

**T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**LİNEER VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN
KARARLILIK BÖLGELERİ ÜZERİNE**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ALİ EREZ

DENİZLİ, OCAK - 2024

**T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**LİNEER VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN
KARARLILIK BÖLGELERİ ÜZERİNE**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ALİ EREZ

DENİZLİ, OCAK - 2024

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

ALİ EREZ

ÖZET

**LİNEER VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN KARARLILIK
BÖLGELERİ ÜZERİNE
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ALİ EREZ
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. ALİ FİLİZ)

DENİZLİ, OCAK - 2024

Bu tez integral ve integro-diferansiyel denklemlerin kararlılık bölgeleri üzerine olacaktır. Özellikle, odaklanacağımız bölüm integro diferansiyel denklemlerin farklı metotlar ile elde edilen kararlılık bölgelerinin elde edilmesidir. Tez dört bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde genel olarak integral denklemler ve integro diferansiyel denklemler hakkında bilgi verilip günümüzde bu denklemler ile ilgili çalışmalar ve nerelerde kullanıldıkları hakkında bilgi verilmiştir. Tezin ikinci bölümünde ise I. Tip Volterra integro diferansiyel denklemler tanıtılıp uygulanan yöntemler eklenmiştir. Tezin üçüncü bölümünde Volterra integro diferansiyel denklemler için kararlılık bölgelerinin analizi yapılmıştır. Tezin dördüncü bölümünde, integral denklemlerin kararlılık bölgelerinin bulunmasında uygulanan yöntemler ele alınmaktadır. Tezin beşinci bölümünde ise genel olarak integro-diferansiyel denklemlerin kararlılık bölgelerinin bulunmasında uygulanan yöntemler üzerinde durulmuştur.

Anahtar kelimeler: Diferansiyel denklem, integral denklem, integro diferansiyel denklem, kararlılık bölgeleri.

ABSTRACT

ON THE STABILITY REGIONS OF LINEAR VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS

MASTER'S THESIS

ALİ EREZ

PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

(SUPERVISOR: PROF. DR. ALİ FİLİZ)

DENİZLİ, JANUARY 2024

In this thesis, we started with the stability regions of integral equations. The part we examine is the stability region of integro differential equations. Our thesis consists of four parts. In the introduction part, general information about integral equations and integro differential equations is given, and information is given about the current studies about these equations and where they are used. In the second part of the thesis, Type I Volterra integro differential equations were introduced and applied methods were added. In the third part of the thesis, stability regions for Volterra integro differential equations are analyzed. In the fourth part of the thesis, we have added the methods applied to find the stability regions of integral equations. In the fifth part of the thesis, the methods applied in finding the stability regions of integro differential equations are discussed.

KEYWORDS: Differential equation, Integral equation, Integral differential equation, Stability region.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ŞEKİL LİSTESİ	iv
SEMBOL LİSTESİ	vi
ÖNSÖZ	vii
1. GİRİŞ	1
2. VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİ	4
2.1 I. Tip Volterra İntegro-diferansiyel Denklemler	4
2.2 Laplace Dönüşümü ile Volterra İntegral Denklemin Çözümü.....	4
2.3 Ardışık Yaklaşımlar Metodu	7
2.4 Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemlerinin Başlangıç Değer Problemlerine Dönüştürülmesi	14
2.5 Leibnitz Kuralı	15
2.6 Çok Katlı İntegral Denklemin Volterra İntegro Diferansiyel Denkleme Dönüştürülmesi	16
3. VOLTERRA İNTEGRO DİFERANSİYEL DENKLEMLERİNİN KARARLILIK BÖLGELERİ	17
3.1 Volterra İntegro Diferansiyel Denklemlerinin Kararlılık Bölgelerinin Bulunması.....	17
4. KARARLILIK BÖLGELERİ	25
4.1 Kararlılık Bölgelerinin Bulunması	25
5. İNTEGRO DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAMUKLAR VE SİMPSON KURALLARI İLE KARARLILIK ANALİZİ	28
5.1 İntegro-diferansiyel Denklemlerin Sayısal Kararlılığı	28
5.2 İntegro-diferansiyel Denklemlerde LMM (Lineer Çok Basamaklı Multi Sistem) Kuralı.....	32
5.3 Boundary – Locus Yönteminin Uygulamaları	35
5.4 5. Mertebeden Çok Bloklü Yöntemin Volterra İntegral Denkleme Uygulanması	54
6. SONUÇ ve ÖNERİ	63
7. KAYNAKLAR	64
8. ÖZGEÇMİŞ	66

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 3.1: Merkezi $(-1,0)$ yarıçapı 1 den küçük olan ileri Euler metodunun kararlılık bölgesi.....	19
Şekil 3.2: Merkezi $(1,0)$ yarıçapı 1den küçük olan kapalı Euler metodunun kararlılık bölgesi.....	22
Şekil 3.3: $u'=\lambda u$, $u(0)=1$ test denklemini için Runge Kutta 2 metodu kararlılık bölgesi.....	23
Şekil 3.4: $u'=\lambda u$, $u(0)=1$ test denklemini için Runge Kutta 3 metodu kararlılık bölgesi.....	24
Şekil 3.5: $u'=\lambda u$, $u(0)=1$ test denklemini için Runge Kutta 4 metodu kararlılık bölgesi.....	24
Şekil 5.1: Kararlılık bölgesi için uygulanan ileri Euler ve ileri Euler metodu.....	39
Şekil 5.2: Kararlılık bölgesi için uygulanan ileri Euler ve yamuk metodu	41
Şekil 5.3 : Kararlılık bölgesi için uygulanan ileri Euler ve geri Euler metodu.....	43
Şekil 5.4: Kararlılık bölgesi için uygulanan yamuklar ve ileri Euler metodu.....	45
Şekil 5.5: Kararlılık bölgesi için uygulanan yamuklar ve yamuklar metodu.....	46
Şekil 5.6: Kararlılık bölgesi için uygulanan ileri Euler ve geri Euler metodu.....	48
Şekil 5.7: Kararlılık bölgesi için uygulanan yamuklar ve geri Euler metodu.....	50
Şekil 5.8: Kararlılık bölgesi için uygulanan geri Euler ve yamuklar metodu.....	52
Şekil 5.9: Kararlılık bölgesi için uygulanan geri Euler ve geri Euler metodu.....	54
Şekil 5.10: Blok yönteminin iki noktalı aralığı.....	55
Şekil 5.11: Kararlılık bölgesi için uygulanan çok boyutlu yöntem.....	62

TABLO LİSTESİ

Sayfa

Tablo 2.1: $u(t) = f(t) + \frac{1}{5} \int_0^t tsu(s)ds$, $f(t) = t$ denkleminin yamuklar yöntemiyle nümerik çözümü.....	10
Tablo 2.2: $f(t) = 13e^{-t} - 12$, $\lambda = 12$, $u(t) = e^{-t}$ denkleminin açık Euler ve yamuklar metodu ile nümerik çözümü.....	11
Tablo 4.1: $\lambda = 12$, $f(t) = 13e^{-t} - 12$ şeklinde verilen denklemin değişen h aralıklarına göre kararlılık durumları.....	26
Tablo 4.2: $\lambda = -12$, $f(t) = 13e^{-t} - 12$ şeklinde verilen denklemin değişen h aralıklarına göre kararlılık durumları.....	27
Tablo 4.3: $\lambda = -12$, $f(t) = 13e^t - 12$ şeklinde verilen denklemin değişen h aralıklarına göre kararlılık durumları.....	27

SEMBOL LİSTESİ

- $K(\tau - s)$: Konvolüsyon tipinde çekirdek fonksiyon
 $u(x)$: Volterra integral denklem
 $\mathcal{L}\{f(t)\}$: Laplace dönüşümü
 $\phi(x)$: Volterra diferansiyel denklem

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması sürecince bana her zaman yol gösteren, sabır ve desteğini benden esirgemeyen, değerli bilgi, düşünce ve önerilerini benimle paylaşan, beraber çalışmaktan gurur duyduğum çok değerli hocam sayın Prof. Dr. ALİ FİLİZ' e, tüm hayatım boyunca yanımda olan, beni her zaman destekleyen aileme sonsuz teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

Diferansiyel ve integral denkleminin birçok kullanım alanı vardır. Fizik, kimya, biyoloji, tıp, ekonomi gibi çeşitli alanlarda ortaya atılan problemlerin matematiksel modellenmesi sonucu denklemler ortaya çıkmaktadır. Bunlar integral denklemler, diferansiyel denklemler, integro-diferansiyel denklemler ve kısmi diferansiyel denklemler olarak sıralanabilir. Volterra integral denklemlerinin diğer denklemlerden farkı, integral sınırlarının bir veya birden fazla değişkenlere sahip olmasıdır. Öncelikle Volterra integral denklemini aşağıdaki gibi tanıtalım;

$$u(x) = \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt$$

Ayrıca burada bilmemiz gereken bir durum vardır. Denkleminde integralden önce $f(x)$ ifadesi var ise bu tip integral denklemler ikinci tip Volterra integral denklemler olarak adlandırılmaktadır.

Bu tezde, bizim ele alacağımız konu ise Volterra integral denklemlerinin kararlılık bölgesi üzerinde olacaktır.

Kararlılık bölgeleri bulurken integral denklemin hem türev kısmı hem de integral kısmı ele alınacaktır. Bu tip denklemlere Volterra integro-diferansiyel denklemler denilmektedir. Türev kısmında uygulanan metoda karşılık integral tarafında başka bir metod uygulaması gerekebilir. Ayrıca çözülebilecek kısımlarda nümerik analiz konularından da yararlanılacaktır.

Volterra integral denklemler üzerindeki çalışmalar 1823 yılının başında ABEL tarafından bir integral denkleme rastlanması ve ilk defa integral denkleminin 1888 yılında De Bais Reymond tarafından kullanıldığı bilinmektedir (Bocher, 1913).

Lambert and Brunner (1973), Volterra integro diferansiyel denklemler için nümerik çözümlerde çok adım metodu kullanıp zayıf kararlılık bölgesi teorisi geliştirmiş ve diferansiyel denklemler teorisi ile ilişki kurmuştur.

Baker (1977) integro diferansiyel denklemler üzerine hazırladığı kitabında önemli çözüm yöntemlerinden bahsetmiştir.

Atkinson (1996, 2010) Parabolik integro diferansiyel denklemler ile ilgili çalışmaları kitabında bahsetmiştir.

Bununla birlikte, günümüzde Volterra integro denklemler üzerine çalışmalar halen devam etmektedir.

Huang (2007) gecikmeli integro diferansiyel denklemlerin nümerik olarak çözüm yolları üzerine çalışmaları bulunmaktadır.

Günümüzde, yakın zamanda bu konu ile ilgili çalışılan konulara göz atacak olursak;

Erdem (2004) Lotka - Volterra sistemleri ve sayısal çözümleri üzerine çalışmalar yapmıştır.

Öztunç (2009) Parabolik Volterra İntegro-diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlenmeleri ve tarihçesi hakkında bilgi vermiştir.

Anar (2014) doğrusal olmayan Volterra integral denklemi ile verilen kontrol sistemin yörüngeler kümesinin özellikleri ve yaklaşımı üzerine çalışmalar yapmıştır.

Wazwaz “A First Course in Integral Equations” adlı kitabında Volterra integral denkleminin 2015 yılında türlerine değinip çözüm yöntemleri vermektedir.

Köseoğlu (2019) İntegral denklemlerin Taylor serisi yardımıyla yaklaşık çözümlerinin elde edilmesi üzerine çalışmalar yapmıştır.

Seyyar (2020) Volterra integral denklemlerin üstel fonksiyonları koruyan Szasz-Mirakyan yakınsama yöntemi ile nümerik çözümler üzerine çalışmalar yapmıştır.

Biz ise;

Volterra integro diferansiyel denkleminin kararlılık bölgelerini inceleyeceğiz. Bunun için denkleminizin türev kısmı ile integral kısmını ayırıyoruz. Kullanacak olduğumuz yöntemler türev kısmı için; ileri Euler, geri Euler, Rk2(Runge Kutta),

Rk4, Rk5 ve Rk6 yöntemleridir. İntegral kısmı için ise; dikdörtgenler yöntemi, Simpson (1/3, 3/8) yöntemi, yamuklar yöntemi, Filiz (2013, 2014) yöntemi uygulanacaktır.

2. VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİ

Bu bölümde Volterra integral denklemlerinin kararlılık bölgesini incelerken bilmemiz gereken konular üzerinde duracağız. Burada kullanacağımız yöntem önem arz etmektedir. İntegro diferansiyel denkleminiz iki bölümden oluştuğundan ayrı ayrı çözüm bulmamız gerekir.

2.1 I. Tip Volterra İntegro-diferansiyel Denklemler

Volterra integro diferansiyel denklem dediğimizde aklımıza integralin üst sınırının bir değişkene bağlı olarak verildiği gelmelidir.

I. Tip Volterra integro diferansiyel denklemlerin standart formu başlangıç koşullarıyla;

$$\int_0^x K_1(x,t)u(t)dt + \int_0^x K_2(x,t)u^{(n)}(t)dt = f(x), \quad K_2(x,t) \neq 0$$

şeklinde verilir.

I. Tip Volterra integro diferansiyel denklemler, II. Tip Volterra integro diferansiyel denklemlere dönüştürülerek çözülür.

Bunun için bazı yöntemler kullanmamız gerekir. Bu yöntemlerden biri ardışık yaklaşımlar yöntemidir. Diğer de en çok kullanılan Laplace dönüşüm metodudur.

2.2 Laplace Dönüşümü ile Volterra İntegral Denklemin Çözümü

Laplace dönüşümü, zaman tanım kümesinde tanımlı bir fonksiyonu, frekans tanım kümesinde tanımlı bir başka fonksiyona dönüştürmek amacıyla kullanılır.

Bu metot için çekirdeğin formunun fark şeklinde olması gerekir. Diğer ifadeyle, integral denklemin çekirdek fonksiyonu konvolüsyon şeklinde olmalıdır. Ayrıca her diferansiyel denklem Laplace Dönüşümü yardımıyla çözülemez. Çünkü

Sınır Değer Problemleri (Boundary Value Problem) Laplace şartlarını sağlamaz. Dolayısıyla böyle durumlarda bilgisayar programından çözüm üretmemiz gerekir. Ayrıca diferansiyel denkleminizin Leibnitz şartlarını sağlaması gerekmektedir.

$$\int_0^x K_1(x, t)u(t)dt + \int_0^x K_2(x, t)u^{(n)}(t)dt = f(x), \quad K_2(x, t) \neq 0 \quad (2.2.1)$$

Tanım 2.2.1: Çekirdek $K(\tau - s)$ 'nin bir fonksiyonu olarak, $K(\tau, s) = k(\tau - s)$, şeklinde yazılabiliyor ise K çekirdek fonksiyonuna Volterra integral denkleminde konvolüsyon tipindeki çekirdek denir. Konvolüsyon tipi;

$$\int_0^t (f * g)dt = F(s).G(s)$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer integral denklemini lineer ve çekirdeği konvolüsyon tipinde ise bu integral denklemler Laplace Dönüşümü ile çözülebilir. Laplace Dönüşümü ise;

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-s t} f(t)dt$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = U(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

olur.

(2.2.1) denkleminde her tarafa Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$\mathcal{L}(K_1(x - t) * u(x)) + \mathcal{L}(K_2(x - t) * u^{(n)}(x)) = \mathcal{L}(f(x))$$

elde edilen

$$\mathcal{L}(f(x)) = U(s) \frac{F(s) + K_2(s)(s^n U(s) - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \dots - u^{(n-1)}(0))}{K_1(s) + s^n K_2(s)}$$

denkleminde her tarafın ters Laplace dönüşümü alınırsa çözüm bulunmuş olur.

Örnek 2.2.1: $u(x) = 1 + \lambda \int_0^x u(\tau) d\tau$ denkleminizi ele alalım.

Çözümünü Laplace dönüşümü ile yapalım.

Çözüm 2.2.1: Çözüm için öncelikle eşitliğin her tarafına Laplace dönüşümü uygulayalım.

$$u(x) = 1 + \lambda \int_0^x 1 \cdot u(\tau) d\tau$$

Öncelikle genel formda yazarsak

$$u(x) = 1 + \lambda \int_0^x (x - \tau)^0 u(\tau) d\tau$$

elde edilir. Genel formda eşitliğin her iki yanına Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$\mathcal{L}\{u(x)\} = \mathcal{L}\{1\} + \lambda \mathcal{L}\left\{\int_0^x 1 \cdot u(\tau) d\tau\right\}$$

ve Laplace dönüşümü kuralları gereğince

$$U(s) = \frac{1}{s} + \lambda \frac{U(s)}{s}$$

$$U(s) \left[1 - \frac{\lambda}{s}\right] = \frac{1}{s}$$

$$U(s) \left[\frac{s - \lambda}{s}\right] = \frac{1}{s}$$

$$U(s) = \frac{1}{s - \lambda}$$

bulunur. Şimdi her tarafın ters Laplace dönüşümü alınır;

$$\mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - \lambda}\right\}$$

$$u(x) = e^{\lambda x}$$

olacak şekilde integral denklemin gerçek çözümüne ulaşılır.

Şimdi de aynı örneğimizi ardışık yaklaşımlar yöntemi ile çözelim.

2.3 Ardışık Yaklaşımlar Metodu

Tanım 2.3.1: Herhangi bir $u_0(x)$ fonksiyonu $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonuna bir yaklaşım olsun. Buradan

$$u_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K_n(t, s)u_n(t)dt, \quad n \geq 0$$

fonksiyonu $u(x)$ ' e yakındır. Ayrıca

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}(x)$$

sağlanır. $u_0(x)$ genel olarak integral kısmından gelir.

Örnek 2.3.1: $u(x) = 1 + \lambda \int_0^x u(\tau)d\tau$ ve $u_0(x) = 1$ olmak üzere integral denklemin gerçek çözümünü ardışık yaklaşımlar yöntemi uygulayarak bulalım.

Çözüm 2.3.1: $u_{n+1} = 1 + \lambda \int_0^x u_n(\tau)d\tau$

denklemini ele alalım.

