

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI

EVRENİN İVMELENEREK GENİŞLEMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NAZIM TÜFEKÇİ

DENİZLİ, AĞUSTOS - 2024

**T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI**



EVRENİN İVMELENEREK GENİŞLEMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NAZIM TÜFEKÇİ

DENİZLİ, AĞUSTOS - 2024

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

NAZIM TÜFEKCİ

ÖZET

EVRENİN İVMELENEREK GENİŞLEMESİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
NAZIM TÜFEKÇİ
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. MUZAFFER ADAK)

DENİZLİ, AĞUSTOS - 2024

Bu çalışmada, önce Riemann geometrisinin temelleri dış cebir lisanında özetlenmiştir. Ardından Einstein'ın kütleçekim teorisi olan genel görelilik teorisi hakkında bilgiler verilmiştir. Son kısımda Einstein denkleminin kozmolojik çözümleri gözden geçirilmiştir. Burada somut olarak de Sitter Kozmolojileri, Friedmann Kozmolojileri ele alınmıştır. Çalışmanın sonunda evrenin hızlanarak genişlemesini anlatmak için tanımlanan yavaşlama parametresinin gözlem sonuçları hakkında bilgi verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELEER: Genel Görelilik Teorisi, Kozmoloji Modelleri, Evrenin Hızlanarak Genişlemesi, Yavaşlama Parametresi

ABSTRACT

ACCELERATING EXPANSION OF THE UNIVERSE
MSC THESIS
NAZIM TÜFEKÇİ
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
PHYSICS

(SUPERVISOR: PROF. DR. MUZAFFER ADAK)

DENİZLİ, AUGUST 2024

In this study, first the foundations of Riemannian geometry are summarized in the language of exterior algebra. Then, information about general relativity theory, which is Einstein's theory of gravity, is given. In the last part, cosmological solutions of the Einstein equation are reviewed. Here, de Sitter Cosmologies and Friedmann Cosmologies are discussed concretely. At the end of the study, information is given about the observation results of the deceleration parameter defined to describe the accelerating expansion of the universe.

KEYWORDS: Theory of General Relativity, Cosmology Models, Accelerating Expansion of Universe, Deceleration Parameter

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
TABLO LİSTESİ.....	v
SEMBOL LİSTESİ.....	vi
ÖNSÖZ.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. DİFERANSİYEL FORMLAR.....	2
2.1 Dış Cebir.....	2
2.1.1 Levi-Civita Tensörü.....	3
2.1.2 Hodge Gönderimi.....	3
2.1.3 İç Çarpım.....	4
2.1.4 Dış Türev.....	5
2.1.5 Lie Türevi.....	6
2.1.6 Killing Vektör Alanları.....	6
3. GENEL GÖRELİLİK TEORİSİ.....	8
3.1 Newton Kütleçekim Teorisi.....	8
3.2 Eşdeğerlilik İlkesi.....	9
3.3 Einstein'ın Genel Görelilik Teorisi.....	13
4. KOZMOLOJİ MODELLERİ.....	20
4.1 de Sitter Kozmolojileri.....	21
4.1.1 AdS Uzayzamanı.....	21
4.1.2 dS Uzayzamanı.....	22
4.2 Friedmann Kozmolojileri.....	25
4.2.1 Toz Evresi : $p = 0$	27
4.2.2 Radyasyon Evresi : $p = 3p$	30
5. YAVAŞLAMA PARAMETRESİNİN GÖZLEMSEL DEĞERLERİ...33	33
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	38
6. KAYNAKLAR.....	39
7. ÖZGEÇMİŞ.....	40

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3.1: Hareketli ve hareketsiz kabinlerde ivme.....	10
Şekil 3.2: Eşdeğerlilik ilkesi yerel olarak geçerlidir.	10
Şekil 3.3: Işık kütleçekim alanı içinde bükülür.....	11
Şekil 4.1: AdS uzayı basit bağlı değildir.....	22
Şekil 4.2: dS uzayı	23
Şekil 4.3: Evrenin sonun ne olacağı.....	29
Şekil 4.4: Evrende radyasyon baskın ve galaktik madde baskın evreleri.	31
Şekil 5.1: Yavaşlama parametresinin kozmik zamanla değişimi.....	35
Şekil 5.2: Yavaşlama parametresinin verilere göre çizimi.....	36
Şekil 5.3: 1929 da Hubble'ın yaptığı çalışmanın orijinal grafiği.....	36
Şekil 5.4: Hubble'ın1929'daki çalışmasının 2004 yılında güncellenmesi.....	37

TABLO LİSTESİ

Sayfa

Tablo: 3.1 Newton mekaniği ile Einstein mekaniğinin kıyaslaması.....	18
Tablo: 4.1: Evrenin ilk anından günümüze zaman ve sıcaklık değerlerine göre durumu	32
Tablo 5.1: İki veri seti için en uygun değerler	35

SEMBOL LİSTESİ

M_n	: n -boyutlu Manifold
g	: (0,2)-tipi simetrik dejenere olmayan metrik tensörü
x^μ	: Koordinat fonksiyonları veya koordinat sistemi
\wedge	: Dış çarpım
$T^*(M_n)$: Koteğit demeti
ω	: Bağlantı
$\Lambda^p(M_n)$: M_n üzerinde tanımlı p mertebesinden anti-simetrik tensör uzayı
Δ	: Laplace -Beltrami Operatörü
L_U	: U vektörüne göre Lie Türevi
*	: Hodge dualite işlemi
ϕ	: Kütleçekim potansiyeli
$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$: Cristoffel Sembolleri veya bağlantı katsayıları
J	: Elektromanyetik akım 1-formu
$\mathcal{R} = (Ric)^\alpha_\alpha$: Ricci eğrilik skaleri
G_{ab}	: Einstein tensörü
κ	: Bağlanma katsayısı
L_{EH}	: Einstein – Hilbert Lagrange 4-formu
λ	: Kozmolojik sabit
τ_a	: Enerji-momentum 3-formu
ω^i_j	: Levi – Civita 1-formu
R^i_j	: Riemann eğrilik 2-formu
R^i	: Ricci eğrilik 1-formu
ρ	: Mükemmel akışkanın enerji yoğunluğu
p	: Mükemmel akışkanın basıncı
H_0	: Hubble Sabiti
q_0	: Yavaşlama parametresi
σ	: Stefan-Boltzman Sabiti
T	: Sıcaklık

ÖNSÖZ

Yüksek lisans başlama sürecimden, tez aşaması ve sonrasına kadar bana desteğini ve özellikle sabrını esirgemeyen danışman hocam sayın Prof. Dr. Muzaffer Adak'a ve hayatımın her anında benden desteğini esirgemeyen eşim Fatma Sözgen Tüfekci'ye sonsuz teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

Einstein 1915 yılında ortaya attığı Genel Görelilik Kuramı ile yaptığı hesaplamalarda evreni durağan olmayacağını bulmuş olsa da, o dönemde evrenin statik (durağan) olduğu görüşü hakimdi. Einstein de ulaştığı sonucu düzeltmek için denklemlerine “ kozmolojik sabit” olarak adlandırdığı bir ekleme yaptı. Fakat ileriki süreçlerde süregelen çalışmalar, Einstein’ın yanıldığını gösterecekti.

1920’li yıllarda Edwin Hubble şimdi galaksi olarak adlandırdığımız nebülözlerin galaksimiz Samanyolu dışında olduğunu ve bunların galaksimizden (bizden) uzaklaştığını keşfetti (Hubble Yasası- Hubble Sabiti). Kaldı ki zaten Hubble’ın bu keşfinin öncesinde, Willem de Sitter, Georges Lemaître, Alexandre Friedmann gibi fizikçiler, “evrenin genişlemesini” tanımlayan başkaca Genel Görelilik çözümleri bulmuştu. Hubble’ın yaptığı keşfin ardından çalışmaları hemen kabul gördü ve milyarlarca yıldır genişlemekte olan bir evren tanımı yapılmış oldu. Oysa, Hubble’ın keşfinden günümüze kadar Einstein’ın statik evren görüşünü desteleyecek hiçbir veri alınabilmiş değildir.

Bilimsel gelişmeler kendini uzay teknolojilerinde de göstermektedir. Önceki dönemlerde yer teleskopları ile evrenin genişlediği desteklenmişti. Bu konuda en önemli destekçiler Hubble Uzay Teleskobunun optik görüntüleme yeteneği ve ardından son yıllarda kendinden oldukça söz ettiren James Webb (JWST) kızılötesi algılayıcıları bu genişlemeyi birçok kez teyit etti.

Evrenin genişlemekte olduğu artık su götürmez bir gerçek olarak karşımızda duruyor. Ancak bu bilgilerin türlü gözlem araçları ile teyit edilmiş olması problemin çözüldüğü anlamına gelmiyor. Ulaşılan her bilgi yeni veri ihtiyacını doğuruyor. Evrenin bu ivmeli genişleme süreci ne zamana kadar devam edecek, bir noktadan sonra yavaşlayıp duracak mı, ya da yavaşlayıp büzölmeye mi başlayacak ya da bir yere kadar genişleyip oradan sonra dağılacak mı? Tüm bu sorular gelişen teknolojilerin desteğini kullanarak teorik fizikçi ve astrofizikçilerin yeni uğraş konuları olacağı benziyor.

2. DİFERANSİYEL FORMLAR

2.1 Dış Cebir

Anti-simetrik tensör çarpım işlemine dış çarpım adı verilir ve \wedge ile gösterilir. M_n üzerinde tanımlanmış p mertebeden tümüyle anti-simetrik kovaryant tensörlerin uzayını $\Lambda^p(M_n)$ ile gösterilsin. $\Lambda^p(M_n)$ uzayının elemanlarına p -form adı verilir. $\Lambda^p(M_n)$ uzayı $T^*(M_n)$ koteğit demetine özdeşdir. Bundan dolayı kovektöre 1-formlar da denir. $\{x^\mu\}$ koordinat haritasında bir ω p – formu

$$\omega = \frac{1}{p!} \omega_{[\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p]} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \quad (2.1)$$

şeklinde açılabilir. Bu ifade ortonormal 1-formlar cinsinde de yazılabilir.

$$\omega = \frac{1}{p!} \omega_{[i_1 i_2 \dots i_p]} e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \dots \wedge e^{i_p} \quad (2.2)$$

Herhangi bir p -formunun bileşenleri tanım gereği anti-simetrik olduğundan çoğunlukla anti-simetrikleştirme parantezi kullanılmaz, $\omega_{[i_1 i_2 \dots i_p]} \rightarrow \omega_{i_1 i_2 \dots i_p}$. Buna göre dış çarpımda sıra önemlidir.

$$\omega \wedge \psi = (-1)^{pq} \psi \wedge \omega \quad (2.3)$$

Burada $\omega \in \Lambda^p(M_n)$ ve $\psi \in \Lambda^q(M_n)$. İlaveten, pq yazılışı p sayısı ile q sayısının çarpımını temsil eder.

$\Lambda^p(M_n)$ uzayı dış çarpım altında kapalı olmadığından bir dış cebir oluşturmaz. Fakat

$$\Lambda(M_n) = \Lambda^0(M_n) \oplus \Lambda^1(M_n) \oplus \dots \oplus \Lambda^n(M_n) \quad (2.4)$$

biçiminde tanımlanan $\Lambda(M_n) = \bigoplus_{p=0}^n \Lambda^p(M_n)$ toplamı bir cebir oluşturur. Bu cebiri *dış cebir* olarak adlandırırız. Ancak yalnız aynı mertebeden elemanlar toplanabildiğinden bu cebir kademeli (graded) cebir olarak adlandırılır. $\Lambda^p(M_n)$ uzayının boyutu $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ olduğundan $\Lambda(M_n)$ dış cebirinin boyutu $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} =$

2^n ile verilir. Dış cebirin elemanlarına *Cartan diferansiyel formları* ya da *dış formlar* denir (Adak 2024).

2.1.1 Levi-Civita Tensörü

M_n üzerinde tanımlı $\Lambda(M_n)$ dış cebiri içinde bir tane n -form vardır ve bu da koordinat haritasından bağımsız olarak ortonormal 1-formlar cinsinden

$$e^1 \wedge \dots \wedge e^n = \frac{1}{n!} \epsilon_{i_1 \dots i_n} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_n} \quad (2.5)$$

ifadesiyle verilebilir. Buna hacim n -formu ve $\epsilon_{12\dots n} = +1$ olarak normalize edilen ve tümüyle anti- simetrik olan $\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ niceliğine de Levi-Civita tensörü (ya da epsilon tensörü) denir (Adak 2024).

