

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI

AYAR KURAMLARININ GEOMETRİSİ ve
GENELLEŞTİRİLMİŞ KÜTLEÇEKİM KURAMLARI

DOKTORA TEZİ

ÇAĞLAR PALA

DENİZLİ, AĞUSTOS 2024

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI



AYAR KURAMLARININ GEOMETRİSİ ve
GENELLEŞTİRİLMİŞ KÜTLEÇEKİM KURAMLARI

DOKTORA TEZİ

ÇAĞLAR PALA

DENİZLİ, AĞUSTOS 2024

Bu tez alışması Pamukkale Üniversitesi Bilimsel Araştırma Proje Koordinatörlüęü tarafından 2022FEBE032 nolu proje ile ve TBTAK tarafından 2214-A Yurt Dışı Doktora Sırası Araştırma Programı kapsamında 53325897-115.02-277670 sayılı karar ile desteklenmiştir.

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

Çağlar PALA

O' na...

ÖZET

**AYAR KURAMLARININ GEOMETRİSİ ve GENELLEŞTİRİLMİŞ
KÜTLEÇEKİM KURAMLARI
DOKTORA TEZİ
ÇAĞLAR PALA
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI : PROF. DR. MUZAFFER ADAK)
DENİZLİ, AĞUSTOS 2024**

Genel Görelilik (GG), Einstein tarafından 1915 yılında yayınlandığından bu yana, birçok gözlemsel ve deneysel testlerden başarıyla geçerek günümüzde, gravitasyon hakkında elimizdeki en iyi model olmuştur. Özellikle güneş sistemi skalasında (daha özel olmak gerekirse, görece zayıf gravitasyon alanlarında) verilerle gayet uyumlu teorik öngörülerde bulunabilmiştir. Bununla birlikte, zaman içinde gelişen teknolojik ilerlemeler sayesinde evrenin farklı bölgelerinde ve ekstrem koşullar altında yapılabilen gözlemler göstermiştir ki GG, klasik tanımı çerçevesinde bazı soruları cevaplamakta yetersiz kalabilmektedir. Standart Model kapsamındaki kuantum alan teorilerine benzer bir reçete ile kuantize edilememesi de GG' nin günümüzdeki belki de en önemli teorik sorunudur. Büyük başarıları yanında, yukarıda bahsedildiği gibi, yıllar içindeki gelişmeler sayesinde birçok soru işareti GG' nin hala cevaplamakta zorlandığı problemleri doğurmuştur. Bu noktada bilim insanları, alternatif gravitasyon modelleri üzerinde çalışmaya başlamıştır. Yapılan bu çalışmalar, çok çeşitli olup, hem GG' nin var olan yapısını güncelleme / modifiye etme / vb. gibi işleri kapsarken hem de GG' nin matematiksel altyapısından tamamen farklı yapılar üzerine inşa edilmiş modelleri içermektedir. Ayrıca, gelişen bilgisayar ve dijital işlem gücü ile birlikte nümerik gravitasyon çalışmaları da başlı başına bir aktivite sahası olmuştur. Bu tez kapsamında ise, özellikle gravitasyonun bir ayar teorisi olarak anlaşılması amaçlanmış ve çeşitli Riemann-dışı geometrik altyapılarda kurulan alternatif gravitasyon modelleri çalışılmıştır. Bu modeller bağlamında, test parçacıklarının davranışı ve madde alanının gravitasyon ile etkileşimi incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler : Genel Görelilik, Genişletilmiş gravitasyon teorileri, Alternatif gravitasyon teorileri, Riemann dışı geometri, Ayar teorisi, Dirac denklemi, Lagrange formülasyonu, Varyasyon hesabı

ABSTRACT

GEOMETRY OF GAUGE THEORIES and GENERALIZED THEORIES OF GRAVITY

PhD THESIS

ÇAĞLAR PALA

PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
PHYSICS

(SUPERVISOR : PROF. DR. MUZAFFER ADAK)

DENİZLİ, AUGUST 2024

Since its publication by Einstein in 1915, General Relativity (GR) has successfully passed many observational and experimental tests, making it the best model of gravity we have today. It has been able to make theoretical predictions that agree well with the data, especially at the solar system scale (more specifically, in relatively weak gravitational fields). However, thanks to technological advances over time, observations in different regions of the universe and under extreme conditions have shown that GR may be insufficient to answer some questions within the framework of its classical definition. The fact that it cannot be quantized with a recipe similar to the quantum field theories within the Standard Model is perhaps the most important theoretical problem of GR today. Despite its great successes, as mentioned above, developments over the years have left many question marks that GR still has difficulty to answer. At this point, scientists have attacked the problems that GR is inadequate for by working on alternative gravity models. These studies are very diverse and include updating / modifying / etc. the existing structure of GR and models built on structures completely different from the mathematical infrastructure of GR. In addition, with the developing computer and digital processing power, numerical gravity studies have become an activity field in their own right. In this thesis, especially, it is aimed to understand gravity as a gauge theory and alternative gravitational models established on various non-Riemannian geometrical substructures are studied. In the context of these models, the behavior of test particles and the interaction of matter field with gravity are investigated.

Keywords : General Relativity, Extended theories of gravity, Alternative theories of gravity, Non-Riemannian geometry, Gauge theory, Dirac equation, Lagrange formulation, Calculation of variation

İçindekiler

Özet	i
Abstract	ii
İçindekiler	vi
Liste : Figürler	vii
Liste : Tablolar	viii
Liste : Semboller	ix
Kurallar ve kısaltmalar	xi
Yayın listesi	xiii
Önsöz	xv
1 Giriş	1
1.1 Motivasyon	4
1.2 Tez konusunun önemi	5
1.3 Başlamadan önce özet bilgi	9
I Geometrik temeller ve ayar kuramı	11
2 Matematiksel hazırlık	12
2.1 Manifoldlar ve diferansiyel geometri	12
2.1.1 Manifold	12
2.1.2 Çerçeveler	16
2.1.2.1 Fonksiyonlar ve eğriler	16
2.1.2.2 Manifold içinde (teğet) vektör fikri	17
2.1.2.3 Koteğet vektörleri (kovektörler) ve dualite	18

2.1.2.4	Genel çerçeveler	21
2.1.3	Tensörler	23
2.1.3.1	Tensörel nesnelerin dönüşüm kuralları	26
2.2	Dış cebir	27
2.2.1	Diferansiyel formların integrasyonu	32
2.2.2	Manifold üzerindeki türetmeler (<i>derivations</i>)	34
2.3	Metrik ve bağlantı	35
2.3.1	Metrik	35
2.3.2	Bağlantı	37
2.3.2.1	Bağlantı nesnesinin dönüşüm kuralı	40
2.3.2.2	Levi-Civita bağlantısı	41
2.3.2.3	Eğrilik	42
3	Ayar kuramı	44
3.1	Örnek : Bir ayar teorisi olarak Elektromanyetizma	45
3.2	Ayar teorilerinin geometrisi	47
II	Gravitasyon	49
4	Riemann ve Riemann-dışı geometriler	50
4.1	Cartan yapı denklemleri	52
4.1.1	(Tam) bağlantının ve (tam) eğriliğin ayrıştırılması	53
4.1.2	Geometrilerin sınıflandırılması	55
4.2	Riemann geometrisi	55
4.3	Teleparalelizm (TP)	56
4.3.1	Metrik (Weitzenböck) teleparalelizm (MTP)	57
4.3.2	Simetrik teleparalelizm (STP)	59
4.3.3	Genel teleparalelizm (GTP)	59
4.4	Çeşitli Riemann-dışı etkilerden örnekler	60
4.4.1	Test parçacıkların yörüngesi	60
4.4.2	STP geometride <i>ikincil saat etkisi (SCE)</i>	69
5	Gravitasyon teorileri	80
5.1	Gravitasyon ayar kuramları	80
5.1.1	Uzayzaman simetrisi	82
5.1.1.1	Poincaré dönüşümleri	84
5.1.1.2	Weyl (ölçek) dönüşümleri	89
5.1.2	Poincaré ayar teorisi	92

5.1.2.1	Geometrik yapı	98
5.1.3	Weyl ayar teorisi	99
5.1.3.1	Geometrik yapı	103
5.2	Teleparalel gravitasyon (TPG) modelleri	105
5.2.1	Metrik (Weitzenböck) teleparalel gravitasyon (MTPG) . .	106
5.2.2	Symmetric teleparalel gravitasyon (STPG)	108
5.2.3	Genel teleparalel gravitasyon (GTPG)	110
5.3	Genişletilmiş teoriler	119
5.3.1	Skaler-tensör (ST) teorileri	119
5.3.1.1	Brans-Dicke (BD) teorisi	121
5.3.1.2	ST teorilerin genel formu	123
5.3.1.3	Örnek : STP geometrisinde skaler-tensör teorisi .	124
5.3.2	$f(R)$ teorileri	142
5.3.3	Skaler-tensör ve $f(R)$ teoriler arasındaki ilişki	145
5.3.3.1	Konformal dönüşümler, Jordan ve Einstein çerçeveleri	147
5.4	Gravitasyon ve madde etkileşimi	149
5.4.1	Örnek : Bir Dirac alanının Riemann-dışı geometriye bağlanması	149
III	Son açıklamalar	160
6	Sonuçlar	161
7	Olası devam çalışmaları	165
IV	Ekler	168
A	Group teorisi ve Lie grupları	169
B	Demet yapısı	171
C	Genel lineer koordinat dönüşümleri	174
D	Çerçeveler ve aralarındaki dönüşümler	176
E	Tensör formülasyonu	179
F	Varyasyonel alan denklemleri	182

Liste : Figürler

1.1	Fiziğin kutsal kasesi	4
1.2	Tipik bir spiral galaksinin hız eğrisi : beklenen (A) ve gözlenen (B). Karanlık maddenin bu eğride radyal olarak dış bölgelerdeki “düzleşmeyi” açıklaması beklenmektedir. Kaynak : Wikipedia .	8
2.1	Koordinat yamaları arasındaki geçiş (harita)	14
2.2	Manifold içinde bir eğrinin gösterimi	16
2.3	Manifold içinde bir teğet vektörün gösterimi	18
2.4	Teğet uzayı	19
2.5	Manifold üzerindeki çerçeveler	21
2.6	Paralel taşıma, düz (2.6a) ve eğri (2.6b) uzayda. Kaynak : (Carroll 2004)	38
4.1	Cartan yapılarının geometrik anlamlarına dair. Kaynak : (J. B. Jimenez, Heisenberg ve T. S. Koivisto 2019)	53
4.2	SCE’ nin çizim ile gösterilmesi. Kaynak : Muzaffer Adak	75
5.1	Gravitasyonun ayar teorilerinin sınıflandırılması. Kaynak : (Blagojevic, Hehl ve Kibble 2013)	81
5.2	Gravitasyonun skaler-tensör ve $f(R)$ teorileri arasındaki ilişki. Kaynak : (Sotiriou 2006)	147
B.1	Fiber demet yapısı	171

Liste : Tablolar

3.1	Standart Model kapsamındaki ayar (Yang-Mills) teorileri.	45
3.2	Elektromanyetizmanın ayar teorik içeriği karşısında geometrik içeriği.	47
3.3	Jenerik bir ayar teorisi karşısında Genel Görelilik.	48
4.1	Geometrilerin sınıflandırılması.	56
4.2	Farklı çerçevelerde ayar sabitlemesi uygulanarak elde edilen TP geometriler.	57
5.1	$f(R)$ teorilerin farklı formalizmleri.	145
5.2	Gravitasyon ve Maxwell-Dirac teorisi arasındaki benzerlik. Ek C ile verildiği üzere, vurgulamak isteriz ki, $Gl(n, \mathbb{R})$ ayar grubu ortonormal çerçevede Lorentz grubuna indirgenir.	153
D.1	Koordinat, ortonormal ve karma çerçevelerin karşılaştırılması.	177

Liste : Semboller

$T_p M, T_p^* M$	M manifoldunda p noktası üzerinde tanımlı teğet ve koteğet uzayı (alternatif kullanım $T_p(M), T_p^*(M)$)
TM, T^*M	M manifoldunda tanımlı teğet ve koteğet demeti (alternatif kullanım $T(M), T^*(M)$)
CTM, CT^*M	M manifoldunda tanımlı koordinat teğet ve koordinat koteğet demeti (alternatif kullanım $CT(M), CT^*(M)$)
OTM, OT^*M	M manifoldunda tanımlı ortonormal teğet ve ortonormal koteğet demeti (alternatif kullanım $OT(M), OT^*(M)$)
$T_p^{(r,s)} M$	M manifoldunda p noktası üzerinde tanımlı (r, s) -tip tensör uzayı
$T^{(r,s)} M$	M manifoldunda tanımlı (r, s) -tip tensör demeti
$\bigwedge_p^q M$	M manifoldunda p noktası üzerinde tanımlı q -form uzayı
$\bigwedge^q M$	M manifoldunda tanımlı q -form demeti
$\bigwedge M$	M manifoldunda tanımlı dış cebir
$T^{(r_1 \dots r_n)}$	(Tümüyle) simetrik bir tensörün indis gösterimi
$T^{[r_1 \dots r_n]}$	(Tümüyle) antisimetrik bir tensörün indis gösterimi
$T^{... (r_1 \dots r_2) \dots}$	Sadece r_1 ve r_2 indislerinde simetrik bir tensörün indis gösterimi
$T^{... [r_1 \dots r_2] \dots}$	Sadece r_1 ve r_2 indislerinde antisimetrik bir tensörün indis gösterimi
$\otimes$	Tensör çarpımı
$\wedge$	Dış çarpım (tümüyle antisimetrik tensör çarpımı)
ι	İç çarpım (iç türev)
$*$	Hodge çarpımı (Hodge operatörü)

d, D	Dış türev ve kovaryant dış türev
δL	L nesnesi üzerinde varyasyon işlemi
$\hat{e}, \check{e}$	Rastgele bir çerçeve ve koçerçeve gösterimi
g, ∇	Manifold üzerinde tanımlı metrik ve bağlantı nesnesi

Kurallar ve kısaltmalar

- "□" sembolü, teorem, tanım, açıklama, vb. gibi matematiksel ifadelerin sonuna gelindiğini belirtmek için kullanıldı. Diğer taraftan, "■" sembolü ise sadece ispatların sonuna gelindiğini belirtmek için kullanıldı.
- Kısaltma "Ör." : "Örneğin" veya "Örnek olarak" yerine kullanmak için.
- Kısaltma "Bkz." : "Bakınız" yerine kullanmak için.
- Kısaltma "Denk." : Denklemleri numaralandırmak için, ör. Denk.(4.3).
- Aksi belirtilmedikçe, indisler üzerinde Einstein toplama kuralı kullanıldı.
- Aksi belirtilmedikçe, Yunan harfleri ($\mu, \nu, \rho, \sigma, \alpha, \beta, \gamma, \kappa, \dots$) holonomik (koordinat) indisleri için, Latin harfleri ($a, b, c, d, i, j, k, l, m, n, \dots$) ise diğer (anholonomik, ortonormal, karma, vs.) insidler için kullanıldı.
- Kobazların (ortonormal 1-formların) dış çarpımları için aşağıdaki kısaltma kullanıldı

$$\check{e}^{i_1 \dots i_r} := \check{e}^{i_1} \wedge \dots \wedge \check{e}^{i_r}$$

- Keyfi bir baz için aşağıdaki kısaltmalar kullanıldı

$$\iota_a := \iota_{\hat{e}_a}$$

$$\nabla_a := \nabla_{\hat{e}_a}$$

- Doküman boyunca *gravitasyon*, *kütleçekimi* ve *yerçekimi* ifadeleri, birbirleri yerine kullanılmıştır.
- Literatürde *torsion* ve *nonmetricity* olarak bilinen ifadeler için, sırasıyla, *torsiyon* ve *nonmetrisiti* ifadeleri kullanılmıştır¹.

¹Bazı metinlerde, söz konusu ifadeler için, sırasıyla, *burulma* ve *metrik-olmama* ifadeleri de kullanılmaktadır.

- *pseudo* ön eki için ”-benzeri” ifadesi kullanılmıştır. Ör. ”*pseudo*-Riemannsal” için ”Riemannsal-benzeri”.
- Aksi belirtilmedikçe aşağıdaki kısaltmalar kullanılacaktır

STP :	Simetrik teleparalel(izm)
STPG :	Simetrik teleparalel gravitasyon
STPGR :	Genel Görelilik’ in simetrik teleparalel eşdeğeri
MTP :	Metrik teleparalel(izm)
MTPG :	Metrik teleparalel gravitasyon
MTPGR :	Genel Görelilik’ in metrik teleparalel eşdeğeri
GTP :	Genel teleparalel(izm)
GTPG :	Genel teleparalel gravitasyon
GTPGR :	Genel Görelilik’ in genel teleparalel eşdeğeri

Yayın listesi

Tezin araştırma süresi boyunca, doktora adayı aşağıda verilen yayınlanmış çalışmalarda yer almıştır.

1. C. Pala, E. Kok, O. Sert and M. Adak. A modified gravity model coupled to a Dirac field in 2D spacetimes with quadratic nonmetricity and curvature. *Int. J. Geomet. Meth. Mod. Phys.* **(19)** 2250045, 2022. doi: 10.1142/S0219887822500451, arXiv:2011.10982
2. C. Pala and M. Adak. A novel approach to autoparallels for the theories of symmetric teleparallel gravity. *J. Phys.: Conf. Ser.* **(2191)** 012017, 2022. (A Life in Mathematical Physics: Conference in Honour of Tekin Dereli (DERELI-FS-2021) 26/11/2021 - 28/11/2021 Istanbul) doi: 10.1088/1742-6596/2191/1/012017, arXiv:1102.1878
3. C. Pala, O. Sert and M. Adak. Weyl covariance, second clock effect and proper time in theories of symmetric teleparallel gravity. *Eur. Phys. J. C* **(83)** 17, 2023. doi: 10.1140/epjc/s10052-023-11171-0, arXiv:2202.10165
4. M. Adak, N. Ozdemir and C. Pala. Weyl-Lorentz-U(1)-invariant symmetric teleparallel gravity in three dimensions. *Eur. Phys. J. C* **(83)** 606, 2023. doi: 10.1140/epjc/s10052-023-11771-w, arXiv:2304.05209
5. M. Adak, T. Dereli, T. S. Koivisto and C. Pala. General teleparallel metrical geometries. *Int. J. Geomet. Meth. Mod. Phys.* **(20)** 2350215, 2023. doi: 10.1142/S0219887823502158, arXiv:2303.17812

Yukarıda verilen yayınlanmış çalışmalarla doğrudan ilintili olan tez bölümleri

şu şekildedir

Bölüm 4.4.1 → Çalışma #2

Bölüm 4.4.2 → Çalışma #3

Bölüm 5.2 → Çalışma #5

Bölüm 5.3.1.3 → Çalışma #4

Bölüm 5.4.1 → Çalışma #1

Önsöz

İnsanı diğer canlılardan ayıran özellikler, herkesin malumu olduğu ve birçok defa söylenegeldiği üzere, pek çoktur. Bizim kayda değmeyen görüşümüze göre odur ki; insanın soyut düşünebilme yetisi onu var olan tüm canlılardan farklı kılan belki de en önemli ve değerli özelliği, yeteneği ve hazinesi olsa gerektir. Bu düşünme yetisi ile insan, tarih sahnesinde emeklemeye başladığı ilk andan itibaren içinde bulunduğu evren, nesneler, etrafındaki doğa ve gerçekleşen olaylar, kendisi ve ırkının diğer mensupları, diğer canlılar, vs. üzerine kavrayışlar edinmeye başlamıştır. Edindiği her bir kavrayış, yaptığı her bir gözlem ve alışkanlıklarına uymayan her bir hadise onun bilgi ve tecrübesini artırmış ve ona, başka hiçbir şeyin sağlamayacağı tatminiyet sağlamıştır. Bununla beraber daha fazlası için de güçlü bir sorgulama ve merak duygusu geliştirmesine sebep olmuştur. Bu sayede gözlerini açtığından bu yana çok büyük ve derin sorular sorabilmiş, verdiği her bir cevap ile de, çağlar boyu süren maceranın ardından bizlerin bugün içinde yer aldığı medeniyetin oluşmasına katkı sunabilmiştir. Her bir küçük dokunuş, bir tuğla misali, binlerce belki yüz binlerce yılı aşarak, günümüz insanlık dünyasının yapısını inşa etmiştir, ufak ufak lakin kararlı ve sürekli bir biçimde. Düşünseniz ya... Ateşi ilk gözlemleyen, onun zararlarını ve faydalarını ilk kez deneyimleyen, ona ilk alışan insan kümelerinin ardından geçen onca zaman sonra geldiğimiz noktayı. Elbette, onca devir geçmesine rağmen, yaz aylarında, en azından bizim, halen bu fenomen karşısında çaresiz kalışımızdan bahsetmiyorum, lütfen! Veya, şimşek çaktığında ne olduğuna dair en ufak bir fikri bile olmayan o ürkek insanın torunlarının, bugün, şimşek kaynağı olan bulutların üstünde yörüngeye yerleştirdikleri binlerce uydunun, neredeyse hepimizin yatak odalarını dahi sinema seyri kıvamında gözleyebilecek düzeyde çalıştıklarını. Eminim bu keyifli sinema filmini izleme şansı olan torunlarına gıpta ederdi, o eski insan. Ya da belki, açık alanlarda yaprak modasına uygun kıyafetlerle sere serpe serilen o atalarımızın rahatlığını ve doğallığını biz kıskanırız, bilmiyorum! Veya, geceleri gökyüzünde beliren pırıltılı küçük noktaların ve kimi zaman tabak gibi yuvarlak kimi zaman da ince bir yay şeklindeki parlak nesnenin ne olduğuna dair, hayretten ve

belki korkudan başka bir his üretemeyen o en ilkel yaratığı düşünün. Şimdiki zamanda yaşamış olsa, onu bir kapsüle koyup, değil Ay'a, güneş sisteminin dışına bir seyahate gönderebilirdik rahatlıkla. Sanırım... tek yön biletle. Zaten geri dönmek ister miydi...? Sadece cansız dünyada değil, canlılık bağlamında da nice hikayenin baş rolündeyiz. Mesela, gözüyle görüp de anlamadığı ve çoğunlukla onlardan arkasına bakmadan kaçtığı büyük canlılar dünyasında yaşayan o sevimli cahil (ama kesinlikle hızlı koşabilen) atalarımızın soyunun devamı, bugün gözle görmenin imkansız olduğu küçük mikroorganizmaları keşfediyor, üretiyor, dahası manipüle ediyor ve onları bizim yararımıza olacak şekilde tam mesai ile çalıştırıyor bile. Hem de onlara bir ücret ödmeden! Belki de en ilginçlerinden bir tanesi ise şu... Bir başka canlıyı, önceden tanımlanabilen, belirlenebilen, istenen özellikleri içerecek biçimde kopyalıyoruz. Evet evet, bilgisayarda yaptığımız gibi neredeyse, kopyala ve yapıştır. Çoğalabilmenin nasıl olabileceği hakkında sadece tek bir bilgiye sahip olan (ve bu cehaletlerinden büyük keyif aldığı şüphesiz olan) atalarımıza bu durumu bir mektupla anlatmak istesek, başarılı olabilir miydik, emin değilim!

Bu görkemli ve kulağa hoş gelen hikayeler sayılamayacak kadar çoktur. Böyle sarkastik ve fragman biçiminde anlatıldığında, büyük ihtimalle, herkeste uyandırdığı his, bu gelişmelerin, tekamüllerin, evrimlerin ne kadar büyük ve yüce birer başarı, gerçekleşmesinin neredeyse imkansız görülebileceği birer atılım olduğudur. Muhakkak, tarihin büyük ölçekli takviminde öyledirler de. Halbuki, odağımızı biraz daha daralttığımızda göreceğiz ki, bu görkemli işlerin tamamı, o küçücük insanın, ön yargılarını, korkularını, subjektif his ve düşüncelerini bir kenara koyarak, bitmek tükenmek bilmeyen çalışma azmi ile ve, en önemlisi, kolektif biçimde, diğer insanlarla bir arada, paylaşarak, nesiller boyu aktararak, ortak bir miras gibi biriktirerek ve tüm bunların tadını çıkararak, adeta ilmek ilmek işlediği, küçük ve fakat sürekli adımlardan ibarettir. Bu insandır işte, nereden geldiklerinden, ne kadar farklı olduklarından, renklerinden, cinsiyetlerinden, yaşlarından, dillerinden, kültür ve geleneklerinden, vs. bağımsız bir biçimde, bir arada yaşama kültürünü oluşturmayı başarabilmiş yaratık. Ne muazzam bir şey bu! Ancak ve ancak bu sayede başarabilmiştir, onca imkansız gibi görünen, yüce ve görkemli işlerin hepsini. Ve ancak bu sayede sürdürebilir gelecekte de.

Yukarıda da ifade edildiği gibi, en sonunda birlikte yaşayan insanlık bilincini ve kültürünü oluşturan, kadim zamanlardan bu yana süregelen o " *düşünme, kavrayış, sorgulama, merak, tatminiye*t" döngüsüne, günümüzde kabaca *bilimsel düşünce* diyoruz. İnsanın, bir zamanlar ilk kez farkında olduğu en ilkel soyut düşünce yeteneğinin bugün geldiği nokta! Bilimsel düşüncenin kanıksandığı ve

bunun oluşturduğu alışkanlıkların sürdürülerek sistematik şekilde uygulandığı durumda da artık *bilimsel kültür* oluşturmuş oluyoruz. Kanımızca, bilimsel kültüre nispeten daha fazla sahip olabilen bireylerin ve toplumların, bir arada yaşamaya ve diğer insanlara saygı ve sevgi duymaya dair anlayışı, iştiyaki ve bakışı, şüphesiz, çok daha keskin ve güçlü olacaktır. Bu kültürün yerleştiği her bir insan dimağı ve toplum, o görkemli ortak mirastan daha fazla faydalanabilir ve bu mirasa katkı sunabilir. Bu bağlamda, insanın, kendisi ve içinde yaşadığı toplum adına talep ve hayal edebileceği en anlamlı hedeflerden biri, kanımızca, bilimsel kültürün baskın olduğu bir dünya görüşüne sahip olunması olacaktır. Tam bu noktada faslımızı, bahsin içeriğine pek uygun düşen, Atatürk’ ten bir alıntı ile tamamlayalım : “Dünyada her şey için, maddiyat için, maneviyat için, başarı için en hakiki mürşit ilimdir, fendir. İlim ve fennin haricinde mürşit aramak gaflettir, cehalettir, dalalettir”.

Bu tezin yazarı, yukarıda verilen bağlamda, bilimsel kültürü en iyi şekilde temsil eden ve yeni nesillere aktaran, örnek teşkil eden, büyük birer motivasyon kaynağı ve rol model olan, yurt içindeki ve yurt dışındaki pek çok bilim insanıyla bir arada olabilme, kimisiyle şahsen tanışma şerefine erişebilme, onlardan beslenebilme, tartışabilme, akademik ve tez çalışmalarını onların danışmanlığı altında sürdürebilme talihini yakalayabilmiş olmaktan ötürü kendisini, az denk gelebileceğini düşündüğü bir biçimde, pek şanslı addetmektedir. Muhakkak, bu değerli insanların tamamını eksiksiz olarak, bu satırların yazıldığı çok kısa zaman dilimi içinde hatırlayabilmek mümkün değildir. Yine de mütevazı bir çaba ve eksik kalan her biri için sonsuz özürler ile birlikte birkaçını burada yad etmek ve duyduğum onuru ifade etmek isterim.

Ali Bağcı’ ya, Pamukkale Üniversitesi’ ndeki resmi kariyeri öncesinde başlayan tanışıklığımız boyunca o eski ve güzel günlerden bu yana süregelen ahbaplığımız, fakülte binasının bize ait olmayan odasında ve bize ait olmayan masalarında kendi halimizde yaptığımız çalışma seansları arasındaki sohbetlerimiz (Öyle ki zaman zaman derinleştirdiğimiz ve demini artırdığımız sohbetlerdi bunlar. Kendisinin çok iyi bir dinleyici ve anlatıcı olduğunu düşündüğümde bu fizik ve fizik dışı zırvalarımızın tadını hala keyifle duyumsuyorum.) ve ilerleyen zamanlarda bizzat öğrencisi olmak ile kendisinden istifade etme fırsatı da sunduğu için minnettarım. Sohbetdaşlığımızın ve arkadaşlığımızın uzun yıllar (en azından birimiz cennete gidene kadar, ...sanırım) sürmesini dilerim.

