ortaya koydular.

Diğer bileşenler herhangi bir belirli eleman tarafından sabitlendiğinde, her bileşen için bir türev veya homomorfizm olan bir tür çoklu eşlemedir. Aşağıda, bu kavram kafesler için açıklanacak ve ilgili bazı sonuçları elde etmek için kullanılacaktır ve bu, kafesler için n −türevinin bir genellemesini verilecektir.

Tanım 3.2.1 : K bir kafes olsun. $f: K^{mxn} \to K$ dönüşümü aşağıda verilen şartları sağlıyorsa , bu dönüşüme (n, m) −türev $\wedge$ −homomorfizm denir.

i. $\forall\, t \in \{1,2, \dots. n\}$ için,

$f(\xi_1, ., \xi_t \wedge \psi, ., \xi_{n+m}) = (\xi_t \wedge f(\xi_1, ., \psi, ., \xi_{n+m})) \vee (\psi \wedge f(\xi_1, ., \xi_t, ., \xi_{n+m}))$..(1)

ii. $\forall\, t \in \{n+1, n+2, \dots. n+m\}$ için,

$f(\xi_1, ., \xi_t \wedge \psi, ., \xi_{n+m}) = f(\xi_1, ., \psi, ., \xi_{n+m}) \wedge f(\xi_1, ., \xi_t, ., \xi_{n+m})$ …(2)

Tanım 3.2.1'e göre kafeste, $(1,0)-$türev $\wedge-$homomorfizm, (2,0)-$bi-$türev $\wedge-$ homomorfizm ve $(n,0)-$ türev- $\wedge-$ homomorfizminde $n-$ türev olduğunu görebiliriz. Aşağıda , $mn \neq 0$ olacak şekilde tanımlarımızı verelim.

Tanım 3.2.2 : f bir $(n,0)-$türev $\wedge-$homomorfizm olsun.

$g: K \to K$ bir dönüşüm olmak üzere $g(\xi) = f(\xi, \xi, \dots, \xi)$ dönüşümüne, f dönüşümünün izi denir.

Önerme 3.2.1: K, minimum elemanı 0 ve maksimum elemanı 1 olan bir kafes, f ise (1,1)-türev-$\wedge-$homomorfizm olsun.

a) $f(\xi,\psi) \leq \psi$

b) $f(0,\psi) = 0$

c) $f(\xi,0) \leq f(\xi,\psi)$

d) $\xi \wedge f(1,\psi) \leq f(\xi,\psi) \leq f(\xi,1)$

Eğer f aynı zamanda $\vee-$homomorfizm ise $\forall \xi,\psi \in K$ için

e) $f(\xi,\psi) \leq f(1,\psi)$

İspat:

f, (1,1)-türev-$\wedge-$homomorfizm olduğundan aşağıdaki şartları sağlar.

- ✓ $f(\xi \wedge \varpi, \psi) = (\xi \wedge f(\varpi,\psi)) \vee (f(\xi,\psi) \wedge \varpi)$ ..... (3)
- ✓ $f(\xi, \psi \wedge \varpi) = f(\xi,\psi) \wedge f(\xi,\varpi)$ .....(4)

a) Denklem (3) de $\varpi = \xi$ alırsak,

$$f(\xi,\psi) = f(\xi \wedge \xi, \psi) = \big(\xi \wedge f(\xi,\psi)\big) \vee (f(\xi,\psi) \wedge \xi) = f(\xi,\psi) \wedge \xi$$

sonucuna ulaşırız. Bu işlem $\forall \xi,\psi \in K$ içinde sağlanır.

b) $\xi = 0$ alırsak, **(a)** dan $\forall \psi \in K$ için $f(0,\psi) = 0$ olduğu açıktır.

c) $\varpi = 0$ alırsak, denklem (4) den,

$f(\xi, 0) = f(\xi, \psi \wedge 0) = f(\xi, \psi) \wedge f(\xi, 0)$ olduğundan , $\forall \xi, \psi \in K$ için $f(\xi, 0) \leq f(\xi, \psi)$ olduğu görülür.

d) $\varpi = 1$ alırsak, denklem (3) den,

$$\begin{aligned} f(\xi, \psi) = f(\xi \wedge 1, \psi) &= \big(\xi \wedge f(1, \psi)\big) \vee (f(\xi \wedge \psi) \wedge 1) \\ &= \big(\xi \wedge f(1, \psi)\big) \vee f(\xi \wedge \psi) \end{aligned}$$