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} 0 & \text{her iki indis eşit ise} \\ +1 & (i_1 i_2 \dots i_n) \text{ dizilişi } (12 \dots n) \text{ dizilişinin } \textit{çift} \text{ permütasyonu ise} \\ -1 & (i_1 i_2 \dots i_n) \text{ dizilişi } (12 \dots n) \text{ dizilişinin } \textit{tek} \text{ permütasyonu ise} \end{cases}$$

2.1.2 Hodge Gönderimi

Levi-Civita tensörü yardımıyla $\Lambda^p(M_n)$ uzayı ile $\Lambda^{n-p}(M_n)$ uzayı arasında kanonik bir izomorfizm kurulur.

$$* = \Lambda^p(M_n) \rightarrow \Lambda^{n-p}(M_n) \quad (2.6)$$

şeklinde ifade edilen gösterilen bu izomorfizme Hodge dualite gönderimi denir. ω bir p -form olmak üzere Hodge gönderimi, ω 'ya aşağıdaki ifadeyle belirlenen $(n-p)$ -formunu karşılık getirir.

$$* \omega = \frac{1}{(n-p)!} \epsilon^{i_1 \dots i_p} \omega_{i_{p+1} \dots i_n} e^{i_1 \dots i_p} \wedge \dots \wedge e^{i_n} \quad (2.7)$$

Yukarıdaki ifade incelendiğinde Levi-Civita tensöründeki yukarıda ve aşağıda karışık gelen indis yapısından görülecektir ki Hodge gönderiminin tanımlanabilmesi ancak M_n üzerinde bir g metrik tensörünün belirlenmiş olması halinde mümkün hale gelir. M_n manifoldunun yönelimi $*1 = e^0 \wedge \dots \wedge e^n =$ ile veya diğer bir ifadeyle $\epsilon_{12\dots n} = +1$ seçimiyle belirlenir. Hodge gönderimi aşağıdaki üç temel özelliğe sahiptir.

1. $\omega \wedge * \psi = \psi \wedge * \omega$
2. $* \omega \wedge \psi = * \psi \wedge \omega$
3. $** \omega = (-1)^{p(n-p)} \omega$

Burada ω ve ψ birer p -formdur. Sondaki özellik ortonormal bazda metrik bileşenlerinin sadece +1 sayılarında olduğu durumda geçerlidir (Euclid olmayan geometrilere ortonormal metriğin köşegen elemanları ± 1 sayılarından oluşur) (Adak 2024).

2.1.3 İç Çarpım

U bir vektör alanını göstermek üzere bir p -formu $(p-1)$ -forma gönderen

$$\iota_U: \Lambda^p(M_n) \rightarrow \Lambda^{p-1}(M_n) \quad (2.8)$$

lineer gösterimi U vektörüne göre iç çarpım işlemini tanımlar. Eğer ω bir p -formsa, $\{X_i\}$ ortonormal bazında

$$\iota_U \omega = \frac{1}{(p-1)!} U^{i_1} \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} e^{i_2} \wedge \dots \wedge e^{i_p} \quad (2.9)$$

olduğu görülür. Burada $U = U^i X_i$ yazılmış ve aşağıdaki özellikler kullanılmıştır.

1. $\iota_U f = 0$
2. $\iota_{X_j} e^i = e^i(X_j) = \delta_j^i$
3. $\iota_{fU} \omega = f \iota_U \omega$
4. $e^i \wedge \iota_{X_i} \omega = p \omega$
5. $\iota_{X_i} \iota_{X_j} \omega = -\iota_{X_j} \iota_{X_i} \omega$
6. $\iota_{X_i} (\omega \wedge \psi) = (\iota_{X_i} \omega) \wedge \psi + (-1)^p \omega \wedge (\iota_{X_i} \psi)$

$$7. *(\omega \wedge e_i) = \iota_{X_i} * \omega$$

Burada f bir 0-form, ω bir p -form ve ψ bir q -formdur. İlerleyen bölümlerde ι_{X_i} yerine kısaca ι_i sembolü kullanılacaktır, $\iota_{X_i} \equiv \iota_i$ (Adak 2024).

2.1.4 Dış Türev

p -formları $(p+1)$ -formlarına götüren

$$d : \Lambda^p(M_n) \rightarrow \Lambda^{p+1}(M_n) \quad (2.10)$$

lineer gönderime dış türev adı verilir ve $\{x^\mu\}$ koordinat haritasında

$$d\omega = \frac{1}{p!} \partial_{[\mu} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p]} dx^\mu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \quad (2.11)$$

şeklinde ifade edilir. Dış türev işlemi türevin dış cebir üzerine tek genellemesidir. Dış türevin aşağıdaki özellikleri vardır.

1. $df = (\partial_\mu f) dx^\mu$
2. $d(\omega + \psi) = d\omega + d\psi$
3. $d(\omega \wedge \psi) = (d\omega) \wedge \psi + (-1)^p \omega \wedge (d\psi)$ Leibniz Kuralı
4. $d^2\omega = 0$ Poincaré Leması

Burada f bir 0-form, ω bir p -form ve ψ bir q -formdur.

Eğer $d\omega = 0$ ise ω dış formuna *kapalı form*, $\omega = d\psi$ olarak yazılabiliyorsa ω dış formuna *tam form* denir. Her tam form aynı zamanda kapalıdır. Bu lemanın tersi ancak yerel olarak doğrudur. Yani, kapalı bir form M_n üzerindeki noktaların tümünde tam olmak zorunda değildir.

$$\Delta := (d - * d *)^2 = -d * d * - * d * d \quad (2.12)$$

ifadesi ile tanımlanan diferansiyel operatörüne *Laplace–Beltrami Operatörü* denir. Formların derecesini değiştirmeyen bu gönderim, \mathbb{R}^3 üzerinde tanımlanan Laplace operatörünün herhangi bir M_n manifolduna genellenmiş halidir. $\Delta\omega = 0$ denklemini sağlayan ω formlarına *harmonik form* denir (Adak 2024).

2.1.5 Lie Türevi

Fonksiyonların yönsel türevleri genellenirse, ω bir p -form olmak üzere

$$L_U \omega = \iota_U(d\omega) + d(\iota_U \omega) \quad (2.13)$$

şeklinde tanımlanan,

$$L_U = \Lambda^p(M_n) \rightarrow \Lambda^p(M_n) \quad (2.14)$$

lineer gönderimi, ω alanının U vektör alanına göre Lie türevini tanımlar. Geometrik olarak, U vektör alanı boyunca ilerlerken ω p -form alanın nasıl değiştiğinin resmini verir.

1. $L_U f = Uf = U^\mu(\partial_\mu f)$
2. $L_U V := [U, V] = UV - VU$
3. $L_U \omega = [U^v(\partial_v \omega_\mu) + (\partial_\mu U^v)\omega_\mu] dx^\mu$

Burada f fonksiyon, U ve V vektör alanı ve ω 1-formdur (Adak 2024).

2.1.6 Killing Vektör Alanları

M_n düzgün bir manifold ve g de bu manifold üzerinde tanımlı bir metrik tensörü olsun. Eğer V vektör alanı

$$L_V g = 0 \quad (2.15)$$

Şartını sağlıyorsa V 'ye Killing Vektör Alanı denir. V vektör alanı g 'yi değişmez bırakan bir izometri üretir. Bu denklemin keyfi bir $\{x^\mu\}$ koordinat haritasında aldığı biçimi elde edelim. Böylece, Killing denklemi $L_V(g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu) = 0$ şöyle açık yazılabilir.

$$(L_V g_{\mu\nu}) dx^\mu \otimes dx^\nu + g_{\mu\nu} (L_V dx^\mu) \otimes dx^\nu + g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes (L_V dx^\nu) = 0 \quad (2.16)$$

Burada ilk terim

$$L_V g_{\mu\nu} = \iota_V d g_{\mu\nu} + d \iota_V g_{\mu\nu} = \iota_{V^\xi} d g_{\mu\nu} + 0 = V^\xi \iota_\xi d g_{\mu\nu} = V^\xi (\partial_\xi g_{\mu\nu}) \quad (2.17)$$

Olurken diğer iki terim aşağıdaki hali alır.

$$\begin{aligned} L_V dx^\mu &= \iota_V d dx^\mu + d \iota_V dx^\mu = 0 + d (\iota_{V^\xi} dx^\mu) = d (V^\xi \iota_\xi dx^\mu) = d V^\mu = \\ &(\partial_\xi V^\mu) dx^\xi \end{aligned} \quad (2.18)$$

O halde, koordinat çerçevesinde yazılan aşağıdaki denkleme Killing denklemi adı verilir.

$$V^\xi (\partial_\xi g_{\mu\nu}) + g_{\xi\nu} (\partial_\mu V^\xi) + g_{\xi\mu} (\partial_\nu V^\xi) = 0 \quad (2.19)$$

Eğer ortonormal baz kullanılırsa $dg_{ij} = 0$ olduğu için $L_V e^i = A^i_j e^j$ ifadesinde $A_{ij} = -A_{ji}$ ise V bir Killing vektördür (Adak 2024).

3. GENEL GÖRELİLİK TEORİSİ

3.1 Newton Kütleçekim Teorisi

Bu teoride mutlak zaman ve mutlak uzay söz konusudur. Galileo uzayzamanının geometrik yapısı $M_4 = T \times \mathbb{R}^3$ olarak verilir. Fiziksel olarak burada herhangi bir $x^\mu \in \mathbb{R}^3$ noktasında zamanı ölçtüğümüz ideal saatlerin varlığını ve x^μ noktasında ölçülen t değerinin bu noktanın geçmişinden bağımsız olduğu kabul edilir. İlaveten, noktasal parçacıklar da kabul edilir. Noktasal bir parçacığın yörüngesi t zamanıyla parametrize edilmiş bir $\gamma(t) \in \mathbb{R}^3$ eğrisidir. Bu eğriye *dünya-çizgisi* adı verilir (Adak 2024).

Etrafta hiçbir kütleçekim alanı olmadığında noktasal parçacıklar seçilmiş dünya-çizgilerinde hareket ederler. \mathbb{R}^3 uzayında düz çizgiler olan bu yörüngelere serbest hareket çizgileri denir. Bu durumda eylemsiz koordinat sistemi adı verilen global bir koordinat kartı x^α vardır ki burada $x^0 = ct$ mutlak zamandır. Serbest hareket

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} = 0, \quad \mu = \hat{1}, \hat{2}, \hat{3} \quad (3.1)$$

denklemleri ile betimlenir. $d^2 x^0 / dt^2 = 0$ olduğu için serbest düşme denklemini

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} = 0 \quad (3.2)$$

olarak da yazabiliriz. Burada Yunan alfabesinin ilk yarısıyla, $\alpha, \beta, \dots, \lambda = \hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$ uzayzaman indisleri, ikinci yarısıyla da $\mu, \nu, \dots, \omega = \hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$ uzay indisleri gösterilmektedir.

Şimdi ϕ kütleçekim potansiyeli ile betimlenen bir kütleçekim alanı olduğunu kabul edelim. Matematiksel olarak ϕ skaler bir fonksiyon olduğu için aynı zamanda buna skaler kütleçekim potansiyeli de denir. Bu durumda noktasal parçacıkların izledikleri seçilmiş dünya-çizgileri serbest düşme ile ilintili olanlardır. x^α koordinat

kartında (sisteminde) serbest düşme $d^2x^{\hat{0}}/dt^2 = 0$ denklemiyle birlikte Newton hareket kanunuyla betimlenir.

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} = -\partial^\mu\phi \quad (3.3)$$

Vektör notasyonunda bu denklem $d^2\vec{r}/dt^2 = -\nabla\phi(\vec{r})$ olarak yazılır. Skaler kütleçekim potansiyeli, \mathbb{R}^3 üzerinde verilen bir ρ kütle dağılımı cinsinden yazılan Poisson Denklemiyle belirlenir (Adak 2024).

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \quad (3.4)$$

Burada G evrensel çekim sabitidir. Newton teorisinde dikkat edilmesi gereken en önemli özellik kütleçekim alanının uzayzaman geometrisinin bir parçası olmamasıdır. Kütleçekim alanı, ϕ vasıtasıyla “elle” konur. M_4 üzerinde tanımlanan bir metriğin olmamasına da özellikle dikkat edilmelidir. $h = h_{\mu\nu}(\vec{r})dx^\mu \otimes dx^\nu$ gibi bir metrik yalnızca uzayzaman parçası \mathbb{R}^3 uzayında tanımlanır. Esasında, Newton kütleçekim teorisine Einstein kütleçekim teorisinin sahip olduğu geometriye çok benzeyen bir geometrik biçim vermek mümkündür. Ancak, buradaki geometrik yapı kütleçekiminin görelî teorilerinin sahip olduğundan çok daha karmaşık olurdu. Örneğin, Newton kütleçekim teorisinin geometrisi M_4 üzerinde sadece bağlantı terimiyle tanımlanmalıdır. Bu tarifte 3-metrik h 'nin görevi ikinci derece önem teşkil etmektedir (Adak 2024).