$n = 0$ için $u_1 = 1 + \lambda \int_0^x u_0(\tau)d\tau$

$$u(x) = 1 + \lambda \int_0^x 1d\tau = (1 + \lambda\tau)_0^x = 1 + \lambda x$$

sağlanan değeri elde edilip

$n = 1$ için $u_2 = 1 + \lambda \int_0^x u_1(\tau)d\tau$

$$u_2(x) = 1 + \lambda \int_0^x (1 + \lambda\tau)d\tau$$

$$u_2(x) = 1 + \lambda \left[\tau + \lambda \frac{\tau^2}{2} \right]_{\tau=0}^x$$

$$u_2(x) = 1 + \lambda x + \frac{(\lambda x)^2}{2!}$$

$n = 2$ için

$$u_3 = 1 + \lambda \int_0^x u(\tau) d\tau$$

$$u_3(x) = 1 + \lambda \int_0^x 1 + \lambda \tau + \frac{(\lambda \tau)^2}{2!} d\tau$$

$$u_3(x) = 1 + \lambda \left[\tau + \frac{(\lambda \tau)^2}{2!} + \frac{(\lambda \tau)^3}{3!} \right]_{\tau=0}^x$$

$$u_3(x) = 1 + \lambda x + \frac{(\lambda x)^2}{2!} + \frac{(\lambda x)^3}{3!}$$

$n \rightarrow \infty$ iken

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lambda x + \frac{(\lambda x)^2}{2!} + \frac{(\lambda x)^3}{3!} + \dots + \frac{(\lambda x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^n}{n!}$$

İfadenin sağ kısmı $e^{\lambda x}$ fonksiyonunun seri açılımı (Maclaurin seri açılımı) olduğundan

$u(x) = e^{\lambda x}$ genel çözümü elde edilir.

$\lambda = 1$ alındığında örnek 2.3.1 de verilen İntegral denklemin genel çözümü e^x olur.

Ardışık yaklaşımlar metodunu kullandığımız bir örnek verelim.

Örnek 2.3.2 : $u(t) = t + \frac{1}{5} \int_0^t t s u(s) ds$ şeklinde verilen Volterra

integro denklemini ardışık yaklaşımlar yöntemiyle çözelim.

Çözüm 2.3.2:

$$u_{n+1}(t) = t + \frac{1}{5} \int_0^t t s u_n(s) ds$$

$$u(t) = t + \frac{1}{5} \int_0^t t s u ds$$

$$u_0(t) = t$$

$n = 0$ için

$$u_1(t) = t + \frac{1}{5} \int_0^t t s u_0(s) ds$$

$$u_1(t) = t + \frac{1}{5} \int_0^t t s s ds$$

$$u_1(t) = t + \frac{1}{5} \left[t \frac{s^3}{3} \right]_{s=0}^t$$

$$u_1(t) = t + \frac{t^4}{5 \cdot 3} = t \left[1 + \frac{t^3}{1!} \right]$$

$n = 1$ için

$$u_2(t) = t + \frac{1}{5} \int_0^t t s u_1(s) ds$$

$$u_2(t) = t + \frac{1}{5} \int_0^t t s s \left[1 + \frac{s^3}{1!} \right] ds$$

$$u_2(t) = t + \frac{t}{5} \left[\frac{s^3}{3} + \frac{s^6}{6} \right]_{s=0}^t$$

$$u_2(t) = t + \frac{t^4}{15} + \frac{t^7}{2 \cdot 3} = t \left[1 + \frac{t^3}{1!} + \left(\frac{t^3}{2!} \right)^2 \right]$$

...

$$u_n(t) = t \left[1 + \frac{t^3}{1!} + \frac{\left(\frac{t^3}{15} \right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{t^3}{15} \right)^3}{3!} + \dots + \frac{\left(\frac{t^3}{15} \right)^n}{n!} \right]$$

$n \rightarrow \infty$ olduğunda $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t)$ limiti $u(t) = t e^{\frac{t^3}{15}}$ gerçek çözümü elde edilir.

Örnek 2.3.3: $u(t) = f(t) + \frac{1}{5} \int_0^t t s u(s) ds, \quad (t \geq 0)$

Lineer ikinci tip Volterra integral denkleminde $t \in [0, 2]$ aralığında $f(t) = t$ olarak yamuklar yöntemi ile nümerik çözüm yapıldığında;

Tablo 2.1: $u(t) = f(t) + \frac{1}{5} \int_0^t tsu(s)ds$, $f(t) = t$ denkleminin yamuklar yöntemiyle nümerik çözümü.

t	Hata $h=0.2$	Hata $h=0.1$	Gerçek çözüm
0,0	1,00000e+00	1,00000e+00	0,00000
0,20	5,34330e-05	1,33569e-05	0,20011
0,40	2,16365e-04	5,40800e-05	0,40171
0,60	5,03037e-04	1,25716e-04	0,60870
0,80	9,52131e-04	2,37903e-04	0,82778
1,00	1,64498e-03	4,10895e-04	1,06894
1,20	2,73602e-03	6,83108e-04	1,34652
1,40	4,50886e-03	1,12499e-03	1,68103
1,60	7,48455e-03	1,86573e-03	2,10238
1,80	1,26367e-02	3,14614e-03	2,65538
2,0	2,18302e-02	5,42616e-03	3,40921

Tablo 2.1’de görüldüğü üzere test denkleminiz de t aralıkları arttıkça nümerik çözüm ile gerçek çözüm arasındaki fark azalmaktadır. Dolayısıyla test denkleminiz kararlı olmaya yaklaşmıştır. Bu durum nümerik çözümün gerçek çözüme yaklaştığı sinyali verir. Bu denkleminize Simpson metotları uygulanınca nümerik çözüm gerçek çözüme daha da yakın olmaktadır. Yukarıdaki örneğe benzer olarak lineer integral denklemini alalım.

$$\text{Örnek 2.3.4: } u(t) = f(t) + \lambda \int_0^t u(s)ds \quad (t \geq 0)$$

$$\text{denkleminde; } f(t) = 13e^{-t} - 12, \quad \lambda = 12, \quad u(t) = e^{-t}$$

alınarak açık Euler (soldan dikdörtgenler yöntemi) ve yamuklar kuralı kullanılarak çözüm yapılırsa;

Tablo 2.2: $f(t) = 13e^{-t} - 12$, $\lambda = 12$, $u(t) = e^{-t}$ denkleminin açık Euler ve yamuklar metodu ile nümerik çözümü.

t	Nümerik Çözüm	Gerçek Çözüm
0,00	1,00000	1,00000
0,20	0,8209	0,8187
0,40	0,6974	0,6703
0,60	0,8723	0,5488
0,80	4,2989	0,4493
1,00	46,1610	0,3679
1,20	545,0327	0,3012
1,40	6480,0793	0,2466
1,60	77080,7950	0,2019
1,80	916909,2956	0,1653
2,0	10907056,2249	0,1353

tablosu elde edilir. Tablomuzda h adım aralığı 1/5 olarak alınmıştır.

Örnek 2.3.5:
$$u(x) = 1 + \lambda \int_0^t u(\varepsilon) d\varepsilon$$

denklemini ele alalım. Burada;

$$u(t) = e^x, \quad u(0) = 1, \quad \lambda = -12$$

şeklinde alınıp yamuklar metodu uygulanınca;

$$x_n = 0 + nh$$

$$\phi(nh) = f(nh) + h \sum_{k=0}^n w_{n_k} \phi(hk)$$

$$h = \frac{1}{N} = \frac{1}{5} = 0,2$$

$$\int_a^b \phi(y) dy \cong h \sum_{i=0}^n w_i \phi(a + i * h)$$

$$\phi(x) = 1 - 12 \int_0^2 \phi(y) dy$$

$$n = 0 \quad \phi(0) = 1 - 12 \int_0^0 \phi(y) dy$$

$$\phi(0) = 1.$$

$$n = 1 \quad \phi(0,2) = 1 - 12 \int_0^{0,2} \phi(y) dy$$

$$h \sum_{i=0}^1 \phi_i = \frac{h}{2} (\phi_0 + \phi_1)$$

$$\phi(0,2) = 1 - 12 * \left[\frac{0,2}{2} (\phi(0) + \phi(0,2)) \right]$$

$$\phi(0,2) = 1 - 1,2 * [1 + \phi(0,2)]$$

$$2,2 * \phi(0,2) = -0,2$$

$$\phi(0,2) = -\frac{0,2}{2,2} = -\frac{1}{11} = 0,09090$$

$$\phi(0,2) = 0,09090$$

Örnek 2.3.6: $u(x) = 1 + \lambda \int_0^t u(\varepsilon) d\varepsilon$

denklemini ele alalım. Burada

$$u(t) = e^x \quad u(0) = 1 \quad \lambda = -12$$

alınıp ardışık yaklaşımlar metodu uygulanınca;

$$x_n = 0 + nh$$

$$\phi(nh) = f(nh) + h \sum_{k=0}^n w_{n_k} \phi(hk)$$

$$h = \frac{1}{N} = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$\int_a^b \phi(y) dy \cong h \sum_{i=0}^n w_i \phi(a + i * h)$$

$$\phi(x) = 1 - 12 \int_0^2 \phi(y) dy$$

$$n = 0 \quad \phi(0) = 1 - 12 \int_0^0 \phi(y) dy = 1$$

$$n = 1 \quad \phi(0,1) = 1 - 12 \int_0^{0,1} \phi(y) dy$$

$$h \sum_{i=0}^1 \phi_i = \frac{h}{2} (\phi_0 + \phi_1)$$

$$\phi(0,1) = 1 - 12 * \left[\frac{0,1}{2} (\phi(0) + \phi(0,2)) \right]$$

$$\phi(0,1) = 1 - 0,6 * [1 + \phi(0,1)]$$

$$1,6 * \phi(0,1) = 0,4$$

$$\phi(0,1) = \frac{0,4}{1,6} = \frac{1}{4} = 0,2500$$

$$\phi(0,1) = 0,2500$$

$$\phi(0,2) = 1 - 12 \int_0^{0,2} \phi(y) dy$$

$$h \sum_{i=0}^1 \phi_i = \frac{h}{2} (\phi_0 + \phi_1)$$

$$\phi(0,1) = 1 - 12 * \left[\frac{0,1}{2} (\phi(0) + 2\phi(0,1) + \phi(0,2)) \right]$$

$$\phi(0,2) = 1 - 0,6 * [1 + 2 * 0,25 + \phi(0,2)]$$

$$1,6 * \phi(0,2) = 0,1$$

$$\phi(0,2) = \frac{0,1}{1,6} = \frac{1}{16} = 0,0625$$

2.4 Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemlerinin Başlangıç Değer Problemlerine Dönüştürülmesi

Volterra integro-diferansiyel denklemi, başlangıç değer problemine dönüştürmek için öncelikle denklemimizi ele alalım

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

her iki yanından da Leibnitz kuralı ile türev alalım.

$$u'(x) = f'(x) + \lambda(K(x,x)u(x) + \int_0^x \frac{dK}{dx}(x,t)u(t)dt)$$

integro diferansiyel denkleme dönüşür.

Örnek 2.4.1: $u(x) = 1 + \lambda \int_0^x u(\tau)d\tau$ denklemimizi diferansiyel denkleme dönüştürüp çözüm yapınız.

Çözüm 2.4.1: Verilen denklemimizin her tarafının türevini alalım.

$$u'(x) = 0 + \lambda u(x)$$

$$u'(x) = \lambda u(x)$$

$$\frac{du}{u(x)} = \lambda dx$$

Buradan $u(x) = Ae^{\lambda x}$ elde edilip $u(0) = 1$ başlangıç koşulu yazılırsa; $u(x) = e^{\lambda x}$ çözümü elde edilir.

Dolayısıyla denklemimiz türev yardımıyla değişkenlerine ayrılabilir diferansiyel denkleme dönüştürülüp çözüm bulunmuştur.

2.5 Leibnitz Kuralı

$[a, b]$ aralığında tanımlı x' in türevlenebilir fonksiyonları h ve g olsun.

$$F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt, \quad F(x)' = (g(x))'f(g(x)) - h(x)'f(h(x))$$

veya en genel hali ile verildiğinde oluşan fonksiyon

$$F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} K(x, t)f(t)dt \text{ ise;}$$

$$F(x)' = \int_{h(x)}^{g(x)} \frac{\partial K}{\partial x}(x, t) f(t)dt - K(x, g(x))(g(x))'f(g(x)) - K(x, h(x))h(x)'f(h(x)) \quad (2.5)$$

olarak tanımlanır. (2.5) denkleminde ele aldığımız fonksiyonlar sürekli olmalıdır. Yani süreklilik şartlarını sağlamalıdır.

Görüldüğü gibi her diferansiyel denklem çözülemeyeceğinden bu durumu çözebilmek için bilgisayar programı yazmamız gerekir.

Örnek 2.5.1: $u'' + u = \cos x, u(0) = 0, u'(0) = 1$

diferansiyel denklemini Volterra integral denkleme dönüştürelim.

Çözüm 2.5.1: $u'' = \phi(x)$

$$u' = \int_0^x \phi(t)dt + u'(0)$$

$$u' = \int_0^x \phi(t)dt + 1$$

$$u(x) = \int_0^x \int_0^t (x-t)\phi(t)dt dx + x$$

$$u(x) = \int_0^x (x-t)\phi(t)dt + x \quad u < 0$$

$$u(x) = \int_0^x (x-t)\phi(t)dt + x + 0$$

$$u(x) = \int_0^x (x-t)\phi(t)dt + x$$

$$u'' + u = \cos x$$

$$\phi''(x) + \int_0^x (x-t)\phi(t)dt + x = \cos x$$

$$\phi(x) = \cos x - \int_0^x (x-t)\phi(t)dt$$

şeklinde elde edilen ϕ diferansiyel denklemin Volterra diferansiyel denkleme dönüşmüş halidir.

2.6 Çok Katlı İntegral Denklemin Volterra İntegro Diferansiyel Denkleme Dönüştürülmesi

$$\int_a^x \int_a^x \int_a^x \dots \int_a^x u(t)dt \dots dt = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} u(t)dt$$

Burada n tane integral denklemin tek katlı integral denkleme dönüştürürken bir başlangıç değeri altında verilen n , mertebeden diferansiyel denklemin n . mertebeye kadar integralini alıp diferansiyel denklemde yerine yazılmasıyla elde edilen n . mertebeden integral denklemin tek tek açılıp toplanmasının ardından düzenlenmesiyle tek katlı integral denkleme dönüşür (Aksoy, 2017).

3. VOLTERRA İNTEGRO DİFERANSİYEL DENKLEMLERİNİN KARARLILIK BÖLGELERİ

3.1 Volterra İntegro Diferansiyel Denklemlerinin Kararlılık Bölgelerinin Bulunması

Volterra integro diferansiyel denklemlerin kararlılık bölgelerini incelerken iki kısımda ele almalıyız. Öncelikle bildiğimiz yollardan gerçek çözüm bulup sonra ise nümerik yollardan incelemeliyiz.

Örnek 3.1.1: $u' = \lambda u$, $u(0) = 1$ şeklinde test denklemini alalım. Gerçek çözüm için bildiğimiz yollardan çözüm yaparsak;

Test denkleminimize türev uygulayalım.

$$\frac{du}{dx} = \lambda u$$

$$\frac{du}{u} = \lambda dx$$

Her tarafın integralini alalım.

$$\int \frac{du}{u} = \int \lambda dx$$

$$\ln u = \lambda x + c$$

$$u = e^{\lambda x + c} = e^{\lambda x} e^c$$

$$u(x) = A e^{\lambda x}$$

şeklinde çözüm elde edilmiş olur. Başlangıç koşulunu uygularsak

$$u(x) = e^{\lambda x} \quad (3.1.1)$$

sonucunu elde etmiş oluruz. Burada Laplace dönüşümü de kullanabiliriz.

Şimdi ise nümerik metot olarak ileri(açık) Euler metodu uygulanırsa;

$$u_{n+1} = u_n + h\lambda u_n = u(1 + \lambda h)$$

$$u_{n+1} = u_n(1 + \lambda h)$$

$$n=0 \text{ için} \quad u_1 = u(1 + \lambda h)$$

$$n=1 \text{ için} \quad u_2 = u_1(1 + \lambda h) = u_0(1 + \lambda h)(1 + \lambda h) = (1 + \lambda h)^2$$

$$n=2 \text{ için} \quad u_3 = u_2(1 + \lambda h) = (1 + \lambda h)^3$$

...

$$n=k \text{ için} \quad u_{k+1} = u_k(1 + \lambda h) = (1 + \lambda h)^{k+1}$$

Bu durumda n sonsuza giderken limit alındığında $\lambda < 0$ olduğundan h adım aralığı için;

$h < \frac{2}{\lambda}$ alınarak $h > 0$ elde edilir.

Dolayısıyla;

$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \lambda h)^n$ için

$$|(1 + \lambda h)| < 1$$

$$-1 < (1 + \lambda h) < 1$$

$$-2 < \lambda h < 0$$

$$-2 < \lambda h$$

$$\lambda h < 0$$

elde ederiz.

$$|(1 + \lambda h)| < 1$$

$\lambda h = z$ alırsa

$$|1 + z| < 1$$

$$|1 + x + yi| < 1$$

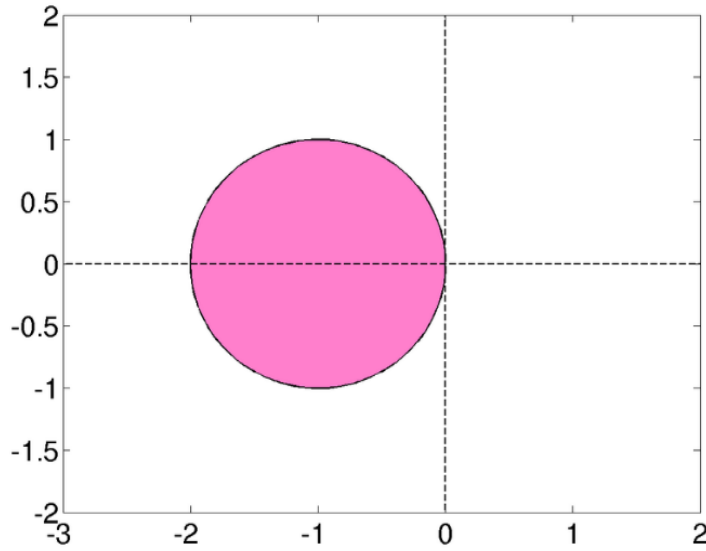
$$\sqrt{(1 + x)^2 + y^2} < 1$$

$$(x + 1)^2 + y^2 < 1$$

$$M(-1,0)$$

$$r < 1$$

için alınırsa elde edilen bölgeyi gösterirsek; $|1 + \lambda h| \leq 1$ için kararlılık bölgesi Şekil 3.6' da gösterildiği gibi elde edilir.