Tez çalışmalarımın ve araya sıkıştırabildiğim kayda değmeyen öz çalışmalarımın hengamesi arasında bir türlü dilediğim ölçüde kapısını aşındırıp istifade edemediğim, lakin bu hislerimi her beyan edişimde beni sabırla ve hoş bir biçimde karşılayıp

sabırsızlıkla beklediğini her seferinde söyleyen değerli Tolga Birkandan' a minnettarım. Evet, belki onun adına çok sevimli bir temenni olmayacak lakin yine de söylemek zorundayım : Umuyorum ki tez sonrasındaki dönemlerde, kendisinin sabırsızlığını elimden geldiğince dindirip mümkün olduğunca fazla rahatsız edebilme şansı yakalarım!

PAÜ' deki serüvenimin ilk günlerinden itibaren yakınlığını hep hissettiğim Özcan Sert' e, çeşitli vesilelerle kendisiyle bolca tartışma fırsatı sunup sorularımı cevaplamaya gayret ettiği (bazen kulağımın çınladığını burada söylemeyeceğim tabi ki!), ondan aldığım tüm derslerde bilerek veya bilmeyerek de olsa ufku açan nice şeyi paylaştığı, bilhassa (kendi adıma) Maple ile hesaplamalar yapmayı becermem konusunda başlangıçtaki yol göstericiliği ve lisansüstü sürecimde kendisiyle birlikte yer alma kıvancını yakaladığım prestijli yayın çalışmalarındaki katkıları için sonsuz teşekkür ederim. Temennim odur ki, ilerleyen süreçte online görüntülü görüşmeler esnasında tatlı küçük bebişlerin hışmına daha az uğradığı, kendisi adına daha sakin ve daha az yorucu yayınlar olsun. (Hocam, eh, herşey kayıtta!)

Tekin Dereli ismi benim için, bu ismin ne anlama geldiğini naçizane anlamaya başladığımı sandığım zamanlardan beri, her nasılsa bir şekilde zirvelerdeki yaylalardan birinde kendine yer bulan ve bir türlü de inmeyen bir isim. Şimdi geriye dönüp baktığımda, çok daha toy ve cahil olduğum zamanlarda (şu an ise sadece bir arpa boyu kadar daha yol aldım, hepsi bu!) Tekin Dereli' nin zihnindeki karşılığının, küçük bir çocuğun zihnindeki Superman veya Batman karakterinin yansıması gibi olduğunu söyleyebilirim, kadim zamanlardan gelen kahraman silüetleri gibi. Lakin zaman içinde, çeşitli vesilelerle onunla vakit geçirme imkanı bulup, bizzat gözlemleme, tanıma imkanı edindikçe hem hayranlığım daha da arttı hem de kendisiyle ilgili romantik hissiyatım daha anlamlı ve ayakları yere basan bir biçim aldı. Kendisi belki hatırlamasa da, olağan bir İstanbul sabahında MSGÜ yolunda yürürken, birkaç metre ilerde onu görüp, arkasından yanaşp, kendimi tanıtp ardından yolun geri kalanını birlikte yürüdüğümüz o sıradan bir günde başlamıştı ilk sözlü temasımız (Farkındayım hüznünlü bir aşk öyküsü gibi gelebilir kulağa, ama sizi temin ederim öyle değil, kendisi çok tatlı bir hanımefendi ile uzun yıllar süren mutlu bir evlilik yaşıyor... ve ben bir erkeğim... gerçekten!). Bir QDIS çalıştayı idi gittiğimiz. Sonrasında onunla başka aktivitelerde birlikte olma şansımı, benim gibi lisansüstü öğrenimini yapan öğrencileri ile arkadaşlık etme olanağını yakaladım. En güzel anılarım, belki de Çakıllarısı Matematik Köyü' nde geçirdiğimiz, mümkün olan en primitif şartlarda, tahta barakalarda ve kolektif bir kamp hayatı yaşayarak, her gün yaklaşık 5-6

saat, yaz sıcağının kavuruculuğu ile beraber, çoğunluğunu benim gibi lisansüstü öğrencilerin oluşturduğu bir grup ile onu tahtada dinlediğimiz zamanlardı diyebilirim. Kaç tane 19 yaşındaki insan o şartlarda o performansı gösterebilirdi acaba?! (Evet kendisi de o sıra 19 yaşında falandı, yani tam emin değilim tabi, en fazla bir iki yaş aşağı yukarı oynar.) Kısacası, bu süreçte, ağzından çıkan her kelimeyi pür dikkat dinleyerek değerlendirmeye çalıştığım az kişiden biridir Tekin Dereli. Kişisel olarak bana kattığı sayısız bilgi ve tecrübe, genel olarak dokunduğu herkese yaptığı katkılardan ötürü, ayrıca hocamın hocası olduğu ve beni kendisi ile başlayan (veya devam eden) değerli bir bilim insanı silsilesi ile buluşturmaya vesile olduğu için sonsuz şükranlarımı sunarım. Müellifi olup bizzat imzaladığı ve önemsiz adıma kapak sayasında not düştüğü "Kuantum Mekaniği" kitabının ilelebet bekçisi olarak, nice 19 yaşlarında kendisi ile birlikte olabilme şerefini taşımayı canı gönülden dilerim.

Bu tezin formal başlık sayfalarında Muzaffer Adak, tez danışmanı olarak görünüyor. Bu doğru. Lakin benim için kendisinin evrendeki varlığı, sadece tez danışmanlığı ile ifade edilemeyecek kadar büyük. PAÜ fizik bölümündeki yüksek lisans programına başvurum vesilesi ile başladı hikayemiz (Yine, bu da bir aşk hikayesi değil!) ve o zamandan bu yana evrilerek ve (benim zannımca) zenginleşerek sürdü. Sadece akademik olarak değil, insani olarak da çok fazla şey paylaştık hocamla ve dolayısıyla sadece akademik olarak beslenmedim kendisinden, ve fakat genel dünya görüşüme de katkıda bulunacak kadar etkisi oldu üzerimde. Bütün akademik yaşantım boyunca en büyük destekçim, motivasyon kaynağım, teknik bilgi havuzum oldu. Şu an sahip olduğum, fizik hakkındaki bütün bilgi birikimime doğrudan veya dolaylı katkısı var. Yıllar içinde çeşitli yerlerde bulunarak danışman ve öğrenci gözlemleri yapabilme fırsatı edindim ve bunun neticesinde kuvvetle iddiam odur ki, çok çok az kişinin sahip olabileceği bir insani ilişkiye, arkadaşlığa, dahi sırdaşlığa, akademik süpervizörlüğe, kariyer danışmanlığına ve bilimsel işbirliğine sahip oldum. İtiraf etmeliyim ki, bu birlik-teliği senelerdir yaşamaktan aldığım keyfin üzerine, formal akademik ilişkimizin sonuna yaklaştığımız şu sıralarda bu satırları yazarak bunu açıklıkla beyan etmenin (ve bununla birlikte kahvemi yudumlamanın) tadını çıkarıyorum. Tüm eksiklerim, yanlışlarım, başarısızlıklarım, tecrübesizliklerim, bilgisizliklerim, kabiliyetsizliklerim, performansındaki düşüşlerim, özel hayatımdaki çalkantılarım, kendisi ile zaman zaman olan uyuşmazlıklarım, muhalefetlerim, çokça kafa ütülemelerim, abuk sabuk önerilerim, çok bilmişliklerim, anlamsız sorularım, yetersiz cevaplarım, vs. arasında hiçbir zaman beni rencide etmeyen, aşağı çekmeyen, nasıl yaptığımı bilmediğim bir şekilde her zaman pozitif kalmayı ve beni de tutmayı be-

cerebilen ve bütün hırçınlığımı çok kısa sürede ortadan kaldırabilen, kaya gibi bir sabırla bana katlanan, çelik gibi bir irade ile birlikte yaptığımız çalışmaları kesintisiz bir şekilde sürdüren, neredeyse her görüşmemizde içimi bir şekilde ferahlatan, doğrudan bana çok şey öğreten, dolaylı olarak öz çalışmalarım ile öğrendiğim mevzularda bana ufuk açan, yol gösteren, kaynak olan varlığı ile hayatımda yer aldı hep. Bir bilimsel çalışma programının, projesinin nasıl olabileceği, zaman planının en etkin şekilde nasıl gerçekleştirilebileceği, tüm programın nasıl iyi bir şekilde sürdürülebileceği konusunda bulabileceğim en iyi uygulamalı kaynak oldu. Nitekim, birlikte çeşitli yayın çalışmaları yaptık ve biri yerel diğeri uluslararası olan iki tane de proje hazırladık. Doktora sürecimde, hazırladığımız bu proje sayesinde yurt dışında çalışmalar yapabildim ve tez süreci boyunca etkin şekilde kullandığım bilgisayarımı bu sayede edinebildim. Bunların hepsi onun sayesinde gerçekleşti. Tüm bu akademik ve akademi dışı katkılarından ötürü, başlangıçtakinden bambaşka bir kişiye evrilme serüvenimde bana bilimsel danışmanlık, hayat koçluğu ve bir nevi ustalık yaptığı için, tarifsiz hissiyatımı, sonsuz minnettarlığımı ve en içten saygılarımı sunuyorum. Daha nice uzun yıllar (yine, en azından birimizin cennete gideceği bir tarihe kadar) kendisi ile sadece akademik değil insani ilişkimi de sürdürmeyi ve daha pek çok şeyi şimdiye kadar olduğundan daha fazla ve şiddetle paylaşmayı dilerim. (Benden kurtulduktan sonra tüm iletişim bilgilerimi silip beni engellemezse elbette!)

Pek çok kez Denizli’ de bana ev sahipliği yaparak hiç sorgulamadan kapılarını açıp ağırladıkları, sanki uzun yıllar boyunca yakın akraba ilişkimiz varmışçasına gösterdikleri sıcaklık ve misafirperverlik için Adak ailesinin her bir ferdine de teşekkür etmek isterim : Birlikte kurduğumuz ve ömrü yaklaşık 15 dk. olan müzik grubumuzun diğer üyesi dünyalar güzeli ve evin gelinlik kızı Nilsu’ ya, dünyanın farklı yerlerine yaptığı seyahatler ile genç kızların gönlünü çalma alanında uluslararası tecrübe edinen evin abisi genç dostum Batıkan’ a, ilkokul sıralarındaki çocukluk aşkı konusunda erken tavsiyelerini benden almış olma bahtsızlığına mahkum olan, hayatımdaki ilk ve tek ”panpam”, evin küçük kardeşi Kuzey’ e, Adak ailesini bir aile yapan, evin Muzaffer üyesini olduğu kişiye eviren, neşesi, enerjisi ve tatlılığıyla etrafındaki herkesin modunu yukarı çeken, öğretmenlik mesleğinin zirvesindeki, evin annesi ve her şeyi olan sevgili Seyhan Hanım’ a kalbimin en derinlerinden sevgi ve saygılarımı iletiyorum. En sonuncusu ama en önemsizi değil kesinlikle; patileriyle üzerime özgürce atlayıp zıplayan, kendisini sevip okşamam için dizimin dibinden ayrılmadan saatler geçiren, Muzaffer hoca ile onun gezmeye çıkardığımız zamanlarda bize keyifli anlar yaşatan ve gece kanepede uyuduğumda baş ucumda nöbet tutan hayvan dostum Leydi Hanım’ a

da geçirdiğimiz tutkulu(!) zaman dilimleri için minnettarım. Umarım bir daha elalemin tavuklarını onların bahçesinde mideye indirmek için koşuştururken bizi de peşinden sürüklenmek zorunda bırakmazsın!

Koşulsuz kadın hakları savunucusu ve pozitif ayrımcı anlayışa sahip biri olarak yukarıdaki metnin çok fazla testosteron içerdiğini farkettim! Benim talihsizliğim, maalesef. Bu tespitle beraber, lisansüstü sürecimde çeşitli şekillerde yolumun keşiştiği Pamukkale Üniversitesi Fizik Bölümünün değerli ve zarif kadın bilim insanları Betül Çalışkan, Pınar Tunay Taşlı, Sevgi Özdemir Kart ve Aslı Öztürk Kiraz' a ayrı ayrı teşekkürlerimi sunuyorum. Her birinden çeşitli dersler aldım ve hepsi fazlasıyla keyifli geçti. Özellikle söylemeden geçemeyeceğim, Sevgi hocanın laboratuvarındaki anne mamaları ve Türk kahvesi sunumu eşliğindeki çalışma seanslarım PAÜ' de geçirdiğim en tatlı zamanlardandı, minnettarım. Baylar arasından da çeşitli seviyelerde etkileştiğim PAÜ Fizik Bölümünden Aytaç Erkişi, Orhan Karabulut, Koray Yılmaz, Hasan Hüseyin Kart, Mestan Kalay (emekli) ve değerli arkadaşım Ertan Kök' e tüm katkıları için teşekkür ederim. Bilhassa Hasan hoca ile laboratuvarındaki uzun ve derin sohbetlerimizin tadını yad ederim. Erciyes Üniversitesi Fizik Bölümünden Enise Ayyıldız, Mustafa Gençaslan, Abdullah Özkanlar (ayrıldı) ve Nejdet Paran' a da teknik olmayan desteklerinden ötürü teşekkür ederim. Yurt dışı sürecimde bana destek olan Tartu Üniversitesindeki tüm kişilere, başta Tomi Koivisto, Laur Järv ve Maria Josè Guzmàn olmak üzere minnettarım. Benim için harika bir deneyimdi.

İnsan bu gibi metinlerde dünyanın geri kalanını yazmak istiyor. Lakin bu neredeyse sonsuz bir uğraş olurdu ve fizikçiler olarak bizler, sonsuz niceliklerden pek haz etmeyiz! Hep çalışmalarımızda arıza çıkarırlar. Bu nedenle, bu listenin sonsuza ırsamaması için burada kesmek zorundayım. Atladığım veya unuttuğum, bu sürecin çeşitli seviyelerde eş mimarı olan tüm kıymetli işbirlikçilere ve değerli bilim insanlarına önce özürlerimi ardından içten teşekkürlerimi sunuyorum.

Son olarak, benim gibi düşünen (her ne kadar genellikle az olsa da... tecrübeyle sabittir!) ve bu yazıyı okuma fırsatı bulan (bilhassa daha genç bilim insanları başta olmak üzere) diğer zihinlere de belki dokunabilmek adına, özellikle vurgulamak isterim ki, bu tezin yazımına uzanan hikaye, kronolojik sırayla Tekin Dereli, Muzaffer Adak, Özcan Sert ve nihayet naçizane tezin yazarına kadar erişen bir silsileyi içine almaktadır. Üç kuşaktır en iyi şekilde aktarılan, bu bölümün başında da bahsi edilen bilimsel kültürün, bizim topraklarımızdaki en iyi temsillerinin estirdiği o kuvvetli rüzgarın ufak bir meltemini de olsa belki yakalayabilmiş olarak mevcut silsilenin dördüncü kuşağında yer almaktan büyük bir şeref

duymaktayım. Umarım bu bayrak yarışında, benim şans eseri kesişebildiğim bu değerli kültürü, benden sonraki kuşaklara da aktarabilmek namına, benim üstatlarımın bu konudaki başarısının yarısı kadar dahi olsa başarılı olabilir ve yeni nesillere de bu sönmeyen meşalenin aydınlığını aktarmada nice köprüden bir tanesi olarak görevimi tamamlayabilirim. Dört kuşak fizikçi grubunun en son ve taze üyesi olarak, tüm bu devirleri kendi zamanlarında en iyi biçimde (halen) temsil eden bilim insanları ile eş zamanlı olarak sahnede kendine yer bulabilmiş olmak, tezin yazarı açısından ancak güzel bir hayal olabilirdi. Malumunuzdur ki, “Hayaldi, gerçek oldu!” lafını pek çok kişi tarihin akışı içerisinde genellikle yersiz biçimde kullanagelmiştir. Ve fakat, bizzat tecrübe etmiş biri olarak sizi temin, çok objektif ve pür bir hissiyat ile de ifade edebilirim ki; hayallerin gerçek olması, tam olarak bu tez sürecinde yazarın yaşadığı cinsten bir şeyler olmalı. Bu hayalin gerçek olmasında katkı sunan herkese en içten teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Hayal et, hayallerini takip et!

Denizli, Ağustos 2024

Çağlar

Konu 1

Giriş

“Bilim, kavramaktan başka bir şey değildir.”

Plato

Kadim çağlardan bu yana, insanlığın evreni anlama çabası ve karşı konulması çok zor merak duygusu, bilgi ve tecrübe sahibi oldukça artan cesareti ile harmanlanmış, zekasının gücünü, doğasındaki yaratıcı eylem itkisini ve içindeki potansiyeli de kullanarak ürettiği birikim ile her dönem tekamül edebilmiştir. Çok uzun zamanlar boyunca üretilen bilgi ve değerlerin neticesinde, sürekli artan ve aktarılan, felsefe, bilim, sanat, vb. nice somut ve soyut kavramları barındıran neredeyse sınırsız bir hazineye sahip olmuştur insanlık, ve halen bu hazineyi biriktirmeye devam etmektedir. Öyle görünüyor ki, belirsiz (belki de sonsuzda) bir geleceğe kadar da bu hazine payidar kalacak.

Fizik bilimi, insanlığın, işte böylesi görkemli, kolektif, uzun soluklu birikimine kök salarak, yaşadığımız çağa değin ulaşmıştır. Günümüzde, fizik biliminin, iki büyük ana sütun üzerine kurulu olduğu söylenir. Evrenin ilginç sayılabilecek bir cilvesi ve ”tesadüfü” olarak, 20. yy. başlarında hemen hemen eş zamanlı olarak temellerinin atıldığı ve ilerleyen yıllarda da yine neredeyse paralel düzeyde üzerinde çalışılan ve gelişme gösteren bu iki fizik sahası : **Genel Görelilik** (GG) ve **Kuantum Mekanik** (QM). Her ikisi de insanlık zihninin ve kolektif bilimsel uğraşın, devrim niteliğinde çığır açıcı üretimler yaparak, dünya medeniyet tarihimizdeki serüvenimizde bir çağın kapanarak yeni bir çağın açıldığını gösteren sonuçlar elde ettiler. Öyle ki, bu bilimsel milattan önceki zaman dilimini, bugün *klasik dönem* olarak adlandırıyoruz ve modern çağın neredeyse tüm unsurlarını bahsi geçen çalışmalar ile referanslayabiliyoruz. GG ve QM çalışmaları, uzun vadede 20 yy.’ ın tamamında ve şimdilerde 21. yy. boyunca, sadece salt bilimsel bağlamda kalmamış, başta teknoloji olmak üzere, pratik ve düşünsel tüm yaşam biçimimizi, dahası evrenle somut ve soyut tüm ilişkimizi etkilemiş; hatta insanlık da dahil ve insanlığın dışında yerküredeki tüm canlıların da yaşamlarını ve evrim-

lerini yeniden şekillendirecek kadar büyük devrimler olmuştur. Bu süreçte, bilim camiasının, adını tarihe altın harflerle yazdıran ölümsüz devleri, en büyük zihinleri, çok çeşitli ve farklı alanlarda yaptıkları muazzam katkılarla bu yolculuğun baş mimarları ve kendilerinden sonraki dönemlerin bilim insanları için eşsiz ilham kaynakları olmuşlardır.

İçerikleri itibariyle GG ve QM, evrenin farklı ölçeklerinde gerçekleşen hadiseleri açıklamakta gayet başarılıdır. GG, temelde gravitasyon fenomenini geometrik olarak yorumlar ve bu fenomenin doğası hakkında kendisinden önce elimizde olan kavrayıştan daha fazlasını sağlar. Dolayısıyla gravitasyon alanının, diğer etkileşim alanlarına göre daha baskın olduğu astronomik ölçekteki fizik araştırmalarında kullanılan ana araçtır. Zira bu rejimde, şu anki dağarcığımızla bildiğimize göre, kuantum alanların etkisi büyük kütleli nesnelerin gravitasyon etkisi yanında neredeyse ihmal edilebilecek düzeyde. Diğer taraftan, QM ise çok küçük ölçeklerde, maddenin kuantum doğasını tarif etmek için kullanılan ve ampirik sonuçlarla muazzam uyum içinde olan fizik modelidir. Yukarıda bahsedildiği gibi evrenin astronomik ölçekteki gravitasyon-baskın davranışının tam tersi olarak, kuantum ölçeğinde artık nesnelerin kütleleri o kadar küçüktür ki, oluşturdukları gravitasyon alanı, sahip oldukları kuantum özelliklerinin yanında ihmal edilebilir düzeyde kalır. Evrenin çok farklı ölçeklerinde başarıyla çalışan bu iki model, mevcut bilgi birikimimiz dahilinde evren üzerine bütüncül bir kavrayışa sahip olabilmemizi sağlayan modern fizik biliminin iki ana (fakat birbirinden bağımsız ve ayrı gibi görünen!) araştırma alanını teşkil eder. İşte tam da bu nokta, zaman içerisinde bilim insanlarını, bu iki modelin benzer yönleri olup olmadığını, hatta bunların tek bir model ile verilip verilemeyeceğini sorgulamaya ve araştırmaya teşvik etmiştir. Bu ilgi çekici ve meydan okuyan sorgulamaya motivasyon kaynağı olarak, modellerin ortaya çıkışından itibaren 20. yy.' ın ilerleyen dönemleri boyunca elde edilen birçok kuramsal ve gözlemsel girdi, gösterilebilir. Sözü geçen araştırmalardan alınan ilhamla, bu tez kapsamında da, gravitasyon ve kuantum etkileşimlerinin (elektromanyetizma, zayıf ve şiddetli nükleer etkileşimler) mümkün olduğunca eş bir kavrayış / model ile anlaşılabilmesi adına çalışmalar yapılmıştır. Bu bağlamda tezde kullanılan ana argüman ayar teorisi yaklaşımı olmuştur. Zira ayar teorisi matematiksel olarak çok güçlü ve estetik bir yaklaşım olarak, bilhassa kuantum alan teorileri bağlamındaki uygulamasıyla, günümüzde kuantum ölçeğinde gerçekleşen fiziğin açıklanabilmesinde bilim insanlarının sahip olduğu yegane modeldir, yani **Standard Model**. Örneğin, elektromanyetik ve zayıf nükleer etkileşimler $SU(2) \otimes U(1)$ ayar teorisi aracılığıyla birleştirilmiştir, yani Elektrozayıf Teori. Aynı yaklaşımın

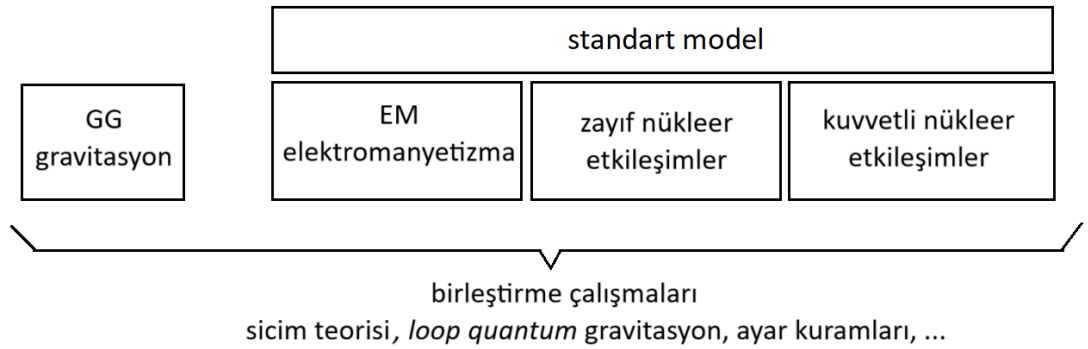
bir adım ileri olan $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ ayar teorisi de güçlü nükleer etkileşimleri dahil etmiştir (Griffiths 1987). Kuantum ölçeğindeki bu başarılı uygulamaların yanı sıra, ayar teoriksel yaklaşımın gravitasyon üzerindeki uygulaması konusunda bilim insanları arasında, kuantum ayar teorilerinde olduğu kadar, bir konsensus görünmemektedir. Halen çok aktif olan bu çalışma sahasına katkı sağlamak amacıyla, tez çalışmada, gravitasyonun ayar teoriksel modelleri üzerine araştırmalar yapılmıştır, ör. (Adak, Ozdemir ve Pala 2023), (Adak, Dereli, T. S. Koivisto, ve diğ. 2023). Naçizane kanımız odur ki, ayar teoriksel ve geometrik yaklaşım, evrende bilinen tüm fiziksel etkileşimlerin arasındaki ilişkileri, benzerlikleri ve var ise eşlikleri ortaya koymak açısından, belki de yegane alt yapıyı sunmaktadır.

GG, güneş sistemindeki gözlemsel sonuçlarla mükemmel bir uyum içindedir. Öte yandan, disk şeklindeki galaksilerin dış kollarında yer alan yıldızların, galaksinin merkezinden uzaklaştıkça doğrusal hızlarının değişimine ilişkin son zamanlarda gözlemlenen sonuçlar GG' nin öngörülerıyla örtüşmemektedir. Bu uyumsuzluğa karanlık madde sorunu denir (Trimble 1987). Bununla birlikte, galaksilerin hızları ölçüldüğünde, GG' nin öngörüsü olan azalmak yerine arttığı gözlemlenmektedir. Bu çelişkiye kozmik ivme problemi adı verilir. Bugün bu gözlemi, içeriğini ve yapısını bilmediğimiz varsayımsal karanlık enerjiyle açıklıyoruz (Peebles ve Ratra 2003). Dahası, GG bağlamında henüz bir neticeye varamamış kuantizasyon çabaları (Kraichnan 1955), (Deser 1970), (Isham 1981), teorinin değiştirilmesi / modifiye edilmesi gerektiğine dair güçlü sinyaller veriyor. Bu nedenlerden dolayı alternatif gravitasyon modellerinin araştırılması teorik fizik açısından oldukça önemli ve sıcak bir araştırma alanıdır. Burada bahsedilen sorunlardan arınmış yeni bir yerçekimi teorisi arayışı farklı şekillerde yapılabilir. Örneğin, birçok çalışmada araştırmacılar, daha sonra modern $f(R)$ teorileri (Bergmann 1968), (Buchdahl 1970), (Starobinsky 1980) oluşturacak olan yüksek dereceli eğrilik skaler terimlerini ekleyerek Einstein-Hilbert Lagrangiyeni değiştirmeye çalıştılar (Kretschmann 1917), (Weyl 1919). Bundan başka, özellikle metrik ve afin bağlantı nesnelerini bağımsız değişkenler olarak ele alan metrik-afin gravitasyon (MAG) modellerinde, ayar yaklaşımı yaygın olarak kullanılmaktadır (T. Koivisto 2018). Ancak bu tür modeller hala açık bir alan olan Cauchy problemlerine sahiptir (Tremblay ve Faraoni 2007), (Hehl ve Macias 1999). Yakın zamanda araştırmacılar (B. J. Jimenez ve Delhom 2020) çalışmada, yüksek dereceli eğrilik terimleri içeren metrik-afin teoriler bağlamında hayalet kararsızlıkların varlığını ayrıntılı olarak tartıştılar. Bu verilere alternatif bir yaklaşım olarak, Kaluza ve Klein tarafından, sadece Einstein-Hilbert terimi kullanılarak pür geometrik bağlamda,

kütleçekimi ile elektromanyetizmanın geçerli bir şekilde birleştirilmesi incelendi, öyle ki bu çalışmada araştırmacılar ekstra uzayzaman boyutları önerdiler (Kaluza 1921), (Klein 1926). Bu fikir kısa sürede oldukça ilgi gördü ve günümüzde modern sicim tipi teorilerde yer buldu. Standart Model’ e ilişkin sağlam bir temel felsefe olan kuantumlama yöntemlerini yerçekimine uygulamak için De Witt’ in pertürbatif (Lyra ve diğ. 1992) ve Witten’ in pertürbatif olmayan yaklaşımları (Witten 1988), (Deser, McCarthy ve Z. Yang 1989) incelenebilir. Tüm bunların yanında, Riemann-dışı geometrilere çalışıp torsiyon (Hammond 2002), (Dereli, Ozdemir ve Sert 2013) ve/veya nonmetrisiti (Adak 2006), (Karahana, Altas ve Demir 2013) eklemek de bir seçenektir. Tez kapsamında da bu metod tercih edilmiş ve Riemann-dışı geometrilere çeşitli gravitasyon kuramları çalışılmıştır, ör. (Pala, Kok, ve diğ. 2022), (Adak, Ozdemir ve Pala 2023), (Adak, Dereli, T. S. Koivisto, ve diğ. 2023).

1.1 Motivasyon

Bu doktora tezini çalışmamızın ana amacı, gravitasyon ile Standart Model çerçevesindeki kuantum etkileşimlerin birleştirilmesi üzerine araştırmalar yapmaktır. Bu doğrultuda yapacağımız araştırmalarda *ayar teorisi* mekanizmasını kullanacağız. Zira ayar teoriksel yaklaşım şu anki bilgi birikimimiz kapsamında, kuantizasyon teknikleri ile beraber, atomik ve atomaltı ölçeklerde evreni açıklamamızda gayet başarılı olduğunu ispat etmiştir.