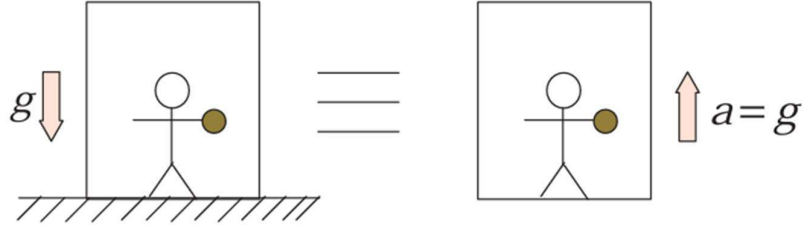
3.2 Eşdeğerlilik İlkesi

Birinci açıklama. Galileo (1564-1642) kütleçekim alanı içinde bütün cisimlerin aynı oranda düşeceğini söylemiştir. Buna rağmen Einstein eylemsizlik kütlesiyle (m_e), kütleçekim kütlesini (m_g) birbirinden ayırmıştır. Newton'un ikinci yasasını $\vec{F} = m_e\vec{a}$ ve Newton'un kütleçekim yasasını $\vec{F} = m_g\vec{g}$ olarak ele almıştır. Bu durumda yüksek bir kulenin tepesinden bırakılan bir cismin ivmesi şöyle olur.

$$\vec{F} = m_g\vec{g} = m_e\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{m_g}{m_e}\vec{g} \quad (3.5)$$

O halde, Galileo açıklamasına göre m_g / m_e oranı bütün cisimler için aynı olmalıdır. Bu oranın 1 olduğu, yani $m_g = m_e$ olduğu deneysel olarak da çok hassas bir şekilde defalarca gösterilmiştir. 1686 Newton, 1832 Bessel, 1889 Eötvös, 1964 Dicke, 1972 Brakinsky&Panav. Bu sonuca *eşdeğerlilik ilkesi* denir. Bu sonucu Einstein kabini üzerinde daha görsel olarak verebiliriz (Adak 2024).

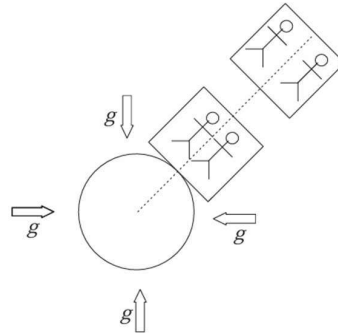
İkinci açıklama. Şimdi, iki asansör kabini olsun. Biri yer yüzeyinde hareketsiz duruyor ve diğeri de kütleçekiminin olmadığı bir bölgede yukarı doğru $a = g$ ivmesi ile hızlanıyor.



Şekil 3.1: Hareketli ve hareketsiz kabinlerde ivme. Soldaki kabin dünya yüzeyinde hareketsiz duruyor. Dolayısıyla gözlemci dünyanın kütleçekim alanını hissediyor. Sağdaki kabin ise yukarı doğru g ivmesiyle hızlanıyor. Yani, gözlemci kabin ivmesini hissediyor.

Her iki kabinin içinde de gözlemci var ve her ikisi de kollarını yana açarak ellerinde birer taş tutuyorlar. Her ikisinin de boyları aynı olsun. Eğer taş serbest bırakılırsa, her iki gözlemci de taşın aynı zamanda ve aynı biçimde kabinin tabanına vardığını gözlemler. Sonuç olarak, kabinin içindeki gözlemci, hiçbir mekanik deneyle dünya yüzeyinde duran kabinin içinde mi yoksa kütleçekiminin olmadığı bir yerde ivmeli bir kabinin içinde mi olduğunu ayırt edemez (Şekil 3.1).

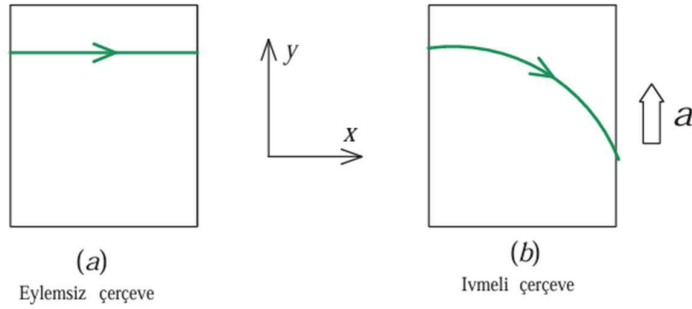
Eşdeğerlilik İlkesi : Yerel olarak kütleçekim \equiv İvme



Şekil 3.2: Eşdeğerlilik ilkesi yerel olarak geçerlidir. Ancak global olarak geçerli değildir.

Eşdeğerlilik ilkesi yalnızca yerel olarak geçerlidir. Yani yerelden kasıt uzayzamanın çok küçük bir bölgeleri için geçerlidir. Daha görsel olması açısından şu olayı inceleyebiliriz. Dünyamızdan 10 km uzakta hareketsiz duran kabinde iki gözlemci aralarında bir metre olacak biçimde ayakta duruyor olsunlar. Kabin dünya yüzeyine gelirse iki gözlemci arasındaki mesafe bir metreden daha az (örneğin yarım metre) olacaktır. (Bu gelgit etkisi olarak bilinir $F_{gel-git} \sim 1/r^3$). Buna göre, kabindeki gözlemciler küresel bir gök cisminin kütleçekim alanı içinde olduklarını anlayacaklardır (Şekil 3.2). Eğer ivmeli kabinin içinde olsalardı aralarındaki uzaklık değişmeyecekti. Sonuç olarak büyük mesafeler üzerinden kütleçekim alanı ile ivmeli çerçeve ayırt edilebilir. Daha teknik ifadeyle, eşdeğerlilik ilkesi global olarak geçerli değildir (Adak 2024).

Bu sonucu optik bilimi yardımıyla biraz daha genelleyselim. Einstein'ın kabininin duvarında bir lazer ışık kaynağı olsun. Kütleçekim alanının olmadığı bölgede sabit hızla hareket eden kabinde lazer düğmesine basılırsa lazer ışığının izlediği yol düz bir çizgidir (Şekil 3.3a). Eğer kabin yukarı doğru a ivmesi ile hızlanırsa lazer ışığının izlediği yol bir parabol olacaktır (Şekil 3.3b). Bunu daha açık görmek için düzeneği şöyle tasarlayalım. $t = 0$ anında ışık açılıyor ve kabin de ivmelenmeye başlıyor. t süre sonra ışığın yatay konumu $x = ct$ iken düşey konumu $y = -\frac{1}{2}at^2$ olur. Bu iki denklemden t yi yok edersek ivmeli çerçevede ışığın izlediği yörüngenin $y = -\frac{a}{2c^2}x^2$ ile verilen bir parabol olduğu görülür (Adak 2024).



Şekil 3.3: Işık kütleçekim alanı içinde bükülür.

Sonuçta ivmeli çerçevede ışık eğri yörüngede hareket eder. Eşdeğerlilik İlkesi'ne göre de kütleçekim alanı yerel olarak ivmeli çerçeve ile aynı etkiye sahip. O halde, ışık

kütleçekim alanı içinde eğri yörüngede hareket eder. Şimdi de Fermat'ın meşhur ilkesini hatırlayalım : “Işık iki nokta arasında en kısa yörüngede yolculuk eder.” Buna en az eylem ilkesi de denir. Öyleyse, kütleçekim alanı içinde, iki nokta arasındaki en kısa yol eğridir. Yani, kütleçekim alanının bulunduğu uzay eğridir. Daha genel olarak “uzayzaman eğridir” denir (Adak 2024).

Üçüncü ifade. Bu fenomenolojik yaklaşımı daha teknik terimlerle aşağıdaki gibi özetleyelim. Kartezyen koordinatlarda $x^{\alpha'} = (T, X, Y, Z)$ Minkowski uzay zamanında metrik bileşenleri ve serbest parçacık denklemleri sırasıyla

$$g_{\alpha'\beta'} = \text{diag} (-1,+1,+1,+1), \quad \frac{d^2x^{\alpha'}}{d\tau^2} = 0 \quad (3.6)$$

olur. Kütleçekim alanı içinde ve/veya ivmeli çerçevelerde bunlar şöyle yazılır.

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x), \quad \frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0 \quad (3.7)$$

Burada $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ Cristoffel sembolleri veya bağlantı katsayıları olarak isimlendirilir. Bu semboller eylemsiz ivmeleri ve kütleçekim ivmelerini içinde barındırır. Bağlantı katsayılarını da belirleyen metrik olduğu için esasında metrik ile kütleçekim arasında bir ilişki vardır. Yani, geometriyle kütleçekim iç içedir. O halde, eşdeğerlilik ilkesi şöyle ifade edilebilir: “Kütleçekim alanı içinde hiç bir koordinat dönüşümü $g_{\alpha\beta} \rightarrow g_{\alpha'\beta'}$ yapmaz. Ancak yerel olarak $g_{\alpha\beta} \simeq \text{diag} (-1,+1,+1,+1)$ mümkündür. Bu durumda zaten $\Gamma^\alpha_{\beta\rho} \simeq 0$ olur.” (Adak 2024).

3.3 Einstein'ın Genel Görelilik Teorisi

Einstein'ın Genel Görelilik Teorisi esasında Newton'un kütleçekim teorisinin yerini alan bir kütleçekim teorisidir ve Özel Görelilik Teorisinin bir genellemesidir. Bu genellemenin nasıl yapıldığını Einstein'ın izlediği yolları takip ederek göreceğiz. O'nun kullandığı formalizm ve notasyon çok karmaşık ve çetrefillidir. Biz daha güçlü geometrik metotları kullanarak daha sade ve hızlı bir biçimde aynı sonuca varmayı tercih edeceğiz. Einstein'ın gerçek evrenin bir çeşit M_4 püsüdo-Riemannsal manifold olduğunu ve böylece Minkowski uzayzamanının bir genellemesi olduğunu varsaymıştır. Herhangi bir yerel koordinat sisteminde $x^\alpha = (x^{\hat{0}}, x^\mu) = (ct, \vec{r})$ metrik aşağıdaki gibi olur.

$$ds^2 = g_{tt}(t, \vec{r})c^2 dt^2 + 2g_{t\mu}(t, \vec{r})cdtdx^\mu + g_{\mu\nu}(t, \vec{r})dx^\mu dx^\nu \quad (3.8)$$

Burada yerel olarak Minkowski olması için $g_{tt} < 0$ olmalıdır. Başlangıç olarak, Einstein şu durumu düşünmüştür. Elimizde yıldızlar gibi cüsseli bir nesne ile onun etrafında dolanan gezegen gibi çok küçük bir deneme cismi olsun. Cüsseli nesnelere bir biçimde eldeki metriği belirlesin. Fakat, deneme cismi bu metriği önemli miktarda etkilemesin. Kütleçekiminin durağan olduğunu, yani metrik bileşenlerinin yerel zaman koordinatına t , bağlı olmadıklarını, $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(\vec{r})$, kabul edeceğiz. Aslında, daha fazlasına kabul edeceğiz. Düzgün dönen Güneşimiz böyle bir durağan metrik oluşturabilir. Bu tür dönme etkilerinden de kurtulmak için metriğin uzay ve zaman karışım bileşenlerini sıfır yaparız, $g_{t\mu} = 0$. Bu iki özelliğe sahip metriğe statik metrik denir (Adak 2024).

$$ds^2 = g_{tt}(\vec{r})c^2 dt^2 + g_{\mu\nu}(\vec{r})dx^\mu dx^\nu \quad (3.9)$$

Deneme parçacığının (diyelim ki bir gezegen) dünya çizgisi boyunca öz-zaman parametresini, τ ,

$$c^2 d\tau^2 := -ds^2 \quad (3.10)$$

olarak tanıtabiliriz. Bunu bir üst denklemde kullanarak öz-zaman ile koordinat zamanı arasında bir bağıntı elde ederiz.