Şekil 3.1: Merkezi (-1,0) yarıçapı 1 den küçük olan ileri Euler metodunun kararlılık bölgesi

Örnek 3.1.2 : $u' = \lambda u, \quad u(0) = 1$

şeklinde test denklemini tekrar ele alalım. Gerçek çözümünü (3.1.1) de bulmuştuk.

$$u(x) = e^{\lambda x}$$

Şimdi de ele aldığımız test denklemine geri (kapalı) Euler metodu uygularsak

$$u_{n+1} = u_n + h f(x_{n+1}, u_{n+1})$$

$$u_{n+1} = u_n + h\lambda u_{n+1}$$

$$u_{n+1} - h\lambda u_{n+1} = u_n$$

$$u_{n+1}(1 - \lambda h) = u_n$$

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 - \lambda h}$$

$$n = 0 \quad \text{için} \quad u_1 = \frac{y_0}{1 - \lambda h} = (1 - \lambda h)^{-1}$$

$$n = 1 \quad \text{için} \quad u_2 = \frac{y_1}{1 - \lambda h} = (1 - \lambda h)^{-2}$$

$$n = 2 \quad \text{için} \quad u_3 = \frac{y_2}{1 - \lambda h} = (1 - \lambda h)^{-3}$$

...

$$n = k \quad \text{için} \quad u_{k+1} = \frac{u_k}{1 - \lambda h} = (1 - \lambda h)^{-(k+1)}$$

Bu durumda n sonsuza giderken limit alınırsa;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(1 - \lambda h)^n} \right| = u^*$$

Limitinin çözüme ne zaman yakınsayacağını araştırmamız gerekir. Yakınsaklık için

$$\left| \frac{1}{1 - \lambda h} \right| < 1, \quad n \rightarrow \infty \quad \text{için iki durum söz konusudur.}$$

I. durum:

$$\frac{1}{1 - \lambda h} < 1$$

$$1 - \lambda h > 1$$

$$-\lambda h > 0$$

$$\lambda h < 0$$

$h > 0$ ve $\lambda < 0$ durumları her zaman sağlanır.

II. durum:

$$1 - \lambda h < -1$$

$$-\lambda h < -2$$

$$\lambda h > 2$$

$$h > \frac{2}{|\lambda|}$$

durumu elde edilir. Dolayısıyla biz;

$$\left| \frac{1}{1-\lambda h} \right| < 1$$

$$|1 - \lambda h| > 1$$

$$|1 - z| > 1$$

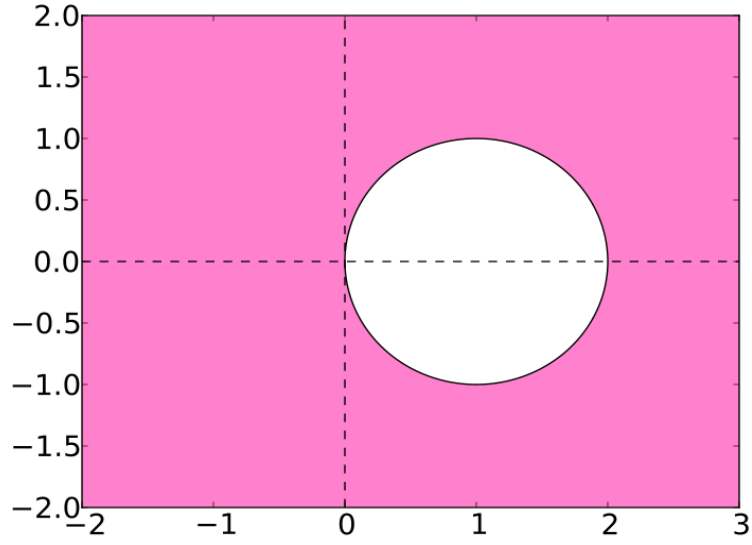
$$|1 - x - iy| > 1$$

$$\sqrt{(1-x)^2 + y^2} > 1$$

$$(x-1)^2 + y^2 > 1$$

$M(1,0)$ merkezi ve $r > 1$ yarıçapı

için elde edilen kararlılık bölgesi Şekil 3.7'de gösterilmiştir.



Şekil 3. 2: Merkezi (1,0) yarıçapı 1den küçük olan kapalı Euler metodunun kararlılık bölgesi

Örnek 3.1.3: $u' = \lambda u$, $u_0 = 1$ $u = f(x, u)$ olmak üzere;

$$u_{n+1} = u_n + hf_n \quad (3.1.3)$$

(3.1.3)'de u_n , $u(x)$ ' in ve f_n ' de $f(x_n, u_n)$, $x = x_n$ noktasındaki nümerik yaklaşımını ifade etmektedir.

$n=1$ için; $k_1 = hf(x_n, u_n) = h\lambda u_n$

$$k_2 = hf(x_{n+h}, u_{n+kn})$$

$n=2$ için; $k_2 = h\lambda(u_n + k_1) = \lambda h(u_n + \lambda h u_n) = \lambda h u_n + (\lambda h)^2 u_n$

...

$$u_{n+1} = u_n + \frac{k_1 + k_2}{2}$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(\lambda h u_n + \lambda h u_n + (\lambda h)^2 u_n)$$

$$u_{n+1} = u_n + \lambda h u_n + \frac{1}{2}(\lambda h)^2 u_n$$

$$u_{n+1} = u_0 \left(1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2} \right)^n$$

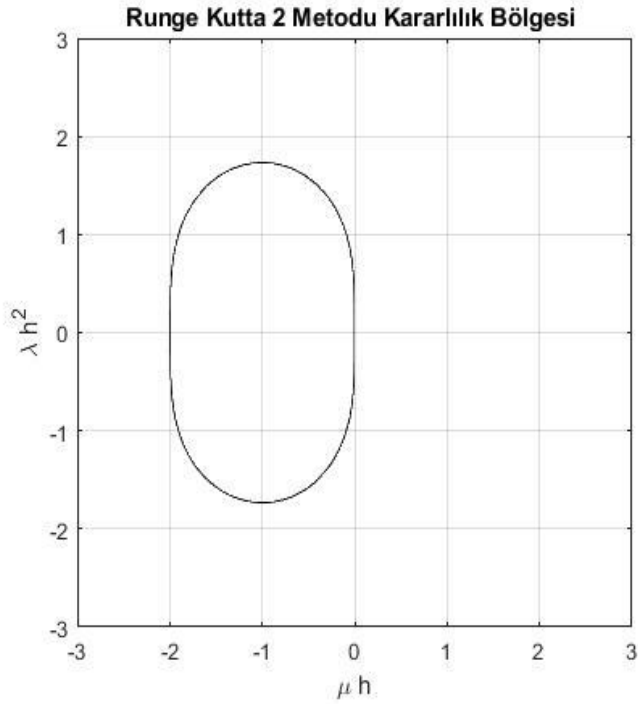
$$\left| 1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2} \right| < 1$$

$$\left| 1 + z + \frac{z^2}{2} \right| < 1$$

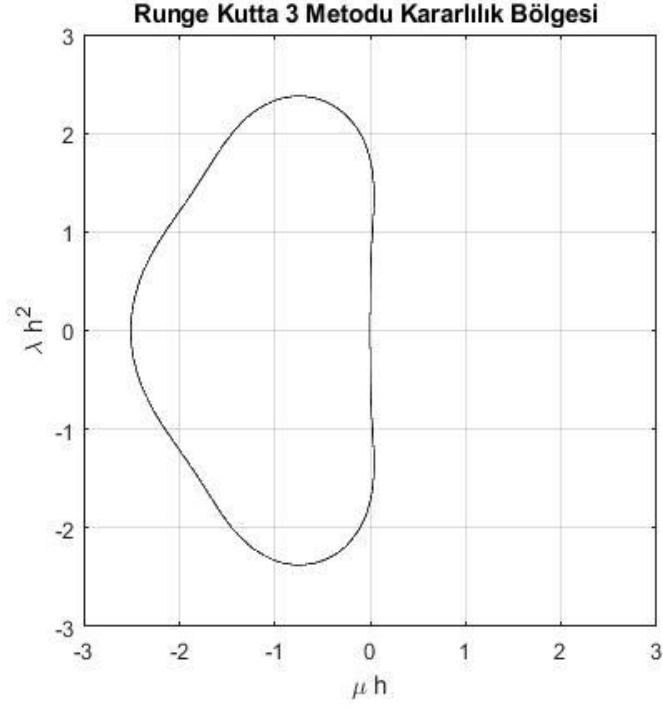
$$z = x + iy$$

$$\left| 1 + x + iy + \frac{(x + iy)^2}{2} \right| < 1$$

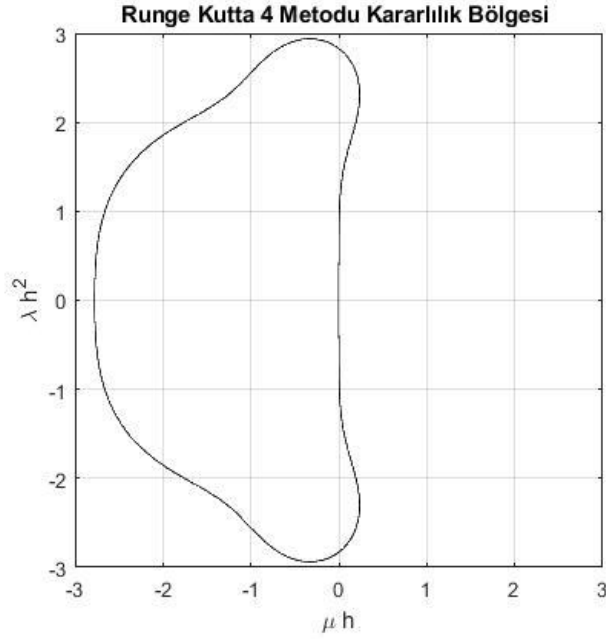
Test denkleminin 2.,3., ve 4. Mertebeden Runge Kutta metotları ile çözümünden elde edilen grafikler sırasıyla Şekil 3.8, Şekil 3.9 ve Şekil 3.10' da verilmiştir.



Şekil 3. 3: $u'=\lambda u$, $u(0)=1$ test denklemini için Runge Kutta 2 metodu kararlılık bölgesi



Şekil 3. 4: $u'=\lambda u, u(0)=1$ test denklemini için Runge Kutta 3 metodu kararlılık bölgesi



Şekil 3.56: $u'=\lambda u, u(0)=1$ test denklemini için Runge Kutta 4 metodu kararlılık bölgesi

4. KARARLILIK BÖLGELERİ

4.1 Kararlılık Bölgelerinin Bulunması

Örnek 4.1.1: $u(t) = f(t) + \lambda \int_0^t u(s) ds \quad t \geq 0$ (4.1)

denkleminde $f(t) = 13e^{-t} - 12$, $\lambda = 12$ olsun. Bu denklemin katlanarak azalan kesin çözümü $u(t) = e^{-t}$ dir.

Adi diferansiyel denklemlerle bağlantısını tanımlayalım.

$$u'(t) = \lambda u(t) - 13e^{-t}, \quad t \geq 0, \quad u(0) = 1, \quad \lambda = 12$$

$\lambda > 0$ olduğundan, elde edilen (4.1) adi diferansiyel denklemini, $u(0)$ değerine göre kararsızdır;

$u(0)$, $u(t) + \delta u_0$ olarak değiştirirsek çözüm de $u(t) + \delta u_0$ olarak değiştirilir, böylece çözümdeki bozulma sınırsız olur.

(4.1) denklemini için yamuk kuralını kullanıp, \check{u}_n yaklaşık çözümü ifade ederse;

$$\check{u}_n - \lambda \sum_{j=0}^n a_{n,j} \check{u}_j = f_n \quad n = r, r+1, \dots, \quad (4.2)$$

$$a_{n,0} = a_{n,n} = \frac{h}{2}, \quad a_{n,j} = h, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n-1$$

$$\check{u}_n - \lambda \left[\frac{h}{2} \check{u}_0 + h \check{u}_1 + \dots + h \check{u}_{n-1} + \frac{h}{2} \check{u}_n \right] = f_n \quad (4.3)$$

$$\check{u}_{n+1} - \lambda \left[\frac{h}{2} \check{u}_0 + h \check{u}_1 + \dots + h \check{u}_{n-1} + h \check{u}_n + \frac{h}{2} \check{u}_{n+1} \right] = f_{n+1} \quad (4.4)$$

(4.3) denklemini (4.4) denkleminde çıkarırsak

$$\check{u}_{n+1} \left(1 - \frac{\lambda h}{2} \right) - \check{u}_n \left(1 + \frac{\lambda h}{2} \right) = \Delta f_n, \quad (4.5)$$

elde ederiz. (4.5) denkleminde;

$$\Delta f_n = f_{n+1} - f_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{ve} \quad \check{u}_0 = u_0 = f(0) \text{ dır.}$$

Bu nedenle $u(n)$ değerleri (4.5) denkleminde olduğu gibi iki terimli bir tekrarlı ilişkiyi sağlar.

(4.2) denklemindeki dikdörtgen kuralında değişen h ve $\lambda > 0$ adımlarını kullanırsak, Şekil (3.1) de gösterilen ve kararsızlığı veren yaklaşık değerleri elde ederiz.

Denklemini $f(t) = 13e^{-t} - 12$, $\lambda = -12$ diye alırsak tam çözüm de $u(t) = e^t$ sınırsız çözümü elde edilir. Ancak $u(0)$ içindeki bir δu_0 durumunun üstel olarak azalan bir $\delta u_0 e^{-12t}$ durumuna neden olması anlamında (asimptotik olarak) kararlıdır.

Tanım 4.1: Herhangi bir (a, b) kritik noktası kararlı ise bu noktaya en yakın olarak başlayan her yörünge sonsuza doğru da bu noktaya yakınıyor ise (a,b) noktasına asimptotik kararlı denir (Köker, 2021).

(4.5) denklemini için, yamuk kuralını kullanırken, $t_{max} = 2$ ve $h = \frac{1}{20}$ ye kadar üç ondalık rakamın doğru olduğunu buluyoruz. Tablo 4.3 ve (4.5) denklemine göre $\tilde{\gamma} = \frac{2+\lambda h}{2-\lambda h}$ yı tanımlarız. Buradan; $\lambda = 12$, $h = \frac{1}{5}$, olduğunda $\tilde{\gamma} = -11$ elde edilir.

$h > 0$ in tümü için $|\tilde{\gamma}| > 1$, $\lambda > 0$ ise, yöntem $h > 0$ in tümü için kararsızdır.

$\lambda = -12$, $h = \frac{1}{5}$, olduğunda $\tilde{\gamma} = 0.09090$ olur.

Tüm $h > 0$ için $|\tilde{\gamma}| < 1$, $\lambda < 0$ ise yöntem $h > 0$ in tümü için kararlıdır.

Tablo 4.1, Tablo 4.2 ve Tablo 4.3' deki sonuçlar, sayısal kararlılığın veya kararsızlığın, sistemdeki doğal kararlılığı veya doğal kararsızlığı yansıtabileceği analitik problem gerçeğini göstermektedir.

Tablo 4.1: $\lambda = 12$, $f(t) = 13e^{-t} - 12$ şeklinde verilen denklemin değişen h aralıklarına göre kararlılık durumları

t	Sayısal			Gerçek
	$h = 1/5$	$h = 1/10$	$h = 1/20$	
0,20	0,7825	0,8304	0,8209	0,8187
0,40	1,0392	0,8665	0,6974	0,6703
0,60	-3,5330	3,6962	0,8723	0,5488
0,80	45,3292	50,8142	4,2989	0,4493
1,00	-493,3267	806,2103	46,1610	0,3679
1,20	5430,9282	12893,7849	545,0327	0,3012
1,40	-59736,6612	206295,9595	6480,0793	0,2466
1,60	657106,1789	3300732,0914	77080,7950	0,2019
1,80	-7228165,5888	52811710,4004	916909,2956	0,1653
2,00	79509823,4247	844987363,8982	10907066,2249	0,1353

Tablo 4.2: $\lambda = -12$, $f(t) = 13e^{-t} - 12$ şeklinde verilen denklemin değişen h aralıklarına göre kararlılık durumları

t	Sayısal			Gerçek
	$h = 1/5$	$h = 1/10$	$h = 1/20$	
0,20	-1,1620	-0,8304	-0,7840	-0,7697
0,40	-0,7713	-0,7830	-0,7766	-0,7742
0,60	-0,6479	-0,6475	-0,6472	-0,6470
0,80	-0,5290	-0,5306	-0,5308	-0,5309
1,00	-0,4332	-0,4344	-0,4347	-0,4348
1,20	-0,3547	-0,3556	-0,3559	-0,3560
1,40	-0,2904	-0,2912	-0,2914	-0,2914
1,60	-0,2377	-0,2384	-0,2386	-0,2386
1,80	-0,1946	-0,1952	-0,1953	-0,1954
2,00	-0,1594	-0,1598	-0,1599	-0,1599

Tablo 4.3: $\lambda = -12$, $f(t) = 13e^t - 12$ şeklinde verilen denklemin değişen h aralıklarına göre kararlılık durumları

t	Sayısal			Gerçek
	$h = 1/5$	$h = 1/10$	$h = 1/20$	
0,20	1,2174	1,2205	1,2212	1,2214
0,40	1,4873	1,4907	1,4915	1,4918
0,60	1,8165	1,8207	1,8218	1,8221
0,80	2,2187	2,2238	2,2251	2,2255
1,00	2,7099	2,7162	2,7178	2,7183
1,20	3,3099	3,3176	3,3195	3,3201
1,40	4,0428	4,0521	4,0544	4,0552
1,60	4,9378	4,9492	4,9521	4,9530
1,80	6,0311	6,0450	6,0485	6,0496
2,00	7,3664	7,3834	7,3876	7,3891

Daha sonra uygunsuz sayısal yöntemlerin ‘gerçek olmayan’ kararsızlığa yol açabileceğini göreceğiz. Rakamlar bazen anlaşılamayan şeyleri de netleştiriyor: sınırsız çözümler kararlı olabilir ve sınırlı çözümler kararsız olabilir. Ayrıca tablolardan elde ettiğimiz sonuç; $\lambda = 12$ olunca denkleminin kararsız olduğunu ve $\lambda = -12$ alınca kararsızlığın düzleme eğilimde olduğunu göstermektedir.

5. İNTEGRO DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAMUKLAR VE SİMPSON KURALLARI İLE KARARLILIK ANALİZİ

İçerisinde türev ve integral terimleri barındıran integral denklemlere integro-diferansiyel denklem denir. İntegro-diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için bugüne kadar çeşitli nümerik yöntemler üzerinde çalışılmıştır ve çalışmalar devam etmektedir. Son zamanlarda gecikmeli ve gecikmeli olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemler için niteliksel çözümler bulunmaya çalışılmaktadır (Baker and Keech, 1978).

İlk olarak yamuklar kuralı ve tekrarlanan yamuklar kuralını göreceğiz. Birinci adımda, çözümün arandığı aralığın parçalanışından elde edilen ilk alt aralık üzerinde yamuklar kuralı ve geri kalan alt aralıklar üzerinde Simpson 1/3 kuralı kullanılacaktır.

(4.1) denkleminde $f(t) = 1$ çekirdek fonksiyonu $K(t, s) = 1$ olarak tanımlanmıştır. Sonraki bölümde bu tür denklemleri dikdörtgen kuralı, yamuklar kuralı, Simpson kuralları, Runge-Kutta yöntemleriyle Gregory yöntemini kullanarak sayısal olarak çözülür. Bahsi geçen kurallar Tablo 4.2 ve Tablo 4.3 de gösterilen ağırlıklara sahiptir.