Figür 1.1: Fiziğin kutsal kasesi

Çalışmalarımızın geometrik ayağında, öncelikli hedefimiz, mümkünse, gravitasyonu bir ayar teorisi olarak anlamaya çalışmak olacak. Burada cevaplamak istediğimiz sorular şunlardır : “Gravitasyonu bir ayar teorisi olarak tanımlayabilir miyiz? Eğer öyleyse, ayar grubu ve bu grubun üzerine etkidiği (geometrik) nesneler nelerdir?”. Bu yaklaşım kapsamında araştırmalarımızı geometrik ”çerçeve

demet” yapısını da kullanarak destekleyeceğiz. Zira *demet* yapısı, ayar teorilerini bir nevi *afin bağlantı* teorileri çalışıyormuşçasına ele alabilmek için gayet doğal bir ortam sağlamaktadır. Çalışma başlıklarımız kabaca aşağıdaki şekilde özetlenebilir.

1. Riemannsal geometride (GG kapsamında) çalışmalar
2. Riemann-dışı geometrilerde çalışmalar
3. Ayar teorisi yaklaşımı ve gravitasyondaki uygulamaları
4. Gravitasyonun madde alanı ile etkileşimi

1.2 Tez konusunun önemi

Tez çalışmamız kapsamında, günümüz fiziğindeki birtakım açık problemlerle ilgilenmek hedefimizdir. Mümkünse bu problemlerin özündeki bazı soruları cevaplamak veya cevaplama çalışmalarına katkı sunabilecek görüşler edinebilmek isteriz. Bu problemlerin bazılarını kabaca aşağıdaki gibi listeleyebiliriz.

- **Kuantum gravitasyon.** Birtakım ampirik öngörülerde bulunabilen geçerli bir kuantum gravitasyon teorisinin elde edilmesi.

- **Ufuk problemi.** Bu problemde sorulan soru şudur : “Evren neden istatistiksel olarak homojen ve kozmolojik ilke ile uyumlu olarak izotropiktir?” (Misner 1968) (Misner, Thorne ve J. A. Wheeler 1973) (Weinberg 1971). Problem, ilk kez 1956 yılında Wolfgang Rindler tarafından ortaya atılmıştır (Rindler 1956). Örneğin, bir kutuda termal dengede bulunan gaz molekülleri homojen ve izotropik olarak dağılırlar; çünkü bu moleküller zaten birbirleri ile etkileşerek termal dengeye ulaşabilmek ve homojenliği ve izotropikliği bozacak etkileri ortadan kaldırmak için yeterli zamana sahiptirler. Ancak bu durum *büyük patlama* modeli kapsamında oldukça farklıdır; zira evrenin genişmesi, erken evrede termal dengeye ulaşılabilmesi için yeterli zamana sahip olunmasının önüne geçmektedir. Büyük patlama modeline göre evrende var olduğunu sandığımız madde ve radyasyonun (standart model kapsamında) gözlemlenen evrenin çok farklı iki bölgesinde bir şekilde etkileşerek termal dengeye ulaşması mümkün görülmemektedir; zira genişlemeye göre bu bölgeler birbirlerinden ışık hızından daha fazla bir hızla uzaklaşıyorlar ki bu senaryo hiçbir zaman kontakta olamayacaklarını gösterir. Fakat

evrenin bu farklı bölgelerinden gözlenen *kozmetik arkaplan ışıması*ndaki monotonluk, geçmişte bu bölgelerin bir şekilde temasta olup gözlenen kozmik arkaplan ışımasının tekdüze olmasını sağlayacak şekilde bir etkileşime girdiklerini ve termal olarak dengeye ulaştıklarını iddia etmemize sebep oluyor. Bu durumda, günümüzde büyük ölçüde geçerli olan evren modelimize göre (genleşmeyi içeren büyük patlama modeli) evrenin hiç etkileşmemesi ve termal dengede bulunmaması gereken bölgelerinden gelen ışımanın aynı sıcaklığa sahip olduğunu açıklamak zor bir problem olarak önümüze çıkıyor. Bu problem karşısında çokça kabul gören açıklama girişimlerinden biri *kozmetik enflasyon* modelidir. Ayrıca ışık hızının uzayzamanda farklılaşabileceğini söyleyen modeller de çalışılmaktadır.

• **Karanlık madde.** Karanlık madde evrenin %85' ini oluşturduğunu sandığımız maddenin hipotetik bir formu olarak tanımlanabilir (*Dark Matter and Dark Energy*. N.d.). Birçok farklı astrofiziksel gözlem -mevcut başarılı gravitasyon modellerimizin açıklamakta yetersiz kaldığı ve gözlenenden veya hesaplanandan daha fazla madde olması gerektiğini düşündüren gözlemler- karanlık maddenin varlığını iddia etmemize sebep oluyor. Bu sebeplerden ötürü birçok bilim insanı karanlık maddenin evrende çokça bulunduğunu ve evrenin yapısını ve evrimini şekillendirmede büyük rol oynadığını düşünmekte. Karanlık madde isminin verilmesine sebep olan şey ise bu madde formunun bilinen elektromanyetik alan ile etkileşmemesi; bu nedenle hiçbir şekilde elektromanyetik radyasyon yaymıyor / soğurmuyor / yansıtıyor, dolayısıyla doğrudan gözlenmesi oldukça zor (*Dark Matter*. N.d.).

İlk olarak 1922 yılında, galaksilerdeki yıldız hızları üzerindeki çalışmaları sırasında karanlık madde kavramını ortaya atan kişi Hollandalı astronom Jacobus Kapteyn oldu (Kapteyn 1922). Bir diğer Hollandalı radyo astronomu Jan Oort 1932 yılındaki çalışmasında karanlık madde kavramından bahsetti (Oort 1932). Oort da galaksilerdeki yıldız hızları üzerine çalışırken yaptığı hesaplarda galaksi düzlemindeki toplam kütlelerin gözlenenden daha fazla olması gerektiği sonucuna vardı, fakat bu hesaplamaların daha sonra hatalı olduğu gösterildi (Kuijken ve Gilmore 1989).

1933 yılında, İsviçreli astrofizikçi Fritz Zwicky, Kaliforniya Teknoloji Enstitüsü' nde galaksi kümeleri üzerine yaptığı çalışmaları esnasında da karanlık madde ile ilgili bağımsız olarak öncekilere benzer çıkarımlarda bulundu (Zwicky 1933) (Zwicky 1937). Zwicky *Coma* kümesine viriyel teoremini uygulayarak gözlenenin dışında fakat olması gerektiğini iddia ettiği bir kütle heabına ulaştı ve bu kütleli oluşturan maddeye "*Dankle Materie*" adını verdi. Kümenin dış bölgesindeki galaksilerin hareketini baz alarak bu kütleli hesapladı ve bu hesabını

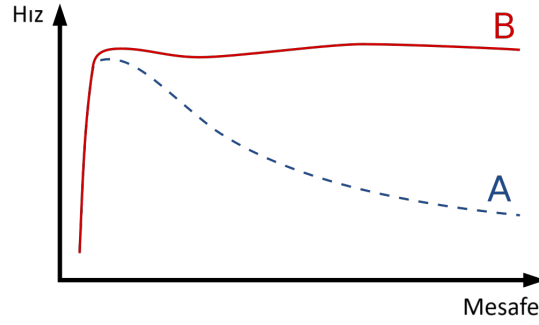
galaksilerin parlaklık ve sayı ölçümleri ile karşılaştırdı. Bunun sonucunda galaksi kümesinin gözlenenden 400 kat daha fazla kütleyle sahip olması gerektiğini buldu. Elde ettiği bu sonuçların ardından Zwicky galaksi kümesine kütle kazandıran bir maddenin varlığının olması gerektiğini ve bu maddenin gravitasyonel çekim ile birlikte galaksi kümesinin bir arada kalabilmesini sağladığını iddia etti. Zwicky'nin hesaplarındaki değerlerin -Hubble sabitinin eski değerinden kaynaklanan hata kadar- günümüzdeki daha hassas ölçümlere göre bir miktar hatalı olduğunu biliyoruz (sadece hassasiyet sorunu). Yine de Zwicky bu hesapları sonucunda öngördüğü bu madde yığınının “karanlık” olması gerektiği sonucuna varabilmişti.

1939 yılında Horace W. Babcock, Adromeda galaksisindeki hız eğrilerini incelediğinde, bunlara göre kütle-parlaklık oranını radyal olarak arttığını gördü (Babcock 1939). Babcock'un bu raporunun ardından 1940 yılında Jan Oort NGC 3115 galaksisindeki görülmeyen halkayı keşfetti (Oort 1940).

Vera Rubin, Kent Ford ve Ken Freeman'ın 1960 ve 70'lerde yine galaksi eğrileri üzerinde yaptıkları çalışmalar karanlık maddenin varlığını destekleyici bulgular sağladı (Freeman 1970) (Rubin ve Ford 1970). Rubin ve Ford galaksilerin dış bölgesindeki hız eğrilerini daha hassas ölçebilecekleri yeni bir spektrograf ile çalışarak sonuçlarını desteklediler ve buldukları sonuçlar 1978 yılında teyit edildi (Bosma 1978). Rubin ve Ford'un sonuçlarının tümünü içeren önemli ve ilham verici bir çalışma 1980 yılında yayınlandı (Rubin, Ford ve Thonnard 1980). Bu çalışmaların neticesinde birçok galaksinin gözlenen madde miktarının altı katı civarında bir madde içermesi gerektiği sonucuna ulaşılmıştı. Böylece 1980'lere gelindiğinde karanlık madde fenomeni büyük ölçüde bilim camiası tarafından kabul edilerek astronomideki çözümsüz problemlerden biri olarak yerini almıştı bile.

Karanlık maddenin varlığına temel teşkil eden bulgulardan belki de en önemlisi şudur : hesaplamalar neticesinde görüyoruz ki günümüzde gözlenen birçok galaksinin gözlendiği şekli ile yapısal olarak bir arada olmasının yegane koşulu yine gözlenenden daha fazla madde miktarını içermek zorunda olmasıdır. Diğer bulgular arasında gravitasyonel lensleme (Trimble 1987), kozmik arkaplan ışıması, gözlenen evrenin yapısı, galaksilerin yapısı ve evrimi, galaktik çarpışmalar esnasındaki kütle yerleşmesi, galaksilerin galaksi kümeleri içindeki hareketleri gibi gözlemsel ve teorik çalışmalar sayılabilir.

Spiral galaksinin kolları galaksi merkezi etrafında dönüş yapar. Bu galaksilerdeki parlak (görülen, gözlenen) madde miktarı merkezden dış bölgelere doğru gidildikçe azalır. Eğer parlak madde miktarının tamamının bilinen madde formu olduğunu (karanlık madde değil) düşünürsek tüm galaksi kütlesini yaklaşık olarak



Figür 1.2: Tipik bir spiral galaksinin hız eğrisi : beklenen (A) ve gözlenen (B). Karanlık maddenin bu eğride radyal olarak dış bölgelerdeki “düzleşmeyi” açıklaması beklenmektedir. **Kaynak** : Wikipedia

merkezde toplanmış noktasal bir kütle olarak betimleyebiliriz, güneş sistemi modelinde yapıları benzer şekilde. Kepler’ in ikinci yasasına göre (güneş sisteminde de gözlediğimiz gibi) merkezden uzaklaştıkça dönüş yapan objelerin açısal hızlarının azalması gerektiğini biliyoruz. Fakat galaksilerde gözlenen bu değildir (Corbelli ve Salucci 2000). Bunun yerine, Figür 1.2’de görüldüğü üzere merkezden uzaklaştıkça hız (neredeyse) sabit olmaktadır. Eğer Kepler yasasını doğru kabul edecek isek (ki en azından güneş sistemi kapsamındaki gözlemlerle uyumlu bir yasayı terk etmek ilk bakışta akıllıca değil) bu durumda bahsi geçen uyumsuzluğu açıklamanın en bariz yolu şudur : spiral galaksilerdeki madde dağılımı güneş sistemindeki ile aynı değildir. Özellikle galaksinin dış bölgelerinde parlak olmayan (görülmeyen, gözlenmeyen, karanlık) madde miktarının fazlaca olduğu iddia edilebilir.

- **Karanlık enerji.** Karanlık enerji, evrenin geniş ölçeğinde etkili olduğunu iddia ettiğimiz bilinmeyen bir enerji formudur. Bununla ilgili ilk gözlemsel bulgular süpernova ölçümleri esnasında elde edilmiştir; öyle ki evrenin genişlemesi sabit bir hızla değil, ivmeli bir şekilde gerçekleşmektedir (Peebles ve Ratra 2003). 1998 yılında, *High-Z Supernova Search Team* isimli araştırma grubu Type Ia süpernovası ile ilgili gözlem sonuçlarını yayınladılar (Riess ve diğ. 1998). Bu gelişmeyi, *Supernova Cosmology Project* isimli grubun evrenin genişlemesinin ivmeli olması gerektiğine dair önerilerini içeren 1999 yılındaki çalışması izledi (Perlmutter ve diğ. 1999). 2011 yılındaki Nobel ödülü bu çalışmalardaki başarıları sebebiyle Saul Perlmutter, Brian P. Schmidt, ve Adam G. Riess isimli bilim insanlarına verildi.

Her fiziksel sistem için geçerli olduğu gibi, evrenin de zaman içindeki evrimini anlayabilmek için onun başlangıç koşullarına ve yapısına ilişkin bilgilere

sahip olmak gerekir. Sözü edilen gözlemlerden önce konuyla ilgilenen bilim insanları evrende var olan bilinen madde ve enerji formlarının, evrenin genişlemesini zamanla yavaşlatacağını düşünmekteydi. Kozmik arkaplan ışıması üzerindeki gözlemler evrenin geçmişte çok sıcak bir *büyük patlamadan* oluştuğunun öne sürülmesine yol açtı. Bununla birlikte genel görelilik teorisi de başarılı bir şekilde evrenin büyük patlama sonrası evrimine ve geniş ölçekteki davranışına dair tatmin edici açıklamalar verebildi. Ancak tüm bu deneysel ve teorik gelişmelerin yanında, yeni bir enerji formunun varlığına başvurmadan evrenin ivmeli genişlemesini izah etmenin an itibarıyla açıkça görülen bir yolu yok gibi. Yakın zamanda yapılan modern süpernova gözlemleri sonucu elde edilen hesaplamalara göre de evrenin %71.3' ü karanlık enerji ve geriye kalan %27.4' lük kısmı da karanlık madde ve bilinen (baryonik) madde ile dolu olmalı (Kowalski ve diğ. 2008).

1990' lardan bu yana karanlık enerji fenomeni ivmeli genişlemeyi anlamakta en çok kabul gören açıklama olmakla birlikte, günümüzde bu fenomenin doğasının anlaşılması adına birçok kozmolojik araştırma da yürütülmektedir.

1.3 Başlamadan önce özet bilgi

Bu doktora tezi kapsamında yapılanlar şu şekilde verilebilir :

- GG' nin klasik oyun sahası olan Riemann geometrisine alternatif, farklı geometriler baz alınarak bu geometriler üzerine temellenmiş birtakım gravitasyon modelleri çalışıldı. Bu amaca kaynak olması adına Bölüm 4 altında, *Riemann-dışı geometriler* olarak bilinen farklı geometriler incelendi. Riemann geometrisinde bağlantı (*connection*) nesnesi (Levi-Civita bağlantısı) metrik bir yapıdadır ve dolayısıyla bu geometrinin dinamiği metrik tarafından belirlenir. Literatürde, GG teorisinin metrik bir teori olduğunun söylenmesi, bu sebeptendir. Öte yandan, Riemann-dışı geometriler, doğaları gereği, metrik-afin geometri (*metric-affine geometry*) (MAG) yaklaşımı ile ele alınmaktadır ve artık bağlantı nesnesi metrik tarafından belirlenmek zorunda değildir, en genelde. Bölüm 4.3 kapsamında MAG' ın bir alt kümesi olan *teleparalel* geometri modelleri incelendi ve Bölüm 4.4 altında bu Riemann-dışı geometrilerin jeodezik hesaplama ve paralel taşıma işlemleri için nasıl farklılıklar yarattığı araştırıldı. Bölüm 5.2 altında da, bahsi geçen teleparalel geometrilerin kanonik gravitasyon modelleri çalışıldı ve literatürde GG için iyi bilinen bazı çözüm sınıflarının bu modeller için de sağlandığı gösterildi.
- Ayar kuramı yaklaşımının Standart Model' deki başarısının üzerine, gravi-

tasyonun da benzer bir reçete ile, bir ayar kuramı olarak yazılabilmesi fikri araştırmacılara uzun süredir motivasyon olmuştur. Bölüm 5.1 altında çeşitli gravitasyon ayar kuramları incelendi. Lorentz grubunun doğal genişlemesi olarak Poincaré ve Weyl transformasyonları lokalize edildi ve ilgili gravitasyon modelleri çalışıldı.

- Bölüm 5.3 kapsamında, Lagrangiyen seviyesinde GG' den farklı olarak, eğrilik skalerine ek terimlerin yer aldığı gravitasyon modellerini içeren ve literatürde bir hayli ilgi uyandıran aktif bir çalışma sahası olarak *genişletilmiş gravitasyon teorileri* incelendi. Skaler-tensör ve $f(R)$ modellerinin Riemann geometrisi kapsamında verilmesinin ardından Bölüm 5.3.1.3 Riemann-dışı bir geometride skaler-tensör teorisi çalışıldı ve Lorentz simetrisi, ölçek değişmezliğini de içerecek şekilde genişletildi.
- Einstein' ın GG çalışması sayesinde gravitasyon, geometri ile maddenin etkileşimi olarak anlaşılmıştır. Maddesiz ortamlarda da gravitasyonun çalışılması pekala mümkün iken (ör. gravitasyon dalgalarının yayılımı), madde varlığı ile yapılan çalışmalar daha bütüncül olabilmektedir. Bu motivasyonla Bölüm 5.4.1 altında bir Dirac alanının Riemann-dışı bir geometri ile çiftlendiği bir oyuncak model (*toy model*) çalışıldı. Gravitasyon etkileşiminin, Dirac parçacığının Hamiltoniyenine nasıl etki ettiği araştırıldı.

Kısım I
Geometrik temeller ve ayar
kuramı

Konu 2

Matematiksel hazırlık

“Doğa, matematiğin dili ile yazılmıştır.”

Galileo Galilei

Bu bölümde tez içeriği boyunca kullanılacak matematik ile ilgili temeller verilecektir. Gravitasyon fenomeninin, geometrinin dinamiği olarak anlaşılıyor olması sebebiyle, bu alandaki çalışmalarda çeşitli geometrik yapılar ve kuralları kullanırız. Manifold yapısı, uzayzamanın taşınmasını istediğimiz özellikleri barındırması açısından gravitasyon çalışmalarında temel teşkil eder. Bölüm 2.1 altında manifold ve üzerinde yer alabilecek operasyonlar verildikten sonra, fizik yaparken kullandığımız nesnelerin, örneğin vektörler, kovektörler, tensörler, vs., manifoldlar üzerindeki doğal kurulumlarından bahsedilmiştir. Tez kapsamında ve yayımlanan çalışmalarımızda yoğun olarak *dış cebir* kullanıldığı için Bölüm 2.2 altında bununla ilgili bazı temel bilgiler özetlenmiştir. Diferansiyel formlar ve dış cebir formülasyonu ile donandıktan sonra Bölüm 2.3 altında *metrik* ve *bağlantı* nesneleri tanıtılmıştır, öyle ki belki de bir manifold içinde oluşturulabilecek en önemli nesneler olarak gösterilebilirler.

2.1 Manifoldlar ve diferansiyel geometri

2.1.1 Manifold

Tanım 2.1 (Topolojik uzay). M boş olmayan bir küme ve $\mathfrak{M}$ bu kümenin tüm açık altkümelerini ve boş kümeyi $\emptyset$ içersin. $\mathfrak{M}$ üzerinde aşağıdaki koşulları tanımlayalım :

1. M ve $\emptyset$ kümeleri $\mathfrak{M}$ içinde yer alsın.
2. Sonlu sayıda kümenin kesişimleri yine $\mathfrak{M}$ içinde kalsın.
3. Kümelerin rastgele bileşimleri yine $\mathfrak{M}$ içinde kalsın.

Bu koşullar altında M bir *topolojik uzay* ve $\mathfrak{M}$ bu uzay üzerinde tanımlı bir *topoloji* olur. $\square$

Tanım 2.2 (Homeomorfizm). Let M, N topolojik uzaylar olsun ve $F : M \rightarrow N$ bir *sürekli harita* olsun, öyle ki M üzerindeki elemanları N üzerine haritalasın. F 'nin bir tersi¹ olduğunu varsayalım, F^{-1} . Eğer F ve F^{-1} , her ikisi de sürekli ise F 'ye, M ve N arasında bir *homeomorfizm* denir. Böylece M ve N birbirlerine homeomorfik olurlar. $\square$

Tanım 2.3 (Koordinat fonksiyonları, koordinat yamaları ve atlas). M^d d-boyutlu bir topolojik uzay olsun. $\forall p \in M$ için, bir açık komşuluk tanımlansın $U \subset M$, öyle ki aşağıdaki şekilde bir ϕ_U homeomorfizmi U ve $\mathbb{R}^d$ arasında tanımlanmış olsun

$$\begin{aligned} \phi_U : \quad U &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ p &\rightarrow \phi(p) \equiv x_U^\mu(p) = (x_U^1(p), x_U^2(p), \dots, x_U^d(p)) \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

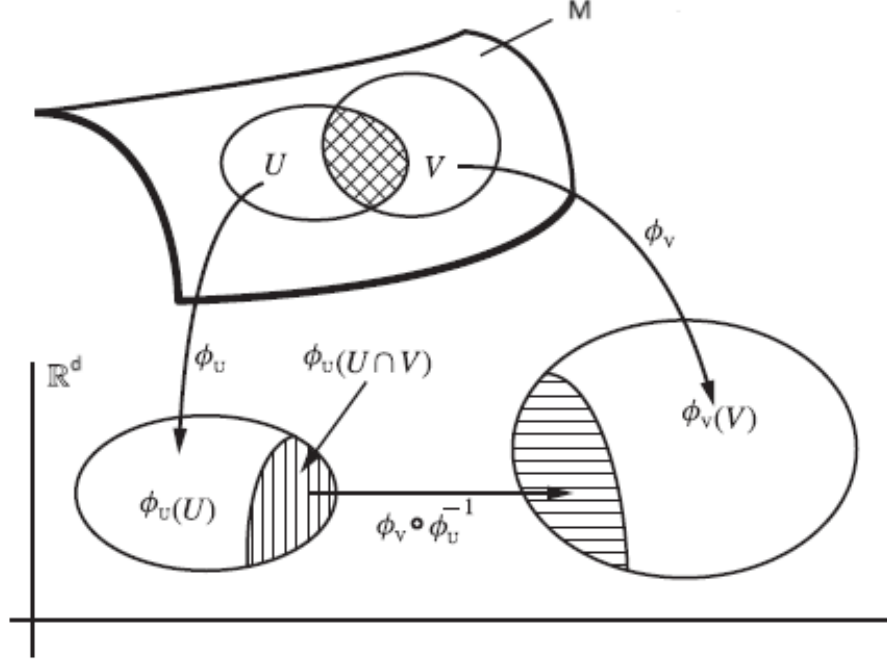
Burada x_U^μ 'lar *koordinat fonksiyonları* ve ϕ_U *koordinat haritası* olarak adlandırılır. Birlikte (U, ϕ_U) ise *koordinat yaması* oluştururlar. Uzayı kaplayan tüm olası koordinat yamalarının kümesi de *atlas* olarak adlandırılır. $\square$

Koordinat fonksiyonları manifold üzerindeki her bir noktaya $p \in M$, d-tane sayı iliştirirler. Aslında bu fonksiyonlar, temel matematik derslerinde verilen ve her noktaya, ilgili eksenlere karşılık gelen bir sayı ataması yapan koordinat sistemlerinden başka bir şey değildirler. Ör. üç boyutta $p = (3, 5, -9)$. Nümerik hesaplamalar yapabilmek için soyut noktaları numaralar ile göstermeye ihtiyaç duyarız ve koordinat fonksiyonlarını bu sebeple tanımlarız. Daha detaylı söylemek gerekirse, koordinat fonksiyonları her bir $p \in U \subset M$ noktasının civarında, U komşuluğunda geçerli olan bir lokal koordinat sistemi tanımlarlar. Topolojik uzaylarda çalıştığımız için, aynı p noktası, farklı koordinat fonksiyonlarının geçerli olduğu farklı komşulukların, $\{U, V\} \subset M$, kesişimleri içinde yer alabilir, $p \in U \cap V$. Bu durumda p noktası farklı koordinat yamaları ile tarif edilebilir. $\mu, \nu = 1, \dots, d$ olmak üzere şunlar yazılabilir

$$\begin{aligned} \phi_U : \quad U &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ p &\rightarrow \phi(p) \equiv x_U^\mu(p) = (x_U^1(p), x_U^2(p), \dots, x_U^d(p)) \end{aligned} \quad (2.1.2a)$$

$$\begin{aligned} \phi_V : \quad V &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ p &\rightarrow \phi(p) \equiv x_V^\nu(p) = (x_V^1(p), x_V^2(p), \dots, x_V^d(p)) \end{aligned} \quad (2.1.2b)$$

¹Hem bire bir (1:1) hem de örten.



Figür 2.1: Koordinat yamaları arasındaki geçiş (harita)

Kesişen yamalar arasında koordinat dönüşümünü sağlayan kesişim (veya geçiş) fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanır²

$$\begin{aligned} f_{VU} &= \phi_V \circ \phi_U^{-1} : \phi_U(U \cap V) \rightarrow \phi_V(U \cap V) \\ &: x_U^\mu \rightarrow x_V^\nu \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Yukarıdaki harita, M manifoldunun açık altkümelerinin kesişimleri üzerinde tanımlanır ve ilgili yamalardaki koordinatlar arasında dönüşüm sağlar

$$x_V^\nu(p) = (f_{VU})^\nu{}_\mu x_U^\mu(p) = (f_{VU})^\nu (x_U^1(p), x_U^2(p), \dots, x_U^d(p)) \quad (2.1.4)$$

Pratik anlamda, bu operasyon, aslında bilinen bayağı koordinat dönüşümünden başka bir şey değildir. Bkz. Figür 2.1.

Tanım 2.4 (Diferansiyellenebilir harita). M^m, N^n topolojik uzaylar ve $F : M \rightarrow N$ sürekli bir harita olsun. Dahası, bu uzaylar üzerinde, sırasıyla şu koordinat fonksiyonları farz edilsin :

$$x^\mu(p) \equiv \{x^1(p), \dots, x^m(p)\} \quad \text{ve} \quad y^\nu(F(p)) \equiv \{y^1(F(p)), \dots, y^n(F(p))\}$$

Bu halde F 'nin *diferansiyellenebilir* olduğu, şu durumda söylenebilir: Reel uzayda tanımlı bir fonksiyon olarak $y = F(x) \equiv y \circ F \circ x^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, x' e göre diferansiyellenebilir ise. $\square$

²Tez dokümanı boyunca, aksi belirtilmedikçe, koordinat yaması ve koordinat sistemi tanımları birbirleri yerine kullanılabilir.

Tanım 2.5 (Difeomorfizm). F bir homomorfizm olsun. Eğer kendisi ve tersi de diferansiyellenebilir bir harita ise, F bir *difeomorfizm* olur. $\square$

Tanım 2.6 ((Topolojik) manifold). M bir topolojik uzay olsun. Eğer Öklid uzayına $\mathbb{R}^d$, lokal bir homeomorfizm var ise, bu uzay bir *d-boyutlu topolojik manifold* olarak tanımlanır.^{3:4} $\square$

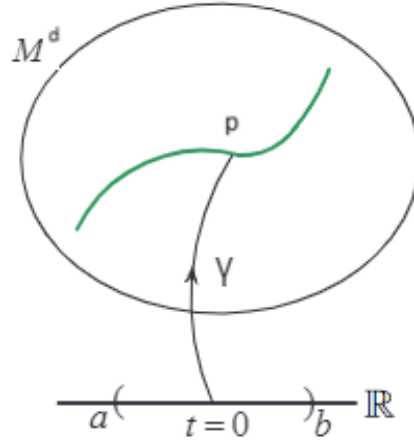
Yukarıda verilenler arasında temel nokta -içeriğimizdeki önemine göre- lokalliktir. Matematikteki soyut tanımların ve fikirlerin yanında, fizikte daha "gerçek" kavramlar vardır. Aslında bunlar, fiziksel süreçlerdeki "ölçüm"lerdir. Dahası, bildiğimiz kadarıyla evren nedensellik ilkesine uygun olarak davranmaktadır. Bu ilke gereği fiziksel etkileşimler lokal olarak gerçekleşirler ve uzayzamandaki yayılmaları da yine lokal etkileşmeler aracılığı ile olur. Bu durumda, söylenebilir ki, aslında fizik (ölçümlerin gerçekleştirilmesi anlamında) uzayzamanın lokal bir porsiyonunda yapılmaktadır. Bu gereksinim, uzayzaman noktalarının neden lokal olarak koordinatlarla işaretlendiğini de açıklar. Tam bu noktada, manifold yapısı en uyumlu biçimde karşımıza çıkar ve üzerinde lokal koordinat yamaları oluşturulmasına olanak verir, öyle ki bu lokal bölgelerde fizik ölçümleri (nümerik işlemler) yapılabilir. Dahası, farklı lokal bölgelerdeki nesnelerin nasıl dönüşeceklerini de tanımlar. Özetle, matematikteki soyut manifold kavramının miras alınması ile, aslında bir bakıma, fizik (lokal ölçümler) ile geometri (matematiksel nesneler) arasında en rafine şekilde bağlantı kurulmuş olur. Bu ilişki, gravitasyonun anlaşılması adına temel teşkil etmektedir.⁵

Tanım 2.7 (Diferansiyellenebilir manifold). $\mathcal{M}$ topolojik bir manifold olsun. Eğer atlas içindeki tüm kesişim fonksiyonları f_{VU} ' lar, diferansiyellebilir ise, manifoldun *diferansiyellenebilir (düzgün)* olduğu söylenir. $\square$

³Daha net olmak gerekirse, manifold yapısı kazanmak şu iki koşulu gerektirir (i) Hausdorff, (ii) ikinci-sayılabirlik (*second-countable*). Bu bölümdeki akışımız gereği, konu hakkında daha fazla teknik detaya girilmeyecektir.