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = -g_{tt} - \frac{g_{\mu\nu}}{c^2} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \quad (3.11)$$

Parçacık, ışığa kıyasla çok yavaş hareket etsin. Böylece, uzaysal hız vektörünü sıfır alabiliriz, $v^\mu = dx^\mu / dt \sim 0$. Sonuçta hız vektörü şöyle olur.

$$u^\alpha := \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \left(\frac{dt}{d\tau}\right) \left(\frac{dx^\alpha}{dt}\right) = \left(\frac{dt}{d\tau}\right) (c, \vec{v}) \sim \left(\frac{dt}{d\tau}\right) (c, \vec{0}) \sim \frac{1}{\sqrt{-g_{tt}}} (c, \vec{v}) \quad (3.12)$$

İlaveten, parçacığın çok zayıf bir kütleçekim alanı içinde hareket ettiğini varsayacağız. Buna göre uzayzaman neredeyse Minkowski uzayzamanıdır, $g_{tt} \sim -1$. Ancak g_{tt} nin uzaysal türevini ihmal etmeyeceğiz. Bu şekilde, kütleçekim alanında uzaysal inhomojenliklere izin vermiş oluyoruz. Newton kütleçekim teorisinde kütleçekim ivmesinin dünya yüzeyine uzaklıkla değiştiğini hatırlayalım. Galileo yasası kütleli bir cismin yakınında tüm deneme parçacıklarının aynı ivme ile düşeceklerini söyler. Bu gerçek, Einstein'ın kütleçekim kuvvetinin merkezkaç ve Coriolis kuvvetleri gibi hayali kuvvet olduğunu düşünmesine neden olmuştur. Serbest düşen bir deneme cismi hiç kütleçekim kuvveti hissetmez. Serbest düşme yapması engellendiğinde cisim bir kuvvet hisseder. Örneğin, Dünyanın sert yüzeyinde ayakta duran bir kişi kütleçekim kuvvetini hissetmez. Onun hissettiği, kendisinin gezegenin merkezine doğru doğal serbest düşme yapmasını engelleyen Dünyanın uyguladığı moleküler kuvvetlerin bileşkesidir (Adak 2024).

O zaman Einstein hiçbir dış kuvvete maruz kalmayan (hayali kütleçekim kuvveti hariç) bir deneme nesnesinin uzayzamanın jeodeziklerinden biri olan bir dünya-çizgisine sahip olması gerektiğini varsaymıştır. Bu durumda $d\tau \sim dt$ olduğundan jeodezik denklemi

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} \sim \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} \sim -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{dt} \frac{dx^\gamma}{dt} \sim -c^2 \Gamma^\alpha_{tt} \quad (3.13)$$

sonucunu verir. Özel olarak uzaysal bileşenleri yazarsak

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} \sim -c^2 \Gamma^\mu_{tt} = \frac{c^2}{2} g^{\mu\alpha} \left(\frac{\partial g_{t\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial g_{\alpha t}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tt}}{\partial x^\alpha} \right) = \frac{c^2}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{tt}}{\partial x^\nu} \quad (3.14)$$

elde ederiz. Üç boyutlu vektör lisansında bunu şöyle yazabiliriz, $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \approx \vec{\nabla} \left(\frac{c^2 g_{tt}}{2} \right)$. Bu sonucu (3.3) denklemi ile kıyaslırsak $c^2 g_{tt}/2 = -\phi + sbt$ olur ve sonsuzda

kütleçekim potansiyelinin $\phi \rightarrow 0$ olduğunu kabul edersek $g_{tt} \sim -1$ olması için $sbt = c^2/2$ olmalıdır. Sonuçta

$$g_{tt} \simeq -1 - 2\phi / c^2 \quad (3.15)$$

olur. Böylece Einstein g_{tt} bileşenin Newton kütleçekim potansiyeli ile yakından bir ilişkili olduğu sonucuna varmıştır. Fakat o zaman diğer metrik bileşenler için ne söylenebilir? Henüz burada açıkça gösterilmedi ama elbette bir rol oynamalıdır. Bu aşamada aşağıdaki karşılaştırmaları yapmak yararlı olacaktır (Adak 2024).

1. Newton'un kütleçekim teorisi tek bir skaler potansiyelle ϕ betimlenir. Bu teori skaler bir teoridir. Burada kütleçekim potansiyeli ϕ Poisson Denklemi denen bir alan denklemini (3.4) sağlar.
2. Maxwell'in elektromanyetik teorisi bir tane potansiyel 1-form A tarafından betimlenir. 1-form bir vektöre dual olduğundan dolayı bu teori **vektörel** bir teoridir. Potansiyel 1-formu A Maxwell denklemi olarak bilinen bir alan denklemini $d * dA = \frac{1}{c\epsilon_0} J$ sağlar. Burada J elektromanyetik akım 3-formudur.
3. Einstein'ın kütleçekim teorisi 10 tane "metrik bileşeni (potansiyeli)" $g_{\alpha\beta}$ tarafından betimlenir. Metrik, simetrik kovaryant (0,2)-tipi bir tensör olduğu için bu teori **tensör** teorisidir.

Burada $g_{\alpha\beta}$ tarafından sağlanan alan denklemini bulmak için ilk olarak tek bir deneme parçacığı yerine ρ yoğunluğuna sahip bir toz bulutunu düşünelim. Toz demekle basıncın ihmal edildiği ideal bir akışkanı kastediyoruz. Basınç gradyenin sıfır olması moleküllerin her birinin kütleçekim etkisi altında serbest düşme yapmasını garantiler. O halde her bir parçacığın yörüngesini γ_0 referans olarak kullanalım. $\delta\vec{r}$ niceliği t anında referans parçacığını sonsuz yakın komşu parçacığa birleştiren sapma vektörü olsun. Varyasyon ile zaman türevi sıra değiştirme özelliğine sahiptir, $(d/dt) \circ \delta = \delta \circ (d/dt)$. Bu durumda (3.3) denklemini yeniden yazabiliriz.

$$\frac{d^2}{dt^2}(\delta x^\mu) = \delta \left(\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} \right) = -\delta(\partial^\mu \phi) = -\partial_\nu(\partial^\mu \phi) \delta x^\nu \quad (3.16)$$

Şimdi de aynı fiziksel duruma 4-boyutlu uzayzamanda bakalım. Bu durumda parçacıkların Dünya çizgileri γ jeodezikleri olacaktır. Sapma vektörü ile Riemann

eğrilik tensörü arasındaki ilişkiyi *jeodezik sapma denklemi* $a^\alpha = -R_{\delta\beta\gamma}^\alpha \xi^\beta T^\gamma T^\delta$ ile verilir, $D^2 \xi^\alpha / d\tau^2 = -R^2_{\delta\beta\gamma} \xi^\beta T^\gamma T^\delta$. Zayıf alan ve düşük hız limitinde yine $\tau \sim t$ yazabiliriz. Böylece $T^\alpha = dx^\alpha / d\tau \sim dx^\alpha / dt = (c, \vec{v}) \sim c\delta_0^\alpha$ ve $D\xi^\alpha / d\tau \sim d\xi^\alpha / dt$ olduğu için jeodezik sapma denklemi şöyle olur.

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{dt^2} \simeq -R_{\hat{0}\beta\hat{0}}^\alpha \xi^\beta \quad (3.17)$$

Burada $\xi^\alpha \equiv \delta x^\alpha$ koyup bir önceki denklemle (3.16) ile kıyaslırsak

$$R_{\hat{0}\beta\hat{0}}^\alpha \simeq \partial^\alpha \partial_\beta \phi \quad (3.18)$$

elde ederiz. Riemann eğrilik tensörü ilk iki indiste ve son iki indiste anti simetrik olduğu için bu denklemi $R_{\hat{0}\beta\hat{0}}^\mu \simeq \partial^\mu \partial_\nu \phi$ olarak yazabiliriz. Sağ taraf $\partial^\mu \partial_\mu \phi \equiv \nabla^2 \phi$ olarak yazıldığında bu denklem

$$\nabla^2 \phi \simeq R_{\hat{0}\mu\hat{0}}^\mu = (Ric)_{\hat{0}\hat{0}} \quad (3.19)$$

biçimine gelir. Ricci eğrilik tensörünün $R_a = \iota_b R^b_a$ denklemi ile verilen tanımına eşdeğer olan $(Ric)_{\alpha\beta} = R^\gamma_{\alpha\gamma\beta}$ tanımı gereğince zayıf bir alan için yavaşça hareket eden bir toz için Poisson denklemi

$$\nabla^2 \phi \sim (Ric)_{\hat{0}\hat{0}} = 4\pi G\rho \quad (3.20)$$

sonucuna dönüşür. Diğer bir ifadeyle madde varsa uzay zaman eğri olmalıdır. Bu denkleme göre Ricci tensörünün $\hat{0}\hat{0}$ bileşeni (bu bir skalerdir) yoğunlukla orantılıdır (Adak 2024). Fakat, yoğunluk görelilikte bir skaler değildir. Bir Lorentz dönüşümü altında γ görelî düzeltme çarpanı olmak üzere, m durgun kütlesi γm ve V hacimde V / γ olarak dönüşüyordu. $\rho = m / V$ olarak tanımlanan yoğunluk da $\gamma^2 \rho$ olarak dönüşür. Bu da yoğunluğun esasında ikinci mertebeden bir tensörün bileşenlerinden biri olduğu fikrini ortaya çıkarır. Öyleyse mükemmel akışkan enerji momentum tensörünü, $T = T_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta$,

$$T_{\alpha\beta} = (\rho c^2 + p)u_\alpha u_\beta + p g_{\alpha\beta} \quad (3.21)$$

olarak tanımlarız. Burada u^α boyutsuz zamansal bir vektör, $u^\alpha u_\alpha < 0$, p akışkan basıncı ρ akışkanın durgun kütle yoğunluğudur. Yavaşça hareket eden parçacıklardan oluşan toz durumunda $p \simeq 0$ ve $u^\alpha \simeq \delta_0^\alpha$ olduğu için T 'nin sıfırdan farklı bileşeni $T_{\hat{0}\hat{0}} \simeq \rho c^2$ çıkar. O zaman (3.20) denklemini $(Ric)_{\hat{0}\hat{0}} \simeq \frac{4\pi G}{c^2} T_{\hat{0}\hat{0}}$ olarak yazabiliriz. Bunun da bir tensör denklemini ima ettiği çok bellidir.

$$(Ric)_{\alpha\beta} = \frac{4\pi G}{c^2} T_{\alpha\beta} \quad (3.22)$$

Bu da aslında Einstein'ın 1915 Kasım ayının başında hareket halindeki bütün maddeler için ortaya sürdüğü denklemdir. Ancak bu denklem doğru değildir. Enerji-momentum korunumundan $T_{\alpha\beta}$ tensörünün diverjansının sıfır olduğunu, $DT_{\alpha\beta} = 0$, biliyoruz. Fakat Ricci tensörünün bu özelliği yoktur, $D(Ric)_{\alpha\beta} \neq 0$. Maxwell, nasıl Ampere yasasına deplasman akımını ekleyerek yük korunumunu garantilediyse Einstein'ın bu denklemi aynı düşünceyle düzeltilmeliydi. Aynı Kasım ayının sonunda Einstein doğru denklemi elde etmiştir.

$$(Ric)_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \mathcal{R} g_{\alpha\beta} = \frac{4\pi G}{c^2} T_{\alpha\beta} \quad (3.23)$$

Burada $\mathcal{R} = (Ric)^\alpha{}_\alpha$ eğrilik skaleridir. Bir tensör denklemi olan Einstein denklemini koordinat seçiminden bağımsız olarak ortonormal indislerde de yazabiliriz.

$$(Ric)_{ab} - \frac{1}{2} \mathcal{R} \eta_{ab} = \kappa T_{ab} \quad (3.24)$$

Eşitliğin sol tarafına $G_{ab} := (Ric)_{ab} - \frac{1}{2} \mathcal{R} \eta_{ab}$ Einstein tensörü denir ve κ bağlanma katsayısı olarak bilinir. Newton teorisi ile uyumlu olması için $\kappa = 8\pi G / c^4$ olmalıdır. Diferansiyel formlar cinsinden yazılmak istenirse $G_a := G_{ab} * e^b$ Einstein 3- formu ve $\tau_a := T_{ab} * e^b$ enerji momentum kısaltmasıyla aşağıdaki iki denklem de Einstein Denklemi'nin literatürde görünen eşdeğer biçimleridir.

$$-\frac{1}{2} R^b{}_c \wedge * (e_a \wedge e_b \wedge e^c) = \kappa \tau_a \quad (3.25a)$$

$$R_a - \frac{1}{2} \mathcal{R} e_a = \kappa * \tau_a \quad (3.25b)$$

Buradaki iki ifade bir Hodge yıldızı ile birbirine dönüşür (Adak 2024).