5.1 İntegro-diferansiyel Denklemlerin Sayısal Kararlılığı

Bu bölümde integro diferansiyel denklemin kararlılığını inceleyeceğiz. Burada;

$$u'(t) = \mu u(t) + \lambda \int_0^t u(s) ds + 1 \quad (t \geq 0);$$

denklemini ele alalım. θ -yöntemini uygulayalım. Denklemin çözümünde \tilde{u} yaklaşık çözümü (nümerik) göstermektedir.

$$\int_0^{t_n} u(s) ds \approx h \sum_{j=0}^n a_{n,j} \tilde{u}_j$$

$$\check{u}_{n+1} = \check{u}_n + h \left[(1 - \theta)(\mu\check{u}_n + \lambda \sum_{j=0}^n a_{n,j}\check{u}_j + 1) + \theta(\mu\check{u}_{n+1} + \lambda \sum_{j=0}^{n+1} a_{n+1,j}\check{u}_j + 1) \right].$$

$$\check{u}_{n+1} = \check{u}_n + h[(1 - \theta)(\mu\check{u}_n + \lambda \sum_{j=0}^n a_{n,j}\check{u}_j + 1) + \theta(\mu\check{u}_{n+1} + \lambda \sum_{j=0}^n a_{n,j}\check{u}_j + \lambda a_{n+1,n}\check{u}_n + \lambda a_{n+1,n+1}\check{u}_{n+1} + 1)] \quad (5.1.1)$$

$$a_n = 1 - \lambda h \theta (\mu + a_{n+1,n+1}) \quad \text{ve}$$

$$b_n = h[(1 - \theta)(\mu\check{u}_n + \lambda \sum_{j=0}^n a_{n,j}\check{u}_j + 1) + \theta(\lambda \sum_{j=0}^n a_{n,j}\check{u}_j + \lambda a_{n+1,n}\check{u}_n + 1)]$$

alınırsa (5.1.1) denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\check{u}_{n+1} = \frac{(\check{u}_n + b_n)}{a_n}$$

Şimdi (5.1.1) denkleminde $\theta = \frac{1}{2}$ yi seçelim.

$$\check{u}_0 = 1,$$

$$\check{u}_1 = \check{u}_0 + \frac{h}{2} \left[\mu\check{u}_0 + \mu\check{u}_1 + \frac{\lambda h}{2} (\check{u}_0 + \check{u}_1) + 2 \right]$$

$$\check{u}_2 = \check{u}_1 + \frac{h}{2} \left[\mu\check{u}_1 + \frac{\lambda h}{2} (\check{u}_0 + \check{u}_1) + \mu\check{u}_2 + \frac{\lambda h}{3} (\check{u}_0 + 4\check{u}_1 + \check{u}_2) + 2 \right]$$

$$\check{u}_3 = \check{u}_2 + \frac{h}{2} \left[\left(\mu\check{u}_2 + \frac{\lambda h}{3} (\check{u}_0 + 4\check{u}_1 + \check{u}_2) \right) + \mu\check{u}_3 + \frac{\lambda h}{2} (\check{u}_0 + \check{u}_1) + \frac{\lambda h}{3} (\check{u}_1 + 4\check{u}_2 + \check{u}_3) + 2 \right]$$

$$\check{u}_4 = \check{u}_3 + \frac{h}{2} \left[\mu\check{u}_3 + \frac{\lambda h}{2} (\check{u}_0 + \check{u}_1) + \frac{\lambda h}{3} (\check{u}_1 + 4\check{u}_2 + \check{u}_3) + \mu\check{u}_4 + \frac{\lambda h}{3} (\check{u}_0 + 4\check{u}_1 + 2\check{u}_2 + 4\check{u}_3 + \check{u}_4) + 2 \right]$$

$$\check{u}_5 = \check{u}_4 + \frac{h}{2} \left[\mu\check{u}_4 + \frac{\lambda h}{3} (\check{u}_0 + 4\check{u}_1 + 2\check{u}_2 + 4\check{u}_3 + \check{u}_4) + \mu\check{u}_5 + \frac{\lambda h}{2} (\check{u}_0 + \check{u}_1) + \frac{\lambda h}{3} (\check{u}_1 + 4\check{u}_2 + 2\check{u}_3 + 4\check{u}_4 + \check{u}_5) + 2 \right]$$

...

$$\check{u}_{r+1} = \check{u}_r + \frac{h}{2} [\mu \check{u}_r + \lambda \sum_{j=0}^r a_{r,j} \check{u}_r + \mu \check{u}_{r+1} + \lambda \sum_{j=0}^{r+1} a_{r+1,j} \check{u}_j + 2] \quad (5.1.2)$$

$$\check{u}_{r+2} = \check{u}_{r+1} + \frac{h}{2} [\mu \check{u}_{r+1} + \lambda \sum_{j=0}^{r+1} a_{r+1,j} \check{u}_j + \mu \check{u}_{r+2} + \lambda \sum_{j=0}^{r+2} a_{r+2,j} \check{u}_j + 2] \quad (5.1.3)$$

...

(5.1.2) ve (5.1.3) denklemlerini taraf tarafa çıkarıp r nin tek olduğunu varsayıp

$r = k, k + 1, k + 2, \dots$ için;

$$\check{u}_{r+2} - \check{u}_{r+1} = \check{u}_{r+1} - \check{u}_r + \frac{h}{2} \left[-\mu \check{u}_{r+1} + \mu \check{u}_{r+2} + \frac{\lambda h}{3} (\check{u}_r + 4\check{u}_{r+1} + \check{u}_{r+2}) + \mu \check{u}_{r+2} \right],$$

elde ederiz. Denklem düzenlenince;

$$\check{u}_{r+2} = \left(1 - \frac{\mu h}{2} - \frac{\lambda h^2}{6} \right) \check{u}_{r+1} + \left(2 + \frac{4\lambda h^2}{6} \right) \check{u}_r + \left(1 + \frac{\mu h}{2} - \frac{\lambda h^2}{6} \right) \check{u}_r = 0$$

elde edilir.

$$\alpha = 1 - \frac{\mu h}{2} - \frac{\lambda h^2}{6}, \quad \beta = - \left(2 + \frac{4\lambda h^2}{6} \right), \quad \gamma = 1 + \frac{\mu h}{2} - \frac{\lambda h^2}{6}$$

seçersek;

$$\alpha \check{u}_{r+2} + \beta \check{u}_{r+1} + \gamma \check{u}_r = 0 \quad (5.1.4)$$

elde edilir.

Böyle bir tekrarlama denkleminin genel çözümü ;

$$\check{u}_r = A t_1^r + B t_2^r$$

Burada A, B başlangıç denklemleri tarafından belirlenir (f_1, f_2 yi verir.) ve ayrıca $t_1 \neq t_2$ olacak şekilde t_1 ve t_2 yardımcı denklemin kökleridir.

$$\alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-\beta \mp \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

h' in güçlerindeki genişlemeyle

$$t_{1,2} = 1 \mp \varphi \frac{h}{2} + \frac{h\mu}{2} + \sigma(h^2)$$

elde edilip $\varphi = \sqrt{\mu^2 - 4\lambda}$ şeklinde tanımlanır. O zaman t_1 ve t_2 ;

$$t_{1,2} = 1 \mp \varphi \frac{h}{2} + \frac{h\mu}{2} + \sigma(h^2)$$

olarak tanımlanır.

$$\check{u}_n = At_1^n + Bt_2^n \quad \check{u}(0) = 1$$

$$A + B = 1$$

$$At_1 + Bt_2 = \check{u}_1$$

$$B = \frac{\check{u}_1 - t_1}{t_2 - t_1}, \quad A = \frac{\check{u}_1 - t_2}{t_1 - t_2}$$

buluruz.

$$\lim_{h \rightarrow 0} A = \frac{-\mu + \varphi}{2\varphi}$$

ve

$$\lim_{h \rightarrow 0} B = 1 - A = \frac{1 + \mu}{2 + 2\varphi}$$

Sonuç olarak; $\mu = -1$, $\lambda = 1$ seçersek,

$$\lim_{h \rightarrow 0} A = \frac{\sqrt{5}+5}{10} \text{ ve } \lim_{h \rightarrow 0} B = 0.$$

Örnek 5.1.1: Linear integro diferansiyel denklemi ele alalım.

$$u'(t) = \lambda u(t) + \lambda \int_0^t e^{-(t-s)} u(s) ds \quad u(0) = 1; \quad (5.1.5)$$

Laplace dönüşümünden (5.1.5) denkleminin çözümünü dönüştürürsek;

$$u(t) = \frac{-1}{\lambda-1} + \frac{\lambda}{\lambda-1} e^{(\lambda-1)t} \text{ için } \lambda \neq 1 \quad (5.1.6)$$

(5.1.6) denkleminde $\lambda \rightarrow 1$ sınırlayıcı durumdur. (5.1.6) denkleminde $\lambda = 1 + \varepsilon$ konularak;

$$u(t) = \frac{-1+(1+\varepsilon)e^{\varepsilon t}}{\varepsilon}$$

elde edilir. $\varepsilon \rightarrow 0$ yaklaştığında;

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{\varepsilon t} + t(1+\varepsilon)e^{\varepsilon t}}{1} = 1 + t \text{ bulunur.}$$

5.2 İntegro-diferansiyel Denklemlerde LMM (Lineer Çok Basamaklı Multi Sistem) Kuralı

LMM kuralında, (5.1.5) denkleminin sayısal çözümü için kararlılık analizleri vereceğiz. ODE (Adi diferansiyel denklem)' lerde IVP (Başlangıç değer problemi)' ler için sayısal yöntemlerin kararlılık bölgelerinin belirlenmesinde, yöntemi basit bir test denklemine uygulayarak ilerleyebiliriz. Diyelim ki $u'(t) = \lambda u(t)$ olsun. Burada λ , gerçek veya kompleks sayı olabilir. Bu nedenle $\rho(r) = \sum_{i=0}^k \alpha_i r^{k-i}$ ve $\sigma(r) = \sum_{i=0}^k \beta_i r^{k-i}$ polinomları ile ilişkili (Lambert 1991) doğrusal çok adımlı yöntemi, uygun başlangıç değerleri verildiğinde, yukarıdaki denklem için; $\check{u}_j \approx u(t_0 + jh)$ belirleyelim.

$$\sum_{i=0}^k (\alpha_i - \lambda h \beta_i) \check{u}_{n-i} = 0 \quad n \geq k,$$

formüllerini verir. $\rho(r) - \lambda h \sigma(r)$ sıfırları açısından olağan kararlılık kriteri,

$(r^k + \lambda h \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_i r^{k-i})$ sıfırlarının $\gamma_i = -(\alpha_i - \lambda h \beta_i) / (\alpha_k - \lambda h \beta_k)$, $\alpha_k - \lambda h \beta_k \neq 0$ olduğunda birim diskin içinde olmasıdır. Kararlılık kriterinin bu ifadesi, integral denklem yöntemlerine, özellikle de integral diferansiyel denklemlere uygulanabilecek benzer bir analiz önerir.

(5.1.5) lineer test denklemini μ ve λ gerçek sabitleri ile değişen değerler kabul etmemize izin verecek şekilde ele alacağız. Böyle bir denklem biraz kısıtlayıcıdır, ancak bu basit durum için bir kararlılık analizi, daha genel integro diferansiyel denklem hakkında fikir verir.

(5.1.5) test denkleminin kararlılık bölgelerinin grafiklerini verebiliriz. Yöntemin kararlılık özellikleri genellikle asimptotik olarak kararlı çözümlere sahip denklemler için incelenir. $u'(t) = \lambda u(t)$ test denkleminde, $u(0)$ verilen ODE lerde bunu $Re(\lambda) < 0$ isteyerek ve böylece ODE nin asimptotik kararlılığından sağlarız. İntegro diferansiyel denklemler için $u(t)$ çözümünün $t \rightarrow \infty$ olarak μ ve λ cinsinden sifira eğilim göstermesi için karşılık gelen gereksinimi buluyoruz. Test denkleminin $u(t)$ çözümü, ancak ve ancak $t \rightarrow \infty$ olarak sıfır olma eğilimindedir. $Re(\check{\lambda}_i) < 0$, $i = 0,1$ burada $(\check{\lambda}_i)$ test denkleminimizin özdeğerleridir. Ayrıca $\mu < 0$ ve $\lambda < 0$.

(test denklemini $u(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$ çözümüyle $u''(t) = \mu u'(t) + \lambda u(t)$ olarak yazarsak, burada r_1 ve r_2 , $r^2 - \mu r - \lambda = 0$ denkleminin kökleridir.)

Brunner ve Lambert (1974) tarafından yapılan çalışmalar ardından konu ile ilgili araştırmalar yapılmıştır.

Test denklemi için çok adımlı doğrusal yöntemi (LMM) ele alalım;

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i \check{u}_{n-i} = h \sum_{i=0}^k \beta_i F(t_{n-i}, \check{u}_{n-i}, \check{z}_{n-i}) \quad (5.1.7)$$

Dikdörtgenler kuralından;

$$\check{z}_n = h \sum_{j=0}^{n-1} w_{n,j} K(t_n, t_j, \check{u}_j)$$

ile birleřtirilir.

Tanım 5.2.1.

h, μ, λ nın verilen değerleri için,

$$\sum_{i=0}^k \left[(\alpha_i - h\mu\beta_i)\check{u}_{n-i} - \lambda h^2 \beta_i \sum_{j=0}^{n-i} w_{n,j} \check{u}_j \right] = 0$$

Denkleminin tüm çözümlerinin $n \rightarrow \infty$ olarak sıfıra meyilli olması durumunda, LMM (standart denklemin) kesinlikle kararlı olduğunu gösterir.

Tanım 5.2.2.

Standart denklemin mutlak kararlılığının R bölgesi,

$$R = \{(\mu h, \lambda h^2): \text{yöntem kesinlikle kararlıdır.}\}$$

Tanım 5.2.3.

Test denklemi için, mutlak kararlılığa sahip olan R bölgesi, $\mu h < 0$ ve $\lambda h^2 < 0$, çeyrek düzlemini içeriyorsa, (5.1.7) denklemi için kararlıdır.

Brunner ve Lambert (1974) tarafından verilen analizi takiben test denkleminin kararlılık polinomu bulunabilir. Bu analiz, kareleme kurallarının Gregory türünde olduğu durumları kapsar. Test denklemini test etmek için LMM (lineer çok basamaklı metot) yöntemini (5.1.7) denklemine uygularken elde ettiğimiz sonuç;

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i \check{u}_{n-i} = h \sum_{i=0}^k \beta_i (\mu \check{u}_{n-i} + \lambda \check{z}_{n-i}).$$

$[(\rho, \sigma); (\rho^*, \sigma^*)]$ nın mutlak kararlılığının R bölgesi, kararlılık polinomu

$$\pi(r, \mu h, \lambda h^2) = \rho^*(r)[\rho(r) - \mu h \sigma(r)] - \lambda h^2 \sigma^*(r) \sigma(r) \quad (5.1.8)$$

denkleminin tüm sıfırlarının birim diskin içinde yer aldığı noktalar $(\mu h, \lambda h^2)$ kümesidir.

Örnek 5.2.1: Brunner-Lambert (1974), $k = m = 1$ durumu için birkaç yöntemin kararlılık bölgelerini çizmiştir. Kararlılık polinomlarını elde ettik ve aşağıdaki yöntemler için kararlılık bölgelerini hesapladık.

(4.1) denkleminin yamuk kuralının ($k = m = 1$) tekrarlanan uygulamasıyla birleştirilmiş Euler yöntemi ve test denkleminin uygulanan Euler kuralı ile

$$\check{u}_{n+1} - \check{u}_n = \mu h \check{u}_n + \lambda h \check{z}_n$$

orada;

$$\rho(r) = r - 1, \quad \sigma(r) = 1 \text{ dir.}$$

$m=1$ ve ağırlıkları $w_{1,0} = w_{1,1} = 1/2$ olan tekrarlanan yamuk kuralı için

$$\check{z}_{n+1} - \check{z}_n = \frac{h}{2} [\check{u}_{n+1} + \check{u}_n] \text{ bildiğimizden;}$$

$$\rho^*(r) = r - 1, \quad \sigma^*(r) = \frac{1}{2} [1 + r]$$

elde edilir. (5.1.8) denklemindeki $\rho, \sigma, \rho^*, \sigma^*$ yerine şimdi koyarak kararlılık polinomu elde ederiz.

$$\pi(r, \mu h, \lambda h^2) = r^2 - \left(2 + \mu h + \frac{\lambda h^2}{2}\right) r + \left(1 + \mu h - \frac{\lambda h^2}{2}\right) = 0 \quad (5.1.9)$$

$$\check{z}_{n+m} - \check{z}_n = h \sum_{j=0}^m w_{m,j} \check{u}_{n,j}$$

ve

$$\rho^*(r) = \begin{cases} r^m - 1 & \text{metot} \\ r^m - r^{m-1} & \text{Gregory metot} \end{cases}$$

$$\rho^*(r) = h \sum_{j=0}^m w_{m,j} r^j$$

Yukarıdaki ikinci dereceden polinomun yani (5.1.9) denkleminin kökleri r_1 ve r_2 dir. Yöntemin mutlak kararlılık bölgesi, Şekil 3.6 de taralı bölgede belirtildiği gibi $|r_1 r_2| < 1$ olarak bulunur. Euler kuralının yamuk kuralı ile birleştirilmiş kararlılık bölgesi Şekil 3.7 de verilmiştir.

İntegro diferansiyel denklem için A kararlı yöntemin en belirgin örneği, (ρ, σ) ve (ρ^*, σ^*) nin her ikisi de yamuk kuralı olduğunda ortaya çıkar. (ρ, σ) ve (ρ^*, σ^*) nin bireysel özelliklerinin $[(\rho, \sigma); (\rho^*, \sigma^*)]$ nin kararlılık özellikleri üzerindeki etkisi,

$k = m = 1$ durumunda, mutlak değer R bölgesi çizilerek gösterilebilir. Bazı kombinasyonlar için $[(\rho, \sigma); (\rho^*, \sigma^*)]$ kararlılığı

$$(\rho, \sigma) = \begin{cases} \rho = r - 1, \sigma = 1 & \text{euler kuralı} \\ \rho = r - 1, \sigma = \frac{1}{2}(r + 1) & \text{yamuk kuralı} \\ \rho = r - 1, \sigma = r & \text{geriye euler kuralı} \end{cases}$$

$$\check{z}_n = \begin{cases} \text{Euler kuralının tekrarlanan uygulaması} \\ \text{yamuk kuralının tekrarlanan uygulaması} \\ \text{geri Euler kuralının tekrarlanan uygulaması} \end{cases}$$

Yamuk kuralının tekrarlanan uygulamasının, ikinci dereceden Gregory formülünün bir uygulamasına eşdeğer olduğuna dikkat edelim. Sonuçlar Şekil 3.6 de özetlenmiştir.