⁴ M topolojik uzayından farklı olarak manifold yapısını vurgulamak adına, topolojik manifold $\mathcal{M}$ ile gösterilecektir.

⁵Daha teknik bir bakış açısı şu şekilde verilebilir. Geleneksel olarak, kuantum mekaniği (QM) düz bir geometri üzerinde (Öklidyen veya Minkowskiyen) inşa edilmiştir ve lokal etkileşimleri içerir. Kendi yapısı içinde, QM' nin içinde bulunduğu uzayın dinamiği, hiçbir şekilde söz konusu değildir. Bu durumda, manifold yapısının düz bir uzayda lokal olarak QM gerçekleştirilmesine olanak sağladığı söylenebilir. Diğer taraftan, QM'nin lokal çalışmasından bağımsız olarak, uzayın dinamiğini ele alabilecek güçlü matematiksel yapılara da sahibiz (*eğri* geometriler üzerinde eğrilik nesnesi ile). Böylece, en genelde manifold yapısının kullanılmasıyla literatürde çok zengin ve ileri bir araştırma sahası olan *eğri geometrilere QM* kapsamında çalışmalar yapılabilir.



Figür 2.2: Manifold içinde bir eğrinin gösterimi

Geleneksel olarak, k . dereceden diferansiyellenebilirlik C^k ile gösterilir ve kesişim fonksiyonlarının C^k olması durumunda, manifoldun da C^k sınıfında yer aldığı söylenir. Diferansiyellenebilir bir manifold ise, kesişim fonksiyonlarının tüm k 'lar için C^k sınıfında olduğu bir yapı olarak tanımlanır. Bu genel sınıf C^∞ ile gösterilir. Dolayısıyla, diferansiyellenebilir manifold, kesişim fonksiyonlarının C^∞ sınıfında yer aldığı bir yapıdır.⁶

2.1.2 Çerçeveler

2.1.2.1 Fonksiyonlar ve eğriler

$\mathcal{M}^d$ d-boyutlu bir manifold olsun (ihtiyaç olmadığı sürece üst simge d 'yi kullanmayacağız), $(U, V) \subset \mathcal{M}$ ve ϕ_U, U bölgesinde bir koordinat haritası olsun, öyle ki (U, ϕ_U) bu bölge içinde rastgele bir p noktası civarındaki koordinat yaması olsun.

Tanım 2.8 (Manifold içinde fonksiyon). f fonksiyonunu şöyle bir harita ile tanımlarız, $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, öyle ki manifoldun her bir elemanına bir reel sayı ataması yapar. $\square$

Eğer şu bileşik harita, $f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir (olağan şekilde) ise f fonksiyonunun da diferansiyellenebilir olduğu söylenir.

Tanım 2.9 (Manifold içinde eğri). (a, b) aralığı $\mathbb{R}$ 'nin açık bir alt kümesi ve $t \in (a, b)$ olsun. Bir (t -parametrelili) eğri $\gamma(t)$ şu şekilde tanımlanır $\gamma : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$, öyle ki manifoldun bir porsiyonuna reel sayıların bir porsiyonunun atamasını yapar. $\square$

⁶Fizikte, çok büyük genellikle diferansiyellenebilir manifoldlar ile çalışılır.

Eğrinin taradığı noktalar $\gamma(t)$ ile gösterilir. $x_U^\mu(p)$ koordinat fonksiyonlarını içeren bir koordinat yamasında, bu noktalar alternatif olarak, koordinat notasyonu ile şu şekilde de gösterilebilir, $x_U^\mu(\gamma(t))$. Bu gösterim, pratik anlamda, eğrilerin, taradığı noktaların koordinatları kullanılarak da incelenmesini sağlar.

2.1.2.2 Manifold içinde (teğet) vektör fikri

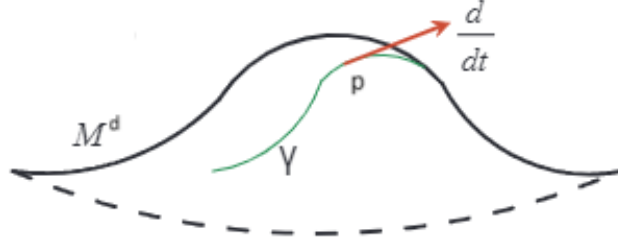
Şimdi, bir eğrinin herhangi bir p noktasında, parametresine göre nasıl değiştiği sorulsun. Her zaman olduğu gibi, değişimi türev operatörü ile temsil ederiz, d/dt . Klasik anlayışımızdan edindiğimiz tecrübe ile, değişimin (bir eğrinin değişimi) *yönlü* bir nicelik betimlediği söylenebilir. Daha net olmak gerekirse bir vektörü tanımlar, $d/dt \rightarrow \mathbf{V}$, öyle ki p noktasında eğriye teğet olan bir vektör. Bkz. Figür 2.3. Bunun altındaki ana fikir, aslında, manifoldun kendisinin yönlü bir yapıya sahip olmasıdır, öyle ki bu yapı içerisinde herhangi bir yöndeki (koordinat eksenindeki veya koordinattaki) değişim araştırılabilir. Böylece, rastgele bir değişim, her bir koordinattaki değişimlerin toplamı olacak şekilde parçalara ayrılarak incelenebilir. Zincir kuralı yardımıyla aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz

$$\mathbf{V} \equiv \frac{d}{dt} = \left|_p \underbrace{\frac{\partial x^\mu}{\partial t}}_{\text{bileşenler}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^\mu}}_{\text{bazlar}} =: V^\mu \partial_\mu \quad \mu = (1, \dots, d) \quad (2.1.5)$$

$\partial/\partial x^\mu$ ifadesi ∂_μ olarak kısaltıldı. Görüldüğü üzere, ∂_μ ' lar, x_U^μ koordinat fonksiyonlarının var olduğu koordinat yamasında, vektörler için baz oluştururlar. Bu bazların kümesi **çerçeve** olarak adlandırılır.⁷ Çerçeveler hakkında ilerleyen bölümlerde daha fazla bilgi verilecek. Bununla ilişkili olarak, V^μ ' lar da ilgili yamadaki bileşenleri oluştururlar. Dolayısıyla, bileşenler sıkı bir şekilde seçilen yamaya (koordinat fonksiyonlarına) bağlıdır. Verilen bu bakış açısı, (teğet) vektörlerin, bir manifold içinde geometrik olarak nasıl ifade edileceğini tarif eder. Geleneksel olarak, bir vektörün p noktasındaki teğet vektör olduğunu ifade etmek için $\mathbf{V}_p$ gösterimi kullanılır. Aşağıdaki tanımla devam edelim.

Tanım 2.10 (Teğet vektör). Bir *teğet vektör* $\mathbf{V}_p$, öyle ki $p \in \mathcal{M}$, d-tane reel sayının bir p noktasına atamasını yapar, öyle ki bu reel sayılar seçilen koordinat yaması tarafından belirlenir ve vektörün bileşenlerini oluştururlar $\mathbf{V}_p$. $\square$

⁷Bu noktada şunun belirtilmesinde yarar var; yukarıdaki akıştan da görülebileceği üzere, bir koordinat sisteminin seçilmesi, doğal olarak vektörler (genel olarak tensörler) için bir çerçeve seçilmesi anlamına gelir. Bu çerçeve, *doğal çerçeve* veya *koordinat çerçevesi* olarak adlandırılır. En genelde, tüm çerçeveler bir koordinat sistemi ile ilişkili olmak zorunda değildir. Bu tipte olanlar, *anholonomic* çerçeve olarak adlandırılır. Genel çerçevelerden ilerleyen bölümlerde bahsedilecektir.



Figür 2.3: Manifold içinde bir teğet vektörün gösterimi

Bir vektör bileşenlerine ayrılabilir, Denk.(2.1.5) ile yapıldığı üzere, öyle ki bu operasyon p noktası civarındaki farklı koordinatlar altında şu şekilde verilebilir⁸

$$\mathbf{V} = \Big|_p V_U^\mu \partial_\mu^U = V_V^\nu \partial_\nu^V \quad (2.1.6)$$

Daha sonra, bileşenlerin farklı koordinat sistemleri arasındaki dönüşüm kuralı aşağıdaki şekilde yazılabilir (p noktası gösterimi bırakıldı)

$$V_V^\nu = \frac{\partial x_V^\nu}{\partial x_U^\mu} V_U^\mu \quad (2.1.7)$$

Bilinen notasyonla uyumlu olması adına, $y^\nu \equiv x_V^\nu$, $x^\mu \equiv x_U^\mu$ ve $V'^\nu \equiv V_V^\nu$, $V^\mu \equiv V_U^\mu$, gösterimlerini yapalım. Buna göre, yukarıdaki ile eş olan şu ifade yazılabilir

$$V'^\nu = \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} V^\mu \quad (2.1.8)$$

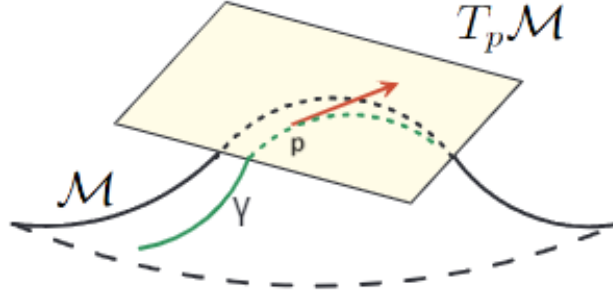
İlerleyen bölümlerde bu dönüşüm kuralı, genel olarak tensör bileşenlerinin hem koordinat transformasyonları altındaki dönüşümleri hem de (herhangi bir koordinat ile ilişkilendirilmesi zorunlu olmayan) çerçeve transformasyonları altındaki dönüşümleri için genelleştirilecektir.

Tanım 2.11 (Teğet uzayı ve teğet demeti). Verilen bir p noktasında, $\mathcal{M}$ manifolduna teğet tüm vektörlerin oluşturduğu uzay, *teğet uzayı* olarak adlandırılır ve $T_p\mathcal{M}$ ile gösterilir. Bkz. Figür 2.4. $\mathcal{M}$ manifoldundaki tüm noktalarda tanımlı teğet uzaylarının ayrık bileşim kümesi de, ki bu da bir uzay oluşturur $\bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p\mathcal{M}$, *teğet demeti* olarak adlandırılır ve $T\mathcal{M}$ ile gösterilir. $\square$

2.1.2.3 Koteğit vektörleri (kovektörler) ve dualite

Tanım 2.12 ($T_p\mathcal{M}$ üzerinde fonksiyoneller). $T_p\mathcal{M}$ herhangi bir vektör uzayı olsun, $\mathcal{M}$ üzerinde ve $\mathbf{V}, \mathbf{W} \in T_p\mathcal{M}$. Vektör uzayı üzerine etki eden $\mathcal{F}$ fonksiyoneli

⁸Bu bölüm kapsamında, vektörleri ve ilişkili çerçeveleri kalın sembol ile göstereceğiz, vektör / çerçeve ve kovektör / koçerçeve arasındaki ayrımı vurgulamak için. İlerleyen bölümlerde bu konvansiyonu bırakacağız.



Figür 2.4: Teğet uzayı

lineer bir harita olarak şu şekilde tanımlanır $\mathcal{F} : T_p \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, öyle ki lineerlik aşağıdaki gibi verilir

$$\mathcal{F}(a\mathbf{V} \pm b\mathbf{W}) = a\mathcal{F}(\mathbf{V}) \pm b\mathcal{F}(\mathbf{W}) \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (2.1.9)$$

□

Tanım 2.13 ($T_p \mathcal{M}'$ ye dual uzay). Verilen bir $T_p \mathcal{M}$ vektör uzayında tanımlı tüm fonksiyonların kümesi $T_p \mathcal{M}'$ nin *dual uzayını* tanımlar ve bu uzay $T_p^* \mathcal{M}$ ile gösterilir. Bu dual uzay da (cebirsal olarak) bir vektör uzayıdır ve aşağıdaki koşulları sağlar

$$\begin{aligned} (\mathcal{F} \pm \mathcal{G})(\mathbf{V}) &= \mathcal{F}(\mathbf{V}) \pm \mathcal{G}(\mathbf{V}) \\ (a\mathcal{F})(\mathbf{V}) &= a\mathcal{F}(\mathbf{V}) \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

burada $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in T_p^* \mathcal{M}$ ve $a \in \mathbb{R}$. □

$T_p^* \mathcal{M}'$ nin elemanları, ki bunlar teğet uzayına etki eden fonksiyonlardır, **koteğet vektörler** veya kısaca **kovektörler** olarak adlandırılır. İlişkili olarak, $T_p^* \mathcal{M}$ dual uzayı da *koteğet uzayı* olarak adlandırılır.

Tanım 2.14 (Koteğet uzayı ve koteğet demeti). Verilen bir p noktası için $\mathcal{M}$ manifolduna koteğet vektörlerin oluşturduğu uzay *koteğet uzayı* olarak adlandırılır ve $T_p^* \mathcal{M}$ ile gösterilir. $\mathcal{M}$ manifoldundaki tüm noktalarda tanımlı koteğet uzaylarının ayrık bileşim kümesi de, ki bu da bir uzay oluşturur $\bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p^* \mathcal{M}$, *koteğet demeti* olarak adlandırılır ve $T^* \mathcal{M}$ ile gösterilir. □

$T_p^* \mathcal{M}$ de bir vektör uzayı yapısına sahip olduğu için, kovektörler de bu yapıdadır, öyle ki rastgele bir kovektör de bir çerçeve altında bileşenlerine ayrıştırılabilir, olağan vektörler üzerinde yaptığımız operasyona benzer şekilde. Dolayısıyla, doğal olarak, teğet uzayındaki çerçevelere dual olan ve koteğet uzayında yayılan bir dual çerçeve yapısından bahsedilebilir -koteğet uzayının, teğet uzayına dual

olması gibi-. Tahmin edilebileceği üzere, bu çerçeveler **koçerçeve** olarak adlandırılır ve bunlar kovektörleri bileşenlerine ayırmak için kullanılırlar. σ^α bir koçerçeve olsun. $\mathcal{F}$ kovektörü aşağıdaki şekilde ayrıştırılır

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_\alpha \sigma^\alpha \quad (2.1.11)$$

burada $\mathcal{F}_\alpha$ ' lar bileşenleri oluşturur.⁹ Vektör uzayındaki koordinat çerçevesine benzer şekilde, seçilen koordinat sistemi ile doğal olarak ilişkilendirilebilen bir koordinat koçerçevesi de tanımlanabilir. $\{x^\mu\}$ koordinat sisteminde çalıştığımız varsayalım. Koordinat koçerçevesi, koordinat fonksiyonlarının diferansiyeli olarak verilebilir, dx^μ . Bu koçerçevede, $\mathcal{F}$ kovektörü şu şekilde ayrıştırılır

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_\alpha dx^\alpha \quad (2.1.12)$$

Elbette başka bir koordinat sisteminde y^μ , bileşenler de farklı olabilecektir, vektörlerde olduğuna benzer şekilde

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_\alpha dx^\alpha = \mathcal{F}'_\beta dy^\beta \quad (2.1.13)$$

burada, kovektör bileşenlerinin dönüşüm kuralı aşağıdaki gibi verilebilir

$$\mathcal{F}'_\beta = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta} \mathcal{F}_\alpha \quad (2.1.14)$$

Bu sonuç Denk.(2.1.8) ile karşılaştırıldığında, bir koordinat dönüşümü altında vektörlerin ve kovektörlerin bileşenlerinin zıt bir şekilde dönüştüğü görülür.

Tanım 2.15 (Dualite). $T_p\mathcal{M}$ ve $T_p^*\mathcal{M}$ uzayları arasındaki dualite ilişkisi, bunlar üzerinde bazlar vasıtasıyla verilir. $\partial_\mu \in T_p\mathcal{M}$ bir çerçeve ve $dx^\alpha \in T_p^*\mathcal{M}$ bir koçerçeve olsun. Bunlar arasındaki dualite şu şekilde tanımlanır

$$dx^\alpha(\partial_\mu) = \delta_\mu^\alpha \quad (2.1.15)$$

burada δ Kronecker delta tensörüdür

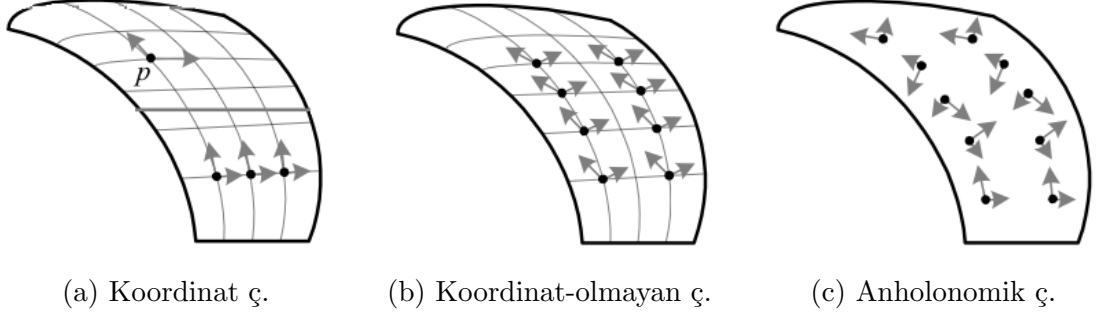
$$\delta_\mu^\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha = \mu \text{ ise} \\ 0, & \alpha \neq \mu \text{ ise} \end{cases} \quad (2.1.16)$$

□

Yukarıdaki tanımlamada koordinat çerçevesi ve koordinat koçerçevesi kullanıldı, ancak dualite seçilen çerçeveden bağımsızdır ve teğet / koteğit uzaylarının içsel bir uygulamasıdır. Dualite yardımıyla, kovektörlerin, vektörler üzerine etkiyerek onların ilgili bileşenlerini veren bir fonksiyonel olarak ele alınabileceği gösterilebilir. Aşağıdaki ifadeye bakalım

$$dx^\alpha(\mathbf{V}) = dx^\alpha(V^\mu \partial_\mu) = V^\mu dx^\alpha(\partial_\mu) = V^\mu \delta_\mu^\alpha = V^\alpha \quad (2.1.17)$$

⁹Kovektör bileşenlerini işaretlemek için alt indis kullanıldı, vektörlerdeki durumun tersi olarak. Bu kullanım, konvansiyonel ve teknik sebeplerden ötürü bilinçli olarak yapıldı.



Figür 2.5: Manifold üzerindeki çerçeveler

2.1.2.4 Genel çerçeveler

Bir (ko)çerçeve¹⁰ (diferansiyellenebilir) bir manifold ele alındığında, doğal bir yapı olarak karşımıza çıkar. Her nokta üzerinde bir baz kümesi tanımlarlar (bu açıdan bir alan olarak da değerlendirilebilirler) ve böylece en genelde tensörler gibi yönlü niceliklere sahip objelerin bileşenlerinin incelenebilmesine imkan sağlarlar. Manifoldun lokal bir bölgesinde tanımlanabilmelerine herhangi bir mani olmadığı için global olarak tüm manifold üzerinde yayılmak zorunda değildirler.

Tanım 2.16 (Çerçeve ve koçerçeve). $\mathcal{M}$ diferansiyellenebilir bir manifold olsun, $T_p\mathcal{M}$ ve $T_p^*\mathcal{M}$ sırasıyla teğet ve koteğet uzayları olsun, rastgele bir p noktası üzerinde. $T_p\mathcal{M}$ üzerindeki bir baz kümesi *çerçeve* ve $T_p^*\mathcal{M}$ üzerindeki bir kobaz kümesi de *koçerçeve* olarak adlandırılır. $\square$

Şimdiye kadar, bir koordinat sistemi ile ilişkilendirilen (ko)çerçevelerle ilgilendik, yani koordinat (doğal) (ko)çerçeveler. Bunlar, öyle bir baz kümesi olarak düşünülebilir ki, bazlar ilgili koordinat sisteminin koordinat eğrileri ile kesişsin. Bu çerçeveler literatürde ayrıca *holonomic* (**holonomik**) çerçeve olarak da adlandırılır. Diğer taraftan, bir koordinat çerçevesinden (lineer olarak) türetilen ancak herhangi bir koordinat sisteminin koordinat eğrileri ile kesişmeyen bir çerçeve de seçilebilir, öyle ki bunlar *non-coordinate* (**koordinat-olmayan**) çerçeve olarak adlandırılır. Ancak, en genelde, bir çerçeve herhangi bir koordinat sistemi ile ilişkili olmak zorunda değildir.¹¹ Bu durumda, bu rastgele çerçeveler herhangi bir koordinat sisteminden türetilemezler. Bunlar *anholonomic* (**anholonomik**) çerçeveler olarak adlandırılır. Bkz. Figür 2.5.

$\{\hat{e}_\mu\}$ ve $\{\check{e}^\mu\}$ rastgele bir çerçeve ve koçerçeve olsun, sırasıyla. Bunların dual olduğu varsayılın, $\check{e}^\alpha(\hat{e}_\mu) = \delta_\mu^\alpha$. Özel olarak bir koordinat sistemi $\{x^\mu\}$

¹⁰Kısaltma olarak, "(ko)" ön eki, hem çerçeveleri hem de koçerçeveleri birlikte ifade etmek için kullanıldı.

¹¹Ancak halen bir koordinat çerçevesi ile ilişkili olabilir.

ile ilişkilendirildiğinde, bunlar holonomik (ko)çerçevelere karşılık gelirler $\hat{e}_\mu = \partial_\mu$, $\check{e}^\mu = dx^\mu$. En genelde ise bu rastgele (ko)çerçeveler, koordinat (ko)çerçeveleri ile aşağıdaki şekilde ilişkilendirilebilir

$$\hat{e}_i = h^\mu_i \partial_\mu \quad (2.1.18a)$$

$$\check{e}^j = h_\alpha^j dx^\alpha \quad (2.1.18b)$$

(Ko)çerçeveler arasındaki dualite kullanılarak aşağıdaki ifade yazılabilir

$$h^\mu_i h_\alpha^i = \delta_\alpha^\mu, \quad h^\mu_i h_\mu^j = \delta_i^j \quad (2.1.19)$$

Burada h' lar *vielbein* olarak adlandırılır.¹² Bunlar, holonomik ve rastgeel (ko)çerçeveler arasındaki transformasyonlar olarak düşünülebilir. Rastgele bir (ko)çerçevenin holonomik olabilmesi, yani bir $\{y^i\}$ koordinat sistemi ile ilişkilendirilebilmesi için, aşağıdaki koşul sağlanmalıdır

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} = h^\mu_i \quad (2.1.20)$$

Bu ifade bazı metinlerde, *integrallenebilme koşulu* olarak adlandırılır ve bu durumda (ko)çerçevelerin dönüşümü, koordinat dönüşümü olarak düşünülebilir. Buna göre söylenebilir ki, rastgele bir (ko)çerçevenin holonomik olabilmesi için ilişkili bir integrallenebilirlik olmalıdır. Bu koşul, verilen bir (ko)çerçevenin bazları arasındaki *Lie bracket* hesaplanarak araştırılabilir. Öncelikle birkaç tanım verelim.

Tanım 2.17 (Anholonomi katsayıları). $\{\hat{e}_i\}$ rastgele bir çerçeve olsun.¹³ Bazlar arasındaki *Lie bracket*¹⁴ şu şekilde hesaplanır

$$[\hat{e}_i, \hat{e}_j] = f^k_{ij} \hat{e}_k \quad (2.1.21)$$

burada f' ler *anholonomi (yapı) katsayıları* olarak adlandırılır ve şu şekilde verilir

$$f^k_{ij} = h^\mu_i h^\nu_j f^k_{\mu\nu}, \quad f^k_{\mu\nu} := 2\partial_{[\mu} h_{\nu]}^k \quad (2.1.22)$$

□

¹²Almanca bir ifadedir, "viel" (çok anlamında) ve "bein" (bacak anlamında). 4-boyutta, bunlar iyi bilinen *tetrad* nesneleridir.

¹³Benzer (dual) hesaplama koçerçeve için de gerçekleştirilebilir. $\{\check{e}^i\}$ bir dual koçerçeve olsun. Buna göre, Cartan yapı denklemi şunu verir

$$d\check{e}^k = -\frac{1}{2}f^k_{ij}\check{e}^i \wedge \check{e}^j = -\frac{1}{2}f^k_{\alpha\beta}dx^\alpha \wedge dx^\beta = \partial_{[\alpha} h_{\beta]}^k dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

¹⁴Lie türevi ve *Lie bracket* işlemi ilerleyen bölümlerde verilecektir.

Teorem 2.18. $\{\hat{e}_i\}$ rastgele bir çerçeve olsun. Bu çerçevenin integrallenebilir olduğu, dolayısıyla holonomik olduğu, ancak ve ancak anholonomi katsayılarının sıfırlanması halinde söylenebilir

$$[\hat{e}_i, \hat{e}_j] = 0 \quad (2.1.23)$$

□

Eğer anholonomi katsayıları sıfırlanmamış ise, bu durumda $\{\hat{e}_i\}$ anholonomik bir çerçeve olur.

2.1.3 Tensörler

Tanım 2.19 (Tensör). $T_p\mathcal{M}$ ve $T_p^*\mathcal{M}$ teğet uzayı ve koteğet uzayı olsun (p noktasında), sırasıyla. (r, s) -tip bir tensör T şu şekilde tanımlanır

$$T : \underbrace{T_p\mathcal{M} \otimes \cdots \otimes T_p\mathcal{M}}_{r \text{ adet}} \otimes \underbrace{T_p^*\mathcal{M} \otimes \cdots \otimes T_p^*\mathcal{M}}_{s \text{ adet}} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.1.24)$$

□

Tensörler, sezgisel olarak, vektör ve kovektörlerin doğal genellemesi olarak düşünülebilir. Dolayısıyla, bunlar da vektör yapısına sahiptirler. Örneğin, $\{x^\mu\}$ koordinat sisteminde bir (r, s) -tip tensör koordinat (ko)çerçevesinde aşağıdaki gibi ayrıştırılabilir^{15,16}

$$T^{(r,s)} = T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_r}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_s} \partial_{\mu_1} \otimes \partial_{\mu_2} \cdots \otimes \partial_{\mu_r} \otimes dx^{\alpha_1} \otimes dx^{\alpha_2} \otimes \cdots \otimes dx^{\alpha_s} \quad (2.1.25)$$

burada bileşenler şu şekilde verilir

$$T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_r}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_s} := T(dx^{\mu_1}, dx^{\mu_2}, \dots, dx^{\mu_r}, \partial_{\alpha_1}, \partial_{\alpha_2}, \dots, \partial_{\alpha_s}) \quad (2.1.26)$$

(Ko)vektörlerdeki benzer şekilde, yukarıdaki tensör açılımı seçilen çerçeveden bağımsızdır. Denk.(2.1.18a) ile verilen (ko)çerçeve dönüşümüne göre tensör bileşenleri aşağıdaki gibi dönüşürler

$$T^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s} = h_{\mu_1}^{i_1} h_{\mu_2}^{i_2} \cdots h_{\mu_r}^{i_r} T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_r}_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_s} h^{\alpha_1}_{j_1} h^{\alpha_2}_{j_2} \cdots h^{\alpha_s}_{j_s} \quad (2.1.27)$$

¹⁵Doküman boyunca aksi özellikle belirtilmedikçe, "tensör" ve "tensör bileşenleri" birbirleri yerine kullanılabilir.