Tablo: 3.1 Newton mekaniği ile Einstein mekaniğinin kıyaslaması

	Newton Mekaniği	Einstein Mekaniği
Serbest parçacığın hareket denklemi	$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 0$ $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$	$d^2x^\alpha/d\tau^2 = 0$ $dx^\alpha dx_\alpha = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$
Kütleçekim alanı içindeki parçacığın hareket denklemi	$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla}\phi$	$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \omega^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0$ burada $\omega^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\delta}(\partial_\beta g_{\gamma\delta} + \partial_\gamma g_{\beta\delta} - \partial_\delta g_{\beta\gamma})$
Kütleçekim alan denklemi	$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$	$(Ric)_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta}$ burada $R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial\omega^\alpha_{\beta\delta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial\omega^\alpha_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} + \omega^\alpha_{\epsilon\gamma}\omega^\epsilon_{\beta\delta} - \omega^\alpha_{\epsilon\delta}\omega^\epsilon_{\beta\gamma}$ ve $(Ric)_{\alpha\beta} = R^\gamma_{\alpha\gamma\beta}$ ve $\mathcal{R} = R^\alpha_{\alpha}$
Kütleçekim+Diğer	$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla}\phi + \vec{F}_{Diğ}$	$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \omega^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = f_{Diğ}^\alpha$

Buraya kadar Einstein Denklemi'nin birbirine eş değer üç farklı biçimini (3.23), (3.25a) ve (3.25b) yazdık. Bu denklemlerin sağ tarafındaki enerji-momentum tensörü sadece mükemmel akışkan olmak zorunda değildir. Esasında geometrik niceliklerin (R^a_b, R_a, \mathcal{R}) haricindeki bütün terimleri (skaler alan, elektromanyetik alan, enerji, basınç, germe, vs), τ_a içine yedirebiliriz. İlaveten Einstein tensörünü Einstein-Hilbert eyleminin köçerçeve varyasyonundan da elde edebiliriz, $I_{EH} = \int_M L_{EH}$ burada L_{EH} Einstein-Hilbert Lagrange 4-formudur (Adak 2024).

$$L_{EH} = \frac{1}{2\kappa} R^a_b \wedge * (e_a \wedge e^b) \quad (3.26)$$

Şimdi tarihsel bir ayrıntıyı da özetle anlatalım. Einstein, denklemini ortaya attıktan sonra kozmolojik çözümlerde dinamik evren fikrinden hoşlanmadığı için denklemine bir de kozmolojik sabit, λ , eklemiştir.

$$G_a - \lambda * e_a = \kappa \tau_a \quad (3.27)$$

Sonradan bu astrofiziksel gözlemler nedeniyle bu terimden vazgeçmiştir. Ancak sonraları daha kapsamlı kütleçekim teorilerinde kozmolojik sabit önemli hale geldiğinden ileride, kendisinin bu kozmolojik sabit eklemesi hakkında, “Hayatta yaptığım en ahmakça iştir.” diyecektir. Boşlukta, $\tau_a = 0$, bu denklemin çözümleri tarafından oluşturulan püsüdo- Riemannsal geometrilere *Einstein uzayları* adı verilir (Adak 2024).

Bu aşamada (3.21) ile verilen niceliğe niçin mükemmel akışkanın enerji momentum tensörü denildiğini açıklayalım. Hemen belirtelim ki mükemmel

akışkanlarda ısı iletkimi ve vizkozite ihmal edilmiştir. (3.21) tanımına eşdeğer enerji-momentum 3-formu, τ_a , şöyle ifade edilebilir.

$$\tau_a = (\rho c^2 + p)u_a * u + p * e_a \quad (3.28)$$

Burada $u = u_a e^a$ hız 1-formudur, $u^a u_a < 0$. Hiç dış kuvvete maruz kalmayan, yani Minkowski uzayzamanında, mükemmel bir akışkanın hareket denklemini kartezyen koordinatlarda $D\tau_a = d\tau_a = 0$ olarak ifade ederiz. Buna enerji-momentum korunumu da denir. Bu denklem de esas itibariyle içinde süreklilik denklemini ve Euler denklemini barındırır. Şimdi bunları açıkça görelim.

$$d\tau_a = \{\partial_b [u_a u^b (\rho c^2 + p)] + \partial_b p\} * 1 = 0 \quad (3.29)$$

Düşük hızlarda $p \ll \rho c^2$ geçerlidir. Bu durumda bu denklemin zaman bileşeni mükemmel akışkanın süreklilik denklemini verir.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla^2 \cdot (\rho \hat{v}) = 0 \quad (3.30)$$

Bu sonucu uzaysal bileşende kullanarak mükemmel akışkan için Euler denklemini elde ederiz.

$$\rho \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} = -\vec{\nabla} p \quad (3.31)$$

Bu nedenlerden dolayı (3.28) ile verilen enerji-momentum tensörüne mükemmel akışkan enerji-momentum tensörü adı verilir.

4. KOZMOLOJİ MODELLERİ

Evrenin tarihini, yapısını, dinamiğini inceleyen bilim dalına *kozoloji* denir. Evren denince gökyüzünde olan bütün nesnelere anlarız: yıldızlar, galaksiler, pulsarlar (atarcalar), kuasarlar, kozmik ışınlar, arkaplan ışınımı, vb. Güneş sistemini, ikili yıldızları ve galaksileri bir arada tutan temel kuvvet kütleçekimdir. Genel görecilik teorisi eğri uzayzamanda parçacıkların ve fotonların hareketlerini doğru tarif eden tatmin edici bir kütleçekim teorisidir. Ancak, genel göreceliliği evrene uygulamak kolay olmadığından bazı basitleştirici kabuller yapmamız gerekir (Adak 2024).

1. *Kozmik zaman*. Kozmik zaman mutlaklıdır.
2. *Homojenlik*. Birim hacimdeki galaksi sayısı ve dolayısıyla yoğunluk ρ uzayın büyük bölümü üzerinden düzgündür (bugünkü değeri $\rho \approx 10^{-2} \text{ kg / m}^3$).
3. *İzotropi*. Birim katı açıldaki galaksi sayısı bütün yönlerde aynıdır.

Bu kabuller fiziğin temel korunum yasalarıyla (enerji korunumu, momentum korunumu, açısal momentum korunumu vb.) ilişkilidir. Bunu Mach ilkesi şöyle ifade eder: “Korunum yasaları büyük ölçeklerde madde dağılımının homojen ve izotropik olduğunu söyler.” Evreni modellerken evrendeki madde dağılımını mükemmel akışkan gibi düşünürüz. Yani viskozite ve ısı iletimi yok (Adak 2024).

$$\tau_a = [(\rho + p)\eta_{0a}\eta_{0b} + p\eta_{ab}] * e^b \quad (4.1)$$

Burada ρ öz yoğunluk, p basınçtır. Bu durumda (0,2) -tipi simetrik enerji-momentum tensörünün bileşenleri şöyle olur, $\tau_a = T_{ab} * e^b$

$$T_{ab} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

4.1 de Sitter Kozmolojileri

Matematiksel olarak bu modellerde uzayzaman maksimal simetriye sahiptir. (1+3) boyutlu uzayzamanda metriğin 10 tane bağımsız bileşeni vardır. Eğer 10 tane de Killing vektör alanı varsa, bu geometri maksimal simetriye sahiptir denir. Fiziksel olarak “mükemmel kozmoloji ilkesi” geçerlidir. Diğer bir ifadeyle, evrenin herhangi bir andaki görünümü diğer anlardaki görünümüne eşdeğerdir. 4-boyutlu sabit eğrilikli uzayzamanlar aşağıdaki gibi sınıflandırılır (Adak 2024).

$$\mathcal{R} = sbt \begin{cases} > 0 & \text{de Sitter (dS)} \\ < 0 & \text{anti de Sitter (AdS)} \end{cases}$$

Eğer $\mathcal{R} = 0$ ise de Sitter analizi yapılmaz.

4.1.1 AdS Uzayzamanı

Bu geometri $x^a = (T, X, Y, Z, W)$ kartezyen koordinat kartında

$$\bar{g} = -dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2 - dW^2 \quad (4.3)$$

5-metriği ile birlikte \mathbb{R}^5 içindeki

$$-T^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 - W^2 = -1 \quad (4.4)$$

$M \approx \mathbb{H}^4$ hiperboloidiyle temsil edilebilir, Şekil 4.1. Ads uzayı $\mathcal{R} = sbt < 0$ şeklinde negatif sabit bir skaler eğriliğe ve $SO(2,3)$ izometri grubuna sahiptir.

$$T = \sinh \bar{t} \quad (4.5a)$$

$$X = \sinh \bar{t} \cosh \eta \sin \theta \cos \phi \quad (4.5b)$$

$$Y = \sinh \bar{t} \cosh \eta \sin \theta \sin \phi \quad (4.5c)$$

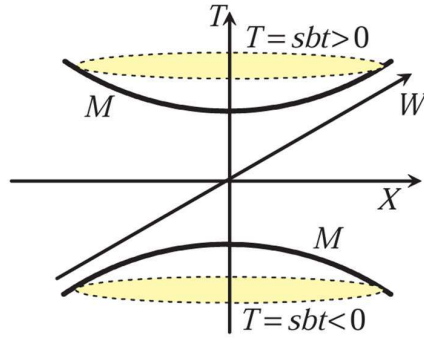
$$Z = \sinh \bar{t} \cosh \eta \cos \theta \quad (4.5d)$$

$$W = \sinh \bar{t} \sinh \eta \quad (4.5e)$$

Koordinat dönüşümlerinden sonra 5-metrik

$$g := \bar{g}|_M = -\cosh^2\eta d\bar{t}^2 + d\eta^2 + \sinh^2\eta(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (4.6)$$

haline gelir. Bu 4-metriğe M 'ye kısıtlanmış metrik denir. Burada η, θ, ϕ Euler açıları veya koordinatları olarak bilinir. Bu uzayzamanda $T = sbt > 0$ hiperyüzeyi ile $T = sbt < 0$ hiperyüzeyi basit bağlı değildir. Diğer bir ifadeyle, evren zaman atlaması yapan negatif eğrilikli bir uzaydır, Şekil 4.1. Zaman atlaması olayı da fiziğin temel ilklerinden nedenselliği bozduğu için anti de Sitter evren modeli fiziksel bir model olarak pek kabul görmez (Adak 2024).



Şekil 4.1: AdS uzayı basit bağlı değildir. Yani zaman atlaması mümkündür.

4.1.2 dS Uzayzamani

Bu geometri $x^a = (T, X, Y, Z, W)$ kartezyen koordinat kartında

$$\bar{g} = -dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2 + dW^2 \quad (4.7)$$

5-metriği ile birlikte \mathbb{R}^5 içindeki

$$-T^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2 = +1 \quad (4.8)$$

$M \approx \mathbb{H}^4$ hiperboloidiyle temsil edilebilir, Şekil 4.2. dS uzayı $\mathcal{R} = sbt > 0$ şeklinde pozitif sabit bir skaler eğrilige ve $SO(1,4)$ izometri grubuna sahiptir.

Aşağıdaki koordinat dönüşümleri

$$T = \sinh\bar{t} \quad (4.9a)$$

$$X = \cosh \bar{t} \sin \chi \sin \theta \cos \phi \quad (4.9b)$$

$$Y = \cosh \bar{t} \sin \chi \sin \theta \sin \phi \quad (4.9c)$$

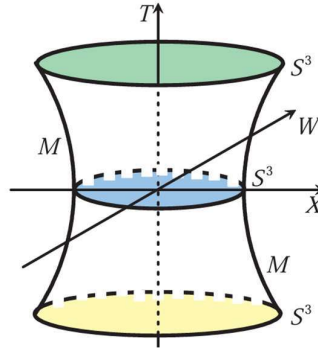
$$Z = \cosh \bar{t} \sin \chi \cos \theta \quad (4.9d)$$

$$W = \cosh \bar{t} \cos \chi \quad (4.9e)$$

denklem (4.7) ile verilen 5-metriği M 'ye kısıtlanan 4-metrik haline gelir.

$$g := \bar{g}|_M = -\cosh^2 \eta d\bar{t}^2 + d\eta^2 + \sinh^2 \eta (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (4.10)$$

Burada χ, θ, ϕ Euler açıları ya da koordinatları olarak bilinir. Buna göre $\bar{t} = sbt$ veya $T = sbt$ olan kesitler $\cosh \bar{t}$ yarıçaplı ve $\mathcal{R} = sbt > 0$ eğrilikli \mathbb{S}^3 Riemann uzaylarıdır. Bu resimde evren önce çöker ve sonra tekrar genişler, Şekil 4.2'de Sitter uzayında $T = sbt > 0$ kesitleri üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanan (t, x, y, z) başka bir kartezyen koordinat takımı hiperboloidin yarısını örter (Adak 2024).



Şekil 4.2: dS uzayı. Herhangi bir T anında alınan kesit için \mathbb{S}^3 küresinin yarıçapı önce küçülür ve sonra artar.

$$t = \ln(T + W), \quad x_i = \frac{X_i}{T+W}, \quad i = 1,2,3. \quad (4.11)$$

Bu yeni koordinatlarda metrik

$$g = -dt^2 + e^{2t}(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (4.12)$$

biçimindedir. Bu metriğe “mükemmel kozmoloji ilkesine” uyan metrik de denir. dS evreninin bu metrik biçimini kullanarak uzayın eğrilik skalerini hesap edelim. İlk olarak ortonormal baz 1-formlarını

$$e^0 = dt, \quad e^i = e^t dx^i \quad (4.13)$$

olarak belirleriz. Buna göre $de^0 = 0$ ve $de^i = e^0 \wedge e^k$ buluruz. Bunları

$$de^a + \omega^a_b \wedge e^b = 0 \quad (*1) \quad \text{veya}$$

$$\omega_{ab} = \frac{1}{2} [-\iota_a de_b + \iota_b de_a + (\iota_a \iota_b de_c) e^c] \quad (*2)$$

tanımında kullanarak Levi-Civita 1-formlarını

$$\omega^0_i = e_i, \quad \omega^i_j = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (4.14)$$

olarak hesap ederiz. Burada $d\omega^0_i = e^0 \wedge e_i$ ve $d\omega^i_j = 0$ hesabı yapıldığında Riemann eğrilik 2-formlarını

$$R^a_b = e^a \wedge e_b, \quad a, b = 0, 1, 2, 3, \quad (4.15)$$

olarak elde ederiz. $a, b, \dots, h = 0, 1, 2, 3$, uzayzaman indisleri ve $i, j, \dots, s = 1, 2, 3$, uzay indisleridir.