5.3 Boundary – Locus Yönteminin Uygulamaları

Son olarak ne bir polinomun köklerinin hesaplanmasını ne de eş zamanlı eşitsizliklerin çözülmesini gerektirmeyen mutlak kararlılık aralıklarını bulmak için Boundary-Locus yöntemini kullanacağız. Kararlılık polinomunun r_i kökleri genel olarak karmaşık sayılardır; şimdilik $(\mu h, \lambda h^2)$ yi de bir karmaşık sayı olarak kabul edelim. Bir mutlak kararlılık bölgesini karmaşık $(\mu h, \lambda h^2)$ düzleminin bölgesi olarak tanımlarız, öyle ki $\pi(r, \mu h, \lambda h^2)$ nin sıfırları $(\mu h, \lambda h^2)$ bölgede olduğunda birim çember içinde bulunur. R bölgesinin sınırına ∂R diyelim.

$\pi(r, \mu h, \lambda h^2) = 0$ denkleminin kökleri $(\mu h, \lambda h^2)$ nin sürekli fonksiyonları olduğundan

$\pi(r, \mu h, \lambda h^2) = 0$ denkleminin köklerinden biri ∂R üzerinde uzanacaktır. Birim çemberin sınırında, yani; $\pi(e^{i\theta}, \mu h, \lambda h^2) = \rho(e^{i\theta}) - (\mu h, \lambda h^2)\sigma(e^{i\theta}) = 0$ olduğunda ∂R konumu karmaşık düzlem olarak $(\mu h, \lambda h^2)$ ile çizilebileceğimiz gibi

$$(\mu h(\theta), \lambda h^2(\theta)) = \rho(e^{i\theta}) / \sigma(e^{i\theta}) \text{ tarafından da çizilebilir.}$$

Reel olarak ele alınan $(\mu h, \lambda h^2)$ için, mutlak kararlılık aralığının bitiş noktaları, ∂R nin reel eksenini kestiği noktalar tarafından verilecektir.

Sınır konumları yöntemi, ikinci tür Volterra integral denklemi, DVIDE (Delay-Volterra integral denklemleri) ler gibi diğer fonksiyonel denklemler için geçerlidir.

Terminolojide, genellikle Boundary-Locus yöntemi olarak adlandırılan sayısal yöntemler önce gelir. (Lambert (1973)). Bu teknik, sırasıyla temel fonksiyonel denklemlerin ve bu denklemleri uygulayan lineer sayısal yöntemlerin kararlılığının araştırılmasına izin verir.

Tanım 5.3.1. Bir LMM veya kestirip-düzeltilici yöntemin, tüm $(r, \mu h, \lambda h^2)$ için, yöntemle ilişkili kararlılık polinomunun $\pi(r, \mu h, \lambda h^2)$ tüm kökleri,

$$|r_i| < 1, \quad i = 1, 2, 3, \dots, k \quad k \in Z^+ \text{ şeklindedir.}$$

Örnek 5.3.1: (5.1.5) denkleminde integral kısmı için Euler yöntemi ve diferansiyel denklem kısmı için yine Euler yönteminin mutlak kararlılık aralığını belirlemek için Boundary-Locus yöntemini kullanırsak,

$$p(r) = r - 1, \quad p(r) = 1$$

buluruz. Bu yöntem için;

$$\pi(r, \mu h, \lambda h^2) = r^2 - (2 + \mu h)r + (1 + \mu h - \lambda h^2) = 0.$$

$$\gamma_0 = 1, \gamma_1 = -2 - \mu h \quad \text{ve} \quad \gamma_2 = 1 + \mu h - \lambda h^2$$

seçersek:

$$\gamma_0 r^2 + \gamma_1 r + \gamma_2 = 0 \text{ olur.}$$

$$r = e^{i\theta}$$

alırsak

$$\gamma_0 e^{2i\theta} + \gamma_1 e^{i\theta} + \gamma_2 = 0$$

elde ederiz.

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

yerine yazılırsa

$$\gamma_0 \cos(2\theta) + \gamma_1 \cos(\theta) + \gamma_2 = 0, \quad (5.1)$$

$$\gamma_0 \sin(2\theta) + \gamma_1 \sin(\theta) = 0 \quad (5.2)$$

denklemlerini elde ederiz.

(5.2) denkleminde ya $\sin(\theta) = 0$ ya da $\cos(\theta) = -\frac{\gamma_1}{2\gamma_0}$.

(5.1) denklemindeki $\cos(\theta)$ yerine $-\frac{\gamma_1}{2\gamma_0}$ yı değiştirirsek

$$\gamma_0 = 0 \text{ veya } \gamma_0 = \gamma_2 \text{ buluruz} \quad (5.3)$$

$$\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 = 0 \text{ olur.} \quad (5.4)$$

Tablo 4.3 de Boundary-Locus yöntemi için (5.3) ve (5.4) denklemlerini kullandık.

Şimdi aşağıdaki gibi doğrusal olmayan diferansiyel denklemi inceleyelim;

$$u'(t) = u(t) \left[\alpha - \beta u(t) - \gamma \int_{p(t)}^t k(t-s)u(s)ds \right], \quad t \geq 0,$$

($p(t) = 0$ veya $p(t) = -\infty$ ya da $p(t) = t - \tau$), eşleşen başlangıç koşullarıyla ($p(t)$ bağlı olarak); bir çözümün nitelikleri hakkında çıkarımlar yapmamızı sağlamak için $\alpha, \beta, \gamma, k(t-s)$ üzerinde kısıtlamalara ihtiyacımız vardır.

Aşağıdaki örnekler kısmında şimdiye kadar vermiş olduğumuz teorik bilgilerin bir uygulamasında test denklemi olarak

$$u'(t) = \mu u(t) + \lambda \int_0^t u(s)ds$$
$$u(0) = u_0 \quad (5.5)$$

Volterra integro-diferansiyel denklemi ele alınacaktır.

Başlangıç koşulu ile tanımlı bir adi diferansiyel denklemin ($u'(x) = f(x, u)$, $u(0)$) ileri Euler metodu ile nümerik çözümlemesi $u_{n+1} - u_n = h f(x_n, u_n)$ ve bir integralin soldan dikdörtgen yöntemi (ileri Euler) $\int_a^b u(s)ds \cong h \sum_{j=0}^{n-1} u_j$ uygun bir biçimde kullanılarak kararlılık bölgeleri ayrıntılı olarak aşağıdaki örneklerde incelenecektir.

Örnek 5.3.2: İlk olarak

$$u'(t) = \mu u(t) + \lambda \int_0^t u(s)ds \quad (t \geq 0);$$

integro-diferansiyel denkleminde Boundary-Locus yöntemi kullanarak integral kısmına ileri Euler ve türev kısmına ileri Euler uygulanırsa;

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = \lambda u_n + h \eta \sum_{j=0}^n u_j$$

ifadesi elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$u_{n+1} - u_n = \lambda h u_n + \eta h^2 \sum_{j=0}^n u_j$$

$$u_{n+1} - u_n = \lambda h u_n + \eta h^2 [u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n] \quad (5.6)$$

$$u_n - u_{n-1} = \lambda h u_{n-1} + \eta h^2 \sum_{j=0}^{n-1} u_j$$

$$u_n - u_{n-1} = \lambda h u_{n-1} + \eta h^2 [u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}] \quad (5.7)$$

Yukarıda verilen (5.6) ifadesinde (5.7) çıkarılırsa;

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = \lambda h(u_n - u_{n-1}) + \eta h^2 u_n$$

$$u_{n+1} + u_n(-2 - \lambda h - \eta h^2) + u_{n-1}(1 + \lambda h) = 0$$

$$\gamma_0 = 1$$

$$\gamma_1 = -2 - \lambda h - \eta h^2$$

$$\gamma_2 = 1 + \lambda h$$

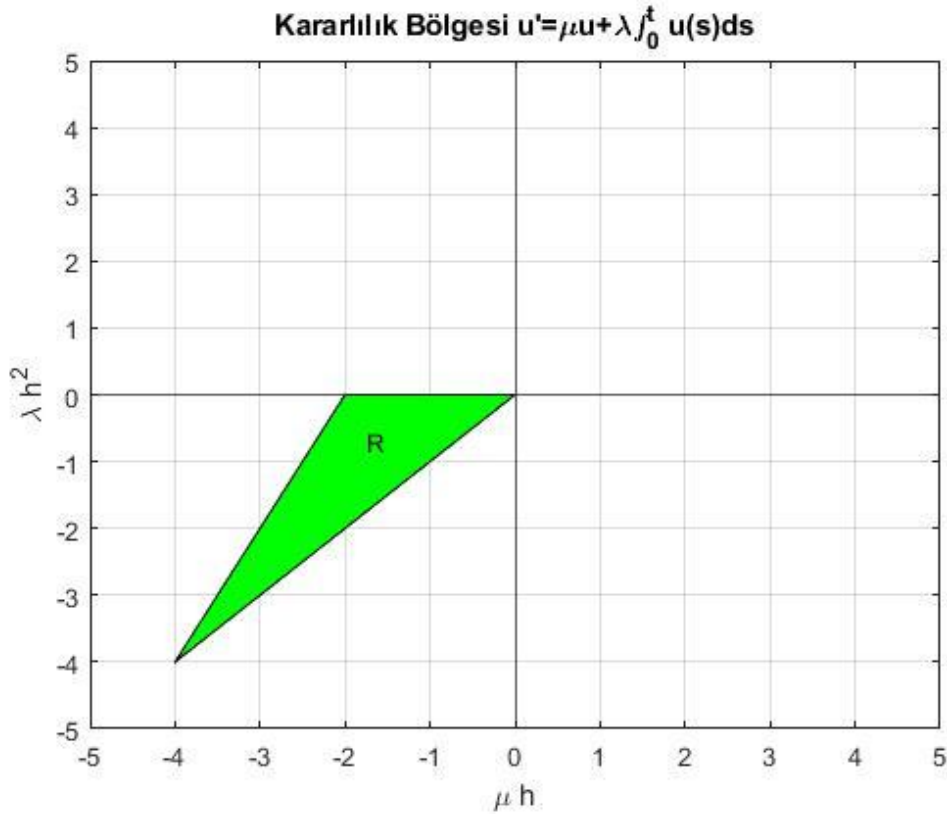
olmak üzere;

$$1) \gamma_0 \neq 0 \quad 2) \gamma_0 = \gamma_2 \quad 3) \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 = 0 \quad 4) \gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_2 = 0$$

şartlarını sağlattırdıktan sonra elde edilen grafik Şekil 5.1 de verildiği gibidir.

Başlangıç noktası olarak (5.5) denkleminde başlatıp otomatik olarak toplam sembolü $n - 1$ e giderken gerekli düzenlemelerle (5.2) eşitliği elde edilir. (5.1) ve (5.2) ortak parantez yardımıyla γ_0 katsayıları yukarıdaki ifade ile 1 alındığında (5.1) denkleminin γ katsayıları aşağıdaki şekilde alınır.

$\lambda h^2 = \mu h$, $\lambda h^2 = 0$, ayrıca $-2 \lambda h^2 + \mu h = 4$ şeklinde bir doğru elde edilir. İçinde kalan bölgenin bu bölge tarafından ortak çözümü istenilen kararlılık bölgesi için Şekil 5.1'de verilmiştir.



Şekil 5.1:Kararlılık bölgesi için uygulanan ileri Euler ileri Euler metodu

Örnek 5.3.3: Boundary-Locus yöntemi ile ilgili örnek verelim.

$$u'(t) = \mu u(t) + \lambda \int_0^t u(s) ds \quad (t \geq 0);$$

denklemini ele alıp integral kısmına yamuklar, türev kısmına ileri Euler uygulanırsa;

$$u_{n+1} - u_n = \lambda h u_n + \eta h^2 \sum_{j=0}^n u_j$$

$$u_{n+1} - u_n = \lambda h u_n + \eta h^2 [u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n] \quad (5.8)$$

$$u_n - u_{n-1} = \lambda h u_{n-1} + \eta h^2 \sum_{j=0}^{n-1} u_j$$

$$u_n - u_{n-1} = \lambda h u_{n-1} + \eta h^2 [u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}] \quad (5.9)$$

(5.8) den (5.9) çıkarılırsa;

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = \lambda h(u_n - u_{n-1}) + \eta h^2 u_n$$

$$u_{n+1} + u_n(-2 - \lambda h - \eta h^2) + u_{n-1}(1 + \lambda h) = 0$$

$$\gamma_0 = 1$$

$$\gamma_1 = -2 - \lambda h - \eta h^2$$

$$\gamma_2 = 1 + \lambda h$$

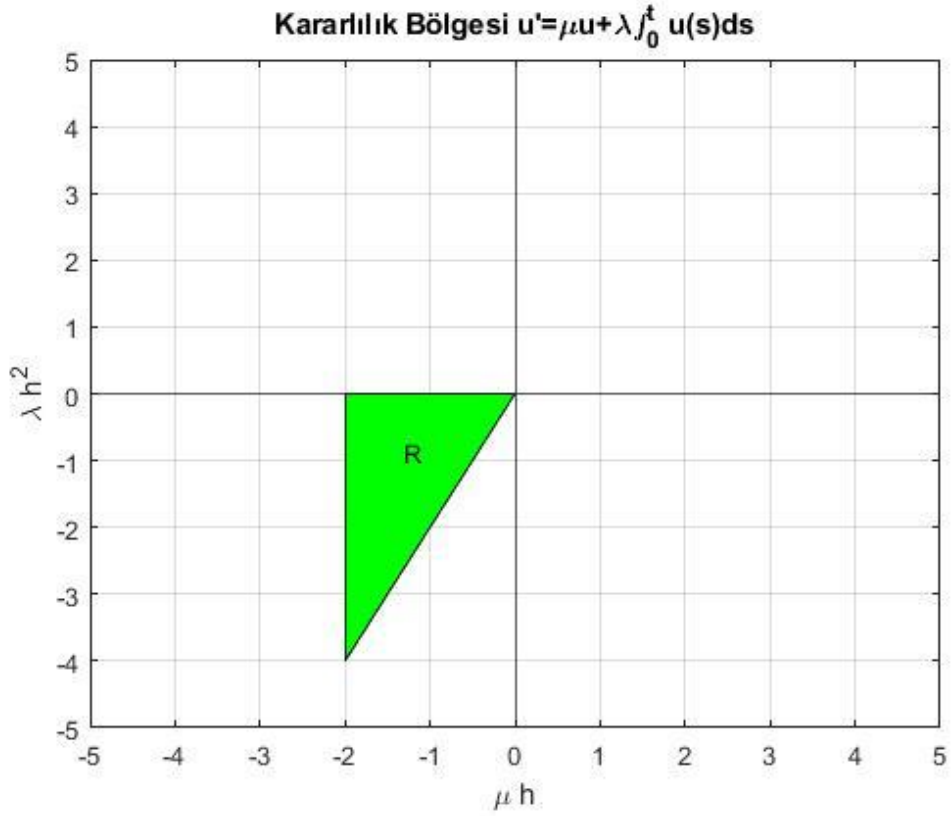
olmak üzere;

$$1) \gamma_0 \neq 0 \quad 2) \gamma_0 = \gamma_2 \quad 3) \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 = 0 \quad 4) \gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_2 = 0$$

şartlarını sağlattırdıktan sonra elde edilen grafik Şekil 5.2 de verildiği gibidir.

Bu kez (5.5) denkleminde başlatıp otomatik olarak toplam sembolü $n - 1$ e gider gerekli düzenlemelerle (5.2) denklemini elde edilir. (5.1) ve (5.2) denklemleri ortak parantez yardımıyla γ_0 katsayıları yukarıdaki ifade ile 1 alındığında (5.1) denkleminin γ katsayıları aşağıdaki şekilde alınır.

$\lambda h^2 = 0$, $\lambda h^2 = -2$, ayrıca $\mu h = 2\lambda h^2$ den geçen bir doğru elde edilir. İçinde kalan bölgenin bu bölge tarafından ortak çözümü istenilen kararlılık bölgesi için Şekil 5.2 de verilmiştir.



Şekil 5.2: Kararlılık bölgesi için uygulanan ileri Euler yamuk metodu

Örnek 5.3.4: Boundary-Locus yöntemi ile ilgili örnek verelim.

$$u'(t) = \mu u(t) + \lambda \int_0^t u(s) ds \quad (t \geq 0);$$

denklemini ele alıp integral kısmına ileri Euler, türev kısmına geri Euler uygulanırsa;

$$u_{n+1} - u_n = \lambda h u_n + \eta h^2 \sum_{j=0}^n u_j$$

$$u_{n+1} - u_n = \lambda h u_n + \eta h^2 [u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n] \quad (5.10)$$

$$u_n - u_{n-1} = \lambda h u_{n-1} + \eta h^2 \sum_{j=0}^{n-1} u_j$$

$$u_n - u_{n-1} = \lambda h u_{n-1} + \eta h^2 [u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}] \quad (5.11)$$

(5.10) den (5.11) çıkarılırsa;

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = \lambda h (u_n - u_{n-1}) + \eta h^2 u_n$$

$$u_{n+1} + u_n (-2 - \lambda h - \eta h^2) + u_{n-1} (1 + \lambda h) = 0$$

$$\gamma_0 = 1$$

$$\gamma_1 = -2 - \lambda h - \eta h^2$$

$$\gamma_2 = 1 + \lambda h$$

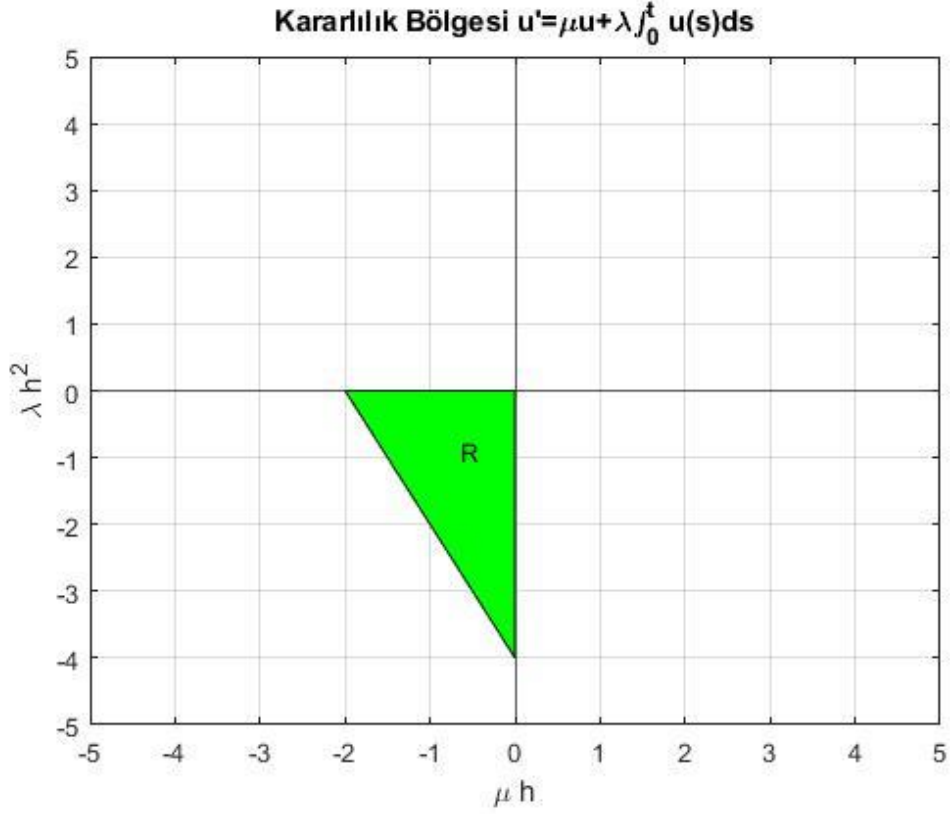
olmak üzere;

$$1) \gamma_0 \neq 0 \quad 2) \gamma_0 = \gamma_2 \quad 3) \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 = 0 \quad 4) \gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_2 = 0$$

şartlarını sağlattırdıktan sonra elde edilen grafik Şekil 5.3 de verildiği gibidir.