¹⁶Bazı kaynaklarda, üst indisler *kontravaryant* ve alt indisler *kovaryant* olarak adlandırılır. Doküman boyunca bu kullanımdan kaçınacağız. Benzer şekilde, eğer bir tensör tamamen vektörlerden (veya kovektörlerden) oluşuyorsa, kontravaryant tensör (veya kovaryant tensör) olarak adlandırılır.

Bu dönüşüm kuralı tensörel nesnelere özgüdür. Bazı kaynaklarda, matematiksel olarak tensör tanımı, yukarıdaki dönüşüm kuralı ile dönüşen objeler olarak verilmektedir. Bununla birlikte, bazı geometrik nesneler de vardır ki bu dönüşüm kuralına uymazlar, ör. bağlantı nesneleri (*connections*)¹⁷, dolayısıyla tensör olarak sayılmazlar. Şimdiye kadar ilgilendiğimiz nesneleri, tensörel karşılıkları ile aşağıdaki gibi verebiliriz

Skaler	: (0, 0)-tip tensör
Vektör	: (1, 0)-tip tensör
Kovektör	: (0, 1)-tip tensör
Genel (karışık) tensör	: (r, s)-tip tensör

Tanım 2.20 (Tensör uzayı). T ve Q birer (r, s) -tip tensör olsunlar ve $c \in \mathbb{R}$. Rastgele bir p noktasındaki *tensör uzay* $T_p^{(r,s)}\mathcal{M}$, bir vektör uzayı yapısına sahip olarak tanımlanır ve aşağıdaki lineerlik özelliklerine sahiptir

$$(T \oplus Q)^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_s} = T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_s} + Q^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_s} \quad (2.1.28a)$$

$$(cT)^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_s} = c T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_s} \quad (2.1.28b)$$

□

Manifoldun her noktasındaki tensör uzaylarının bileşimi tensör demetini oluşturur, $T^{(r,s)}\mathcal{M} := \bigcup_p T_p^{(r,s)}\mathcal{M}$.

Tanım 2.21 (Tensör çarpımı). $T \in T_p^{(r,s)}\mathcal{M}$ ve $Q \in T_p^{(p,q)}\mathcal{M}$ olsun. Tensör çarpımı $\otimes$, şu şekilde tanımlanır $(T \otimes Q) \in T_p^{(r+p,s+q)}\mathcal{M}$. Bileşen notasyonu ile aşağıdaki gibi verilir

$$(T \otimes Q)^{\mu_1 \dots \mu_r \mu_{r+1} \dots \mu_{r+p}}_{\nu_1 \dots \nu_s \nu_{s+1} \dots \nu_{s+q}} = T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} \times Q^{\mu_{r+1} \dots \mu_{r+p}}_{\nu_{s+1} \dots \nu_{s+q}} \quad (2.1.29)$$

□

En genelde, tensör çarpımı sıra değişen (*commutative*) değildir, $T \otimes Q \neq Q \otimes T$. Öte yandan birleşme özelliğini sağlar, $T \otimes (Q \otimes R) = (T \otimes Q) \otimes R$.

Tanım 2.22 (Simetrik ve antisimetrik tensörler). Verilen bir T tensörü için, bunun bileşeninde herhangi iki indisin (i, j) yer değiştirmesi sonrası aşağıdaki koşul geçerli ise

$$T^{\dots i \dots j \dots} = T^{\dots j \dots i \dots} \quad (2.1.30)$$

¹⁷Bağlantı nesnelere ilerleyen bölümlerde değinilecektir.

bu durumda T simetrik bir tensör olur. Benzer şekilde eğer aşağıdaki koşul geçerli ise

$$T^{...i...j...} = -T^{...j...i...} \quad (2.1.31)$$

bu durumda T antisimetrik bir tensör olur.¹⁸ $\square$

Verilen rastgele bir tensör kullanılarak, simetrik (veya antisimetrik) bir tensör oluşturulabilir. $T^{i_1...i_r}$ rastgele bir tensör bileşeni olsun, r - adet indisi olan. Aşağıdaki gibi bir simetrik tensör oluşturulabilir

$$T^{(i_1...i_r)} = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma(i_1...i_r)} T^{i_1...i_r} \quad (2.1.32)$$

burada $\sigma(i_1...i_r)$ indislerin dizimindeki tüm permütasyonları gösterir. Yuvarlak parantez ile " $(...)$ ", indislerin simetrik olduğu gösterilir. Benzer şekilde, antisimetrik bir tensör de aşağıdaki gibi oluşturulabilir

$$T^{[i_1...i_r]} = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma(i_1...i_r)} (sgn \sigma) T^{i_1...i_r} \quad (2.1.33)$$

burada

$$sgn \sigma = \begin{cases} +1, & \sigma' \text{ nın çift permütasyonları} \\ -1, & \sigma' \text{ nın tek permütasyonları} \end{cases} \quad (2.1.34)$$

ve indislerin antisimetrik olduğu köşeli parantez ile " $[...]$ " ile gösterilir. Dahası, simetrik (antisimetrik) tensörlerin kendi cebirleri oluşturulabilir, bu cebirlerin işlemi olan simetrik (antisimetrik) tensör çarpımı tanımlanarak. Bu çarpımlar, cebir yapısı gereği, tensörlerin simetrik (antisimetrik) özelliklerini korurlar. Özel olarak, antisimetrik tensör çarpımı " $\wedge$ " ile gösterilir ve *dış (wedge) çarpım* olarak adlandırılır. Bu çarpım ile tanımlanan antisimetrik tensör cebri, yani *dış cebir*, fizik uygulamalarında çok önemli bir yere sahiptir. Özellikle bu cebir, antisimetrik (kovaryant) tensörler ile kullanıldığı şekliyle, fizikte birçok uygulamada karşımıza çıkar. Antisimetrik (kovaryant) tensörler ayrıca *dış (diferansiyel) formlar* olarak adlandırılır.¹⁹

Tanım 2.23 (Dış (diferansiyel) formlar). Q bir kovaryant antisimetrik tensör olsun ve görüntü uzayı p -argümanlı olsun, $Q_{i_1...i_p} := Q(\hat{e}_{i_1}, \dots, \hat{e}_{i_p})$. Buna göre, rastgele bir çerçevede $\check{e}$, bu tensör bir (dış) p -form olarak aşağıdaki şekilde tanımlanır

$$Q = \frac{1}{p!} Q_{[i_1...i_p]} \check{e}^{i_1} \wedge \dots \wedge \check{e}^{i_p} \quad (2.1.35)$$

$\square$

¹⁸Bir tensörün simetrik veya antisimetrik olup olmadığı araştırılırken, bileşenindeki indislerin tamamının altta veya üstte olması gereklidir.

¹⁹İlerleyen bölümlerde, *dış (Grassmann) cebir* tanıtılacaktır ve orada dış formlar ve dış çarpım hakkında daha fazla bilgi verilecektir.

Yukarıdaki tanıma göre kovektörler, 1-form olurlar. Benzer şekilde, skaler fonksiyonları 0-form olarak işaretleriz. Rastgele bir p noktasındaki tüm q -formlar, q -form uzayını oluştururlar ve $\bigwedge_p^q \mathcal{M}$ ile gösterilir. Buna göre, $\bigwedge_p^1 \mathcal{M}$, kovektör uzayını tanımlar, yani $T_p^* \mathcal{M}$. Manifoldun her noktasındaki q -form uzayları, q -form demetini oluşturur, $\bigwedge^q \mathcal{M} = \bigcup_p \bigwedge_p^q \mathcal{M}$.

2.1.3.1 Tensörel nesnelerin dönüşüm kuralları

Tensörler, tanımları gereği, çerçeve dönüşümleri altında değerlerini değiştirmeyen nesnelerdir.²⁰ Bir tensör herhangi bir noktada herhangi bir çerçeve altında ayrıştırılabilir. Buna göre bileşenler, çerçeve değişimleri olduğunda birbirlerine dönüşebilirler. Bileşenler ve çerçeve bazları öyle bir uyumla dönüşürler ki, sonuçta, tensörün kendisi değişmez kalır, yani argümanları üzerindeki etkisi farklı çerçeveler altında değişmez kalır. Örneğin, $T = T^{\mu\nu} \hat{e}_\mu \otimes \hat{e}_\nu$ (2,0)-tip bir tensör olsun ve çerçeve dönüşümü şu şekilde verilsin $\hat{e}_\mu \mapsto \hat{e}'_a$. Buna göre aşağıdaki ifade yazılabilir

$$\begin{aligned} T = T^{\mu\nu} \hat{e}_\mu \otimes \hat{e}_\nu &\mapsto T' = T'^{ab} \hat{e}'_a \otimes \hat{e}'_b = T^{\mu\nu} h_\mu^a h_\nu^b \hat{e}'_a \otimes \hat{e}'_b \\ &= T^{\mu\nu} \hat{e}_\mu \otimes \hat{e}_\nu = T \end{aligned} \quad (2.1.36)$$

burada Denk.(2.1.18a) ve Denk.(2.1.27) ile verilen dönüşüm kuralları kullanıldı. Bu fikir genelleştirilerek, şimdiye kadar incelenen tensörel nesnelerin dönüşüm kuralları aşağıdaki gibi yazılabilir. $\hat{e}_\mu = h_\mu^a \hat{e}'_a$ ve $\check{e}^\mu = h^\mu_a \check{e}'^a$ verilen (ko)çerçeve dönüşümleri olsun. Buna göre

$$\text{Skaler} \quad : \quad \text{Bileşenleri olmadığı için önemsiz bir biçimde dönüşür} \quad (2.1.37a)$$

$$\text{Vektör} \quad : \quad V'^a = h_\mu^a V^\mu \quad (2.1.37b)$$

$$\text{Kovektör} \quad : \quad Q'_a = h^\mu_a Q_\mu \quad (2.1.37c)$$

$$\text{Genel tensör} \quad : \quad T'^a_b = h_\mu^a h^\nu_b T^\mu_\nu \quad (2.1.37d)$$

Açıklama. Eğer, genel çerçeve dönüşümünün özel bir durumu olarak, bir koordinat dönüşümü varsayılırsa $\hat{e}_\mu = \partial_\mu \mapsto \partial_a = \hat{e}_a$, bu durumda *vielbein* nesnesi

²⁰Daha detaylı olmak gerekirse, değerindeki bu değişim, genel olarak, *kovaryant* olmalıdır. Bu dönüşümlerden ilerleyen bölümlerde bahsedilecektir.

aşağıdaki hale gelir²¹

$$h^\mu{}_a = \frac{\partial_a}{\partial_\mu} \Leftrightarrow h_\mu{}^a = \frac{\partial_\mu}{\partial_a} \quad (2.1.38)$$

□

2.2 Dış cebir

Tanım 2.24 (Dış cebir). $\mathcal{M}$ bir d -boyutlu manifold olsun. Bu manifold üzerinde tanımı mümkün olan tüm derecelerdeki dış form uzayları $\bigwedge^p \mathcal{M}$, aşağıdaki şekilde $\mathcal{M}$ üzerinde *dış cebir* oluştururlar

$$\bigwedge \mathcal{M} = \bigwedge^0 \mathcal{M} \oplus \cdots \oplus \bigwedge^d \mathcal{M} \quad (2.2.1)$$

□

Dolayısıyla dış formlar, dış cebirin elemanlarını teşkil ederler. Daha önce, Tanım 2.23 ile, dış formlar üzerindeki dış çarpım işlemi verilmişti, antisimetrik tensör çarpımı olarak. Bu çarpım, Denk.(2.1.33) yardımı ile, r -adet kobaz $\{\check{e}^i\}$ arasında aşağıdaki gibi verilebilir

$$\check{e}^{i_1 \dots i_r} := \check{e}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \check{e}^{i_r} = (\check{e}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \check{e}^{i_r})_{\text{antisymmetric}} = r! \check{e}^{[i_1} \otimes \cdots \otimes \check{e}^{i_r]} \quad (2.2.2)$$

Yukarıdaki ifadede şu gösterim kullanıldı $\check{e}^{i_1 \dots i_r} := \check{e}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \check{e}^{i_r}$.

Tanım 2.25 (Dış (*wedge*) çarpım). $T \in \bigwedge^t \mathcal{M}$ ve $Q \in \bigwedge^q \mathcal{M}$ olsun. Bir harita olarak, t -formlar ve q -formlar arasında dış çarpım aşağıdaki şekilde tanımlanabilir

$$\begin{aligned} (\cdot \wedge \cdot) : \bigwedge^t \mathcal{M} \times \bigwedge^q \mathcal{M} &\mapsto \bigwedge^{t+q} \mathcal{M} \\ T \times Q &\mapsto T \wedge Q \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Rastgele bir koçerçevede $\check{e}$, elde edilen yukarıdaki tensör şu şekilde ayrıştırılabilir

$$T \wedge Q = \frac{1}{t!q!} T_{[i_1 \dots i_t} Q_{i_{t+1} \dots i_{t+q}]} \check{e}^{i_1 \dots i_{t+q}} \quad (2.2.4)$$

□

Genellikle indislerdeki "[...]" köşeli parantez kullanımı bırakılır, zira bir diferansiyel formun bileşenlerindeki antisimetri özelliği, doğrudan kovektörler arasında tanımlanan dış çarpım işleminin antisimetrik bir çıktı üretmesinden ileri gelir. Dış çarpımın davranışı sebebiyle dış cebirin sıralı (*graded*) bir cebir olduğu görülebilir. Aşağıda bazı temel özellikler verilmiştir. $T \in \bigwedge^t \mathcal{M}$, $Q \in \bigwedge^q \mathcal{M}$, $R \in \bigwedge^r \mathcal{M}$ ve $f \in \bigwedge^0 \mathcal{M}$ olsun.

²¹Geleneksel olarak, tensörlerin koordinat-bağımsız nesneler olduğunun söylenmesi buradan gelmektedir. Bununla birlikte, yukarıda görüldüğü üzere, bu ifade sadece koordinat dönüşümleri ile sınırlı değil, genel çerçeve dönüşümlerini de kapsamaktadır.

- Lineerlik.

$$fT \wedge (Q \pm R) = fT \wedge Q \pm fT \wedge R = T \wedge fQ \pm T \wedge fR \quad (2.2.5a)$$

- Birleşme.

$$T \wedge (Q \wedge R) = (T \wedge Q) \wedge R \quad (2.2.5b)$$

- (Sıralı) antisimetri.

$$T \wedge Q = (-1)^{tq} Q \wedge T \quad (2.2.5c)$$

Dış formlara biraz daha yakından bakalım. Aslında, bunlar üzerinde işlem yaptıkları iki farklı argümana sahiptirler. Bu argümanlardan biri koordinatlar iken diğeri vektörlerdir. Manifold üzerinde tanımlı doğal alanlar olduklarından dolayı yerel koordinatlara bağımlılıkları ve bunları argüman olarak alıyor olmaları, gayet açıktır. Dolayısıyla formların koordinatlara göre türevi pekala tanımlanabilir. Bu işlem *dış türev* olarak adlandırılır ve ilerleyen kısımlarda verilecektir. Diğer taraftan bir dış form, argüman olarak çerçeve baz vektörlerini de alabilir ve bunlar üzerinde işlem yapabilir. Dolayısıyla formlar aynı zamanda bu baz vektörlerine de bağılıdır, koordinatlara olan bağımlılıklarına benzer şekilde. Bununla ilişkili olarak, pekala formların bu vektörlere göre de türevlerinden bahsedilebilir. Bu türev ise *iç türev*²² olarak adlandırılır. Bu isimlendirmelerin arkasında yatan fikir şudur : Formlar, lokal çerçevedeki baz vektöre etki eden nesneler olarak düşünülebilir. Buradaki lokal bakış açısı "içsel, iç" olarak tarif edilebilir. Diğer taraftan, formların manifold koordinatlarına göre değişimi de "dışsal, dış" olarak tarif edilebilir. Herhangi bir formun bileşenleri, en genelde, manifoldun farklı noktalarında farklı değerlere sahip olabilir, zira bir alan olarak tanımlanırlar. Basitlik adına, formun koordinatlar üzerindeki hareketi boyunca (yani manifold üzerindeki farklı noktalar üzerindeki hareketi boyunca) baz vektörlerin -yani formun diğer argümanı olan baz vektörlerin- değişmediği varsayalım. Bu durumda, formun manifold üzerindeki bu hareketi sonrasında formun değerindeki herhangi bir değişimin sebebi, farklı noktalarda farklı değerlere sahip olabilen bileşenlerdeki değişimden kaynaklanacaktır. Tam tersi olarak, form manifoldun tek bir noktasında sabit dururken, argüman olarak, bu noktadaki teğet uzayının baz vektörleri değiştirilebilir. Bu durumda, formun değerindeki farklılığın sebebi bileşenler değil (zira manifold üzerinde aynı noktada duruyor) baz vektörler olacaktır. Sonuç olarak, yukarıda tarif edildiği üzere, formun iki argümanındaki

²²Aynı zamanda *iç çarpım* olarak da adlandırılır.

olası değişimler, formun değerinde değişikliğe sebep olabilecektir. Buna göre, formlar için bu iki değişime karşılık gelen, iki farklı türev tanımlanabilir. Bunları tanımlayalım.

Tanım 2.26 (Dış türev). Dış türev, d ile gösterilir ve dış formlar üzerine etki eden bir operatör olarak tanımlanır, şöyle ki

$$d : \bigwedge^p \mathcal{M} \mapsto \bigwedge^{p+1} \mathcal{M} \quad (2.2.6)$$

$T \in \bigwedge^p \mathcal{M}$ ve $\{x^\mu\}$ bir koordinat yaması olsun. Buna göre T nin dış türevi şu şekilde verilebilir

$$dT = \frac{1}{p!} \partial_{[\mu} T_{\mu_1 \dots \mu_p]} dx^{\mu \mu_1 \dots \mu_p} \quad (2.2.7)$$

□

Elbette, bir formun dış türevi, *vielbein* yardımıyla anholonomik bir çerçevede de ayrıştırılabilir, bkz. Denk.(2.1.22). Dış türev, genel manifoldlar üzerindeki olağan türev işleminin doğal bir genellemesi olarak düşünülebilir. Aşağıda bazı temel özellikleri verilmiştir. $T \in \bigwedge^t \mathcal{M}$, $Q \in \bigwedge^q \mathcal{M}$ ve $a, b \in \mathbb{R}$.

- Lineerlik.

$$d(aT \pm bQ) = adT \pm bdQ \quad (2.2.8a)$$

- (Sıralı) Leibniz kuralı.

$$d(T \wedge Q) = dT \wedge Q + (-1)^t T \wedge dQ \quad (2.2.8b)$$

- Poincaré lemma.

$$d^2 = 0 \quad (2.2.8c)$$

Spesifik bir örnek olarak, fonksiyonlar üzerindeki olağan türev işlemi 0-formların dış türevi ile işaretlenebilir, $df = (\partial_\mu f) dx^\mu$ burada $f \in \bigwedge^0 \mathcal{M}$. Bir form olarak Q verilsin, eğer $dQ = 0$ ise Q bir *kapalı form* olarak adlandırılır. Dahası, herhangi bir form α için, eğer Q şu şekilde yazılabiliyorsa $Q = d\alpha$, bu durumda Q *tam form* olarak adlandırılır. Açıkça görülebileceği üzere, her kapalı form bir tam form olmak zorunda değildir. Ancak tam tersi, Poincaré lemması gereği her zaman geçerlidir. Ayrıca, d -boyutlu bir manifold içinde, herhangi bir d -formun dış türevi sıfırdır.

Tanım 2.27 (İç türev (çarpım)). V bir vektör alanı olsun, $\mathcal{M}$ manifoldu üzerinde. İç çarpım ι ile gösterilir ve dış formlar üzerine etkiyen bir operatör olarak tanımlanır. Dış türevin, formların derecesi üzerindeki etkisine zıt olarak etki eder, şöyle ki

$$\iota_V : \bigwedge^p \mathcal{M} \mapsto \bigwedge^{p-1} \mathcal{M} \quad (2.2.9)$$

$T \in \bigwedge^p \mathcal{M}$ ve $\{x^\mu\}$ bir koordinat yaması olsun. T 'nin, vektör alanı V 'ye göre iç türevi aşağıdaki gibi ayrıştırılabilir

$$\iota_V T = \frac{1}{(p-1)!} V^\mu T_{\mu\mu_1\ldots\mu_{p-1}} dx^{\mu_1\ldots\mu_{p-1}} \quad (2.2.10)$$

□

Yukarıdaki ifade, *vielbein* kullanılarak rastgele bir çerçevede yazılabilir. İç türev, vektörler arasındaki olağan iç çarpım işleminin, diferansiyel formlar gibi daha genel nesneler için doğal bir genellemesi olarak düşünülebilir. V, W vektör alanları olsun, $T \in \bigwedge^t \mathcal{M}$, $Q \in \bigwedge^q \mathcal{M}$ ve $a, b \in \mathbb{R}$.

- Lineerlik.

$$\iota_V(aT \pm bQ) = a\iota_V T \pm b\iota_V Q \quad (2.2.11a)$$

$$\iota_{aV \pm bW} T = a\iota_V T \pm b\iota_W T$$

- (Sıralı) Leibniz kuralı.

$$\iota_V(T \wedge Q) = (\iota_V T) \wedge Q + (-1)^t T \wedge \iota_V Q \quad (2.2.11b)$$

- Antisimetri.

$$\iota_V \iota_W T = -\iota_W \iota_V T \quad (2.2.11c)$$

Uygulamalarda iç türev, özellikle bir çerçeveye (daha spesifik olarak çerçeve bazlarına) göre alındığında önem kazanır. $\{\hat{e}_a\}$ ve $\{\check{e}^a\}$ rastgele bir çerçeve ve koçerçeve olsunlar, sırasıyla. Bu durumda şu yazılabilir²³

$$\iota_a T = \frac{1}{(t-1)!} T_{a\mu_1\ldots\mu_{t-1}} \check{e}^{\mu_1\ldots\mu_{t-1}} \quad (2.2.12)$$

Yukarıdaki eşitlik şu dualiteyi gerektirir

$$\iota_a \check{e}^b = \delta_a^b \quad (2.2.13)$$

öyle ki Tanım 2.15 ile verilen dualitenin rastgele (ko)çerçevelere genellemesidir. Herhangi bir fonksiyonun iç türevi $\iota_V f$, sıfırlanır zira $f \in \bigwedge^0 \mathcal{M}$. Aşağıda bazı kullanışlı özdeşlikler verilmiştir.

²³Aksi belirtilmedikçe $\iota_a := \iota_{\hat{e}_a}$ gösterimi tüm doküman boyunca kullanılacaktır.

1. $\check{e}^a \wedge \iota_a T = tT$
2. $\iota_a(\check{e}^a \wedge T) = (d - t)T$ burada $\dim(\mathcal{M}) = d$

Tanım 2.28 (Levi-Civita tensörü ve hacim formu). d -boyutlu metrik²⁴ bir manifold olarak $\mathcal{M}$ verilsin, buna göre benzersiz bir d -form şöyle verilir

$$\check{e}^1 \wedge \cdots \wedge \check{e}^d := \frac{1}{d!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_d} \check{e}^{\mu_1 \dots \mu_d} \quad (2.2.14)$$

Bu ifade *hacim formu* olarak adlandırılır ve genel olarak vol_g ile gösterilir. Burada $\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_d}$ *Levi-Civita tensörüdür*, öyle ki

$$\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_d} := \sqrt{|\det g|} \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_d} \quad (2.2.15)$$

burada g metrik ve $\tilde{\epsilon}$ Levi-Civita sembolüdür, öyle ki

$$\tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_d} = \begin{cases} 0, & \text{herhangi bir çift indis aynı ise} \\ +1, & \text{indislerin çift permütasyonu} \\ -1, & \text{indislerin tek permütasyonu} \end{cases}$$

□

Tanım 2.29 (Hodge gönderimi (dualitesi)). d -boyutlu metrik²⁴ manifold olarak $\mathcal{M}$ verilsin, buna göre $\bigwedge^q \mathcal{M}$ ve $\bigwedge^{d-q} \mathcal{M}$ uzayları arasında kanonik bir izomorfizmi şu şekilde tanımlanabilir

$$* : \bigwedge^q \mathcal{M} \mapsto \bigwedge^{d-q} \mathcal{M} \quad (2.2.16)$$

$Q \in \bigwedge^q \mathcal{M}$. Buna göre Hodge dual²⁵ şöyle verilir

$$*Q = \frac{1}{(d-q)!} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_q}_{\mu_{q+1} \dots \mu_d} Q_{\mu_1 \dots \mu_q} \check{e}^{\mu_{q+1} \dots \mu_d} \quad (2.2.17)$$

□

$P, Q \in \bigwedge^q \mathcal{M}$. Aşağıda Hodge yıldızını içeren çeşitli özdeşlikler verilmiştir.

$$\bullet \quad *1 = \text{vol}_g \Leftrightarrow *\text{vol}_g = \text{sgn}(g) \quad (2.2.18a)$$

$$\bullet \quad **Q = (-1)^{q(d-q)} \text{sgn}(g) Q \quad (2.2.18b)$$

$$\bullet \quad \iota_a * Q = *(Q \wedge \check{e}_a) \quad (2.2.18c)$$

$$\bullet \quad \check{e}^a \wedge *Q = (-1)^{q+1} *(\iota^a Q) \quad (2.2.18d)$$

$$\bullet \quad P \wedge *Q = \frac{1}{q!} P^{a_1 \dots a_q} Q_{a_1 \dots a_q} \text{vol}_g \quad (2.2.18e)$$

$$\bullet \quad P \wedge *Q = Q \wedge *P \quad \text{ve} \quad *P \wedge Q = *Q \wedge P \quad (2.2.18f)$$

²⁴Hem hacim formu hem de Hodge gönderimi, ancak manifold üzerinde tanımlı bir metrik nesnesi var ise tanımlanabilirler. Metrik yapısı ilerleyen bölümlerde verilecektir.

²⁵Bazı kaynaklarda "Hodge yıldızı" isimlendirmesi de kullanılmaktadır.

Ayrıca $\mathbb{R}^3$ 'teki olağan Laplace operatorünün manifold üzerindeki genellemesi şu şekilde verilebilir

$$\Delta := (d - *d*)^2 = -d * d * - * d * d \quad (2.2.19)$$

öyle ki *Laplace-Beltrami* operatörü olarak adlandırılır. Herhangi bir diferansiyel form $\Delta P = 0$ koşulunu sağlarsa *harmonic form* olarak adlandırılır.

2.2.1 Diferansiyel formların integrasyonu

Koordinat çerçevesindeki görüntüleri itibariyle, diferansiyel formlar manifoldun bölgeleri içinde integrallenebilen doğal geometrik nesneler olarak görülebilir. Hesaplamalarda sıklıkla skaler, vektör, tensör, vb. nesnelerin eğri, yüzey veya hacim integralleri ile karşılaşılır. Fakat, aslında gerçekten olan ise, diferansiyel formların integral hesabının yapıldığıdır! Sadece metrik yapısının olduğu manifoldlarda bu işlem gerçekleştirilebilir.

En basit integral $\mathbb{R}^d$ üzerinde olağan şekilde düşünülebilir. $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$ reel uzayın bir alt kümesi, $(\mathcal{U}, x(p))$ bir harita ve Q bir d -form olsun, öyle ki

$$Q = \mathcal{Q} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^d, \quad \mathcal{Q} \in C^\infty(\mathcal{U}) \quad (2.2.20)$$

Buna göre aşağıdaki integral tanımlanabilir

$$\int_{\mathcal{U}} Q := \int_{\mathcal{U}} \mathcal{Q} dx^1 \dots dx^d \quad (2.2.21)$$

Ancak $\mathbb{R}^d$ olmayan en genel manifold üzerinde, integral işlemini gerçekleştirebilmek için daha fazla gereksinim vardır. En başta, manifold açık alt uzaylara ayrılır ve integral bu uzaylar üzerinde gerçekleştirilir. Daha sonra her bir alt uzaydaki bu integraller toplanarak tüm manifold üzerindeki integral işlemi gerçekleştirilmiş olur. Tam bu noktada, manifoldun yönelimi (oryantasyonu) devreye girer. Sadece yönelimli manifoldlarda, formların global olarak integral işlemi yapılabilir. Bu açıdan, manifoldun yönelimi, integral işleminin yürütülebilmesi için alt uzayları uyumlu bir şekilde birbirine bağlayan bir yapı olarak görülebilir.

Tanım 2.30 (Manifold üzerinde integral). $\mathcal{M}$ yönelimli ve d -boyutlu bir manifold, $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ açık bir alt küme, $\phi_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \mapsto \mathbb{R}$ bir koordinat haritası olsun, öyle ki $\mathcal{U}$ üzerinde yönelimi korusun ve $Q \in \bigwedge^d \mathcal{M}$ bir d -form olsun²⁶. Bu durumda aşağıdaki integral verilebilir

$$\int_{\mathcal{U}} Q := \int_{\phi_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})} (\phi_{\mathcal{U}}^{-1})^* Q \quad (2.2.22)$$

²⁶Daha açık söylemek gerekirse, $\mathcal{U}$ üzerinde kompakt desteği (*compact support*) olan bir d -form.