Buradan önce Ricci 1-formalarını $R_a = 3e_a$ ve ardından eğrilik skalerini $\mathcal{R} = 12$ pozitif bir sayı olarak buluruz.

Şimdi, şöyle bir soru soralım. Einstein denklemlerinin (4.12) gibi bir çözümü var mıdır? Bunun için kozmolojik sabitli kaynaklı Einstein denklemi yazılmalıdır.

$$R_a - \frac{1}{2} \mathcal{R} e_a + \lambda e_a = 0$$

Bu denklem

$$g = -c^2 dt^2 + e^{\mp 2\sqrt{\frac{\lambda}{3}}t} (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (4.16)$$

biçiminde dS uzayını çözüm olarak kabul eder. Burada $a(t) = e^{\mp 2\sqrt{\frac{\lambda}{3}}t}$ evrenin yarıçapıdır ve seçilen işarete göre evren üstel olarak genişler veya büzülür. Büyük patlama modeline göre evrenin ilk anları de Sitter uzayzamanı iken bir faz geçişinden sonra evrenin zamanla evrimi Friedmann uzayzamanına dönüşmüştür (Adak 2024).

4.2 Friedmann Kozmolojileri

de Sitter modelleri çok fazla simetrik olduğundan dinamik bir durum yaratılamıyor. Simetriyi azaltarak modeli dinamikleştirilebiliriz. 3-uzayın maksimal simetrik olması halinde t kozmik zaman ve $x^i = (x, y, z)$ izotropik koordinatlar seçilirse Robertson-Walker metriği aşağıdaki gibi yazılabilir (Adak 2024).

$$g = -c^2 dt^2 + a^2(t) \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{(1+kx^2/4)^2} \quad (4.17)$$

Burada, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ bir kısaltma, k sabiti eğrilik indisi ve $a(t)$ genişleme fonksiyonudur. Bu metriğin homojen evren modellerinde her zaman kullanırız. Eğrilik indisinin işaretine göre üç farklı evren resmi mümkündür (Adak 2024).

- $k > 0$ kapalı, eğri evren $M \approx \mathbb{T} \times \mathbb{S}^3$
- $k=0$ açık, düz evren $M \approx \mathbb{T} \times \mathbb{R}^3$
- $k < 0$ açık, eğri evren $M \approx \mathbb{T} \times \mathbb{H}^3$

Einstein denklemlerini kullanarak (4.17) metriğindeki $a(t)$ fonksiyonunu belirleyelim. Bunun için önce ortonormal baz 1-formlarını yazarız ve bunların dış türevlerini alırız.

$$e^0 = c dt \quad \Rightarrow \quad de^0 = 0 \quad (4.18a)$$

$$e^i = \frac{a}{1+kr^2/4} dx^i \quad \Rightarrow \quad de^i = \frac{\dot{a}}{ca} e^{0i} - \frac{k}{2a} x_j e^{ji} \quad (4.18b)$$

burada nokta t ye göre türevi, $\dot{a} := da / dt$, ve $e^{ij} := e^i \wedge e^j$ temsil eder.

Ardından (*1) ve (*2) denklemleri yardımıyla Levi-Civita 1-formları hesap edilir.

$$\omega^0_i = \frac{\dot{a}}{ca} e^i, \quad \omega^i_j = \frac{k}{2a} (x^i e_j - x_j e^i) \quad (4.19)$$

Ardından bunların dış türevini hesaplarız.

$$d\omega^0_i = \frac{\ddot{a}}{c^2 a} e^0_i - \frac{k\dot{a}}{2ca^2} x_j e^j_i, \quad (4.20a)$$

$$d\omega^i_j = \frac{k}{a^2} \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right) e^i_j + \frac{k^2}{4a^2} (x^i x_m e^j_m - x_j x_m e^{im}) \quad (4.20b)$$

Sonraki adımda Riemann eğrilik 2-formlarını hesap ederiz.

$$R^0_i = \frac{\ddot{a}}{c^2 a} e^0_i, \quad R^i_j = \frac{kc^2 + \dot{a}^2}{c^2 a^2} e^i_j \quad (4.21)$$

Buradan Ricci 1-formlarını ve eğrilik skalerini yazabiliriz.

$$R^0 = 3 \frac{\ddot{a}}{c^2 a} e^0 \quad \text{ve} \quad R^i = \left(\frac{\ddot{a}}{c^2 a} + 2 \frac{kc^2 + \dot{a}^2}{c^2 a^2} \right) e^i \quad (4.22a)$$

$$\mathcal{R} = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{c^2 a} + \frac{kc^2 + \dot{a}^2}{c^2 a^2} \right) \quad (4.22b)$$

Eğer $a(t) = sbt$ olursa yalnızca uzaysal eğrilik skalerinin sabit olduğuna dikkat çekelim, yani $R^0_i = 0$ ve $R^{ij} = \frac{k}{a^2} e^{ij}$. Bu nottan sonra Einstein denkleminin zaman bileşenini ve uzay bileşenini sırasıyla aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$\dot{a}^2 + kc^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho a^2 \quad (4.23a)$$

$$2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + kc^2 = -8\pi G p a^2 \quad (4.23b)$$

Einstein denklemleri iki tane bağımsız denklem verdi. Fakat modelimizde üç tane bilinmeyen var, $a(t), \rho(t), p(t)$. Sistemi kapatmak için bir denkleme daha ihtiyaç vardır. Bu denklem de basınç ve yoğunluk arasındaki durum denklemdir, $p = p(\rho)$. Statik evren durumu için $\dot{a} = 0$ olmalıdır. Bu durumda eğer $k < 0$ ise (4.23a) denkleminde göre negatif enerji yoğunluğu, eğer $k > 0$ ise (4.23b) denkleminde göre negatif basınç olmalıdır. Fiziksel olmayan bu koşullardan kurtulmak için Einstein kendisi denkleminde kozmolojik sabit terimini eklemiştir (Adak 2024). Bazı fiziksel yorumlar için yukarıdaki iki denklemi değişik biçimlere sokalım. İlk olarak ikinci denklemden birinciyi çıkarırsak

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) a \quad (4.24)$$

buluruz. Şimdi de (4.23a) denkleminin t türevini alalım.

$$\dot{a}\ddot{a} = \frac{4\pi G}{3}(\dot{\rho}a^2 + 2\rho a\dot{a}) \quad (4.25)$$

Sonra da (4.24) denklemini buraya yerleştiriyoruz.

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p)\frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (4.26)$$

Bu denkleme *süreklilik denklemi* denir (Adak 2024).

Bu noktada tarihsel bir olayı özetleyelim. Başlangıçta dünya görüşüne uygun olarak statik evren fikrini savunan Einstein kozmolojik sabiti denklemine eklemiştir. Fakat, sonradan dinamik evren fikrini kabul etmiş ve kozmolojik sabiti silmiştir. En sonunda, genişleyen evren gözlemlerinden sonra “kozmojik sabiti silmem hayatımda yaptığım en aptalca şeydir.” demiştir.

Süreklilik denklemini enerji-momentum korunumundan da türetebiliriz. Bunun için Einstein denklemini $-\frac{1}{2}R^b{}_c \wedge * (e_a \wedge e_b \wedge e^c) = \frac{8\pi G}{c^2} \tau_a$ biçiminde yazıp, kovaryant dış türevini alıp $D * (e_a \wedge e_b \wedge e^c) = 0$ ve $DR^b{}_c = 0$ özdeşliklerini kullanırsak $D\tau_a = 0$ elde ederiz. Bu denklemin zaman bileşenleri (4.26) denklemini verirken, uzay bileşenleri otomatik olarak $0 = 0$ sonucunu verirler. Yani, enerji-momentum korunumu Einstein denklemlerinden bağımsız bir denklem değildir. Burada homojenlik varsayımımızdan dolayı ρ ve p nin sadece t nin fonksiyonu olduğuna dikkate edilmelidir (Adak 2024).

4.2.1 Toz Evresi : $p = 0$

Şimdiye kadarki gözlemsel veriler evrenin madde-baskın biçimde olduğunu gösteriyor, $p \ll \rho$. Yani, yoğunluğun yanında basınç ihmal edilebilir, $p = 0$. Bazı sonuçları sıralayalım.

1. Bu durumda (4.26) denkleminin integrali

$$\rho a^3 = sbt \quad (4.27)$$

sonucunu verir ki everenin toplam kütlesi sabit demektir. Bu noktada şuna dikkat edelim : $a(0) = 0$ olacak şekilde zaman parametresinin orijinini ayarlayabiliriz. Bu durumda t evrenin yaşını gösterir. Alt indis 0 ile parametrelerin bugünkü değerlerini gösterelim; t_0 evrenin bugünkü yaşı, $a_0 = a(t_0)$ ve $\rho_0 = \rho(t_0)$ parametreleri de a ve ρ nun bugünkü değerleridir. Buna göre evren başlangıçta sonsuz yoğunluğu olan bir nokta iken şiddetli bir patlamayla genişlemeye başlamıştır, “büyük patlama”.

2. (4.24) denkleminde $\ddot{R} < 0$ olduğu için genişleme yavaşlıyor. Ancak, evrenin kaderi k 'nin işaretine hassas biçimde bağlıdır, Şekil (4.3). Yukarıdan

$$\rho a^3 = sbt = \rho_0 a_0^3 \quad \Rightarrow \quad \rho = \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \rho_0 \quad (4.28)$$

yazabiliriz. Bunu da (4.23a) denkleminde yerine yazarsak

$$\dot{a}^2 + kc^2 = \frac{A^2}{a} \quad (4.29)$$

buluruz. Burada $A^2 = 8\pi G\rho_0 a_0^3/3$ atadık. Bu denklemi üç durum için integre edebiliriz.

(a) *Düz açık Evren ($k=0$)*

$$\frac{da}{dt} = \frac{A}{a^{1/2}} \quad \Rightarrow \quad a(t) = \left(\frac{3A}{2}\right)^{2/3} t^{2/3} \quad (4.30)$$

Bu resimde $t \rightarrow \infty$ iken $\dot{a} \rightarrow 0$ olduğundan genişleme sonsuzda duracaktır.

(b) *Eğri açık Evren. ($kc^2 = -1$)*

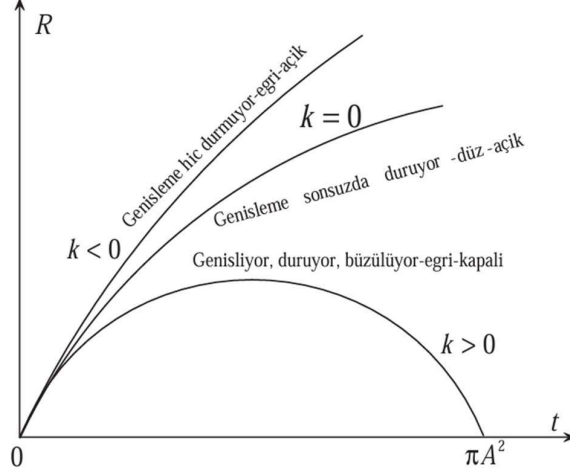
$$\frac{da}{dt} = \left(\frac{A^2+a}{a}\right)^{1/2} \Rightarrow a(t) = A^2 \sinh^2\left(\frac{\psi}{2}\right) \quad (4.31)$$

Burada $t = \frac{A^2}{2}(\sinh \psi - \psi)$. O halde, $t \rightarrow \infty$ iken $\dot{a} > 0$ olduğu için evrenin genişlemesi hiç durmayacaktır.

(c) *Eğri Kapalı Evren. ($kc^2 = +1$)*

$$\frac{da}{dt} = \left(\frac{A^2-a}{a}\right)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad a(t) = A^2 \sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right) \quad (4.32)$$

Burada $t = \frac{A^2}{2}(\psi - \sin\psi)$. Sonlu bir t anında $\dot{a} < 0$ olacağından evrenin genişlemesi sonlu sürede duracaktır ve sonra evren büzülmeye başlayacaktır. Buna göre $t = 0$ anında (büyük patlama) oluşmaya başlayan evrenin ömrü $t = \pi A^2$ anında (büyük çöküş) bitecektir (Adak 2024).