Biz $\big(\xi \wedge f(1, \psi)\big) \leq f(\xi, \psi)$ olduğunu teoremin ifadesinden biliyoruz. Ayrıca, $\varpi = 1$ alırsak, denklem (4) den, $f(\xi, \psi) = f(\xi, \psi \wedge 1) = f(\xi, \psi) \wedge f(\xi, 1)$ olur. Buradan da $f(\xi, \psi) \leq f(\xi, 1)$ olduğunu elde ederiz.

e) Eğer f , $\vee$ −homomorfizm ise;

$f(\xi \vee \varpi, \psi) = f(\xi, \psi) \vee f(\varpi, \psi)$ ve $f(\xi, \psi \vee \varpi) = f(\xi, \psi) \vee f(\xi, \varpi)$ şartlarını sağlar. $\varpi = 1$ alırsak, ilk eşitlikte $f(\xi, \psi) \leq f(1, \psi)$ olduğunu görürüz. Böylelikte ispat tamamlanmış olur.

Önerme 3.2.2 : K bir kafes , f, (1,1)-türev-$\wedge$ −homomorfizm ve de g de bu dönüşümün izi olsun.

i) $g(\xi) \leq \xi$

ii) $f\big(\xi, g(\xi)\big) \leq g^2(\xi)$

iii) Eğer f , $\vee$ −homomorfizm ise; $g^2(\xi) = f(\xi, g(\xi))$ dır.

İspat:

i) $g(\xi) = f(\xi, \xi) = f(\xi \wedge \xi, \xi) = \big(\xi \wedge g(\xi)\big) \vee (g(\xi) \wedge \xi) = \xi \wedge g(\xi)$ ifadesini iz tanımından yazabiliriz. $g(\xi) = \xi \wedge g(\xi)$ olduğundan $\forall \xi \in K$ için, $g(\xi) \leq \xi$ olur.

ii) $g^2(\xi) = g\big(g(\xi)\big) \leq g(\xi) \leq \xi$ ve $f(\xi,\psi) \leq \xi$ (Önerme 3.2.1.a dan)

$$\begin{aligned} g^2(\xi) &= g\big(g(\xi)\big) \\ &= f\big(g(\xi), g(\xi)\big) \\ &= f(\xi \wedge g(\xi), g(\xi)) \\ &= (\xi \wedge g^2(\xi)) \vee (f\big(\xi, g(\xi)\big) \wedge g(\xi)) \\ &= g^2(\xi) \vee (f\big(\xi, g(\xi)\big) \wedge f(\xi,\xi)) \\ &= g^2(\xi) \vee \big(f\big(\xi, g(\xi)\big) \wedge \xi\big) = g^2(\xi) \vee \big(f(\xi, g(\xi))\big) \end{aligned}$$

Buradan da $f(\xi, g(\xi)) \leq g^2(\xi)$ sonucuna ulaşılır.

iii) (ii) den,

$$\begin{aligned} g^2(\xi) &= g^2(\xi) \vee \big(f(\xi, g(\xi))\big) \\ &= f\big(g(\xi), g(\xi)\big) \vee f(\xi, g(\xi)) \\ &= f\big(g(\xi) \vee \xi, g(\xi)\big) \\ &= f(\xi, g(\xi)) \end{aligned}$$

Önerme 3.2.3 : K bir kafes , f, (1,1)-türev-$\wedge -$homomorfizm ve g de bu dönüşümün izi olsun. $\forall \xi, \psi \in K$ için ,

$$g(\xi) \wedge f(\xi,\psi) \wedge f(\psi,\xi) \wedge g(\psi) \leq g(\xi \wedge \psi) \text{ dir.}$$

Eğer f joinitiv ise ;

$$g(\xi \vee \psi) = g(\xi) \vee f(\xi,\psi) \vee f(\psi,\xi) \vee g(\psi) \text{ dir.}$$

İspat :

$$\begin{aligned} g(\xi \wedge \psi) &= f(\xi \wedge \psi, \xi \wedge \psi) \\ &= (\xi \wedge f(\psi, \xi \wedge \psi)) \vee (f(\xi, \xi \wedge \psi) \wedge \psi) \\ &= (\xi \wedge f(\psi,\xi) \wedge f(\psi,\psi)) \vee (f(\xi,\xi) \wedge f(\xi,\psi) \wedge \psi) \\ &= (\xi \wedge f(\psi,\xi) \wedge g(\psi)) \vee (g(\xi) \wedge f(\xi,\psi) \wedge \psi) \end{aligned}$$

Biz, $\xi \wedge f(\psi,\xi) \wedge g(\psi) \leq g(\xi \wedge \psi)$ ve $g(\xi) \wedge f(\xi,\psi) \wedge \psi \leq g(\xi \wedge \psi)$ olduğunu gördük. Bu nedenle, $\xi \wedge f(\psi,\xi) \wedge g(\psi) \wedge g(\xi) \wedge f(\xi,\psi) \wedge \psi \leq g(\xi \wedge \psi)$ ifadesini elde edebiliriz.