Burada $(\phi_{\mathcal{U}}^{-1})^*$ geri-çağırma (*pullback*) işlemidir. *Partition of the unity*²⁷ $\{f_i\}$ tanımı yardımıyla, öyle ki her bir $\{\mathcal{U}_i\}$ alt kümesine bağlı olan, tüm manifold üzerinde integral işlemi şu şekilde verilebilir

$$\int_{\mathcal{M}} Q := \sum_i \int_{\mathcal{M}} f_i Q \quad (2.2.23)$$

□

Yukarıdaki integral tanımı, $\{\mathcal{U}_i\}$ alt kümelerinin seçiminden ve $\{f_i\}$ tanımından bağımsızdır. Daha fazla detay için bkz. (Bott ve Tu 1982).

Teorem 2.31 (Stoke Teoremi). $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ kompakt yönelimli bir alt uzay olsun, $\partial\mathcal{U}$ bu uzayın sınırını göstere ve $Q \in \Lambda^{q-1} \mathcal{M}$. Buna göre aşağıdaki eşitlik verilebilir

$$\int_{\mathcal{U}} dQ = \int_{\partial\mathcal{U}} Q \quad (2.2.24)$$

□

Stoke Teoremi fizikte birçok uygulama alanı bulur. Özellikle $\mathbb{R}^3$, te, sıklıkla kullanılan bazı formülasyonları içerir. Aşağıda bunlar verilmiştir.

1. $Q \in \Lambda^0 \mathcal{M}$. Buna göre, dQ ifadesinin -ki bu 1-formdur- integrasyon bölgesi bir boyutlu $C(x)$ eğrisi iken, bu integral $x = a$ ve $x = b$ sınırlarına sahip olan bir işleme dönüşür. Dolayısıyla Stoke Teoremi şöyle yazılabilir

$$\int_{C(x)} dQ = \int_{\partial C(x)} Q = \int_a^b Q(x) = Q(b) - Q(a) \quad (2.2.25)$$

öyle ki bu ifade aslında *Analizin Temel Teoremi* olarak bilinir.

2. $Q \in \Lambda^1 \mathcal{M}$. Bu örnekte ise integral bölgesi bir yüzey iken S , bunun sınırları ise bir eğri halini alır $\partial S =: C$. Şu kanonik tanımlar verilsin : $dQ := (\vec{\nabla} \times \vec{Q}) \cdot d\vec{S}$ ve $Q := \vec{Q} \cdot d\vec{l}$, buna göre aşağıdaki ifade yazılabilir

$$\int_S dQ = \int_{\partial S} Q \Rightarrow \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{Q}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{Q} \cdot d\vec{l} \quad (2.2.26)$$

Bu, $\mathbb{R}^3$ üzerindeki *Rotasyon Teoremi*dir.

3. $Q \in \Lambda^2 \mathcal{M}$. Bu örnekte ise integral bölgesi bir hacim iken V , bunun sınırları ise bir yüzey halini alır $\partial V =: S$. Şu kanonik tanımlar verilsin : $dQ := (\vec{\nabla} \cdot \vec{Q}) d^3x$ ve $Q := \vec{Q} \cdot d\vec{S}$, buna göre aşağıdaki ifade yazılabilir

$$\int_V dQ = \int_{\partial V} Q \Rightarrow \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{Q}) d^3x = \oint_S \vec{Q} \cdot d\vec{S} \quad (2.2.27)$$

Bu, $\mathbb{R}^3$ üzerindeki *Diverjans Teoremi*dir.

²⁷Bunlar reel-değerli diferansiyellenebilir fonksiyonlardır, öyle ki şu özellikleri taşırlar : (i) $f_i(x) \geq 0, \forall (i, x)$ (ii) $\text{supp}(f_i) \subset \mathcal{U}_i$ (iii) $\sum_i f_i(x) = 1, \forall x \in \mathcal{M}$

2.2.2 Manifold üzerindeki türetmeler (*derivations*)

Şimdiye kadar, manifold üzerinde çeşitli türetme operasyonları tanıtıldı. Bu bölümde, bunlar özet bir şekilde tekrar verilerek aralarındaki ilişkiler incelenecektir.

Tanım 2.32 (Türetme (*derivation*)). Bir *türetme* $f : \mathcal{U} \mapsto \mathcal{U}$, nesneler²⁸ arasında bir harita olarak tanımlanır, bir $\mathcal{U}$ uzayı içinde ve aşağıdaki *çarpım (Leibniz) kuralını* sağlar

$$f(\alpha\beta) = f(\alpha)\beta + \alpha f(\beta) \quad (2.2.28)$$

burada $(\alpha, \beta) \in \mathcal{U}$. En genelde, eğer kendi cebiri içinde $\text{rank}(\alpha) = A$ ise, bu durumda *sıralı türetme*²⁹ şu şekilde verilir

$$f(\alpha\beta) = f(\alpha)\beta + (-1)^A \alpha f(\beta) \quad (2.2.29)$$

□

Bu tanıma göre, şimdiye kadar tanıtılan türetmeler aşağıda listelenmiştir.

- *Dış cebir üzerinde iç türev (iç çarpım).*

$$\iota_a(T \wedge Q) = (\iota_a T) \wedge Q + (-1)^t T \wedge \iota_a Q \quad (2.2.30a)$$

- *Dış cebir üzerinde dış türev.*

$$d(T \wedge Q) = dT \wedge Q + (-1)^t T \wedge dQ \quad (2.2.30b)$$

- *Lie cebiri üzerinde Lie türevi.*

$$\mathcal{L}_V W := [V, W] := V \cdot W - W \cdot V \quad (2.2.30c)$$

burada (T, Q) diferansiyel formlar, (V, W) $\mathcal{M}$ manifoldundaki vektör alanları ve $T \in \bigwedge^t \mathcal{M}$. Bu türetmeler aşağıdaki Lie cebirini sağlar

$$[\mathcal{L}_U, \mathcal{L}_V] = \mathcal{L}_U \mathcal{L}_V - \mathcal{L}_V \mathcal{L}_U = \mathcal{L}_{[U, V]} \quad (2.2.31a)$$

$$[\iota_U, \iota_V] = \iota_U \iota_V + \iota_V \iota_U = 0 \quad (2.2.31b)$$

$$[d, d] = d^2 + d^2 = 0 \quad (2.2.31c)$$

$$[\mathcal{L}_U, \iota_V] = \mathcal{L}_U \iota_V - \mathcal{L}_V \iota_U = \iota_{[U, V]} \quad (2.2.31d)$$

$$[\mathcal{L}_U, d] = \mathcal{L}_U d - d \mathcal{L}_U = 0 \quad (2.2.31e)$$

$$[\iota_V, d] = \iota_V d + d \iota_V = \mathcal{L}_V \quad \text{Cartan'ın sihirli formülü} \quad (2.2.31f)$$

²⁸Daha net olmak gerekirse, bir cebirin elemanı olan nesneler.

²⁹Ör. dış cebir, diferansiyel formlar üzerinde sıralı bir türetme tanımlar.

2.3 Metrik ve bağlantı

2.3.1 Metrik

Tanım 2.33 (Metrik). $\mathcal{M}$ üzerindeki metrik g , dejenere-olmayan, $(0, 2)$ -tip, kovaryant, simetrik bir tensör olarak tanımlanır. Rastgele bir çerçevede aşağıdaki gibi verilebilir

$$g = g_{ij}\check{e}^i \otimes \check{e}^j \quad (2.3.1)$$

burada $g_{ij} = g_{ji}$. $\square$

Bu bir koordinat haritasında $\{x^\mu\}$, şu şekilde verilebilir $g = g_{\mu\nu}dx^\mu \otimes dx^\nu$. Dejenere olmadığı için ters metrik tanımlanabilir $g^{-1} = g^{mn}\hat{e}_m \otimes \hat{e}_n$. Buna göre, dualite yardımıyla aşağıdaki ifade yazılabilir

$$g_{im}g^{in} = \delta_m^n \quad (2.3.2)$$

$\mathcal{M}$ manifoldunun metrik yapısı kazanması ile birlikte *metrik manifold* olarak adlandırılır ve $(\mathcal{M}, g)$ ile gösterilir.³⁰ Metriğin bazı özelliklerini verelim :

- Tensör bileşenlerinin indislerinin kaldırılmasını veya indirilmesini sağlar

$$T^{ij}{}_k = T^{ijm}g_{mk} = T^i{}_n{}^m g_{mk}g^{nj} \quad (2.3.3)$$

Kaldırma / indirme operasyonu, doğrudan teğet ve koteğet uzayları arasındaki izomorfizm ile ilişkilidir, öyle ki bu ilişki metrik tarafından sağlanır.³¹ Herhangi bir vektör, bir kovektör ile benzersiz bir şekilde ilişkilendirilebilir, ve tam tersi. Örneğin, $V \in T\mathcal{M}$ olsun. Rastgele bir çerçevede

$$V = V^i\hat{e}_i \quad (2.3.4)$$

³⁰Geometrik bakış açısıyla, metrik, manifold içindeki sonsuz küçük uzunluk olarak da görülebilir. Bunu daha açık görebilmek için, metriği bir koordinat çerçevesinde açalım

$$g := ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu \otimes dx^\nu$$

burada ds sonsuz küçük uzunluk ölçüsüdür ve g , tanımı itibarıyla, bu ölçünün (daha kesin olmak gerekirse karesinin) verilen bir çerçevedeki bazlara göre açılımını içerir.

³¹Benzer şekilde, yine sadece metrik manifoldlarda, bir başka izomorfizm daha kurulabilir, dış formlar arasında. Bu *Hodge haritası*dır ve ilerleyen bölümlerde verilecektir.

Buna göre, bir kovektör oluşturulabilir $\mathcal{V} \in T^*\mathcal{M}$, şöyle ki³²

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_j \check{e}^j =: V^i g_{ij} \check{e}^j \quad (2.3.5)$$

- Tensörlerin *iç (skaler) çarpımları* metrik yardımıyla tanımlanabilir. $\{V, W\} \in T\mathcal{M}$ olsun. Bunların iç çarpımı şu şekilde verilebilir

$$g(V, W) = g(V^i \hat{e}_i, W^j \hat{e}_j) = g(\hat{e}_i, \hat{e}_j) V^i W^j = g_{ij} V^i W^j = V_j W^j = V^i W_i \quad (2.3.6)$$

İç çarpım yardımıyla vektörlerin boyu (normu) hesaplanabilir, öyle ki kendisini kendisi ile iç çarpım işlemine tabi tutarak^{33,34}

$$g(V, V) = g_{ij} V^i V^j = V_i V^i = \|V\|^2 \quad (2.3.7)$$

- Manifold üzerindeki bir eğrinin uzunluğu metrik yardımıyla hesaplanabilir. $\gamma(t)$ bir eğri, $t \in \mathbb{R}$ ve $a \leq t \leq b$ olsun. V bu eğriye herhangi bir p noktasında teğet olan vektör olsun. Verilen bir koordinat sisteminde $\{x^\mu\}$ bu vektörün bileşenleri şu şekilde verilebilir $V^\mu = dx^\mu(t)/dt$. Böylece, eğri üzerindeki sonsuz küçük bir uzunluk metrik kullanılarak şu şekilde hesaplanabilir

$$dl^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} dt \otimes \frac{dx^\nu}{dt} dt = g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu dt^2 \quad (2.3.8)$$

öyle ki buradan yola çıkılarak eğrinin tüm uzunluğu hesaplanabilir

$$l = \int_a^b dl = \int_a^b \sqrt{g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu} dt \quad (2.3.9)$$

³²Literatürde, bu izomorfizm bazen *müzikal izomorfizm* olarak da adlandırılır, öyle ki geleneksel olarak müzikal sembollerle tarif edildi için. V ve ω vektör ve kovektör olsunlar, sırasıyla.

$$\begin{aligned} V &\mapsto V^b := V^i g_{ij} \check{e}^j = (V^b)_j \check{e}^j \\ \omega &\mapsto \omega^\sharp := \omega_a g^{ab} \hat{e}_b = (\omega^\sharp)^b \hat{e}_b \end{aligned}$$

³³Bu işlem, 3-boyutlu Öklid geometrisinde kartezyen koordinatlarda temel olarak yapılan, vektörün normunu hesaplama işleminin, manifoldlara genelleştirilmesinden başka bir şey değildir.

$$\|V\|^2 = \vec{V} \cdot \vec{V} = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$$

³⁴Literatürde, vektörler normlarına göre aşağıdaki gibi sınıflandırılırlar

$$g(V, V) = \|V\| = \begin{cases} > 0, & \text{zamansal (timelike)} \\ < 0, & \text{uzaysal (spacelike)} \\ = 0, & \text{ışmsal (lightlike or null)} \end{cases} \quad (V \neq 0)$$

- Tensör bileşenlerinin indislerinde kontraksiyon (büzülme) (*contraction*) işlemi yapılabilir. Bu işlem tensörlerin kovaryans ve kontravaryans derecelerini birer azaltır, öyle ki bir çift indisi (bir adet kovaryant indis ve bir adet kontravaryant indis olmak üzere) aynı yaparak. $T \in T^{(r,s)}\mathcal{M}$ olsun. Bir başka tensör $Q \in T^{(r-1,s-1)}\mathcal{M}$ şu şekilde oluşturulabilir³⁵

$$Q^{i_1 \dots i_{r-1}}_{j_1 \dots j_{s-1}} = g_{ai_r} g^{aj_s} T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = T^{i_1 \dots i_{r-1} a}_{j_1 \dots j_{s-1} a} \quad (2.3.10)$$

2.3.2 Bağlantı

Düz bir geometride, farklı noktalardaki tensörler herhangi bir kaygı gütmeden karşılaştırılır³⁶, öyle ki çerçevelerin her bir noktada değişmeden kaldığı varsayılır. Böylece, bir tensör her zaman, geometrinin herhangi bir noktasında aynı şekilde ayrıştırılabilir. Aslında, gerçekte olan, nesnelerin bileşenlerinin geometrinin farklı noktalarında karşılaştırılmasıdır. Örneğin düz bir uzayda, bir vektörün noktalara göre değişimi (veya koordinatlara göre türevi) şu şekilde verilir

$$\partial_\mu V = \partial_\mu (V^\nu \hat{e}_\nu) = (\partial_\mu V^\nu) \hat{e}_\nu + \cancel{V^\nu (\partial_\mu \hat{e}_\nu)} \stackrel{0}{=} (\partial_\mu V^\nu) \hat{e}_\nu \quad (2.3.11)$$

burada

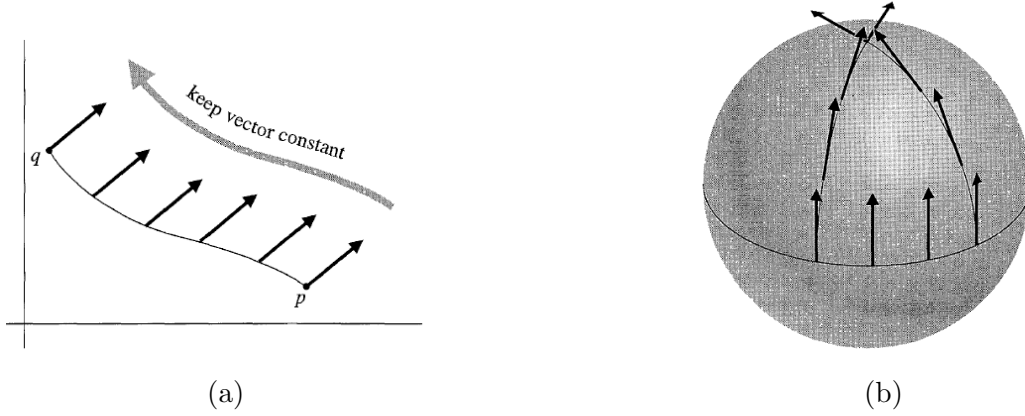
$$\partial_\mu \hat{e}_\nu = 0 \quad (2.3.12)$$

olduğu kabul edilir, düz uzayda. Yukarıda görüldüğü üzere, vektörün farklı noktalarda karşılaştırılması onun bileşenlerinin karşılaştırılması ile yapılır. Temelde bu, bir vektörün *paralel taşınmasından* başka bir şey değildir. Düz bir uzayda, vektörün paralel taşınmasının ardından yönünün değişmeyeceği garanti altındadır, çerçevenin değişmemesi koşulu sayesinde. Fakat durum, düz olmayan genel manifoldlarda farklıdır. En genelde, çerçeveler de değişebilir, zira bunlar da manifoldun her noktasında tanımlı lokal nesnelerdir ve pekala farklı olabilirler. Bu durumda tensörler, düz uzayda yapıldığı gibi karşılaştırılamaz. Esasen, bir karşılaştırma işleminin gerçekleştirilebilmesi için tensörlerin manifold üzerinde aynı noktada toplanması ve burada karşılaştırılması gereklidir. Ancak bu sayede bileşen değerlerinin farklı olup olmadığı kontrol edilebilir. Düz uzaydakine benzer şekilde, genel manifoldlarda da, vektörün taşınması boyunca "yönünün"³⁷ değişmeyeceği bir taşıma operasyonu tanımlanabilir. Böylece, yine düz uzaydakine benzer şekilde,

³⁵Özel bir durum olarak, eğer $T \in T^{(1,1)}\mathcal{M}$ ise, bu durumda oluşan yeni vektör, $(0,0)$ -tipinde bir tensör olarak, T 'nin izi (*trace*) olarak adlandırılır. Bu durum, özellikle tensörlerin matris gösterimi kullanıldığında daha açık görülür.

³⁶Öklid uzayında gerçekleştirdiğimiz sıradan işlemleri hatırlayın.

³⁷Düz uzaydaki anlamda bir yön değil.



Figür 2.6: Paralel taşıma, düz (2.6a) ve eğri (2.6b) uzayda. **Kaynak** : (Carroll 2004)

bileşenlerin değişimi incelenebilir, vektörün değişiminin anlaşılması için. Bu taşıma işlemi *paralel taşıma* olarak adlandırılır, öyle ki eğri manifoldlarla³⁸ çalışıldığında çok önemli bir kavram olarak ortaya çıkar. Yukarıdaki düz uzay örneğinde, paralel taşıma önemsiz bir biçimde yapıldı, öyle ki çerçeve bazları değişmemiştir, yani vektörün yönü, yönelimi, vb. Dahası bu taşıma işlemi yoldan bağımsızdı, yani hangi yoldan taşınırsa taşınırsın hedef vektör ile kaynak vektör her zaman aynı yönü gösterdiler. Diğer taraftan, eğri manifoldlarda paralel taşıma işlemi en genelde yola bağımlı olabilir. Bkz. Figür 2.6. Eğri bir manifoldta, halbuki, nesnelerin (daha kesin olmak gerekirse çerçevelerin) nasıl bir şekilde paralel taşınacağına dair doğal bir reçete yoktur. Bu sebeple, düz uzaydaki karşılığının genellemesi olarak, eğri manifoldlardaki paralel taşıma işleminin nasıl gerçekleştirileceğinin ayrıca tanımlanması gerekir, öyle ki bu yeni tanım, yeni bir yapıyı da gerektirir. Bu işlem *bağlantı* nesnesinin ∇ , manifold üzerinde tanımlanması ile gerçekleştirilir, öyle ki (ko)çerçeve (ko)bazlarının manifold noktaları (veya çerçeveleri)³⁹ boyunca nasıl değiştiğini tarif eder.

Tanım 2.34 (Bağlantı). $\mathcal{M}$ diferansiyellenebilir bir manifold, $\mathcal{X}\mathcal{M}$ manifold üzerinde bir vektör alanı, $(U, V, W) \in \mathcal{X}\mathcal{M}$, $(f, g) \in C^\infty\mathcal{M}$, $(a, b) \in \mathbb{R}$ olsun. *Bağlantı* nesnesi ∇ lineer bir harita olarak aşağıdaki gibi verilir

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{X}\mathcal{M} \times \mathcal{X}\mathcal{M} &\mapsto \mathcal{X}\mathcal{M} \\ (V, W) &\mapsto \nabla_V W \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

³⁸Doküman boyunca, "genel manifold" ifadesi ile aslında "eğri manifold"lar kastedilmektedir. Aksi belirtilmedikçe, bu iki ifade birbirleri yerine kullanılabilir.

³⁹En genelde, bu değişim rastgele bir vektör alanına göre de incelenebilir, Lie türevindeki duruma benzer şekilde. Ancak burada, çok temel bir vektör alanı olan, çerçevelerin baz alanı seçilmiştir.

burada lineerlik aşağıdaki şekilde sağlanmaktadır

$$\bullet \quad \nabla_{fV \pm gW} U = f \nabla_V U \pm g \nabla_W U \quad (2.3.14a)$$

$$\bullet \quad \nabla_U (aV \pm bW) = a \nabla_U V \pm b \nabla_U W \quad (2.3.14b)$$

$$\bullet \quad \nabla_V (fW) = V(f)W + f \nabla_V W \quad \text{"Leibniz kuralı"} \quad (2.3.14c)$$

□

Pratikte, yukarıda tanımlanan bağlantı nesnesi, *bağlantı katsayıları*⁴⁰ ω vasıtasıyla verilir

$$\nabla_\mu \hat{e}_\nu := \omega^\lambda_{\nu\mu} \hat{e}_\lambda \quad (2.3.15)$$

Burada $\omega^\lambda_{\nu\mu}$ ifadesi, fark vektörünün λ nci bileşenini temsil eder, öyle ki bu fark vektörü, baz vektörü $\hat{e}_\nu$ ile bunun $\hat{e}_\mu$ bazı boyunca paralel taşınması sonrası elde edilen taşınmış vektör arasındaki farktır. Benzer şekilde kobazların da değişimi verilebilir

$$\nabla_\mu \check{e}^\nu := -\omega^\nu_{\lambda\mu} \check{e}^\lambda \quad (2.3.16)$$

Bağlantı nesnesinin, eğri manifoldlarda tensörlerin karşılaştırılmasını olanaklı kılması göz önüne alınarak, eğri uzaylarda bir türev işlemi tanımlanabilir, öyle ki düz uzaylardaki adi türevin genellemesi olsun. Bu işlem *kovaryant türev*⁴¹ olarak adlandırılır ve verilen bir bağlantı nesnesi ile ilişkili olur. Bir vektörün kovaryant türevi aşağıdaki gibi verilebilir (Leibniz kuralı uygulanmıştır)

$$\begin{aligned} \nabla_\mu V &= \nabla_\mu (V^\nu \hat{e}_\nu) = \partial_\mu (V^\nu) \hat{e}_\nu + V^\nu \nabla_\mu \hat{e}_\nu \\ &= (\partial_\mu) V^\nu \hat{e}_\nu + V^\nu \omega^\lambda_{\nu\mu} \hat{e}_\lambda \\ &= (\partial_\mu V^\nu + \omega^\nu_{\lambda\mu} V^\lambda) \hat{e}_\nu \\ &:= (\nabla_\mu V^\nu) \hat{e}_\nu \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

Burada bileşenlerin kovaryant türevi⁴² $\nabla_\mu V^\nu$ şu şekilde tanımlandı

$$\nabla_\mu V^\nu := \partial_\mu V^\nu + \omega^\nu_{\lambda\mu} V^\lambda \quad (2.3.18)$$

⁴⁰Doküman boyunca *bağlantı* ve *bağlantı katsayıları* ifadeleri birbirleri yerine kullanılabilir, aksi belirtilmedikçe.

⁴¹Çok fazla detaya girmeden şunu söyleyelim. Adi türev, belirli çerçeve dönüşümleri altında tensörel olarak dönüşmez, diğer bir deyişle (çerçeve ile) kovaryant olarak dönüşmez. Türevin kovaryant özelliği kazanması için adi türev, kovaryant türev ile değiştirilir. Bu durum, bağlantı nesnesi ile birlikte tanımlanan genelleştirilmiş türevin isminin neden "kovaryant türev" olduğunun arkasındaki sebeptir.

⁴²Aslında daha net olmak gerekirse, aşağıda verilen notasyon daha uygun olabilir, zira $\nabla_\mu V$

Benzer şekilde, bir kovektörün kovaryant türevi şu şekilde verilebilir

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu Q &= \nabla_\mu(Q_\nu \check{e}^\nu) = (\partial_\mu Q_\nu) \check{e}^\nu + Q_\nu \nabla_\mu \check{e}^\nu \\
&= (\partial_\mu Q_\nu) \check{e}^\nu - Q_\nu \omega^\nu_{\lambda\mu} \check{e}^\lambda \\
&= (\partial_\mu Q_\nu - \omega^\lambda_{\nu\mu} Q_\lambda) \check{e}^\nu \\
&:= (\nabla_\mu Q_\nu) \check{e}^\nu
\end{aligned} \tag{2.3.19}$$

burada

$$\nabla_\mu Q_\nu := \partial_\mu Q_\nu - \omega^\lambda_{\nu\mu} Q_\lambda \tag{2.3.20}$$

Buradan hareketle, rastgele bir tensör bileşeninin kovaryant türevi aşağıdaki gibi verilebilir

$$\begin{aligned}
\nabla_\lambda T^{\mu_1 \mu_2 \dots}_{\nu_1 \nu_2 \dots} &= \partial_\lambda T^{\mu_1 \mu_2 \dots}_{\nu_1 \nu_2 \dots} + \omega^{\mu_1}_{\sigma\lambda} T^{\sigma \mu_2 \dots}_{\nu_1 \nu_2 \dots} + \omega^{\mu_2}_{\sigma\lambda} T^{\mu_1 \sigma \dots}_{\nu_1 \nu_2 \dots} + \dots \\
&\quad - \omega^\sigma_{\nu_1 \lambda} T^{\mu_1 \mu_2 \dots}_{\sigma \nu_2 \dots} - \omega^\sigma_{\nu_2 \lambda} T^{\mu_1 \mu_2 \dots}_{\nu_1 \sigma \dots} - \dots
\end{aligned} \tag{2.3.21}$$

2.3.2.1 Bağlantı nesnesinin dönüşüm kuralı

Denk.(2.1.37) ile verilen, tensör bileşenlerinin, bir çerçeve dönüşümü altındaki dönüşüm kuralını ele alalım. Kovaryant türev, tanımı gereği zaten kovaryant olarak dönüştüğünden, bununla ilişkili bağlantı nesnesinin nasıl dönüştüğü incelenebilir. Bileşenlerin şu dönüşümüne bakalım $V'^a = H_\mu^a V^\mu \Leftrightarrow V^\mu = h^\mu_a V'^a$, öyle ki şu çerçeve dönüşümü altında olan $\hat{e}_\mu = H_\mu^a \hat{e}'_a \Leftrightarrow \hat{e}'_a = h^\mu_a \hat{e}_\mu$ burada $H_\mu^a h^\mu_b = \delta_b^a$, $H_\mu^a h^\nu_a = \delta^\nu_\mu$. Bileşenlerin kovaryant türevinin, doğal olarak, aşağıdaki kovaryant dönüşüm kuralına tabi olduğu göz önüne alınırsa

$$\nabla_\lambda V'^a = H_\mu^a \nabla_\lambda V^\mu \tag{2.3.22}$$

bağlantı nesnesinin $\omega \mapsto \omega'$ şu şekilde dönüşmesi gerekir

$$\begin{aligned}
\omega'^a_{b\lambda} &= H_\mu^a \omega^\mu_{\nu\lambda} h^\nu_b + H_\mu^a \partial_\lambda h^\mu_b = \mathbf{h}^{-1} \omega \mathbf{h} + \mathbf{h}^{-1} \partial \mathbf{h} \\
&= H_\mu^a \omega^\mu_{\nu\lambda} h^\nu_b - h^\mu_b \partial_\lambda H_\mu^a = \mathbf{h}^{-1} \omega \mathbf{h} - \mathbf{h} \partial \mathbf{h}^{-1}
\end{aligned} \tag{2.3.23}$$

ifadesinin kendisi de bir vektör alanıdır ve bir çerçeveye göre ayrıştırılabilir

$$\nabla_\mu V = (\nabla_\mu V)^\nu \hat{e}_\nu$$

Buna göre, doküman metni içinde kullandığımız notasyon aşağıdaki gibi eşleştirilebilir

$$(\nabla_\mu V)^\nu =: \nabla_\mu V^\nu$$

Bu ifade, bağlantı nesnesinin benzersiz dönüşüm kuralıdır. Görüldüğü üzere yukarıdaki son eşitliklerin ikinci terimleri tensörel dönüşüm kuralını ihlal ederler ve tam olarak bu davranış, bağlantı nesnelerinin niçin tensörel olmadıklarının sebebidir.