Bu kez (5.5) denkleminde başlatıp otomatik olarak toplam sembolü $n - 1$ e gider gerekli düzenlemelerle (5.2) denklemi ile elde edilir. (5.1) ve (5.2) denklemleri ortak parantez yardımıyla γ_0 katsayıları yukarıdaki ifade ile 1 alındığında (5.1) denkleminin γ katsayıları aşağıdaki şekilde alınır.

$\mu h = 0$, $\lambda h^2 = 0$, ayrıca $2\lambda h^2 + \mu h = -4$ den geçen bir doğru elde edilir. İçinde kalan bölgenin bu bölge tarafından ortak çözümü istenilen kararlılık bölgesi için Şekil 5.3 de verilmiştir.



Şekil 5.3: Kararlılık bölgesi için uygulanan ileri Euler geri Euler metodu

Örnek 5.3.5: Boundary-Locus yöntemi ile ilgili örnek verelim.

$$u'(t) = \mu u(t) + \lambda \int_0^t u(s) ds \quad (t \geq 0);$$

denklemini ele alıp integral kısmına ileri Euler, türev kısmına yamuklar uygulanırsa;

$$u_{n+1} - u_n = \lambda h u_n + \eta h^2 \sum_{j=0}^n u_j$$

$$u_{n+1} - u_n = \lambda h u_n + \eta h^2 [u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n] \quad (5.12)$$

$$u_n - u_{n-1} = \lambda h u_{n-1} + \eta h^2 \sum_{j=0}^{n-1} u_j$$

$$u_n - y_{n-1} = \lambda h u_{n-1} + \eta h^2 [u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}] \quad (5.13)$$

(5.12) den (5.13) çıkarılırsa;

$$\begin{aligned}u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} &= \lambda h(u_n - u_{n-1}) + \eta h^2 u_n \\u_{n+1} + u_n(-2 - \lambda h - \eta h^2) + u_{n-1}(1 + \lambda h) &= 0\end{aligned}$$

$$\gamma_0 = 1$$

$$\gamma_1 = -2 - \lambda h - \eta h^2$$

$$\gamma_2 = 1 + \lambda h$$

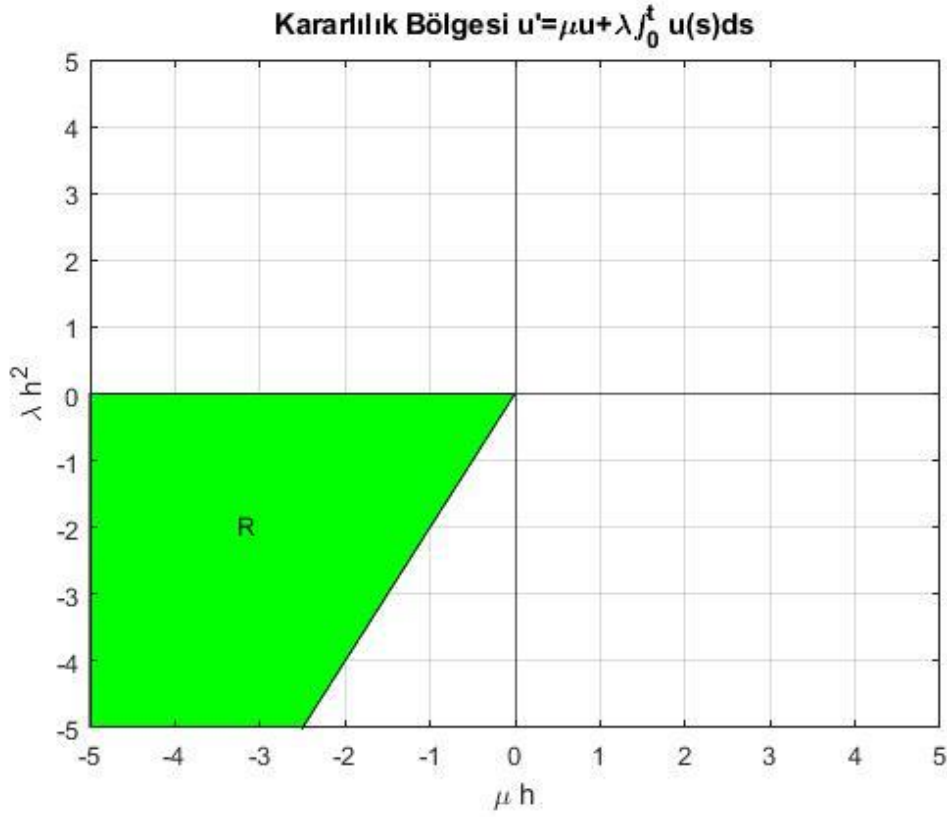
olmak üzere;

$$1) \gamma_0 \neq 0 \quad 2) \gamma_0 = \gamma_2 \quad 3) \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 = 0 \quad 4) \gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_2 = 0$$

şartlarını sağlattırdıktan sonra elde edilen grafik Şekil 5.4 ile gösterildiği gibidir.

Bu kez (5.5) denkleminde başlatıp otomatik olarak toplam sembolü $n - 1$ e gider gerekli düzenlemelerle (5.2) denklemini elde edilir. (5.1) ve (5.2) denklemini ortak parantez yardımıyla γ_0 katsayıları yukarıdaki ifade ile 1 alındığında (5.1) denkleminin γ katsayıları aşağıdaki şekilde alınır.

$2\lambda h^2 = \mu h$, $\lambda h^2 = 0$ elde edilir. İçinde kalan bölgenin bu bölge tarafından ortak çözümü istenilen kararlılık bölgesi için Şekil 5.4 de verilmiştir.



Şekil 5.4: Kararlılık bölgesi için uygulanan yamuklar ve ileri Euler metodu

Örnek 5.3.6: Boundary-Locus yöntemi ile ilgili örnek verelim.

$$u'(t) = \mu u(t) + \lambda \int_0^t u(s) ds \quad (t \geq 0);$$

denklemini ele alıp integral kısmına yamuklar, türev kısmına yamuklar uygulanırsa;

$$u_{n+1} - u_n = \lambda h u_n + \eta h^2 \sum_{j=0}^n u_j$$

$$u_{n+1} - u_n = \lambda h u_n + \eta h^2 [u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n] \quad (5.14)$$

$$u_n - u_{n-1} = \lambda h u_{n-1} + \eta h^2 \sum_{j=0}^{n-1} u_j$$

$$u_n - u_{n-1} = \lambda h u_{n-1} + \eta h^2 [u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}] \quad (5.15)$$

(5.14) den (5.15) çıkarılırsa;

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = \lambda h (u_n - u_{n-1}) + \eta h^2 u_n$$

$$u_{n+1} + u_n (-2 - \lambda h - \eta h^2) + u_{n-1} (1 + \lambda h) = 0$$

$$\gamma_0 = 1$$

$$\gamma_1 = -2 - \lambda h - \eta h^2$$

$$\gamma_2 = 1 + \lambda h$$

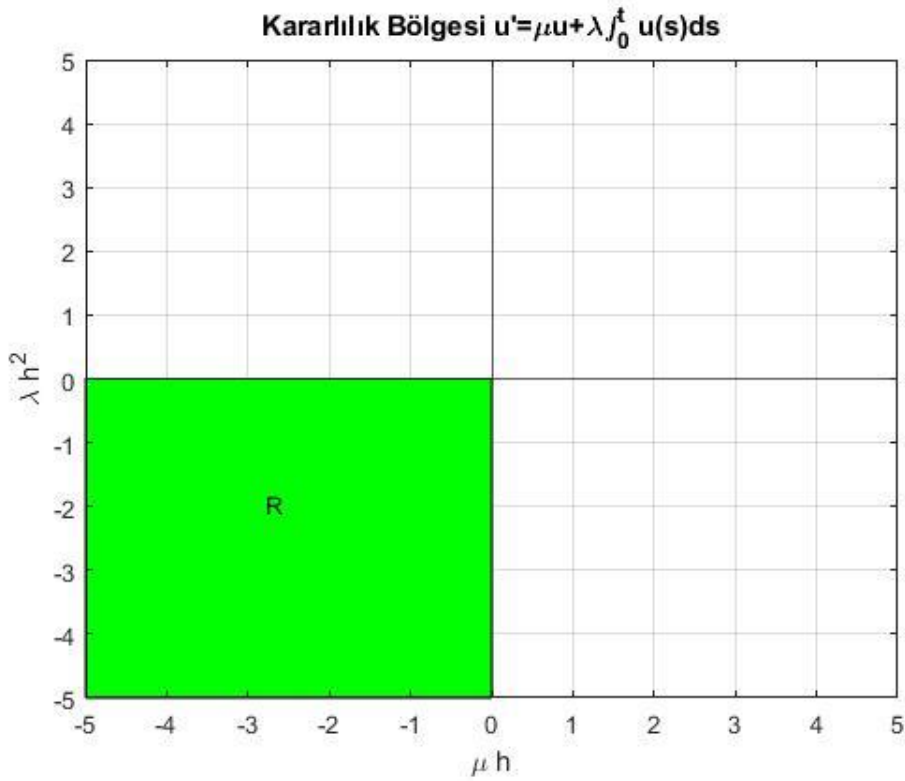
olmak üzere;

$$1) \gamma_0 \neq 0 \quad 2) \gamma_0 = \gamma_2 \quad 3) \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 = 0 \quad 4) \gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_2 = 0$$

şartlarını sağlattırdıktan sonra elde edilen grafik Şekil 5.5 de gösterildiği gibidir.

Bu kez (5.5) denkleminde başlatıp otomatik olarak toplam sembolü $n - 1$ e gider gerekli düzenlemelerle (5.2) denklemini elde edilir. (5.1) ve (5.2) denklemini ortak parantez yardımıyla γ_0 katsayıları yukarıdaki ifade ile 1 alındığında (5.1) denkleminin γ katsayıları aşağıdaki şekilde alınır.

$\mu h = 0$, $\lambda h^2 = 0$ elde edilir. İçinde kalan bölgenin bu bölge tarafından ortak çözümü istenilen kararlılık bölgesi için Şekil 5.5 de verilmiştir.



Şekil 5.5: Kararlılık bölgesi için uygulanan yamuklar ve yamuklar metodu

Örnek 5.3.7: Boundary-Locus yöntemi ile ilgili örnek verelim.

$$u'(t) = \mu u(t) + \lambda \int_0^t u(s) ds \quad (t \geq 0);$$

denklemini ele alıp integral kısmına geri Euler, türev kısmına ileri Euler uygulanırsa;

$$u_{n+1} - u_n = \lambda h u_n + \eta h^2 \sum_{j=0}^n u_j$$

$$u_{n+1} - u_n = \lambda h u_n + \eta h^2 [u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n] \quad (5.16)$$

$$u_n - u_{n-1} = \lambda h u_{n-1} + \eta h^2 \sum_{j=0}^{n-1} u_j$$

$$u_n - u_{n-1} = \lambda h u_{n-1} + \eta h^2 [u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}] \quad (5.17)$$

(5.16) den (5.17) çıkarılırsa;

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = \lambda h (u_n - u_{n-1}) + \eta h^2 u_n$$

$$u_{n+1} + u_n (-2 - \lambda h - \eta h^2) + u_{n-1} (1 + \lambda h) = 0$$

$$\gamma_0 = 1$$

$$\gamma_1 = -2 - \lambda h - \eta h^2$$

$$\gamma_2 = 1 + \lambda h$$

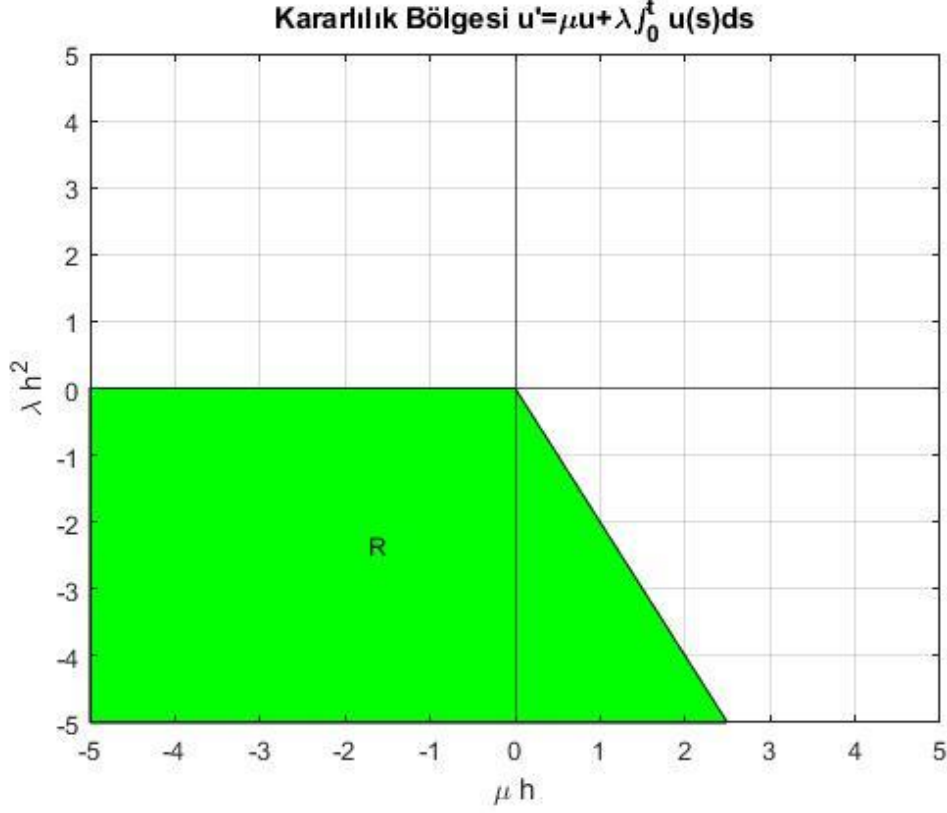
olmak üzere;

$$1) \gamma_0 \neq 0 \quad 2) \gamma_0 = \gamma_2 \quad 3) \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 = 0 \quad 4) \gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_2 = 0$$

şartlarını sağlattırdıktan sonra elde edilen grafik Şekil 5.6 da gösterildiği gibidir.

Bu kez (5.5) denkleminde başlatıp otomatik olarak toplam sembolü $n - 1$ e gider gerekli düzenlemelerle (5.2) denklemi ile elde edilir. (5.1) ve (5.2) denklemi ortak parantez yardımıyla γ_0 katsayıları yukarıdaki ifade ile 1 alındığında (5.1) denkleminin γ katsayıları aşağıdaki şekilde alınır.

$\mu h = 0$, $\lambda h^2 = 0$, ayrıca $2\lambda h^2 - \mu h = 4$ gibi bir doğru denklemi elde edilir. İçinde kalan bölgenin bu bölge tarafından ortak çözümü istenilen kararlılık bölgesi için Şekil 5.6 de verilmiştir.



Şekil 5.6: Kararlılık bölgesi için uygulanan ileri Euler ve geri Euler metodu

Örnek 5.3.8: Boundary-Locus yöntemi ile ilgili örnek verelim.

$$u'(t) = \mu u(t) + \lambda \int_0^t u(s) ds \quad (t \geq 0);$$

denklemini ele alıp integral kısmına yamuklar, türev kısmına geri Euler uygulanırsa;

$$u_{n+1} - u_n = \lambda h u_n + \eta h^2 \sum_{j=0}^n u_j$$

$$u_{n+1} - u_n = \lambda h u_n + \eta h^2 [u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n] \quad (5.18)$$

$$u_n - u_{n-1} = \lambda h u_{n-1} + \eta h^2 \sum_{j=0}^{n-1} u_j$$

$$u_n - u_{n-1} = \lambda h u_{n-1} + \eta h^2 [u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}] \quad (5.19)$$

(5.18) den (5.19) çıkarılırsa;

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = \lambda h(u_n - u_{n-1}) + \eta h^2 u_n$$

$$u_{n+1} + u_n(-2 - \lambda h - \eta h^2) + u_{n-1}(1 + \lambda h) = 0$$

$$\gamma_0 = 1$$

$$\gamma_1 = -2 - \lambda h - \eta h^2$$

$$\gamma_2 = 1 + \lambda h$$

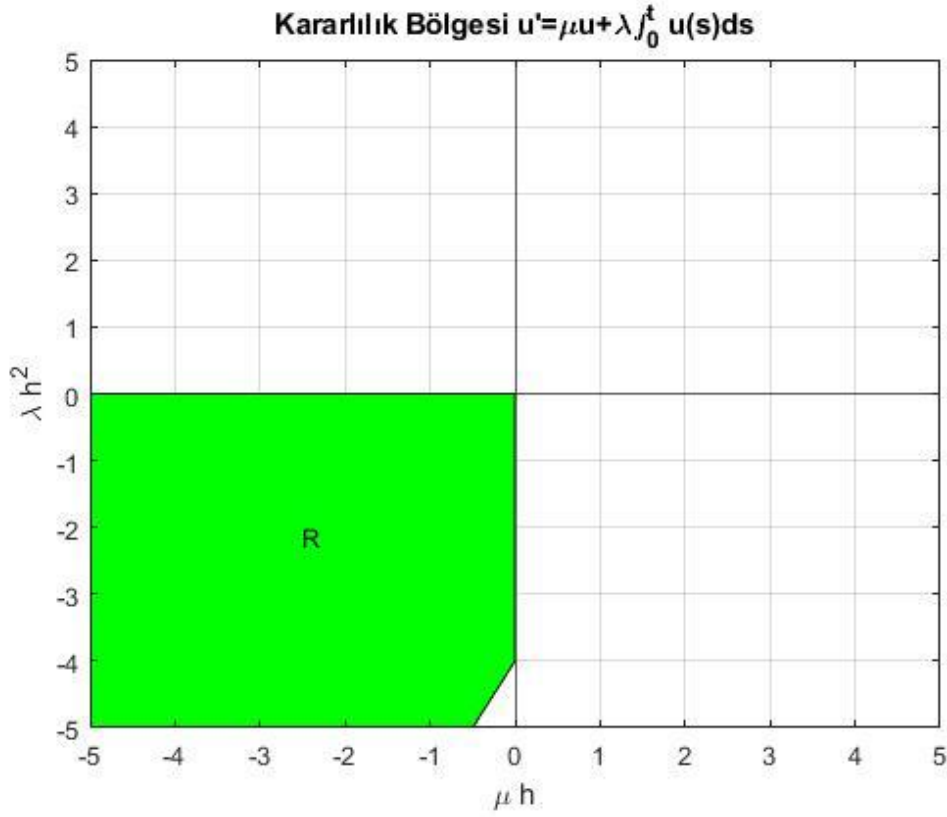
olmak üzere;

$$1) \gamma_0 \neq 0 \quad 2) \gamma_0 = \gamma_2 \quad 3) \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 = 0 \quad 4) \gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_2 = 0$$

şartlarını sağlattırdıktan sonra elde edilen grafik Şekil 5.7 de gösterildiği gibidir.