Şekil 4.3: Evrenin sonun ne olacağı. Bu k nin işaretine bağlıdır.

Yukarıdaki sonuçlardan da açıkça görüleceği üzere Evren'in akıbeti eğrilik indisinin işaretine hassas olarak bağlıdır. Peki, k 'nin bugünkü işaretini deneysel olarak ölçme imkanımız var mı? Bu sorunun cevabı için önce (4.23a) denkleminin bugünkü halini yazalım ve k 'yi çekelim.

$$k = \frac{8\pi G a_0^2}{3c^2} (\rho_0 - \rho_c) \quad (4.33)$$

Burada $\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$ kritik yoğunluk ve $H_0 \equiv \frac{\dot{a}_0}{a_0}$ Hubble sabitinin bugünkü değeridir. Çok kesin olmamakla birlikte astronomların gözlemlerine göre $H_0 \approx 50 \text{ km/s.Mpc} \approx 2 \times 10^{-18} \text{ 1/s}$ değeri kullanılabilir ($1 \text{ Mpc} \approx 3 \times 10^{19} \text{ km}$). Burada evrenin bugünkü yaşının $H_0^{-1} \approx 10^{10}$ yıl olduğunu da not edelim. Dolayısıyla $\rho_c = 5,7 \times 10^{-27} \text{ kg/m}^3$. Buna göre k 'nin değerini belirleyebilmemiz için evrenin yoğunluğunun bugünkü değerini ölçmeliyiz. Bunun için iki temel yöntem vardır. Birinci metot optik temellere dayanır. Bu metotta galaktik maddenin parlaklığıyla madde miktarı arasında bir ilişki kurulur; $\rho_0 \approx 0,20 \times 10^{-27} \text{ kg/m}^3$. Diğeri ise açısal hızlar (dolayısıyla 'merkezkaç' kuvvetler) temeline dayanır (Adak 2024).

Bunun için önce yavaşlama parametresi tanımlanır. Astrofizikçiler yavaşlama parametresini Ω (omega) ile gösterirler, $\Omega = 2q_0$.

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}_0 a_0}{\dot{a}_0^2} \quad (4.34)$$

(4.24) denkleminde $p = 0$ koyup ρ için düzenlersek

$$\rho_0 = 2q_0 \rho_c \quad (4.35)$$

buluruz. Burada çok kaba bir sonuç olmakla birlikte $q_0 \sim 0,5$ mertebesindedir. O halde $\rho_0 \approx 5,70 \times 10^{-27} \text{kg} / \text{m}^3$. Buna göre şu sonuçları söyleyebiliriz: ρ_0 için ölçülen iki sonuç arasında fark var. Bu farka “eksik madde” veya “karanlık madde” problemi denir. Şimdiye kadar ortaya çıkmayan bu madde için bazı teorik öngörüler vardır: Kütleli nötrinolar, kara delikler, aksiyonlar, WIMPs (zayıf etkileşen kütleli parçacıklar). Buna göre şimdilik k 'nin değeri için kesin bir sonuç söyleyemiyoruz. Her üç durum da mümkündür (Adak 2024).

Son olarak bu sonuçların Newton fiziğiyle de elde edilebileceğine ilişkin kısa bir not yazalım. Evreni homojen izotropik a yarıçaplı ve M kütleli bir küre gibi düşünersek en dıştaki m kütleli bir nesne (yıldız, göktaşı vs) için enerji korunumu şöyledir.

$$\frac{1}{2} m \dot{a}^2 - \frac{GmM}{a} = sbt \quad (4.36)$$

Burada $M = \rho \frac{4\pi}{3} a^3$. Öyleyse, neden problemi genel görelilikle çözmek için çaba sarfettik? Cevap : (i) Görelilikte basınç toplam enerjiye katkı yapar, (ii) Akışkan yüksek hızlı parçacıklar (yıldızlar vs) içerirse Newton fiziği yetersiz kalır, (iii) Evrende ışığın ilerlemesi görelî bakış gerektirir (Adak 2024).

4.2.2 Radyasyon Evresi : $\rho = 3p$

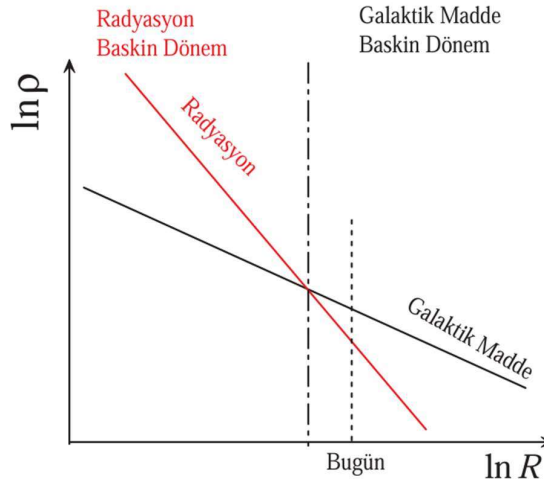
Büyük patlamanın ilk anlarında henüz ağır elementlerden yapılan madde olmadığı için bu dönemi modellerken basıncın yüksek olduğunu kabul edip $\rho = 3p$ yazarız. Bu durumda (4.24) denklemi

$$\ddot{a} = -\frac{8\pi G}{3}\rho a \quad (4.37)$$

haline gelir. Bunu (4.25) denkleminde yerleştirirsek

$$\rho a^4 = sbt \quad (4.38)$$

buluruz. Evren hem galaktik madde hem de radyasyon içerir. Bugün evrendeki galaktik maddenin ve radyasyonun yoğunlukları, sırasıyla $\rho_0^{mad} \approx 10^{-27} \text{ kg / m}^3$ ve $\rho_0^{rad} \approx 10^{-3} \text{ kg / m}^3$. Yani, evrende bugün galaktik madde baskındır. Fakat, büyük patlamanın ilk anlarında radyasyon baskındı, Şekil (4.4)



Şekil 4.4: Evrende radyasyon baskın ve galaktik madde baskın evreleri.

Erken evrede sıcaklık çok yüksekti. O zaman siyah cisim ışınımı için yazılan Stefan-Boltzmann yasasını kullanabiliriz.

$$\rho = \sigma T^4 \quad (4.39)$$

Burada σ Stefan - Boltzmann sabiti, T sıcaklıktır. Bu denklemi (4.38) denklemi ile kıyaslırsak sıcaklık ile genişleme fonksiyonunun ters orantılı olduğunu buluruz (Adak 2024).

$$T \propto \frac{1}{a} \quad (4.40)$$

m parçacık kütlesi olmak üzere $k_B T \gg mc^2$ olacak kadar yüksek sıcaklıklarda kütleli parçacıklar da ultra-görelî hale gelirler ve bir γ radyasyonu gibi davranırlar. Burada k_B Boltzman sabitidir. Diğer değişle kütleyi ihmal ediyoruz. Örneğin, $T = 10^{10} K$ ise $k_B T = 8,7 \times 10^5 \text{ eV} \sim 1 \text{ MeV}$ olurken, $m_e c^2 \approx 0,5 \text{ MeV}$ 'dir.

Erken evrende $\rho \sim 1/a^4$ bağıntısını (4.23b) denkleminin sağ tarafında kullandığımızda $\rho a^2 \sim 1/a^2$ olur ve bu da $a \rightarrow 0$ iken çok büyük olur. Böylece (4.23) denklemindeki kc^2 terimini ihmal edebiliriz.

$$\dot{a}^2 \simeq \frac{8\pi G}{3} \rho a^2 \quad (4.41)$$

Burada $\rho \sim T^4$ ve $\alpha \sim 1/T$ kullanırsak

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)^2 \approx b^2 T^6 \quad \rightarrow \quad T\sqrt{t} = sbt \approx 10^9 \quad (4.42)$$

sonucuna varırız ki burada T Kelvin ve t saniye birimlerindedir. Bu denkleme “evrenin termal tarihi” adı verilir. $t \approx 0$ anlarına “çok erken evren” denir ve bu dönemde bütün parçacıklar (kuarklar, leptonlar, taşıyıcılar) serbest haldeydiler ve evren bir çorbayı andırıyordu. O nedenle kuantum alan teorisinden gelen katkılar hesaba katılmalıdır (Adak 2024).

Tablo: 4.1: Evrenin ilk anından günümüze zaman ve sıcaklık değerlerine göre durumu

t	$T(K)$	Durum
$t \rightarrow 0$	$T \rightarrow \infty$	Büyük patlama
$t \approx 0$	$T \approx \infty$	Eğrilik Planck ölçeğindedir. Kuantum etkileri hesaba katılmalıdır.
$\frac{1}{100} s$	10^{10}	Madde: $\nu, \gamma, e, \bar{e}, n, p$
1 s	10^9	n bozunmaya başlıyor
3s	10^9	\bar{e} tükeniyor. 4He çekirdeği oluşuyor.
10^4 yıl	10^4	H atomu oluşuyor. Galaksilerin oluşumu başladı. Madde baskın olmaya başlıyor.
10^9	1	Bugün

5. YAVAŞLAMA PARAMETRESİNİN GÖZLEMSEL DEĞERLERİ

Çeşitli kozmolojik araştırmalarla elde edilen gözlemsel veriler, evrenin dinamiklerini ortaya çıkarmada önemli bir rol oynamaktadır. 1920 li yıllarda Edwin Hubble'ın SN1a gözlemlerindeki kırmızıya kayma gözlemleri evrenin genişlediği fikrini kanıtlar niteliktedir. Bu genişlemenin devam etmesi bir gün evrende yalnız başımıza kalacağımız düşüncesine neden olduğundan söz konusu genişlemeyi yavaşlatacak etkiler olup olmadığı araştırılmaya başlanmıştır. Bu yavaşlamayı gösterecek etkiyi belirten parametre “yavaşlama parametresi” olarak ifade edilmektedir ve q ile gösterilmektedir (Şen 2018). Evrenin dinamiğini tanımlamada çok önemli bir rol oynar ve en önemli kozmolojik parametrelerden biri olarak kabul edilir (Naik 2023). Evrenimizin statik ve dinamik yapısı Hubble parametresi ve yavaşlama parametresi ile açıklanır. Kozmolojik gözlemlere göre, evrenin genişlemesinde son zamanlarda kozmik bir hızlanmaya geçildi, bu da uzun zaman önce daha yavaş bir genişleme evresine sahip olması gerektiğini gösteriyor (Sevinç 2019). Ölçek faktörünün zamana bağlılığıyla ve yavaşlama parametresinin oranıyla gözlenen galaksinin dinamiği belirlenebilir (Şen 2018).

Günümüzde evrenin hızlanarak genişlemesi karanlık enerjiye bağlanırken bunu açıklamak için genellikle yavaşlama parametresinden yararlanılır. Bu genişlemeyi açıklamak için de bilim insanları farklı iki yaklaşım kullanır. Yaklaşımların birincisi kozmolojik sabit, quintessence, k-essence, chaplying gaz gibi pozitif yoğunluklu, negatif basınçlı egzotik maddelerin varlığına dayanan karanlık enerji modelleridir. Bu özellikler durum denkleminde kendilerini gösterir. Karanlık enerjiden kaynaklanan pozitif yoğunluklu negatif basınç, itici kuvvet olarak adlandırılır ve evrenin genişlemesini açıklamada kullanır. Diğer yaklaşım ise alternatif kütleçekim teorilerini kullanmaktır. Bu teoriler, tensör teori, skaler teori, skaler-tensör teori ile vektör-tensör teori olarak sınıflanabilirler (Şen 2018).

$$q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = -kt + m - 1 \quad (5.1)$$

$a(t)$ ölçek faktörüdür ve üstte nokta zamana göre türevi ifade eder. \dot{A} genişleme hızı, \ddot{A} genişleme hızının zamana göre türevidir. $k \geq 0$ ve $m \geq 0$ sabitlerdir. $k = 0$ olduğunda Berman Kanunu'na (Berman 1983) indirgenir. Böylece, yavaşlama

parametresi kozmolojik çözümler için genelleştirilir ve kozmolojik verilere daha uygun hale gelir.

$q > 0$ ise yavaşlayarak genişleyen evreni,

$q = 0$ ise sabit hızla genişleyen evreni,

$-1 < q < 0$ ise hızlanarak genişleyen evreni,

$q = -1$ ise eksponansiyel olarak genişleyen evreni,

$q < -1$ ise de süper eksponansiyel olarak genişleyen evreni ifade eder.