Açıklama. Eğer yukarda verilen çerçeve dönüşümü, bir koordinat dönüşümüne indirgenirse, yani $h^\mu_a = \partial x^\mu / \partial y^a$, bu durumda bağlantı nesnesinin dönüşüm kuralı yine aynı biçimini korur ve aşağıdaki gibi verilir

$$\begin{aligned}\omega &\mapsto \mathbf{h}^{-1}\omega\mathbf{h} - \mathbf{h}\partial\mathbf{h}^{-1} \\ \omega^\mu{}_{\nu\lambda} &\mapsto \frac{\partial y^a}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^b} \omega^\mu{}_{\nu\lambda} - \frac{\partial x^\mu}{\partial y^a} \frac{\partial^2 y^a}{\partial x^\lambda \partial x^\mu}\end{aligned}\quad (2.3.24)$$

Bkz. Ek C, koordinat transformasyonları hakkında daha detaylı bilgi için. $\square$

2.3.2.2 Levi-Civita bağlantısı

Şimdiye kadar, bağlantı nesnesi üzerine herhangi bir kısıt koyulmadan veya sahip olabileceği özelliklerden bahsedilmeden inceleme yapıldı. Denk.(2.3.15) ile verilen bağlantı katsayılarını ele alalım

$$\nabla_\mu \hat{e}_\nu := \omega^\lambda{}_{\nu\mu} \hat{e}_\lambda$$

Açıkça görüldüğü üzere, en genelde, bağlantı nesnesi son iki indise göre tamamen simetrik veya antisimetrik olmak zorunda değildir, her iki parçayı da içerebilir.

$$\omega^\lambda{}_{\nu\mu} = \omega^\lambda{}_{(\nu\mu)} + \omega^\lambda{}_{[\nu\mu]} \quad (2.3.25)$$

Genel bağlantı nesneleri ile ilerleyen bölümlerde çalışılacak. Bu bölümde, çok önemli ve benzersiz bir bağlantı olan *Levi-Civita* bağlantısı⁴³ verilecek. Bu bağlantı nesnesi şu özelliklere sahiptir :

- (*Simetrik veya torsiyonsuz (torsion-free)*). İndisleri aşağıdaki gibi simetri içerir

$$\tilde{\omega}^\lambda{}_{\nu\mu} = \tilde{\omega}^\lambda{}_{(\nu\mu)} \quad (2.3.26a)$$

- (*Metrik uyumluluk*). Metrik bileşenlerinin kovaryant türevinin sıfırlanmasını sağlar

$$\tilde{\nabla}_\lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad (2.3.26b)$$

⁴³Burada Levi-Civita bağlantısı ($\tilde{\omega}$) sembolü ile verilmiştir. Genel olarak ve aksi belirtilmedikçe, doküman boyunca Levi-Civita bağlantısı ile ilintili nesneleri göstermek için ($\tilde{\omega}$) sembolü kullanılacaktır.

Yukarıdaki koşullar kullanılarak, sadece metriğe bağlı bir biçimde, Levi-Civita bağlantısı aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\tilde{\omega}^\lambda{}_{\nu\mu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_\nu g_{\mu\sigma} + \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\nu\mu}) \quad (2.3.27)$$

Açıklama. Levi-Civita bağlantısı, *Riemann geometrisinin* dinamiğini veren *Riemann eğrilik* tensörünü tanımlar. Einstein'ın Genel Görelilik (GG) kuramı bu geometrik kurulum üzerine inşa edilmiştir. Bu sebeple, Levi-Civita bağlantısı çok önemli ve benzersiz bir konumdadır. Bunun yanında, önemli bir araştırma sahası olan -bu tezin yazarının da çalışmalarını sürdürdüğü- GG' den farklı alternatif gravitasyon kuramları kapsamında da, Riemann geometrisinden daha genel geometrilerde çalışılmasının altında Levi-Civita bağlantısından daha genel bağlantıların seçilebiliyor olması yatmaktadır. Anlaşılacağı ve yukarıda da verildiği üzere, Levi-Civita bağlantısı en genelde bir bağlantı nesnesi üzerine çeşitli kısıtlar koymaktadır. Pekala, bu koşulların gevşetilebileceği daha genel bağlantılarla çalışmak da mümkündür. Bu konuya daha sonra tekrar değinilecektir. $\square$

2.3.2.3 Eğrilik

Geometri, bir bağlantı nesnesi ile zenginleştirildiğinde, artık bu bağlantı nesnesinin dinamiğinin ne şekilde olduğunun incelenmesi doğal bir devam yoludur. Aslında, bir geometrinin dinamiği ile kastedilen, kabaca, bağlantı nesnesinin dinamiğidir. Bu ise, *eğrilik tensörü* R ile belirlenir ve rastgele bir bağlantı nesnesi $\omega^\lambda{}_{\nu\mu}$ için tanımlanabilir. Fakat bu bölümde basitlik adına, Levi-Civita bağlantı nesnesi ve bununla ilişkili olan Riemannsal yapı ele alınacaktır ve bazı temel içerik özetle verilecektir⁴⁴. Riemann eğrilik tensörünün bileşenleri şu şekilde tanımlanır

$$\tilde{R}^\rho{}_{\sigma\mu\nu} := \partial_\mu \tilde{\omega}^\rho{}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \tilde{\omega}^\rho{}_{\mu\sigma} + \tilde{\omega}^\rho{}_{\mu\lambda} \tilde{\omega}^\lambda{}_{\nu\sigma} - \tilde{\omega}^\rho{}_{\nu\lambda} \tilde{\omega}^\lambda{}_{\mu\sigma} \quad (2.3.28)$$

Basit hesaplamaların arından bu bileşenlerin aşağıdaki özellikleri belirlenebilir

$$\tilde{R}_{\rho\sigma\mu\nu} = -\tilde{R}_{\rho\sigma\nu\mu} \quad \leftrightarrow \quad \tilde{R}_{\rho\sigma(\mu\nu)} = 0 \quad (2.3.29a)$$

$$\tilde{R}_{\rho\sigma\mu\nu} = -\tilde{R}_{\sigma\rho\mu\nu} \quad \leftrightarrow \quad \tilde{R}_{(\rho\sigma)\mu\nu} = 0 \quad (2.3.29b)$$

$$\tilde{R}_{\rho\sigma\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (2.3.29c)$$

Ayrıca aşağıdaki Bianchi özdeşlikleri de sağlanır

$$0 = \tilde{R}_{\rho\sigma\mu\nu} + \tilde{R}_{\rho\mu\nu\sigma} + \tilde{R}_{\rho\nu\sigma\mu} \quad (2.3.30a)$$

$$0 = \nabla_\lambda \tilde{R}_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\mu \tilde{R}_{\rho\sigma\nu\lambda} + \nabla_\nu \tilde{R}_{\rho\sigma\lambda\mu} \quad (2.3.30b)$$

⁴⁴Bölüm 4 altında, genel (afin (*affine*)) bağlantı nesnesi ve bununla ilişkili eğrilik tensörü (ve diğer dinamik nesneler de) tanıtılacaktır.

Dahası, *Ricci eğrilik tensörü* ve *Ricci eğrilik skaleri* aşağıda verilen kontraksiyonlarla tanımlanabilir, sırasıyla

$$\tilde{R}_{\mu\nu} := \tilde{R}^{\rho}{}_{\mu\rho\nu} = g^{\rho\sigma} \tilde{R}_{\sigma\mu\rho\nu} \quad (2.3.31a)$$

$$\tilde{R} := \tilde{R}^{\mu}{}_{\mu} = g^{\mu\nu} \tilde{R}_{\mu\nu} \quad (2.3.31b)$$

Konu 3

Ayar kuramı

“Pekala, ayar teorisi günümüzde fiziksel kuvvetleri anlamamız açısından çok önemli temel teşkil ediyor. Fakat bu durum, ayar teorisinden çok daha uzun süredir var olan matematiksel bir fikre dayanıyor.”

Roger Penrose

Ayar teorisi bir çeşit alan teorisidir, öyle ki Lagrangiyen (dolayısıyla sistemin dinamiği), belirli operasyon sınıflarına (Lie grupları) dahil olan lokal dönüşümler altında değişmez (invariant) kalır. Bu dönüşümler, ayar dönüşümleri olarak da adlandırılır, bir Lie grubu oluştururlar, öyle ki ele alınan teorisin *simetri grubu* veya *ayar grubu* olarak adlandırılırlar. Her bir Lie grup ile ilişkilendirilen ve grup jeneratörleri arasında tanımlanan bir Lie cebiri vardır. Her bir grup jeneratörüne karşılık gelen bir alan tanımlanır ve buna *ayar alanı* adı verilir. Lokal transformasyon ile ortaya çıkan bu ayar alanları, bilahare Lagrangiyen içine dahil edilir, öyle ki modifiye edilen bu yeni Lagrangiyen lokal grup transformasyonları altında invariant kalsın. Bu duruma *ayar değişmezliği* denir.¹ Verilen bir ayar teorisinin simetri grubu eğer sıra değiştiren (komütatif) ise *Abelian ayar teorisi*, sıra değiştirmeyen (komütatif-olmayan) ise *Abelian olmayan ayar teorisi* olarak adlandırılır, ör. Yang-Mills teorisi.

Ayar teorileri, temel parçacıkların dinamiğini başarılı biçimde açıklayabilen (kuantum) alan teorileri olarak karşımıza çıkar. Örneğin, Kuantum Elektrodinamiği bir Abelian ayar teorisidir ve simetri grubu $U(1)$ Lie grubudur. Bu teorisin bir adet ayar alanı vardır ve bu da elektromanyetik 4-potansiyele karşılık gelir, öyle ki bunların ayar bozonları fotonlar olarak bilinir. Standart Model, genel olarak, Abelian olmayan bir ayar teorisi olarak tanımlanabilir, öyle ki ayar grubu $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ ile verilir ve toplamda 12 adet ayar bozonuna sahiptir :

¹Ayar alanları içeren bir teori kuantize edildiğinde, ayar alanlarının kuantaları *bozonlar* olarak karşımıza çıkar.

bir adet foton, üç adet zayıf bozon ve sekiz adet gluon, bkz. Tablo 3.1.

Tablo 3.1: Standart Model kapsamındaki ayar (Yang-Mills) teorileri.

Lie grubu	ayar alanı	fiziksel etkileşim
U(1)	foton	elektromanyetizma
SU(2)	zayıf (W,Z) bozonlar	zayıf etkileşim
SU(3)	gluon	kuvvetli etkileşim

3.1 Örnek : Bir ayar teorisi olarak Elektromanyetizma

Başlangıç olarak bir Dirac alanı ele alınsın ve bunun üzerinde aşağıda verilen lokal dönüşüm uygulansın

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{-i\alpha(x)} \quad (3.1.1)$$

Burada $\alpha(x)$ dönüşüm parametreleri $U(1)$ Lie grubunu oluşturur. Buna göre Dirac Lagrangian şu şekilde dönüşür

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi &\rightarrow \bar{\psi}e^{-i\alpha(x)}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)e^{i\alpha(x)}\psi \\ &= \bar{\psi}[i\gamma^\mu\partial_\mu - m - \gamma^\mu\partial_\mu\alpha(x)]\psi \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Açıkça görüldüğü üzere Dirac Lagrangiyen verilen lokal dönüşüm altında invariant kalmaz. Bunun invariantlığının sağlanması için, yani Lagrangiyen içinde peydah olan ve yerel dönüşüm parametresinin, $\alpha(x)$, sebep olduğu ekstra terimlerin kompanze edilmesi için, yeni bir A_μ alanı tanımlanır, öyle ki bu yeni alan verilen lokal dönüşüm altında aşağıdaki gibi dönüşsün

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu\alpha(x) \quad (3.1.3)$$

Bununla beraber Denk.(3.1.2) ile verilen Lagrangiyen içinde, $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$ değişikliği yapılsın

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \quad (3.1.4)$$

burada

$$D_\mu := \partial_\mu + iqA_\mu \quad (3.1.5)$$

kovaryant türev olarak tanımlanır. Yukarıda verilen ifadeler ışığında kovaryant türevin şu şekilde dönüştüğü gösterilebilir

$$D_\mu \rightarrow D_\mu - i\partial_\mu\alpha \quad (3.1.6)$$

Yapılan bu modifikasyonların ardından Denk.(3.1.4) ile verilen Lagrangiyen ifadesi artık, Denk.(3.1.1) ile verilen lokal dönüşümler altında invaryanttır!

Yukarıda yapılanları özetleyelim : Başlangıçta, global $U(1)$ simetrisine sahip olan ve $\text{spin}-\frac{1}{2}$ parçacığının dinamiğini veren Lagrangiyen ele alındı. Daha sonra, global $U(1)$ simetrisi, lokal olarak değiştirildi ve invaryant bir teoriye sahip olmak için gerekli düzenlemeler yapıldı. Bu invaryanslığın sağlanabilmesi için, belirli bir kurala göre dönüşen yeni bir ayar alanının, A_μ , teoriye dahil edilmesi gerekliliği ortaya çıktı. Ardından bu ayar alanını içeren yeni bir kovaryant türev, D_μ , tanımlanarak, orijinal Lagrangiyen ifadesindeki tüm adi türevler kovaryant türev ile değiştirildi. Ve sonuçta elde edilen modifiye Lagrangiyen ifadesi, lokal $U(1)$ dönüşümleri altında invaryant kalabildi.

Diğer bir deyişle, başlangıçta global bir simetriye sahip etkileşim içermeyen bir parçacık teorisi ele alındı ve bu teori üzerinde sadece simetrinin lokal olması koşulu uygulandı, öyle ki finalde elde edilen teori, sadece bu parçacığın teorisi olmakla kalmadı aynı zamanda (başlangıçta hiçbir şekilde bahsi geçmeyen) elektromanyetizmayı da içerdi. Dahası, hiçbir etkileşimin olmadığı başlangıçtaki teorinin tersine artık bu yeni teori, parçacık ve elektromanyetizma arasındaki etkileşime de sahiptir, $A_\mu\psi$ terimi sayesinde. Burada A_μ ayar alanı -kuantize edildiğinde fotonları verecek olan-, doğrudan lokal $U(1)$ simetrisinin bir sonucu olarak ortaya çıktı. Bu gerekçeyle literatürde söylendiği üzere, elektromanyetizma $U(1)$ grubu ile temsil edilir. Bu tipteki teoriler, yani fiziksel etkileşimlerin (kuvvetlerin) belirli bir Lie grubu ile temsil edildiği teoriler, **ayar teorisi** veya **Yang-Mills teorisi** olarak adlandırılır. Yukarıdaki örnekte, dönüşüm elemanları $e^{i\alpha(x)}$, $U(1)$ Lie grubunu oluşturdu. Buna göre şöyle söylenebilir : *Elektromanyetizma bir $U(1)$ ayar teorisidir.*

Açıklama. Tamamlayıcı bir bilgi olarak özetle şunu verelim : Yeni eklenen A_μ alanı için *kinetik* ve *kaynak* terimleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir

$$\mathcal{L}_{kinetik} := -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (3.1.7)$$

burada

$$F^{\mu\nu} = \frac{i}{q}[D^\mu, D^\nu] = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (3.1.8)$$

ayar alanının şiddeti olarak ifade edilir ve

$$\mathcal{L}_{kaynak} := -J^\mu A_\mu \quad (3.1.9)$$

burada $J^\mu = J^\mu(\psi)$ nesnesi, ψ alanı için bir kaynak temsil eder, öyle ki bu kaynak A_μ alanını doğursun. Tüm işlemler bir araya getirildiğinde yeni Lagrangiyen şu

şekilde yazılabilir

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{kinetik} + \mathcal{L}_{kaynak} \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu\end{aligned}\quad (3.1.10)$$

Elde edilen bu yeni Lagrangiyen, elektromanyetik alan içindeki yüklü bir Dirac parçacığının dinamiğini veren, (klasik) Maxwell-Dirac teorisinden başka bir şey değildir! Özel olarak, bu teori kuantize edildiğinde ise çok iyi bilinen Kuantum Elektrodinamiği (*QED*) elde edilir. $\square$

3.2 Ayar teorilerinin geometrisi

Lokal ayar yaklaşımının teorik açıdan güçlü olmasının yanında, diğer taraftan, benzer sonuçlar fizik teorilerinin fiber demet² (*bundle*) kapsamında incelenmesiyle de elde edilebilir. Bu pür geometrik yaklaşım, gravitasyon ile diğer madde teorilerinin birleştirilmesi konusundaki çalışmalarda pek çok kayda değer çıkarımlar yapılmasını sağlayabilir. Ayar teorik ve geometrik yaklaşımlar, aralarındaki yakın ilişki ve benzerlikler göz önüne alındığında, fiziksel evreni açıklamada özdeş ve belki de tamamlayıcı bir zemin oluşturabilirler. Örnek olarak, elektromanyetizma kapsamında bu iki yaklaşıma dair aşağıda verilen Tablo 3.2 incelenebilir.

Tablo 3.2: Elektromanyetizmanın ayar teorik içeriği karşısında geometrik içeriği.

U(1) ayar teorisi	Geometri
ayar alanı (potansiyeli), A_μ	bağlantı nesnesi, ω
kovaryant türev, $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$	kovaryant türev, $D = d + \omega$
ayar alan şiddeti, $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$	eğrilik, $R = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$

Bir başka örnek olarak, pür geometrik bir teorik olan Genel Görelilik ile genel bir ayar teorisinin (en genelde Abelian olmak zorunda değil) karşılaştırılması değerli olabilir³. Bkz. Tablo 3.3.

²Demet yapısı hakkında daha fazla bilgi için bkz. Ek B.

³Genel Görelilik' in Riemann geometrisinde verilmesi ve bu kurulumda geometrik dinamiğin doğrudan metrik ile ifade edilmesi sebebiyle, gravitasyonel potansiyel geleneksel olarak metrik

Tablo 3.3: Jenerik bir ayar teorisi karşısında Genel Görelilik.

Ayar teorisi	Genel Görelilik
ayar dönüşümleri	koordinat dönüşümleri
ayar grubu, ör. $U(1), SU(2)$	tüm koordinat dönüşümlerinin oluşturduğu grup, $GL(n, (R))$
ayar alanı (potansiyeli), A_μ	bağlantı katsayıları, $\Gamma^\kappa_{\mu\nu}$
kovaryant türev, $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$	kovaryant türev, $D_\mu = \partial_\mu + \Gamma^\cdot_{\cdot\mu}$
ayar alan şiddeti, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + iq[A_\mu, A_\nu]$	eğrilik tensörü, $R^\kappa_{\lambda\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} - \partial_\mu \Gamma^\kappa_{\lambda\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\mu} \Gamma^\kappa_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\lambda\nu} \Gamma^\kappa_{\rho\mu}$
Bianchi özdeşliği, $\sum_{\rho\mu\nu} D_\rho F_{\mu\nu} = 0$ cyclic	Bianchi özdeşliği, $\sum_{\rho\mu\nu} D_\rho R^\kappa_{\lambda\mu\nu} = 0$ cyclic

alanı ile eşleştirilir, bağlantı nesnesi ile değil. Diğer taraftan Yang-Mills tipi kuantum teorilerinde ise, bizzat ilgili fizik etkileşim, bağlantı nesnesinin potansiyel olarak ele alındığı bir biçimde verilir, metrik-benzeri bir nesnenin değil. İki fizik alanı arasındaki bu farklı gelenek ve biçim, ayar metoduna ilişkin yaklaşıma dair anlaşmazlığın ve farklılığın sebebini teşkil eder. Tabloda verilen bilgi, kesin bir denkliği değil benzerliği göstermek adına sunulmuştur.

Kısım II

Gravitasyon

Konu 4

Riemann ve Riemann-dışı geometriler

“Geometriye giden tek bir asil yol yoktur.”

Euclid

Geometriler, fiziksel teorilerin formülasyonunda, özellikle uzayzaman ve yerçekiminin tanımlanmasında çok önemli bir rol oynar. 19. yüzyılda geliştirilen Riemann geometrisi, Genel Görelilik (GG)’ in matematiksel temelini oluşturur. Afin ve teleparalel geometriler de dahil olmak üzere Riemann-dışı geometriler, yerçekimi olayını açıklamak için alternatif bakış açıları sağlar. Adını Bernhard Riemann’ dan alan Riemann geometrisi, 19. yüzyılın ortalarında Öklid geometrisinin bir genellemesi olarak ortaya çıktı. Riemann’ ın ufuk açıcı dersi ”Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen” (1854) metrik tensörü ile donanmış manifoldları tanıttı, öyle ki bu metrik ile manifoldtaki uzunluklar ve açılar ölçülebilir (Riemann 1854).

Afin ve teleparalel geometriler de dahil olmak üzere Riemann-dışı geometriler, 20. yüzyılda Riemann geometrisinin uzantıları veya alternatifleri olarak geliştirildi. Bu yeni bakış açıları, farklı geometrik kurulumlardaki bağlantı nesneleri ve eğrilikleri araştırarak yerçekimsel etkileşimlere yeni bakış açıları sağlar. Dikkate değer katkılar arasında Elie Cartan’ ın afin bağlantılar ve teleparalellik üzerine çalışmaları yer alır (Cartan 1922).

Riemann geometrisinde temel nesne (M, g) Riemann manifoldudur; burada M diferansiyellenebilir bir manifolddur ve g bir Riemann metriğidir. Metrik tensör $g_{\mu\nu}$ sonsuz küçük yakın noktalar arasındaki mesafeyi tanımlar

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (4.0.1)$$

Torsiyonsuz (simetrik) ve metrik uyumlu olan Levi-Civita bağlantısı paralel taşımayı

ve kovaryant türevi tanımlar

$$\tilde{\nabla}_\lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad (4.0.2a)$$

$$\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad (4.0.2b)$$

Riemann eğrilik tensörü manifoldun eğrilikliğini ölçer

$$\tilde{R}^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \tilde{\Gamma}^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \tilde{\Gamma}^\rho_{\mu\sigma} + \tilde{\Gamma}^\rho_{\mu\lambda} \tilde{\Gamma}^\lambda_{\nu\sigma} - \tilde{\Gamma}^\rho_{\nu\lambda} \tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\sigma} \quad (4.0.3)$$

Bununla birlikte, Riemann olmayan geometriler bağlantı kavramını genelleştirerek torsiyona ve nonmetrisiteye izin verir. Örneğin, afin geometride, $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ bağlantısının mutlaka bir metrikle uyumlu olması gerekmez. Bu uyumsuzluğu ölçen nonmetrisi-tidir

$$Q_{\lambda\mu\nu} := \nabla_\lambda g_{\mu\nu} \quad (4.0.4)$$

Öte yandan, afin bağlantının antisimetrikliği, aşağıdaki şekilde tanımlanan torsiyon tensörü $T^\lambda_{\mu\nu}$ tarafından belirlenir

$$T^\lambda_{\mu\nu} := \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \quad (4.0.5)$$

Riemann ve Riemann-dışı geometriler, uzayzamanın ve yerçekiminin doğasına ilişkin farklı ancak tamamlayıcı bakış açıları sunar. Riemann geometrisi Genel Görelilik'in omurgasını oluştururken, Riemann-dışı geometriler çözülmemiş sorunları çözebilecek ve fiziksel olaylar arasında bağlantı kurabilecek veya birleştirebilecek değerli uzantılar ve alternatifler sağlar, ör. torsiyon ve içsel spin özelliği arasındaki ilişki gibi. Bu geometrilerin sürekli araştırılması, yerçekimi ve uzayzamanın temel doğasına dair daha derin anlayışlar geliştirilebilmesine yol açabilir.

Bölüm 4.1 altında, ilk olarak Cartan yapı denklemleri kullanılarak Riemann-dışı geometrilerin oluşturulmasını sağlayan nonmetrisiti, torsiyon ve (tam) eğrilik gibi temel nesneler tanımlanacak. Geometri bu matematiksel araçlarla donatıldığında, afin bağlantı ve bununla ilişkili eğrilik nesnesi ayrıştırılabilir. Bölüm 4.2 altında GG' nin Riemann geometrisine dayandırılmasından sonra, literatürde iyi bilinen ve yoğun olarak çalışılan bir araştırma sahası ve Riemann-dışı geometrilerin bir sınıfı olan teleparalelizm detaylandırılacaktır, Bölüm 4.3 altında. Bu sınıftaki tüm alt durumlar incelenecektir. Buradan elde edilen kavrayış üzerine, daha sonra, tezin ilerleyen kısımlarında, Bölüm 5 altında, elde edilen geometrik temeller üzerinde teleparalel gravitasyon modelleri oluşturulacak. Son olarak, Bölüm 4.4 altında, teleparalel geometrilerde karşılaşılan bazı örnekler verilecek, öyle ki bu örnekler standart Riemann altyapısında gözlenemezler. Aşağıdaki bölümler boyunca diferansiyel form formalizmi yoğun bir şekilde kullanılacaktır.

4.1 Cartan yapı denklemleri

GG' nin Riemann geometrisinde formüle edilmesinin yanı sıra, daha genel geometriler üzerinde de çalışılabilir. Bu yaklaşım, amaçlarımızda da belirttiğimiz gibi, GG kapsamının genişletilmesinde sıklıkla tercih edilen yollardan biridir.

Cartan yapı denklemleri nonmetrisiti 1-form, torsiyon 2-form ve eğrilik 2-form nesnelerini tanımlar. Rastgele bir *karma çerçevede*¹ aşağıdaki gibi verilirler

$$Q_{AB} := -\frac{1}{2}Dg_{AB} = \frac{1}{2}(-dg_{AB} + \omega_{AB} + \omega_{BA}) \quad (4.1.1a)$$

$$T^A := De^A = de^A + \omega^A_B \wedge e^B \quad (4.1.1b)$$

$$R^A_B := D\omega^A_B := d\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B \quad (4.1.1c)$$

Aşağıdaki Bianchi özdeşliklerini sağladıkları için tamamen birbirlerinden bağımsız değildirler

$$DQ_{AB} = \frac{1}{2}(R_{AB} + R_{BA}) \quad (4.1.2a)$$

$$DT^A = R^A_B \wedge e^B \quad (4.1.2b)$$

$$DR^A_B = 0 \quad (4.1.2c)$$

Cartan yapı denklemleri ve Bianchi özdeşlikleri, bir koordinat çerçevesinde aşağıdaki formu alırlar

$$Q_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(-dg_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha}) \quad DQ_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(R_{\alpha\beta} + R_{\beta\alpha}) \quad (4.1.3a)$$

$$T^\alpha = \omega^\alpha_\beta \wedge dx^\beta \quad DT^\alpha = R^\alpha_\beta \wedge dx^\beta \quad (4.1.3b)$$

$$R^\alpha_\beta = d\omega^\alpha_\beta + \omega^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma_\beta \quad DR^\alpha_\beta = 0 \quad (4.1.3c)$$

ve ortonormal bir çerçevede de aşağıdaki formu alırlar

$$Q_{ab} = \frac{1}{2}(\omega_{ab} + \omega_{ba}) \quad DQ_{ab} = \frac{1}{2}(R_{ab} + R_{ba}) \quad (4.1.4a)$$

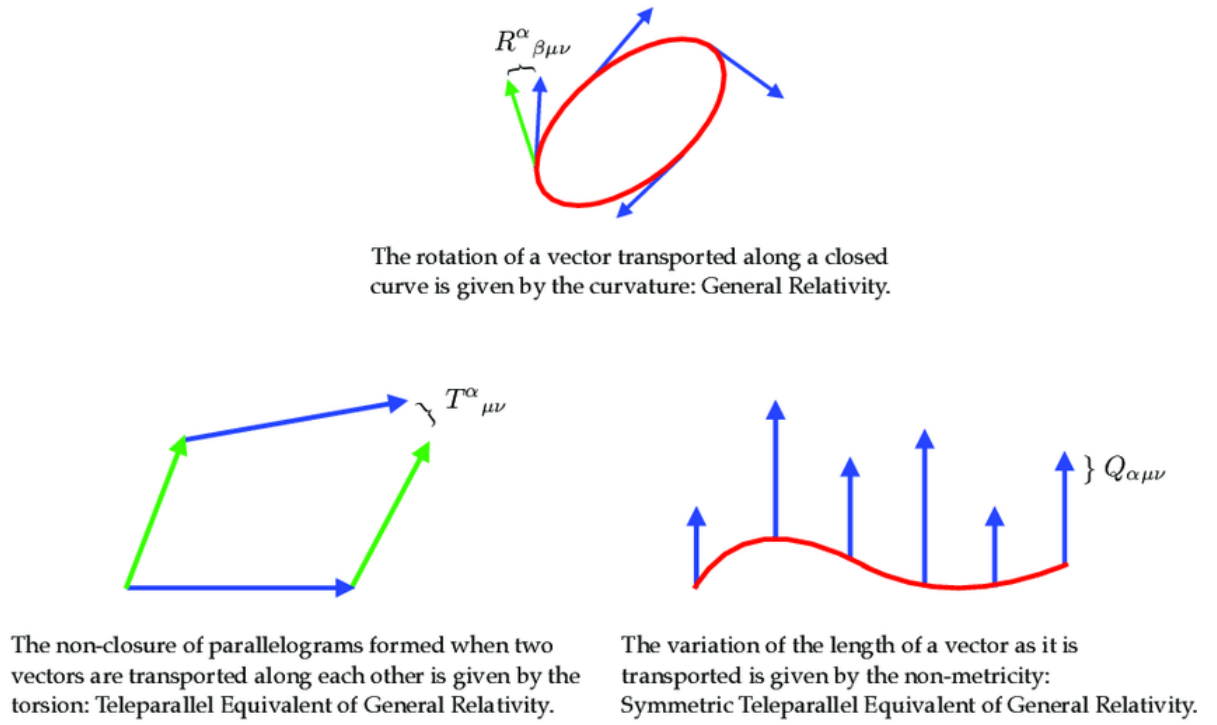
$$T^a = de^a + \omega^a_b \wedge e^b \quad DT^a = R^a_b \wedge e^b \quad (4.1.4b)$$

$$R^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b \quad DR^a_b = 0 \quad (4.1.4c)$$

Bunların geometrik anlamları, bir vektörün M üzerinde kapalı bir döngü boyunca paralel taşınması düşünüldüğünde açıkça ortaya çıkar.