Bu kez (5.5) denkleminde başlatıp otomatik olarak toplam sembolü $n - 1$ e gider gerekli düzenlemelerle (5.2) denklemini elde edilir. (5.1) ve (5.2) ortak parantez yardımıyla γ_0 katsayıları yukarıdaki ifade ile 1 alındığında (5.1) denkleminin γ katsayıları aşağıdaki şekilde alınır.

$\mu h = -2\lambda h^2$, $\lambda h^2 = 0$ elde edilir. İçinde kalan bölgenin bu bölge tarafından ortak çözümü istenilen kararlılık bölgesi için Şekil 5.7 de verilmiştir.



Şekil 5.7: Kararlılık bölgesi için uygulanan yamuklar ve geri Euler metodu

Örnek 5.3.9: Boundary-Locus yöntemi ile ilgili örnek verelim.

$$u'(t) = \mu u(t) + \lambda \int_0^t u(s) ds \quad (t \geq 0);$$

denklemini ele alıp integral kısmına geri Euler, türev kısmına yamuklar uygulanırsa;

$$u_{n+1} - u_n = \lambda h u_n + \eta h^2 \sum_{j=0}^n u_j$$

$$u_{n+1} - u_n = \lambda h u_n + \eta h^2 [u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n] \quad (5.20)$$

$$u_n - u_{n-1} = \lambda h u_{n-1} + \eta h^2 \sum_{j=0}^{n-1} u_j$$

$$u_n - u_{n-1} = \lambda h u_{n-1} + \eta h^2 [u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}] \quad (5.21)$$

(5.20) den (5.21) çıkarılırsa;

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = \lambda h(u_n - u_{n-1}) + \eta h^2 u_n$$

$$u_{n+1} + u_n(-2 - \lambda h - \eta h^2) + u_{n-1}(1 + \lambda h) = 0$$

$$\gamma_0 = 1$$

$$\gamma_1 = -2 - \lambda h - \eta h^2$$

$$\gamma_2 = 1 + \lambda h$$

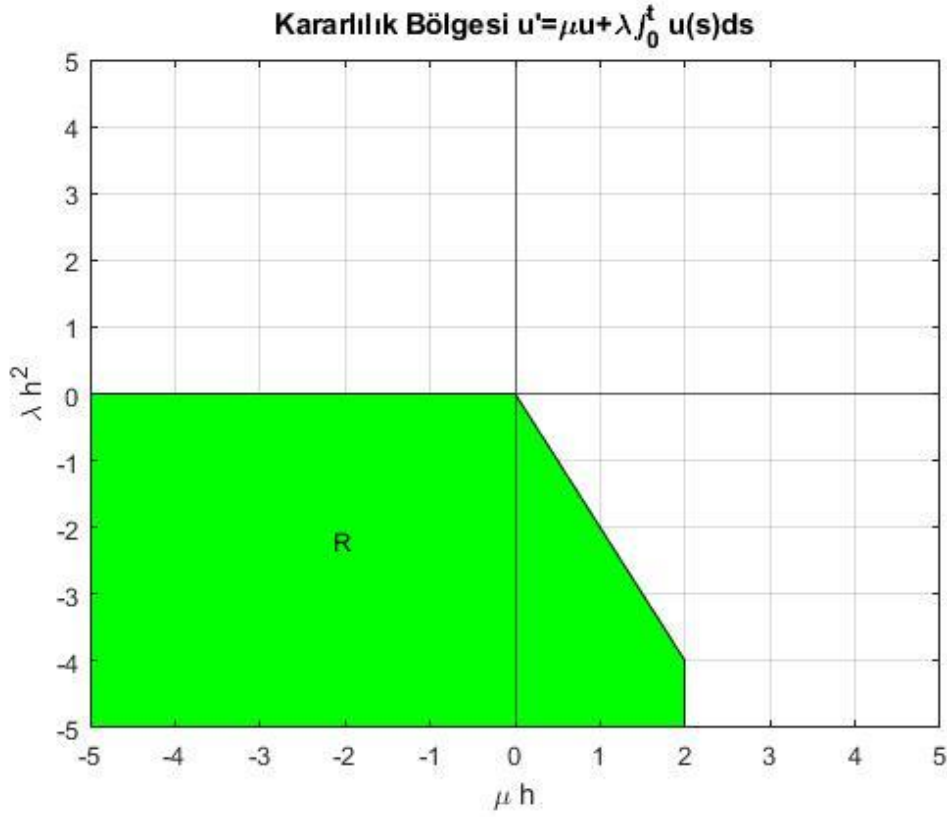
olmak üzere;

$$1) \gamma_0 \neq 0 \quad 2) \gamma_0 = \gamma_2 \quad 3) \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 = 0 \quad 4) \gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_2 = 0$$

şartlarını sağlattırdıktan sonra elde edilen grafik Şekil 5.8 de gösterildiği gibidir.

Bu kez (5.5) denkleminde başlatıp otomatik olarak toplam sembolü $n - 1$ e gider gerekli düzenlemelerle (5.2) denklemi ile elde edilir. (5.1) ve (5.2) denklemi ortak parantez yardımıyla γ_0 katsayıları yukarıdaki ifade ile 1 alındığında (5.1) denkleminin γ katsayıları aşağıdaki şekilde alınır.

$\mu h = -2\lambda h^2$, $\lambda h^2 = 0$, $\lambda h^2 = 2$ elde edilir. İçinde kalan bölgenin bu bölge tarafından ortak çözümü istenilen kararlılık bölgesi için Şekil 5.8 de verilmiştir.



Şekil 5.8: Kararlılık bölgesi için uygulanan geri Euler ve yamuklar metodu

Örnek 5.3.10: Boundary-Locus yöntemi ile ilgili örnek verelim.

$$u'(t) = \mu u(t) + \lambda \int_0^t u(s) ds \quad (t \geq 0);$$

denklemini ele alıp integral kısmına geri Euler, türev kısmına geri Euler uygulanırsa;

$$u_{n+1} - u_n = \lambda h u_n + \eta h^2 \sum_{j=0}^n u_j$$

$$u_{n+1} - u_n = \lambda h u_n + \eta h^2 [u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n] \quad (5.22)$$

$$u_n - u_{n-1} = \lambda h u_{n-1} + \eta h^2 \sum_{j=0}^{n-1} u_j$$

$$u_n - u_{n-1} = \lambda h u_{n-1} + \eta h^2 [u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}] \quad (5.23)$$

(5.22) den (5.23) çıkarılırsa;

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = \lambda h(u_n - u_{n-1}) + \eta h^2 u_n$$

$$u_{n+1} + u_n(-2 - \lambda h - \eta h^2) + u_{n-1}(1 + \lambda h) = 0$$

$$\gamma_0 = 1$$

$$\gamma_1 = -2 - \lambda h - \eta h^2$$

$$\gamma_2 = 1 + \lambda h$$

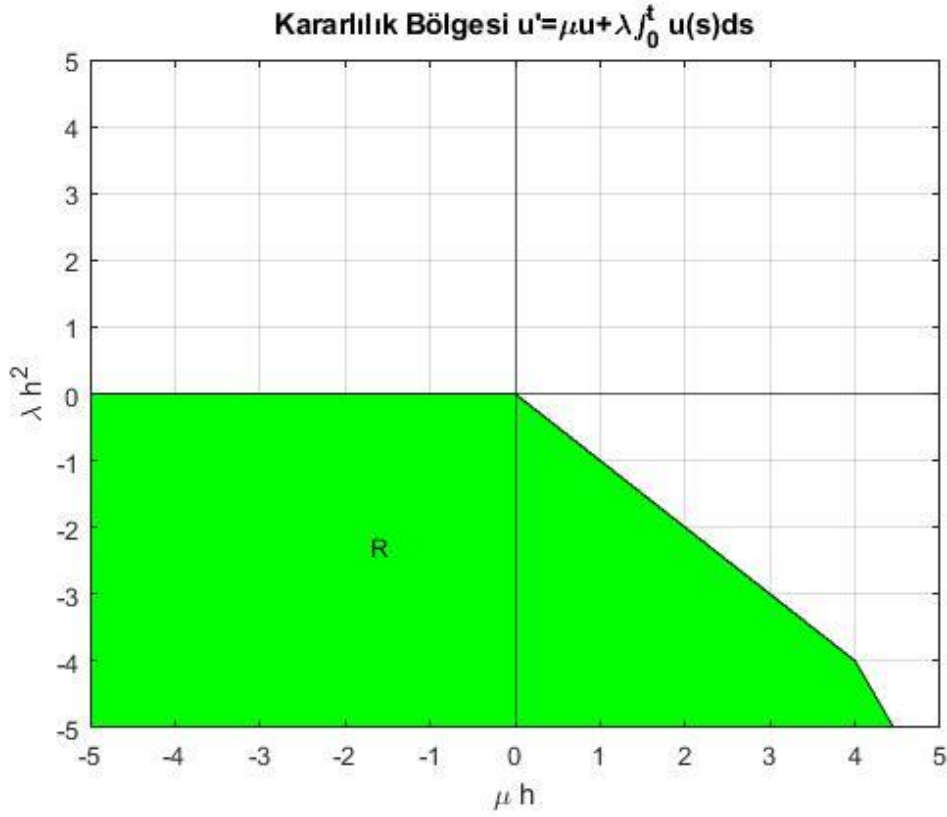
olmak üzere;

$$1) \gamma_0 \neq 0 \quad 2) \gamma_0 = \gamma_2 \quad 3) \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 = 0 \quad 4) \gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_2 = 0$$

şartlarını sağlattırdıktan sonra elde edilen grafik Şekil 5.9 da gösterildiği gibidir.

Bu kez (5.5) denkleminde başlatıp otomatik olarak toplam sembolü $n - 1$ 'e gider gerekli düzenlemelerle (5.2) denklemini elde edilir. (5.1) ve (5.2) denklemini ortak parantez yardımıyla γ_0 katsayıları yukarıdaki ifade ile 1 alındığında (5.1) denkleminin γ katsayıları aşağıdaki şekilde alınır.

$\mu h = -\lambda h^2$, $\lambda h^2 = 0$, $2\lambda h^2 + \mu h = 4$ elde edilir. İçinde kalan bölgenin bu bölge tarafından ortak çözümü istenilen kararlılık bölgesi için Şekil 5.9 de verilmiştir



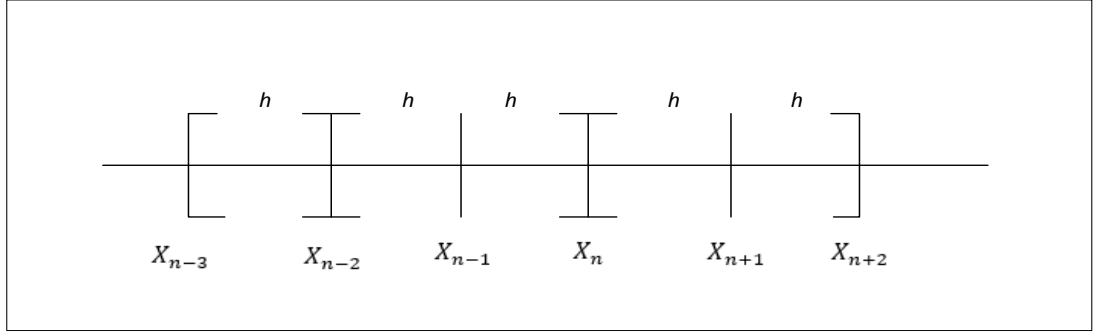
Şekil 5.9: Kararlılık bölgesi için uygulanan geri Euler ve geri Euler metodu

5.4 5. Mertebeden Çok Bloklü Yöntemin Volterra İntegral Denkleme

Uygulanması

$$u'(t) = \mu u(t) + \lambda \int_0^t u(s) ds \quad (t \geq 0);$$

denkleminizi ele alalım. Lagrange Polinomu yardımıyla, iki noktalı üç adımlı blok yöntemi daha önce Majid ve Mohamed (2019) tarafından türetilmiştir. Tahmin edici-düzeltilici çiftine dayanan türetilmiş yöntem, birinci dereceden adi diferansiyel denklemleri (ODE'ler) çözmek için kullanılır. $\{x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n\}$ noktaları kümesi tahmin formüllerini türetmek için kullanılırken, noktalar kümesi düzeltilici formüllerin türetilmesinde rol oynar. Yöntem, Lagrange enterpolasyon polinomu kullanılarak türetilir.



Şekil 5.10: Blok yönteminin iki noktalı aralığı

Şekil 5.10 da y_{n+1} ve y_{n+2} 'nin iki noktası, $y' = f(x, y)$ 'nin $[x_n, x_{n+1}]$ ve $[x_n, x_{n+2}]$ aralığı boyunca integrali alınarak elde edilir. İki noktalı üç adımlı blok yönteminin tahmin formülü, dördüncü derece Lagrange enterpolasyon polinomu kullanılarak (5.24) elde edilirken, iki nokta üç adımlı blok yönteminin düzeltici formülü, beşinci derece Lagrange enterpolasyon polinomu kullanılarak (5.25) olarak türetilir.

$$\begin{aligned}
 P_4(x) &= \frac{(x - x_{n-3})(x - x_{n-2})(x - x_{n-1})}{(x_n - x_{n-3})(x_n - x_{n-2})(x_n - x_{n-1})} F_n \\
 &+ \frac{(x - x_{n-3})(x - x_{n-2})(x - x_n)}{(x_{n-1} - x_{n-3})(x_{n-1} - x_{n-2})(x_{n-1} - x_n)} F_{n-1} \\
 &+ \frac{(x - x_{n-3})(x - x_n)(x - x_{n-1})}{(x_{n-2} - x_{n-3})(x_{n-2} - x_n)(x_{n-2} - x_{n-1})} F_{n-2} \\
 &+ \frac{(x - x_n)(x - x_{n-2})(x - x_{n-1})}{(x_{n-3} - x_n)(x_{n-3} - x_{n-2})(x_{n-3} - x_{n-1})} F_{n-3}
 \end{aligned}$$

(5.24)

$$\begin{aligned}
P_5(x) &= \frac{(x-x_n)(x-x_{n+1})(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})}{(x_{n+2}-x_{n+1})(x_{n+2}-x_n)(x_{n+2}-x_{n-2})(x_{n+2}-x_{n-1})} F_{n+2} \\
&+ \frac{(x-x_n)(x-x_{n+2})(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})}{(x_{n+1}-x_{n+2})(x_{n+1}-x_n)(x_{n+1}-x_{n-2})(x_{n+1}-x_{n-1})} F_{n+1} \\
&+ \frac{(x-x_{n+2})(x-x_{n+1})(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})}{(x_n-x_{n+1})(x_n-x_{n+2})(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-1})} F_n \\
&+ \frac{(x-x_n)(x-x_{n+1})(x-x_{n-2})(x-x_{n+2})}{(x_{n-1}-x_{n+1})(x_{n-1}-x_n)(x_{n-1}-x_{n-2})(x_{n-1}-x_{n+2})} F_{n-1} \\
&+ \frac{(x-x_n)(x-x_{n+1})(x-x_{n+2})(x-x_{n-1})}{(x_{n-2}-x_{n+1})(x_{n-2}-x_n)(x_{n-2}-x_{n+2})(x_{n-2}-x_{n-1})} F_{n-2}
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Daha sonra (5.1) ve (5.2) denklemlerinde $s = \frac{x-x_{n+2}}{h}$ integral limiti değiştirilerek yerine $dx = hds$ konularak, böylece istenen tahmin ve düzeltici formüller aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{n+1}^p \\ y_{n+2}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} -59 & 55 \\ 24 & 24 \\ -44 & 27 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} -9 & 37 \\ 24 & 24 \\ -8 & 31 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n-3} \\ f_{n-2} \end{bmatrix} \tag{5.26}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{n+1}^c \\ y_{n+2}^c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 346 & -19 \\ 720 & 720 \\ 124 & 29 \\ 90 & 90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n-1} \\ f_{n+2} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} -24 & 456 \\ 720 & 720 \\ 4 & 24 \\ 90 & 90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix} \\
&+ h \begin{bmatrix} 0 & 11 \\ 0 & -1 \\ 0 & 90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n-3} \\ f_{n-2} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.27}$$

(5.26) ve (5.27) denklemlerindeki yöntemin sırası Lambert (1973)'deki tanım uygulanarak belirlenir: L ile tanımlanan fark operatörü $L[y(x); h] = \sum_{j=0}^k [\alpha_j y(x + jh)] - h\beta_j y'$ ve doğrusal çok adımlı yöntemle (LMM) ilişkili $\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j}$ burada α_j ve β_j sabittir. LMM 'nin q mertebesinde olduğu söylenir eğer:

$C_0 = C_1 = C_2 = \dots = C_q = 0$ ve $C_{q+1} \neq 0$ ise.