Yani , $g(\xi) \wedge f(\xi,\psi) \wedge f(\psi,\xi) \wedge g(\psi) \leq g(\xi \wedge \psi)$ olur.

f joinitiv ;

$$g(\xi \vee \psi) = f(\xi \vee \psi, \xi \vee \psi)$$
$$= f(\xi,\xi) \vee f(\xi,\psi) \vee f(\psi,\xi) \vee f(\xi,\xi)$$
$$= g(\xi) \vee f(\xi,\psi) \vee f(\psi,\xi) \vee g(\psi)$$

Önerme 3.2.4 : K minimum elemanı 0 , maksimum elemanı 1 olan bir kafes ve f, (n,m) $-$türev-$\wedge$ $-$homomorfizm olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanır.

i. $\forall\, t \in \{1,2,\ldots.n\}$ için , $f(\xi_1,.,\xi_n,\xi_{n+1},.,\xi_{n+m}) \le \xi_t$

ii. $t \in \{1,2,\ldots.n\}$ olmak üzere, $\exists \xi_t = 0$ ise $f(\xi_1,.,\xi_n,\xi_{n+1},.,\xi_{n+m}) = 0$

iii. $t \in \{n+1, n+2, \ldots.n+m\}$ için ,

$$f\left(\xi_1,\ldots,\underbrace{0}_{t.terim},\ldots,\xi_{n+m}\right) \le f(\xi_1,\ldots,\xi_t,.,\xi_{n+m})$$

iv. $t \in \{1,2,\ldots.n\}$ için ,

$$\xi_t \wedge f\left(\xi_1,.,\underbrace{1}_{t.terim},.,\xi_{n+m}\right) \le f(\xi_1,.,\xi_t,.,\xi_{n+m})$$

v. $t \in \{n+1, n+2, \ldots, n+m\}$ için ,

$$f(\xi_1,\ldots,\xi_t,\ldots,\xi_{n+m}) \le f\left(\xi_1,\ldots,\underbrace{1}_{t.terim},\ldots,\xi_{n+m}\right)$$

İspat :

i. $t \in \{1,2,\ldots.n\}$ için ,

$$f(\xi_1,\ldots,\xi_n,\xi_{n+1},\ldots,\xi_{n+m}) = f(\xi_1,\ldots,\xi_t \wedge \xi_t,\ldots,\xi_{n+m})$$
$$= (\xi_t \wedge f(\xi_1,.,\xi_t,.,\xi_{n+m})) \vee (f(\xi_1,\ldots,\xi_t,\ldots,\xi_{n+m}) \wedge \xi_t)$$
$$= \xi_t \wedge f(\xi_1,\ldots,\xi_t,\ldots,\xi_{n+m})$$

ii. **(i)** Bu öncülün ispatı açıktır.

iii. $$f\left(\xi_1,\ldots,\underbrace{0}_{t.terim},\ldots,\xi_{n+m}\right) = f(\xi_1,\ldots,\xi_t \wedge 0,\ldots,\xi_{n+m})$$
$$= f(\xi_1,\ldots,\xi_t,\ldots,\xi_{n+m}) \wedge f\left(\xi_1,\ldots,\underbrace{0}_{t.terim},\ldots,\xi_{n+m}\right)$$

Buradan da,

$$f\Bigg(\xi_1, \dots, \underbrace{0}_{t.terim}, \dots, \xi_{n+m}\Bigg) \le f(\xi_1, \dots, \xi_t, \dots, \xi_{n+m})$$

olduğu görülür.

iv. Denklem (1) den,

$$f(\xi_1, \dots, \xi_t, \dots, \xi_{n+m}) = f(\xi_1, \dots, \xi_t \wedge 1, \dots, \xi_{n+m})$$
$$= (\xi_t \wedge f(\xi_1, \dots, 1, \dots, \xi_{n+m})) \vee (1 \wedge f(\xi_1, \dots, \xi_t, \dots, \xi_{n+m}))$$
$$= (\xi_t \wedge f(\xi_1, \dots, 1, \dots, \xi_{n+m})) \vee (f(\xi_1, \dots, \xi_t, \dots, \xi_{n+m}))$$