Ölçek çarpanı aşağıdaki gibi önerilebilir.

$$a(t) = \sqrt{t^\alpha e^t} \quad (5.2)$$

Burada α pozitif bir sabittir. Özel olarak $\alpha = 0$ seçilirse, (5.2) denklemi $a(t) = \sqrt{e^t}$ şeklini alır. Ölçek çarpanının buna dönüştürülmesinin en önemli nedeni, evrenin geçmiş dönemde yavaşlayarak genişlemesi ve günümüzde ivmeli genişliyor oluşunun arasındaki geçişi sağlamaktır. Sonuç olarak yavaşlama parametresi sabit bir değer olmayıp zamanla değişmektedir. Ölçek çarpanının bu özel seçimi de yavaşlama parametresinin zamana bağlı değişimini sağlamaktır (Kale ve diğ. 2023).

Yavaşlama parametresinin, Hubble parametresi ile aşağıdaki gibi bir ilişkisi vardır.

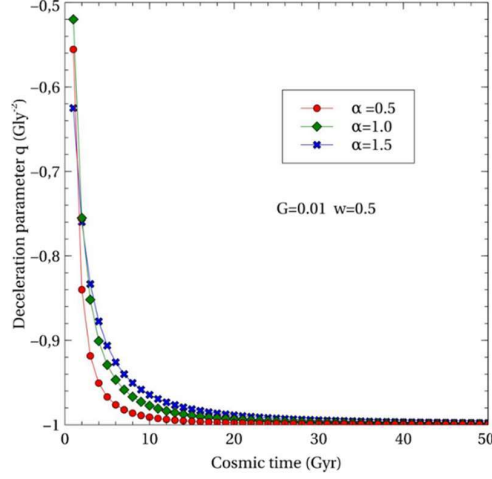
$$q = -1 - \frac{\dot{H}}{H} = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = \frac{\ddot{a}}{aH^2} \quad (5.3)$$

Denklemden $H = \dot{a} / a$ olarak tanımlanmaktadır. Kozmoloji biliminde Hubble ve yavaşlama parametreleri, gözlemsel veriler açısından çok önemlidir. q 'nin işareti de yapılan çalışmanın enflasyon teorisine uyup uymadığını gösterir. $-1 < q < 0$ ise evren hızlanarak, $q = 0$ ise sabit hızla ve $q > 0$ ise de yavaşlayarak genişlemektedir (Sevinç 2019). (5.2) ve (5.3) denklemlerinden yararlanarak

$$q = \frac{2\alpha}{(\alpha+t)^2} - 1 \quad (5.4)$$

bağıntısı bulunur. Buna göre, $q > 0$ için $t < \sqrt{2\alpha} - \alpha$ ve $q < 0$ için $t > \sqrt{2\alpha} - \alpha$ elde edilir, $0 < \alpha < 2$ için evren yavaşlama döneminden hızlanma dönemine geçer. SN1a'daki güncel gözlemler bazı bölgelerdeki oranının $-1 < q < 0$ olduğunu

gösterir. Aşağıdaki grafikte yavaşlama parametresinin, zamana göre $0 < \alpha < 2$ değerleri arasındaki değişimi gösterilmektedir. Buna göre $d = 4$ için standart kozmoloji verileri ile uyumludur (Sevinç 2019).



Şekil 5.1: Yavaşlama parametresinin kozmik zamanla değişimi (Sevinç 2019).

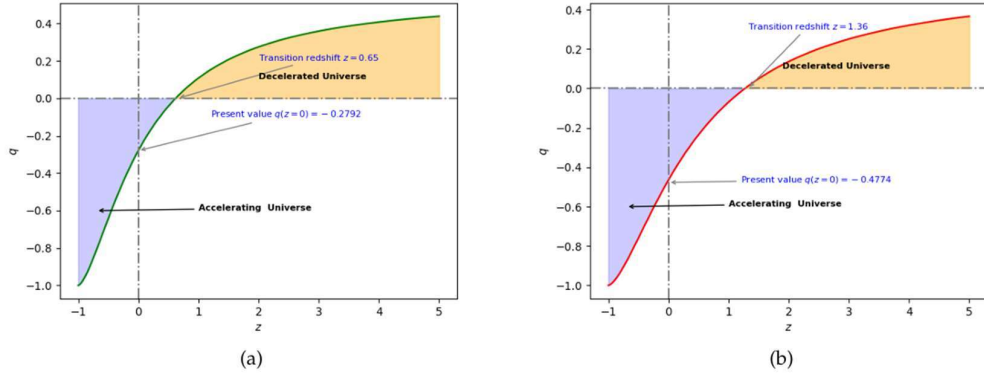
Yavaşlama parametresinin bir başka ifadesi de aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$q = -1 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{H} \right) \quad (5.5)$$

Bu denklem için de $q > 0$ evrenin yavaşlama evresini, $q < 0$ evrenin hızlanma evresini ve $q = 0$ ise evrenin yavaşlama evresinden hızlanma evresine geçtiğini ifade eder (Kale ve diğ. 2023).

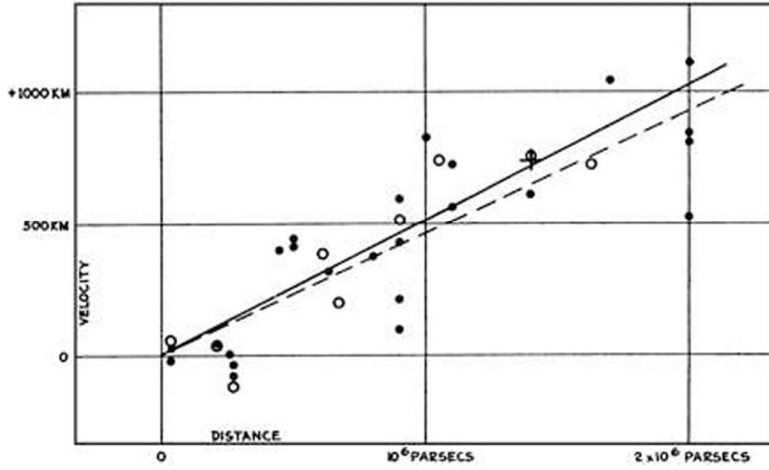
Tablo 5.1: İki veri seti için en uygun değerler

Veri seti	H_0 (km/s/Mpc)	δ	λ	ϵ
Hubble	$64,49^{+0,33}_{-0,32}$	$1,54^{+0,02}_{-0,02}$	$1,14^{+0,068}_{-0,077}$	$30,2^{+0,90}_{-0,87}$
SN 1a	$68,665^{+2,2}_{-2,1}$	$1,53^{+0,28}_{-0,29}$	$1,86^{+0,37}_{-0,34}$	$23,954^{+3,74}_{-2,84}$



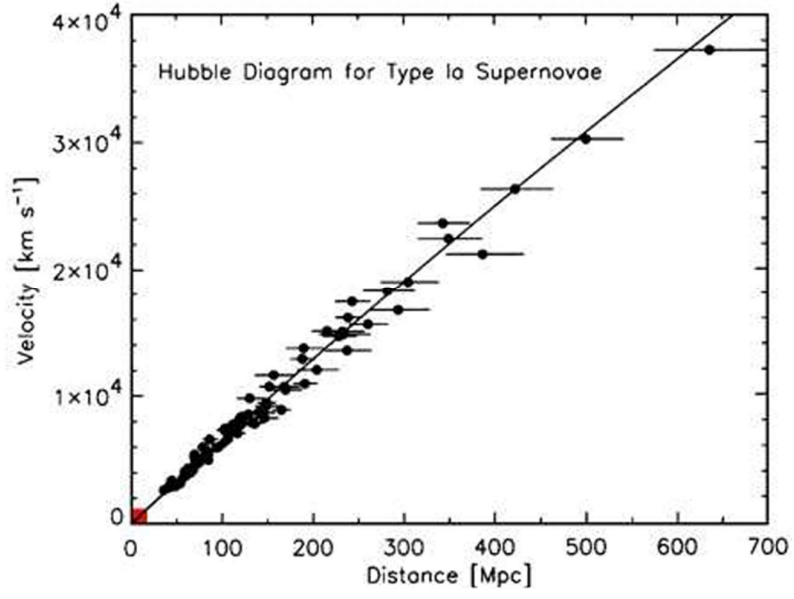
Şekil 5.2: Yavaşlama parametresinin verilere göre çizimi. Tablo 5.1'e göre Hubble (a grafiği) ve SN 1a (b grafiği) verilerine göre gösterimi verilmiştir (Kale ve diğ. 2023).

Gözlemsel olarak, kozmolojik yavaşlama parametresinin değeri, evrenin genişlemesi hakkında önemli bilgiler sağlar. Örneğin, pozitif bir kozmolojik yavaşlama parametresi ($q_0 > 0$), evrenin genişleme hızının azaldığını ve evrenin birbirine çekici bir kuvvetle etkileştiğini gösterebilir. Bu durum, evrende bulunan madde ve enerjinin çoğunluğunun kütleçekimi etkilerine dayandığını gösterebilir. Negatif bir kozmolojik yavaşlama parametresi ($q_0 < 0$) ise genişlemenin hızlandığını ve evrenin genişlemesinde kütleçekimine karşı bir itici kuvvetin varlığını düşündürülebilir.



Şekil 5.3: 1929 da Hubble'ın yaptığı çalışmanın orijinal grafiği.

Hubble'ın yaptığı çalışmada (Şekil 5.3) verilerin oldukça geniş dağılıma sahiptir (Catto ve diğ. 2007).



Şekil 5.4: Hubble'ın 1929'daki çalışmasının 2004 yılında güncellenmesi

Hubble'ın 1929'daki çalışması, yukarıdaki 2004 yılında yapılan çalışmalara ait grafiğin (Şekil 5.4) sol alt kısmında koyu renk kare ile belirtilen kısma karşılık gelmektedir (Catto ve diğ. 2007)

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Gökteki cisimlerin hareketlerini anlamak ve anlatmak için kütleçekim teorisi kullanılır. En güncel teori Genel Görelilik Teorisi olarak bilinir ve Einstein'a aittir. Bu teori diferansiyel geometri matematiksel altyapısını kullanır. Biz bu tezde önce matematiksel altyapı için dış cebir hakkında temel bilgileri verdik. Ardından genel görelilik teorisini dış cebir dilinde yazdık ve Einstein denklemine ulaştık. Son adımda Einstein denklemine izotropik ve homojen evren modeline karşılık gelen bir kozmolojik çözüm elde ettik. Diğer taraftan fizik biliminin ampirik bir bilim olduğu bir gerçektir. Yani, evren dinamiği için bulduğumuz kozmolojik çözümlerin deneylerle ve gözlemlerle doğrulanması gerekir. Genel görelilik teorisine evren yavaşlayarak genişlemelidir. Ancak, son astrofiziksel gözlemler evrenin hızlanarak genişlediğini göstermektedir. Bu bulgulara Hubble parametresinin ve yavaşlama parametresinin bugünkü ölçülen değerleri yardımıyla ulaşılmaktadır.

Bu çalışmada yavaşlama parametresinin tanımı verildi ve gözlemsel değerleri hakkında yorumlar yapıldı. Bunların yanı sıra, kozmolojik yavaşlama parametresi, evrenin genişleme dinamiği hakkında önemli bir gözlemsel değer sağlamaya katkı sağlarken aynı zamanda oluşturulan kozmolojik modellerin doğruluğunu teyit etmemize ve evrenin genişleme tarihçesini anlamamıza yardımcı oluyor. Ancak tüm bu genişleme sürecinin bir sonu var mı? Yeni dönemlerin de araştırma konusu bu evrenin ivmeli genişlemesinin yanında bu genişlemenin nereye kadar devam edeceği, sürecin tersine yani bir geri dönüş olup olmayacağına ilişkin teoriler, özellikle son yıllarda görev alan uzaydaki gözlem araçları ile anlaşılmaya çalışılmaktadır.

6. KAYNAKLAR

Adak, M., “Dış Cebir ve Genel Göreliliğe Giriş (Ders Notları)” Denizli, (2024)

Şen, R. “Yüksek boyutlu FRW evreni için self creation kozmolojide kuark madde çözümleri” Yüksek Lisans Tezi, *Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü*, Fizik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2018)

Naik, D. M., Kavya, N.S., Venkatesha, V., “Observational insights into the accelerating universe through reconstruction of the deceleration parameter”, *Chinese Physics C* Vol. 47, No. 8 (2023) 085107, (2023).

Sevinç, Ö. “Yüksek boyutlu Friedmann-Robertson-Walker modellerinde parçacık yaratma etkilerinin incelenmesi” Doktora Tezi, *İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Fizik Anabilim Dalı, İstanbul, (2019)

Kale, A.P., Solanke, Y.S., Shech, S.H., Prarhan, A., “Transit $f(Q,T)$ Gravity Model: Observational Constraints with Specific Hubble Parameter”, *Symmetry* 2023, 15, 1835. <https://doi.org/10.3390/sym15101835>

Catto, C., Visse, M., “Cosmography: Extracting the Hubble series from the supernova data” *School of Mathematics, Statistics, and Computer Science, Victoria University of Wellington*, (2007) <https://doi.org/10.48550/arXiv.gr-qc/0703122>