C_q sabitinin formülü aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$C_q = \sum_{j=0}^k \frac{j^q \alpha_j}{q!} - \frac{j^{q-1} \beta_j}{(q-1)!} \quad (5.28)$$

Tahmin formülü (5.28) ve (5.30)'de uygulanır ve $C_0 = C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ ve $C_5 \neq 0$ olduğundan, yöntem dördüncü derecedendir ve hata sabiti,

$$C_5 = \begin{pmatrix} 0.34861 \\ 2.98889 \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

Daha sonra (5.30)'deki formülünün aynısını uygulanarak (5.29)'daki yöntemin sırası belirlenir. İki nokta üç adımlı blok yönteminin düzeltici formülü beşinci derecedendir ve hata sabiti,

$$C_6 = \begin{pmatrix} 0.00764 \\ -0.011111 \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

Doğrusal ve doğrusal olmayan VIDE (başlangıç değer problemleri)'leri çözmek için çok adımlı blok yöntemi geçerli bir bilgisayar programlama dilinde yazılmıştır. Uygulama da $K(x, s) = 1$ olduğunda ortaya çıkan problemler için Boole kuralına sahip beşinci dereceden iki nokta üç adımlı blok yöntemini içeriyordu. Boole kuralının formülü şu şekilde verilir:

$$z_{n+4} = z_n + \frac{2h}{45} (7y_{n+4} + 32y_{n+3} + 12y_{n+2} + 32y_{n+1} + 7y_n) \quad (5.31)$$

Enterpolasyon şemasına sahip bileşik Boole kuralı, $K(x, s) \neq 1$ olduğunda genel denklem için uyarlanmıştır. $[a, b]$ aralığını göz önünde bulunduralım. Eşit genişlikte $h = \frac{b-a}{4m}$ şeklinde 4 m'lik alt aralıklara bölünmüştür. Buradan;

$$I = \int_a^b z(x) dx = \int_{x_0}^{x_n} z(x) dx = \int_{x_0}^{x_4} z(x) dx + \int_{x_4}^{x_8} z(x) dx + \dots + \int_{x_{n-4}}^{x_n} z(x) dx$$

$$I = \frac{2h}{45} \sum_{k=1}^m (7z(x_{4k-4}) + 32z(x_{4k-3}) + 12z(x_{4k-2}) + 32z(x_{4k-1}) + 7z(x_{4k}))$$

$n = 0,4,8,\dots$ için bileşik Boole kuralını kullanma.

$$z_{n+4} = \frac{2h}{45} \sum_{i=0}^{n+4} w_i^s K(x_{n+4}, x_i, y_i) \quad (5.32)$$

$$z_{n+5} = \frac{2h}{45} \sum_{i=0}^{n+4} w_i^s K(x_{n+5}, x_i, y_i) + \frac{h}{90} \left\{ \begin{array}{l} 7K(x_{n+5}, x_{n+4}, y_{n+4}) \\ +32K\left(x_{n+5}, x_{n+\frac{17}{4}}, y_{n+\frac{17}{4}}\right) \\ +12K\left(x_{n+5}, x_{n+\frac{9}{2}}, y_{n+\frac{9}{2}}\right) \\ +32K\left(x_{n+5}, x_{n+\frac{19}{4}}, y_{n+\frac{19}{4}}\right) \\ +7K(x_{n+5}, x_{n+5}, y_{n+5}) \end{array} \right\} \quad (5.33)$$

Bilinmeyen değerleri hesaplamak için $\{x_{n+5}, x_{n+4}, x_{n+3}, x_{n+2}, x_{n+1}\}$ noktalarındaki Lagrange enterpolasyonu kullanılır $y_{n+\frac{17}{4}}, y_{n+\frac{9}{2}}, y_{n+\frac{19}{4}}$. Aşağıdaki formüller türetilmiştir:

$$y_{n+\frac{17}{4}} = \frac{-45}{2048} y_{n+1} + \frac{65}{512} y_{n+2} - \frac{351}{1024} y_{n+3} + \frac{585}{512} y_{n+4} + \frac{195}{2048} y_{n+5}$$

$$y_{n+\frac{9}{2}} = \frac{-5}{128} y_{n+1} + \frac{7}{32} y_{n+2} - \frac{35}{64} y_{n+3} + \frac{35}{32} y_{n+4} + \frac{35}{128} y_{n+5} \quad (5.34)$$

$$y_{n+\frac{19}{4}} = \frac{-77}{2048} y_{n+1} + \frac{105}{512} y_{n+2} - \frac{495}{1024} y_{n+3} + \frac{385}{512} y_{n+4} + \frac{1155}{2048} y_{n+5}$$

$$\begin{aligned}
z_{n+6} = & \frac{2h}{45} \sum_{i=0}^{n+4} w_i^s K(x_{n+6}, x_i, y_i) + \frac{h}{90} \left\{ \begin{array}{l} 7K(x_{n+6}, x_{n+4}, y_{n+4}) \\ +32K\left(x_{n+6}, x_{n+\frac{17}{4}}, y_{n+\frac{17}{4}}\right) \\ +12K\left(x_{n+6}, x_{n+\frac{9}{2}}, y_{n+\frac{9}{2}}\right) \\ +32K\left(x_{n+6}, x_{n+\frac{19}{4}}, y_{n+\frac{19}{4}}\right) \\ +7K(x_{n+6}, x_{n+5}, y_{n+5}) \end{array} \right\} \\
& + \frac{h}{90} \left\{ \begin{array}{l} 7K(x_{n+6}, x_{n+5}, y_{n+5}) \\ +32K\left(x_{n+6}, x_{n+\frac{21}{4}}, y_{n+\frac{21}{4}}\right) \\ +12K\left(x_{n+6}, x_{n+\frac{11}{2}}, y_{n+\frac{11}{2}}\right) \\ +32K\left(x_{n+6}, x_{n+\frac{23}{4}}, y_{n+\frac{23}{4}}\right) \\ +7K(x_{n+6}, x_{n+6}, y_{n+6}) \end{array} \right\} \quad (5.35)
\end{aligned}$$

Bilinmeyen değerler $y_{n+\frac{17}{4}}, y_{n+\frac{9}{2}}, y_{n+\frac{19}{4}}$ (5.33)'deki formül kullanılarak

bulunur. $\{x_{n+5}, x_{n+4}, x_{n+3}, x_{n+2}, x_{n+1}\}$ noktalarındaki Lagrange enterpolasyonu, bilinmeyen $y_{n+\frac{21}{4}}, y_{n+\frac{11}{2}}, y_{n+\frac{23}{4}}$ değerlerini hesaplamak için kullanılır. Aşağıdaki

formüller türetilmiştir:

$$\begin{aligned}
y_{n+\frac{21}{4}} &= \frac{-45}{2048} y_{n+2} + \frac{65}{512} y_{n+3} - \frac{351}{1024} y_{n+4} + \frac{585}{512} y_{n+5} + \frac{195}{2048} y_{n+6} \\
y_{n+\frac{11}{2}} &= \frac{-5}{128} y_{n+2} + \frac{7}{32} y_{n+3} - \frac{35}{64} y_{n+4} + \frac{35}{32} y_{n+5} + \frac{35}{128} y_{n+6} \quad (5.36) \\
y_{n+\frac{23}{4}} &= \frac{-77}{2048} y_{n+2} + \frac{105}{512} y_{n+3} - \frac{495}{1024} y_{n+4} + \frac{385}{512} y_{n+5} + \frac{1155}{2048} y_{n+6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_{n+7} = & \frac{2h}{45} \sum_{i=0}^{n+4} w_i^s K(x_{n+7}, x_i, y_i) + \frac{h}{90} \left\{ \begin{array}{l} 7K(x_{n+7}, x_{n+4}, y_{n+4}) \\ +32K\left(x_{n+7}, x_{n+\frac{17}{4}}, y_{n+\frac{17}{4}}\right) \\ +12K\left(x_{n+7}, x_{n+\frac{9}{2}}, y_{n+\frac{9}{2}}\right) \\ +32K\left(x_{n+7}, x_{n+\frac{19}{4}}, y_{n+\frac{19}{4}}\right) \\ +7K(x_{n+7}, x_{n+5}, y_{n+5}) \end{array} \right\} \\
& + \frac{h}{90} \left\{ \begin{array}{l} 7K(x_{n+7}, x_{n+5}, y_{n+5}) \\ +32K\left(x_{n+7}, x_{n+\frac{21}{4}}, y_{n+\frac{21}{4}}\right) \\ +12K\left(x_{n+7}, x_{n+\frac{11}{2}}, y_{n+\frac{11}{2}}\right) \\ +32K\left(x_{n+7}, x_{n+\frac{23}{4}}, y_{n+\frac{23}{4}}\right) \\ +7K(x_{n+7}, x_{n+6}, y_{n+6}) \end{array} \right\} \\
& + \frac{h}{90} \left\{ \begin{array}{l} 7K(x_{n+7}, x_{n+6}, y_{n+6}) \\ +32K\left(x_{n+7}, x_{n+\frac{25}{4}}, y_{n+\frac{25}{4}}\right) \\ +12K\left(x_{n+7}, x_{n+\frac{13}{2}}, y_{n+\frac{13}{2}}\right) \\ +32K\left(x_{n+7}, x_{n+\frac{27}{4}}, y_{n+\frac{27}{4}}\right) \\ +7K(x_{n+7}, x_{n+7}, y_{n+7}) \end{array} \right\} \quad (5.37)
\end{aligned}$$

Bilinmeyen değerler $y_{n+\frac{17}{4}}, y_{n+\frac{9}{2}}, y_{n+\frac{19}{4}}, y_{n+\frac{21}{4}}, y_{n+\frac{11}{2}}, y_{n+\frac{23}{4}}$, (5.33) ve (5.35)'teki

formül kullanılarak bulunur. $\{x_{n+3}, x_{n+4}, x_{n+5}, x_{n+6}, x_{n+7}\}$ noktalarındaki Lagrange enterpolasyonu, bilinmeyen $y_{n+\frac{25}{4}}, y_{n+\frac{13}{2}}, y_{n+\frac{27}{4}}$ değerlerini hesaplamak için

kullanılır. Aşağıdaki formüller elde edilir:

$$\begin{aligned}
y_{n+\frac{25}{4}} &= \frac{-45}{2048} y_{n+3} + \frac{65}{512} y_{n+4} - \frac{351}{1024} y_{n+5} + \frac{585}{512} y_{n+6} + \frac{195}{2048} y_{n+7} \\
y_{n+\frac{13}{2}} &= \frac{-5}{128} y_{n+3} + \frac{7}{32} y_{n+4} - \frac{35}{64} y_{n+5} + \frac{35}{32} y_{n+6} + \frac{35}{128} y_{n+7} \quad (5.38) \\
y_{n+\frac{27}{4}} &= \frac{-77}{2048} y_{n+3} + \frac{105}{512} y_{n+4} - \frac{495}{1024} y_{n+5} + \frac{385}{512} y_{n+6} + \frac{1155}{2048} y_{n+7}
\end{aligned}$$

Önerilen iki nokta üç adımlı blok yönteminin kararlılığı Boole kuralıyla birlikte incelenmiştir. Kararlılık için aşağıdaki doğrusal test denklemi verilmiştir:

$$u'(t) = \mu u(t) + \lambda \int_0^t u(s) ds \quad (t \geq 0); \quad (5.39)$$

(5.38) nın çözümleri ancak ve ancak $\lambda < 0$ ve $\eta < 0$ ise $x \rightarrow \infty$ olarak sifira yönelir. O zaman mutlak kararlılık bölgesi, kararlılık polinomunun tüm sıfırlarının bulunduğu noktalar kümesidir. ($h\lambda, h^2\eta$) şeklinde verilen denklem;

$$\pi(r, h\lambda, h^2\eta) = \rho'(r)[\rho(r) - h\lambda\sigma(r)] - h^2\eta\sigma'(r)\sigma(r) \quad (5.40)$$

birim diskin iç kısmında bulunur.(5.39) den karşılık gelen benzersiz polinomları ρ, ρ', σ ve σ' aşağıdaki şekilde verilmiştir:

1. Düzeltici formülünün ilk noktası

$$\rho(r) = r^3 - r^2 \quad \sigma(r) = \frac{-19}{720}r^4 + \frac{346}{720}r^3 + \frac{456}{720}r^2 + \frac{-74}{720}r + \frac{11}{720} \quad (5.41)$$

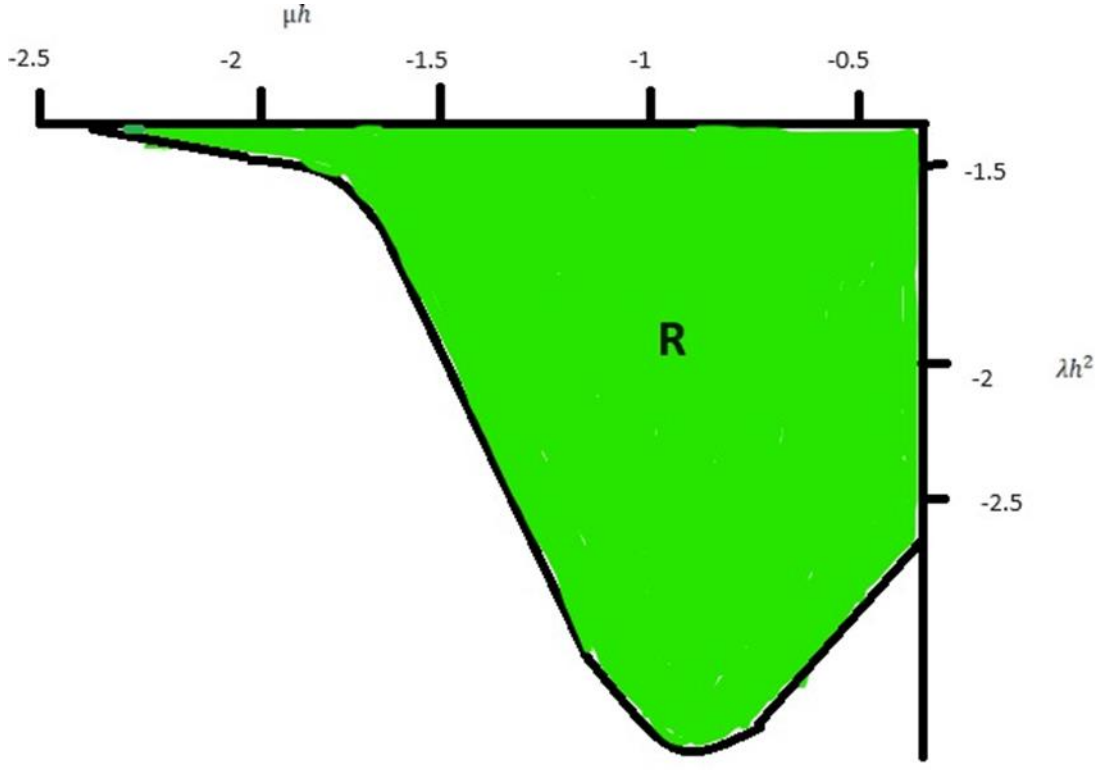
2. Düzeltici formülünün ikinci noktası

$$\rho(r) = r^4 - r^3 \quad \sigma(r) = \frac{29}{90}r^4 + \frac{124}{90}r^3 + \frac{24}{90}r^2 + \frac{4}{90}r - \frac{1}{90} \quad (5.42)$$

3. Boole kuralı

$$\rho'(r) = r^4 - 1 \quad \sigma'(r) = \frac{14}{45}r^4 + \frac{64}{45}r^3 + \frac{24}{45}r^2 + \frac{64}{45}r + \frac{14}{45} \quad (5.43)$$

Daha sonra (5.40), (5.41) ve (5.42) yi (5.39) daki gibi kararlılık polinomun formülüne dönüştürürüz. Kararlılık polinomunda kombinasyonlar yönteminin mutlak kararlılık bölgesi çizilir. Şekil 5.10 dan yöntem gölgeli bölge içinde kararlıdır (Majid ve Mohamed 2019).



Şekil 5.11: Kararlılık bölgesi için uygulanan çok boyutlu yöntem

6. SONUÇ ve ÖNERİ

Bu tezde bazı integral denklemler ele alınarak uygulanan farklı yöntemler ile gerçek çözümlerin, nümerik çözümlerin ve kararlılık bölgelerinin nasıl elde edildiği araştırıldı. Buradan hareketle Volterra-integro diferansiyel denklemler için gerçek çözüm ve nümerik yöntemlerle kararlılık bölgeleri üzerinde duruldu. Çalışmalarda görselliği ön plana çıkarmak için ve düzenli gözükmeye açısından bilgisayar programı kullanıldı. Matematiksel olarak da Laplace yöntemi, Simpson yöntemleri, yamuklar yöntemi, Runge Kutta yöntemlerinden yararlanıldı. En son olarak da integro-diferansiyel denklemin çok bloklu metot kullanılarak kararlılık bölgesi gösterildi.

7. KAYNAKLAR

Aksoy Y. “İntegral Denklemler” cilt 1, İstanbul: Yıldız Üniversitesi Yayınları (1983).

Atkinson P. “*Elementary Numerical Analysis*” , (1985).

Baker, C. and Keech, M. “Stability Regions in the Numerical Treatment of Volterra Integral Equations”. *Siam J. Numer. Anal.*, (1977-1978).

Bocher M., F.G. “Plane analytic geometry: with introductory chapters on the differential calculus”, California University, (1913).

Darania, P. and Shali, J. A., “Convergence analysis of product integration method for nonlinear weakly singular Volterra-Fredholm integral equations. Sahand Communications in Mathematical Analysis “(SCMA), (2015).

Davis, H. T., “Introduction to nonlinear differential and integral Equations, 566, New York (1960).

Edwards, J.T., Ford, N.J., and Roberts, J.A. “Bifurcations in numerical methods for Volterra-integro differential equations. Department of Mathematics’, *Chester College*, UK, (2003).

Ekici M. “Lineer Singüler ve Singüler Olmayan İntegral Denklemlerinin Yaklaşık Çözümleri Üzerine Bir Çalışma’, Yüksek Lisans Tezi, *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, ANKARA, (2010).

Erdem, Yılmaz. “Lotka Volterra sistemleri ve sayısal çözümleri”, *Adnan Menderes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü*, Yüksek Lisans Tezi, (2004).

Filiz, Ali. “Numerical solution of some Volterra Equations”. *PhD Thesis, The Univesity of Manchester* , (2010).

Huang, Chengming and Vandewalle, Stefan,. *Stability of Runge-Kutta-Pouzet methods for Volterra integro-differential Equations with delays*. *Frontiers of Mathematics in China*, (2009).

Huang, Chengming. “Stability of linear multistep methods for Delay integro-differential equations. *Computers and Mathematics with Applications*” , (2009).

Köker , N. “Kararlılık Analizi ve Bir Uygulaması’ *Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi* , (2021).

Lambert and Brunner. ‘*Stability of Numerical Methods for Volterra Integro-Differential Equations*’. Computing, (1974).

Linz, P. “*Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations. Studies in Applied Mathematics*’, Philadelphia V, (1985).

Lubich, CH . “On the Stability of Linear Multistep Methods for Volterra Convolution Equations’. IMA J. Numer. Anal., (1983).

Majid Z.A. and Mohamed N.A., “Fifth order multistep block method for solving volterra integro-differential equations of second kind”, *Sains Malaysiana*, (2019).

Öztunç, Ö., “*Parabolik Volterra integro-diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri*”, Yüksek Lisans Tezi, Adnan Menderes Üniversitesi, (2009).

Smithies, F., “*Integral Equations*”. Cambridge University Press, England , (1958).

Tricomi, F.G., “*Integral Equations*’. Interscience, New York, (1957).

Van Der Houwen, P. J. and Wolkenfelt. “On the Stability of Multistep Formulas for Volterra Integral Equations of the Second Kind’. *Computing*, (1978).

Wazwaz A.M. “*A First Course in Integral Equations*”. Interscience, New York, (1957).