Sonuç olarak, $\big(\xi_t \wedge f(\xi_1, \dots, 1, \dots, \xi_{n+m})\big) \le (f(\xi_1, \dots, \xi_t, \dots, \xi_{n+m})$ olduğu elde edilir.

v. Denklem (2) den,

$$f(\xi_1, \dots, \xi_t, \dots, \xi_{n+m}) = f(\xi_1, \dots, \xi_t \wedge 1, \dots, \xi_{n+m})$$
$$= f(\xi_1, \dots, \xi_t, \dots, \xi_{n+m}) \wedge f(\xi_1, \dots, 1, \dots, \xi_{n+m})$$

Buradan da $\forall \xi_t \in K$ için,

$$f(\xi_1, \dots, \xi_t, \dots, \xi_{n+m}) \le f(\xi_1, \dots, 1, \dots, \xi_{n+m})$$

elde edilir. Böylelikle önermenin ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 3.2.1: K minimum elemanı 0 , maksimum elemanı 1 olan bir kafes ve f, (n, m) −türev-∧ −homomorfizm olsun.

- ✓ $f(\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}, \dots, \xi_{n+m}) \le \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \dots \wedge \xi_n$

- ✓ $f(\xi_1, \dots, \xi_n, 0, \dots, 0) \le f(\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}, 0, \dots, 0)$

$$\le f(\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, 0, \dots, 0)$$
$$\le \cdots$$
$$\le f(\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}, \dots, \xi_{n+m})$$

- ✓ $\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \dots \wedge \xi_n \wedge f(1, \dots, 1, \xi_{n+1}, \dots, \xi_{n+m})$

$$
\begin{aligned}
&\leq \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \dots \wedge \xi_n \wedge f(\xi_1, 1, \dots, 1, \xi_{n+1}, \dots, \xi_{n+m}) \\
&\leq \cdots \\
&\leq \xi_n \wedge f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, 1, \xi_{n+1}, \dots, \xi_{n+m}) \\
&\leq f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n, \dots, \xi_{n+m})
\end{aligned}
$$

✓ $$
\begin{aligned}
f(\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}, \dots, \xi_{n+m}) &\leq f(\xi_1, \dots, \xi_n, 1, \xi_{n+2}, \dots, \xi_{n+m}) \\
&\leq f(\xi_1, \dots, \xi_n, 1, 1, \xi_{n+3}, \dots, \xi_{n+m}) \\
&\leq \cdots \\
&\leq f(\xi_1, \dots, \xi_n, 1, \dots, 1)
\end{aligned}
$$

Önerme 3.2.5 : K bir kafes ve f, (n, m) −türev-∧ −homomorfizm $(n \geq 2)$ ve g de bu dönüşümün izi olsun. olsun. $\forall\, \xi \in K$ aşağıdaki şartlar sağlanır.

i. $g(\xi) \leq \xi$

ii. $t \in \{1,2, \dots . n\}$ için , $f\left(g(\xi), \dots, \underset{t.terim}{\xi}, \dots, g(\xi), \dots, g(\xi)\right) \leq g^2(\xi)$

iii. $t \in \{1,2, \dots . n\}$ için , $g^2(\xi) = f\left(g(\xi), \dots, \underbrace{\xi}_{t.terim}, \dots, g(\xi), \dots, g(\xi)\right)$

İspat :

i. $$
\begin{aligned}
g(\xi) = f(\xi, \xi, \dots, \xi) = f(\xi \wedge \xi, \xi, \dots, \xi) &= (\xi \wedge g(\xi)) \vee (g(\xi) \wedge \xi) \\
&= (\xi \wedge g(\xi))
\end{aligned}
$$

$g(\xi) \leq \xi$ olduğu görülür.

ii. $$
\begin{aligned}
g^2(\xi) &= g(g(\xi)) \\
&= f(g(l\xi), \dots, g(\xi)) \\
&= f(g(\xi), \dots, \underbrace{\xi \wedge g(\xi)}_{t.terim}, \dots, g(\xi)) \qquad (1 \leq t \leq n) \\
&= (\xi \wedge g^2(\xi)) \vee (f(g(\xi), \dots, \underset{t.terim}{\xi}, \dots g(\xi)) \wedge g(\xi) \\
&= g^2(\xi) \vee f(g(\xi), \dots, \underset{t.terim}{\xi}, \dots, g(\xi))
\end{aligned}
$$

İstenilen sonuç böylelikle elde edilir.

iii. $$
\begin{aligned}
g^2(\xi) &= g^2(\xi) \vee f(g(\xi), \dots, \underset{t.terim}{\xi}, \dots, g(\xi)) \qquad (1 \leq t \leq n) \\
&= f(g(\xi), \dots, g(\xi)) \vee f(g(\xi), \dots, \underbrace{\xi}_{t.terim}, \dots, g(\xi))
\end{aligned}
$$

$$= f(g(\xi), \dots, \underbrace{g(\xi) \vee \xi}_{t.terim}, \dots, g(\xi))$$

$$= f(g(\xi), \dots, \underbrace{\xi}_{t.terim}, \dots, g(\xi)$$

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Tezde halkalarda türev tanımlarından yararlanarak kafeslerde türev tanımlarını ve örneklerini gösterdik. Çeşitleri olarak $f-$türev, permuting türev ve çeşitlerinin tanımlarını yaptık. Ayrıca asıl konumuz olan $n-$türevleri ve $(n,m)-$türevlerin homomorfizmalarını inceledik. Tanım, teorem, ispat ve örnekleriyle elde edilen sonuçlarını verdik.

Öneri olarak bu tezde çalışmış olduğumuz $n-$türevleri ve $(n,m)-$türevleri, diğer cebirsel yapılar ve yeniden tanımlanabilecek dönüşümler üzerinde belirlenen şartlarda uygulanabilir.

5. KAYNAKLAR

Ascı, M., Kecilioglu, O. and Ceran, S., “Permuting tri (f,g)-derivations on lattices” , Ann. of Fuzzy Math. and Informatics, 1 no.(2), 189-196, (2011).

Ascı, M.i Ceran, S., Generalized (f,g)- derivations of lattices, *Math. Sci. and App*. E-Notes Vol.1, no.2 pp 56-62, (2013).

Balbes, R. and Dwinger, P., “*Distributive Lattices*”, University of Missouri Press, Columbia, Mo., (1974).

Balogun, F. A Study of Derivations on Lattices. Math Theory Model, 4, 14-19, (2014).

Bell, A.J., “ The co-information lattice” ,4th Int. Symposium on Independent Component Analysis and Blind Signal Seperation (ICA2003), Nara, Japan, 921-926, (2003).

Birkhoof, G.,”*Lattice Theory*”,New York : American Mathematical Society, (1940).

Ceven, Y., “Symmetric bi derivations of lattices”, Quaestiones Mathematicae, 32, 1-5, (2009).

Ceven, Y., “n-derivations and (n,m)-Derivations of lattices” 6(12), 307, (2018).

Davey, B. A. and Priestley, H. A., “ Introduction to lattices and order”, Cambridge University Press, New York, 1-298 (2002).

Degang, C., Wenxiu, Z., Yeung, D. and Tsang, E. C. C., “rough approximations on a complete completely distributive lattice with applications to generalized rough sets”, Inf. Sci. 176 (13), 1829-1848, (2006).

Durfee, G. Cryptanalysis of RSA Using Algebraic and Lattice Methods. Ph.D. Thesis, Stanford University, Stanford, CA, USA, 1–114, (2002).

Ferrari, L., " On Derivations of Lattices ", Pure Math. Appl. 12 no.(4), 365-382, (2001).

Jun, Y.B.; Xin, X.L. "On Derivations of BCI-Algebras." Inf. Sci.,159, 167–176, (2004).

Khan, A. R. and Chaudhry, M. A., " Permuting f-triderivations" Int. J. of Algebra, Vol.5, no.10 , 471-481, (2011).

Li, L.; Xu, X. " Derivation-homomorphisms" Turk. J. Math. 2016, 40, 1374-1385

Pehlivan U.," Latislerde Türevler, Yüksek Lisans Tezi" Pamukkale Üniversitesi, *Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Denizli, (2015).

Posner, E. "Derivations in prime rings" Proc. Am. Math. Soc. 8, 1093-1100, (1957).

Szâsz, G. "Derivations of Lattices", Acta Sci. Math. (Szeged) 37, 149-154, (1975).

Xin, X. L., Li, T. Y., and Lu, J. H., "On derivations of lattices" , Inform. Sci. 178 no.(2), 307-316, (2008).