Vektörün bir tam dönüşünden sonra, final uzunluğu başlangıç uzunluğuyla aynı değilse, o zaman geometride nonmetrisiti vardır; final ve başlangıç vektörleri arasında bir açı oluşmuşsa bu durumda geometride eğrilik vardır; ve eğer teğet demetinde final ve başlangıç vektörleri arasında bir kayma varsa (veya hareketin üzerinde yapıldığı döngünün teğet demetindeki kontur görüntüsü deforme olmuşsa), o zaman geometride torsiyon vardır. Bkz. [Figür 4.1](#).

¹Bkz. [Ek D](#)



Figür 4.1: Cartan yapılarının geometrik anlamlarına dair. **Kaynak** : (J. B. Jimenez, Heisenberg ve T. S. Koivisto 2019)

4.1.1 (Tam) bağlantının ve (tam) eğriliğin ayrıştırılması

Karma bir çerçevede bağlantı 1-form nesnesi aşağıdaki gibi benzersiz bir biçimde ayrıştırılabilir (Hehl, McCrea, ve diğ. 1995), (I. M. Benn ve Tucker 1982), (Tucker ve Wang 1995)

$$\omega^A_B = \underbrace{(g^{AC} dg_{CB} + p^A_B)/2}_{\text{Metrik}} + \underbrace{\tilde{\omega}^A_B}_{\text{Torsiyon}} + \underbrace{q^A_B + Q^A_B}_{\text{Nonmetrisiti}} \quad (4.1.5)$$

burada $\tilde{\omega}^A_B$ Levi-Civita bağlantı 1-formudur,

$$\tilde{\omega}^A_B \wedge e^B = -de^A \quad \tilde{\omega}^{AB} = -\tilde{\omega}^{BA} \quad (4.1.6)$$

K^A_B kontorsiyon 1-formdur,

$$K^A_B \wedge e^B = T^A \quad K^{AB} = -K^{BA} \quad (4.1.7)$$

p_{AB} ve q_{AB} ise aşağıdaki gibi verilir

$$p_{AB} = -(\iota_A dg_{BC})e^C + (\iota_B dg_{AC})e^C \quad (4.1.8)$$

$$q_{AB} = -(\iota_A Q_{BC})e^C + (\iota_B Q_{AC})e^C \quad (4.1.9)$$

Bu ayrıştırma kendi içinde tutarlıdır. Bunun görülebilmesi için, Denk.(4.1.5) sağ taraftan $\wedge e^B$ ile çarpılır ve yukarıda verilen tanımlar kullanılır. Form indislerinin

aşağı veya yukarı hareket ettirilmesi sırasında d ve D işlemlerinin olup olmadığına dikkat edilmelidir, zira en genelde $dg_{AB} \neq 0$ ve $Dg_{AB} \neq 0$. Tam bağlantının simetrik kısmı Denk.(4.1.1a) yardımıyla şu şekilde verilir

$$\omega_{(AB)} = Q_{AB} + \frac{1}{2}dg_{AB} \quad (4.1.10)$$

ve geriye kalan kısım ise antisimetrik kısımdır

$$\omega_{[AB]} = \frac{1}{2}p_{AB} + \tilde{\omega}_{AB} + K_{AB} + q_{AB} \quad (4.1.11)$$

Eğer $Q_{AB} = 0$ ise, bağlantının "metrik uyumlu" olduğu söylenir. Eğer $Q_{AB} = 0$ ve $T^A = 0$ her ikisi de sağlanırsa, bu durumda tam bağlantı Levi-Civita bağlantısına indirgenir. Koordinat (holonomik) çerçevesinde, $\iota_\alpha d \equiv \partial_\alpha$ kısaltması kullanılarak, tam bağlantının ayrıştırılması Denk.(4.1.5) aşağıdaki formu alır

$$\omega^\alpha{}_\beta = \underbrace{\frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(\partial_\gamma g_{\sigma\beta} + \partial_\beta g_{\sigma\gamma} - \partial_\sigma g_{\beta\gamma})dx^\gamma}_{Metrik} + \underbrace{K^\alpha{}_\beta}_{Torsiyon} + \underbrace{q^\alpha{}_\beta + Q^\alpha{}_\beta}_{Nonmetrisiti} \quad (4.1.12)$$

burada eşitliğin sağ tarafındaki ilk grup Christoffel sembolleridir. Ortonormal (Lorentz) çerçevede bu ifade aşağıdaki şekilde verilir

$$\omega_{ab} = \tilde{\omega}_{ab} + K_{ab} + q_{ab} + Q_{ab} \quad (4.1.13)$$

Burada, Levi-Civita bağlantı 1-formu, ortonormal koçerçeve cinsinden çözülebilir

$$\tilde{\omega}_{ab} = \frac{1}{2}[-\iota_a de_a + \iota_b de_a + (\iota_a \iota_b de_c)e^c] \quad (4.1.14)$$

ve kontorsiyon 1-form da aşağıdaki şekilde torsiyon cinsinden verilebilir

$$K_{ab} = \frac{1}{2}[\iota_a T_b - \iota_b T_a - (\iota_a \iota_b T_c)e^c] \quad (4.1.15)$$

Ayrıca q_{ab} nesnesi de nonmetrisiti cinsinden aşağıdaki gibi verilir

$$q_{ab} = -(\iota_a Q_{bc})e^c + (\iota_b Q_{ac})e^c \quad (4.1.16)$$

Literatürde, koordinat çerçevesinin (Hehl, McCrea, ve diğ. 1995), ortonormal çerçevenin (Dereli ve Tucker 1994) ve karma çerçevenin (Adak, Kalay ve Sert 2006) tercih edildiği çalışmalar vardır. Ayrıca bazı metinlerde, tam bağlantının Levi-Civita dışındaki katkıları şu şekilde isimlendirilmektedir : sadece torsiyon kısmı *kontorsiyon*, sadece nonmetrisiti kısmı *disformasyon* ve en genelde her iki kısmın toplamı ise *distorsiyon* (Adak, Dereli, T. S. Koivisto, ve diğ. 2023).

Tam bağlantının ayrıştırılması ile ilişkili olarak, $\omega_{ab} = \tilde{\omega}_{ab} + N_{ab}$ burada $N_{ab} := K_{ab} + q_{ab} + Q_{ab}$ distorsiyon 1-formdur, tam eğrilik (Riemann-dışı eğrilik) 2-formu da aşağıdaki gibi, Riemann ve Riemann-dışı parçaları içerecek şekilde ayrıştırılabilir

$$R^a{}_b = \tilde{R}^a{}_b + \tilde{D}N^a{}_b + N^a{}_c \wedge N^c{}_b \quad (4.1.17)$$

burada $\tilde{R}^a_b$ Riemannsal eğrilik 2-formudur ve $\tilde{D}N^a_b$ ifadesi N^a_b nesnesinin Levi-Civita bağlantısına göre kovaryant türevidir,

$$\tilde{R}^a_b = d\tilde{\omega}^a_b + \tilde{\omega}^a_c \wedge \tilde{\omega}^c_b \quad (4.1.18a)$$

$$\tilde{D}N^a_b = dN^a_b + \tilde{\omega}^a_c \wedge N^c_b - \tilde{\omega}^c_b \wedge N^a_c \quad (4.1.18b)$$

Ayrıca, Einstein-Hilbert n -formunun da aşağıdaki gibi ayrıştırılması bazı kaynaklarda görülür

$$R^a_b \wedge *e_a^b = \tilde{R}^a_b \wedge *e_a^b + N^a_c \wedge N^c_b \wedge *e_a^b + d(N^a_b \wedge *e_a^b) \quad (4.1.19)$$

burada $\tilde{D} * e_a^b = 0$ koşulu sağlanmaktadır. Eşitliğin sağ tarafındaki son terim tam form olduğundan varyasyonel alan denklemlerine bir katkı sağlamaz ve bu nedenle pratikte ihmal edilebilir.

Benzer bir ayrıştırma koordinat ve karma çerçevelerde de pekala yapılabilir. Literatürde sıklıkla koordinat ve ortonormal çerçeveler kullanılmaktadır. Karma çerçeve açık hesaplamalarda nadiren tercih edilir, ancak bu çerçeve gravitasyonun teorik değerlendirmelerinde kullanışlı olabilir (Hehl, McCrea, ve diğ. 1995; J. B. Jimenez ve T. S. Koivisto 2022). Gravitasyon dışında çok farklı alanlarda da, yukarıdaki formülasyon kullanılarak benzer hesaplamalar gerçekleştirilir. Buna ilginç bir örnek olarak, kristal kusurlarının araştırılmasında Riemann-dışı geometri-lerin kullanıldığı çalışmalar verilebilir (Roychowdhury ve Gupta 2017), (Adak, Dereli, Kok, ve diğ. 2024).

4.1.2 Geometrilerin sınıflandırılması

Nonmetrisiti, torsiyon ve eğrilik nesnelerinin var olup olmamasına göre Tablo 4.1 ile verilen sınıflandırma kullanılabilir.²

4.2 Riemann geometrisi

Einstein'ın Genel Görelilik teorisinin (GG) Riemann geometrisinde yazılmasından ötürü bu geometrinin özellikleri zaman içerisinde gayet iyi çalışılmış ve anlaşılmıştır. Buna dayanarak, Riemann geometrisi ile ilgili çok kısa bir özet şeklinde bilgi aktaralım. Örnek olarak, ortonormal çerçevede başlansın ve Cartan yapı denklemleri üzerinde Denk.(4.1.4), şu koşullar verilsin $Q_{ab} = 0$, $T^a = 0$, $R^a_b \neq 0$.

²Literatürde, bazen Q_{AB} şu şekilde ayrıştırılır $Q_{AB} = \bar{Q}_{AB} + \frac{1}{n}g_{AB}Q$ burada $g^{AB}Q_{AB} = Q$ ve $g^{AB}\bar{Q}_{AB} = 0$. Buna göre $\bar{Q}_{AB} = 0$ ve $Q \neq 0$ koşulu Weyl geometrisi olarak adlandırılır. Fakat, dokümandaki içerikte "Weyl geometrisi" ile, genel olarak $Q_{AB} \neq 0$ koşulunun sağlandığı geometriler kastedilmiştir!

Tablo 4.1: Geometrilerin sınıflandırılması.

Q_{AB}	T^A	R^A_B	Geometri
0	0	0	Minkowski
0	0	$\neq 0$	Riemann
0	$\neq 0$	0	Metrik (Weitzenböck) teleparalel
$\neq 0$	0	0	Simetrik teleparalel
0	$\neq 0$	$\neq 0$	Riemann-Cartan
$\neq 0$	0	$\neq 0$	Riemann-Weyl
$\neq 0$	$\neq 0$	0	Genel teleparalel
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	Riemann-Cartan-Weyl

Bu kurulum Riemann geometrisinin yapısını verir. İlk iki denklem, bağlantı ω^a_b üzerinde matematiksel bir ilişki verir ve analitik olarak çözülebilmesini sağlar. Bu çözüm Levi-Civita bağlantı 1-formudur, $\omega_{ab} = \tilde{\omega}_{ab}$ ve Denk.(4.1.14) ile verilir. Sonuç olarak, tüm diğer nesneler sadece metrik kullanılarak türetilir; $g \rightarrow e^a(g) \rightarrow \tilde{\omega}^a_b(g) \rightarrow \tilde{R}^a_b(g)$. Bu sonuç, GG' nin Riemann geometrisinde tanımlı metrik bir teori olarak anıldığının arkasındaki sebeptir.

4.3 Teleparalelizm (TP)

Teleparalelizm, geleneksel olarak GG ile Riemann geometrisinde verilen gravitasyon tanımına alternatif bir formülasyon sağlar. Bu sisteme göre gravitasyon, eğrilik yerine torsiyon veya nonmetrisiti ile ifade edilir. Zaman içinde teleparalelizm çok yoğun çalışılmış ve gravitasyonel etkileşimlerin anlaşılması hakkında yeni görüşler ve alternatif bakış açıları sağlamıştır. Bu konsept ilk olarak Elie Cartan tarafından 20. yy. başlarında tanıtılmıştır, öyle ki torsiyon içeren bu anlamda ve Riemann geometrisini genelleştiren bir öneri olarak (Cartan 1922). Albert Einstein' ın kendisi de birleşik alan teorisi çalışmalarında teleparalelizm kavramını kullanmıştır (Einstein 1928). TP geometriler üzerine kurulu TP gravitasyon modellerinin modern formülasyonları göstermiştir ki, bazı özel koşullar altında bunlar GG ile aynı fenomenolojik sonuçlara sahip oluyorlar, öyle ki *Genel Göreliliğin Teleparalel Eşdeğer (TPGR)* modelleri olarak adlandırılırlar. Bununla birlikte, en genelde bu modeller, GG' nin sahip olmadığı bazı sonuçlar da üretirler. Teleparalel geometriler üç sınıfta incelenebilir : *metrik teleparalel (MTP)*, *simetrik teleparalel (STP)* ve *genel teleparalel (GTP)* geometriler. Bunların üzerine kurulu teleparalel gravitasyon modelleri de, ilişkili olarak sırasıyla şu şekilde isimlendirilir

: GG' nin metrik teleperalel eşdeğeri (MTPGR), GG' nin simetrik teleparalel eşdeğeri (STPGR) ve GG' nin genel teleparalel eşdeğeri (GTPGR).

Teleparalelizimde, afin bağlantının tam eğriliği sıfırlanır

$$R^a_b(\omega) = 0 \quad (4.3.1)$$

Ayrıca, MTP' de ise, tam bağlantı -Weitzenböck bağlantı olarak da adlandırılır-sıfır olmayan bir torsiyona sahiptir (Hayashi ve Shirafuji 1979)

$$T^a(\omega) = D(\omega)e^a = de^a + \omega^a_b \wedge e^b \neq 0 \quad (4.3.2)$$

Öte yandan, STP' de ise sadece nonmetrisiti sıfırdan farklı olur

$$Q_{ab}(\omega) = -\frac{1}{2}D(\omega)g_{ab} = \frac{1}{2}(-dg_{ab} + \omega^c_a g_{cb} + \omega^c_b g_{ac}) \neq 0 \quad (4.3.3)$$

Tahmin edilebileceği üzere, GTP' de torsiyon ve nonmetrisinin her ikisi de sıfırdan farklı şekilde geometride var olur.

TP geometrilerin oluşturulmasında uygun yöntemlerden biri ayar serbestliğinin sabitlemesidir (*gauge fixing*). Bağlantı nesnesinin bir ayar alanı olarak ele alınması ile bu gerçekleştirilebilir. Afin bağlantının bazı çerçevelerde sıfırlanması ile birlikte ilgili TP geometrik kurulum sağlanmış olur. Örneğin, ortonormal çerçevede sıfırlandığında MTP, koordinat çerçevesinde sıfırlandığında STP ve karma çerçevede sıfırlandığında ise GTP geometriler elde edilebilir. Bkz. Tablo 4.2.

Tablo 4.2: Farklı çerçevelerde ayar sabitlemesi uygulanarak elde edilen TP geometriler.

çerçeve	ayar sabitlemesi	yapılar	geometri
ortonormal	$\omega^a_b = 0$	$R^a_b = 0, \quad Q_{ab} = 0, \quad T^a \neq 0$	MTP
koordinat	$\omega^\mu_\nu = 0$	$R^\mu_\nu = 0, \quad Q_{\mu\nu} \neq 0, \quad T^\mu = 0$	STP
karma	$\omega^A_B = 0$	$R^A_B = 0, \quad Q_{AB} \neq 0, \quad T^A \neq 0$	GTP

TP gravitasyon modellerinin, araştırmacılar tarafından belki de en motive edici bulunan özellikleri hakkında şu söylenebilir : Bu modeller karanlık enerji (kozmik ivmelenme) ve karanlık madde (galaksi rotasyon eğrileri) fenomenlerinin açıklanmasında yeni imkanlar sağlayabilir (Cai ve diğ. 2016). Dahası, serbestlik dereceleri açısından (dolayısıyla üretilen dinamikler açısından), bazı durumlarda GG' den daha zengin altyapılar sunabilmektedirler (Hohmann ve diğ. 2018).

4.3.1 Metrik (Weitzenböck) teleparalelizm (MTP)

Ortonormal çerçevede başlansın ve Denk.(4.1.4) ile verilen Cartan denklemlerinde şu koşullar uygulansın $Q_{ab} = 0$, $R^a_b = 0$ ve $T^a \neq 0$. Bu kurulum, sadece torsiy-

onun sıfırdan farklı olduğu, *metrik teleparalel geometri* yapısını verir. Yukarıdaki koşullar altında, Riemann geometrisinden farklı olarak, bağlantı katsayılarının ω_{ab} analitik olarak çözülebileceği direkt bir ilişki bulunamaz. Bu nedenle standart yöntem olarak, metrik ve bağlantı için birbirlerinden bağımsız önermeler yapılması yolu izlenir ve daha sonra bu önermelerin yukarıdaki koşulları sağlayıp sağlamadığı kontrol edilir. Bu yöntemin dışında, alternatif bir yöntem aşağıda tarif edilmiştir.

O ve O' Lorentz gözlemciler olsunlar, MTP geometri içinde

$$O : \quad e^a \quad \text{ve} \quad \omega^a_b \quad (4.3.4a)$$

$$O' : \quad e^{a'} \quad \text{ve} \quad \omega^{a'}_{b'} \quad (4.3.4b)$$

Gözlemci O ayar potansiyelini (afin bağlantıyı) şu şekilde seçsin $\omega^a_b = 0$. Buna göre aşağıdaki konfigürasyonu elde eder

$$\omega_{ab} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{ab} = 0, \quad R^a_b = 0, \quad T^a = de^a \neq 0 \quad (4.3.5)$$

Bu durumda, Denk.(D.0.13) vasıtasıyla, gözlemci O' şu bağlantıyı görür $\omega^{a'}_{b'} = L^{a'}_a dL^a_{b'}$, öyle ki (J. B. Jimenez, Heisenberg, Iosifidis, ve diğ. 2020) içindeki Denk.(2) ve (J. B. Jimenez, Heisenberg, Iosifidis, ve diğ. 2020) içindeki Denk.(22) ile verilen Minkowski metrik $\eta_{a'b'} = L^a_{a'} \eta_{ab} L^a_{b'}$ ifadeleri ile ilişkili olarak. Tamamlayıcı bir bilgi olarak, O' gözlemcisinin Cartan tensörlerini Denk.(D.0.13) yardımıyla gözlemlediği söylenebilir. Sonuç olarak, MTP geometrisinin dinamik nesneleri sadece metrik ile elde edilebilmiş olur : O gözlemcisi için $g \rightarrow e^a(g) \rightarrow T^a(g)$, $\omega^a_b = 0$ ve O' gözlemcisi için ise $g \rightarrow e^{a'}(g) \rightarrow L^{a'}_a(g) \rightarrow \omega^{a'}_{b'}(g) \rightarrow T^{a'}(g)$.

Farklı bir bakış açısından, $\omega^a_b = 0$ seçimi, görelilik teorisinin ruhuna aykırı görülebilir, zira özel olarak seçilmiş bir çerçeve belirlenmiş gibi görülebilir. Fakat, gravitasyon, geleneksel tanım olarak uzayzaman geometrisinin (Riemannsal veya diğer) dinamiği olarak ele alındığında, bağlantının seçimi sadece bir ayar indirgemesi olarak düşünülebilir (ör. Elektromanyetizmadaki Lorenz veya Coloumb ayar seçimleri gibi). Bu durumda Weitzenböck çerçevesinin $\omega^a_b = 0$ seçilmesinin hiçbir özelliği yoktur. Sadece uygun bir relativistik gravitasyon teorisinde, "eylemsiz" ve "eylemsiz-olmayan" çerçevelerin farklılığından bahsedilebilir. Bu ise, belki, Noether yüklerinin fiziksel gözlenebilirlerle örtüştüğü "eylemsiz çerçevelerin" kurulması ile mümkün olabilir, öyle ki korunan yüklerin tanımı geometrideki bağlantı nesnesi ile hassas bir şekilde ilişkilidir (T. S. Koivisto 2022; J. B. Jimenez ve T. S. Koivisto 2022).

4.3.2 Simetrik teleparalelizm (STP)

STP kurulumu için yine ortonormal çerçeve ile başlanırsa, MTP durumundaki gibi ilerlemek mümkün olmaz. Bunun yerine, koordinat çerçevesinde başlansın ve Denk.(4.1.3) ile verilen Cartan denklemlerinde şu koşullar uygulansın $T^\alpha = 0$, $R^\alpha_\beta = 0$ ve $Q_{\alpha\beta} \neq 0$. Sonuç olarak, *simetrik teleparalel geometrinin* yapısı elde edilir. MTP' ye benzer şekilde, yukarıda verilen koşullar altında analitik olarak bağlantı katsayıları ω^α_β çözülemez. Genel strateji, metrik ve bağlantı için bağımsız önermelerde bulunarak, bu önermelerin yukarıdaki koşulları sağlayıp sağlamadığının kontrol edilmesidir. Bu yöntemin yerine, alternatif bir yöntem olarak, uygun bir koordinat sistemi seçilir ve aşağıdaki gibi bir ayar sabitlemesi yapılır

$$\omega^\alpha_\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}dg_{\alpha\beta} \neq 0, \quad T^\alpha = 0, \quad R^\alpha_\beta = 0 \quad (4.3.6)$$

Bu seçim *doğal ayar seçimi* veya *tesadüfi ayar seçimi* olarak adlandırılır literatürde (Adak 2006; J. B. Jimenez, Heisenberg ve T. Koivisto 2018).

Şimdi, bu prosedür tersten takip edilsin. Teleparalelizm koşulu $R^a_b = 0$, şu bağlantı nesnesi tarafından sağlanır $\omega^a_b = h^a_\alpha dh^\alpha_b$ burada $h^a_\alpha \in GL(n, \mathbb{R})$. Eğer torsiyonun da sıfırlanması istenirse bu durumda kobazlar şu şekilde yazılmalıdır $e^a = h^a_\alpha dx^\alpha$, öyle ki bu şu anlama gelir $h^a_\alpha = h^a_\alpha(g)$. Buradan şu sonuç elde edilir $Q_{ab} = -\frac{1}{2}h^\alpha_a h^\beta_b dg_{\alpha\beta} \neq 0$. Sonuç olarak, STP geometrinin dinamik nesneleri sadece metrik ile elde edilebilirler $g \rightarrow e^a(g) \rightarrow h^a_\alpha(g) \rightarrow \omega^a_b(g) \rightarrow Q_{ab}(g)$.

4.3.3 Genel teleparalelizm (GTP)

Riemann geometrisinde bağlantı katsayılarının analitik olarak metrik bileşenleri cinsinden yazılabiliyor olmasının aksine, yukarıdaki TP durumlarda bağlantı nesnesi analitik olarak çözüleliyordu. Bu nedenle ortonormal ve koordinat çerçevelerinde ayar serbestliği kullanılarak, sırasıyla MTP ve STP geometriler kurulabildi. Şimdi ise, karma çerçevede başlansın ve Denk.(4.1.1) ile verilen Cartan denklemlerinde şu koşullar uygulansın $Q_{AB} \neq 0$, $T^A \neq 0$, $R^A_B = 0$. Yine, önceki durumlarda olduğu gibi, bağlantı katsayıları ω^A_B analitik olarak çözülemezler. Genel metod, yine, metrik ve bağlantı için bağımsız önermelerin yapılıp, bu önermelerin yukarıdaki koşulları sağlayıp sağlamadığının kontrol edilmesidir. Bunun yerine, alternatif bir yöntem olarak, karma çerçevede ayar serbestliği kullanılarak bağlantı katsayıları için aşağıda verilen seçim yapılır

$$\omega^A_B = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{AB} = -\frac{1}{2}dg_{AB} \neq 0, \quad T^A = de^A \neq 0, \quad R^A_B = 0 \quad (4.3.7)$$

Bunun ardından, Denk.(D.0.10) kullanılarak ilgili nesnelerin ortonormal çerçevedeki karşılıkları elde edilir. Teleparalelizm koşulu için şu bağlantı kullanılır $\omega^a_b = h^a_A dh^A_b$ burada $h^a_A \in GL(n, \mathbb{R})$. Kobazlar $e^a = h^a_A e^A$ arasındaki ilişki, h^a_A nesnesinin metrik tarafından belirlenebilmesine imkan verir, $h^a_A = h^a_A(g)$. Özetle, $e^a(g)$ ve $h^a_A(g)$ (ve $h^A_a(g)$) belirlendikten sonra, tam bağlantı $\omega^a_b = h^a_A dh^A_b$, nonmetrisiti $Q_{ab} = \frac{1}{2}(\omega_{ab} + \omega_{ba})$, ve torsiyon $T^a = de^a + \omega^a_b \wedge e^b$, hesaplanır. Sonuç olarak, GTP geometrinin dinamik nesneleri sadece metrik ile elde edilmiş olur $g \rightarrow e^a(g) \rightarrow h^a_A(g) \rightarrow \omega^a_b(g) \rightarrow Q_{ab}(g)$ and $T^a(g)$.

Burada şu seçim yapılmış olsaydı $h^A_\alpha(x) = \delta^A_\alpha$, karma çerçeveden koordinat çerçevesine geçilmiş ve GTP geometri, STP geometriye indirgenmiş olurdu. Diğer taraftan, $h^A_a(x) = \delta^A_a$ seçimi ise karma çerçeveden ortonormal çerçeveye geçişi temsil eder ve bu durumda da GTP geometri, MTP geometriye indirgenir.

4.4 Çeşitli Riemann-dışı etkilerden örnekler

Bu bölümde, Riemann-dışı geometrilerde çalıştığımızda karşılaşılabilecek bazı etkilerden bahsedilecektir, örnek olarak. Açıkça tahmin edilebileceği gibi, bu kurulumlarda çalışırken Riemann manifoldlarında görülmeyen bazı sonuçlar ortaya çıkabilir. Bundan dolayı da, bu alternatif geometrik kurulumlar üzerine inşa edilen gravitasyon teorilerinin de Genel Görelilik (GG)' ten farklı dinamikler ve özellikler içermesi pekala olasıdır. Bölüm 5 altında çeşitli Riemann-dışı gravitasyon teorileri incelenmiştir. Tezin bu kısmında ise, herhangi bir gravitasyon modeline atıfta bulunmadan, pür geometrik zeminde kalarak bazı Riemann-dışı etkiler inceleneyecektir. Bölüm 4.4.1 altında *jeodeziklerin* ve *otoparalel eğrilerin* STP bir geometride nasıl formlara sahip oldukları ve birbirlerinden nasıl farklılaştığı araştırılmıştır, öyle ki bu iki nosyon Riemann geometrisinde aynı eğri ailesini ifade etmektedir. Daha sonra, Bölüm 4.4.2 altında, Riemann-dışı bir etki olan, *ikincil saat etkisi* (*second clock effect, SCE*) derinlemesine incelenmiştir, öyle ki bu etki de yine STP geometri kapsamında araştırılmıştır. Bahsi geçen bu bölümler sırasıyla (Pala ve Adak 2022) ve (Pala, Sert ve Adak 2023) yayınları ile ilintilidir.

4.4.1 Test parçacıkların yörüngesi

Isaac Newton' dan bu yana yerçekimi teorilerinin iki ana bileşeni olmuştur; alan denklemleri ve yörünge denklemleri. Alan denklemleri bir kaynağın dinamiklerini tanımlamak için kullanılırken, yörünge denklemleri ise spinsiz kütleli noktasal test parçacıkların takip ettiği yolu belirlemek içindir. Bunlar, Newton' un yerçekimi

teorisi için sırasıyla şu şekilde yazılırlar

$$\nabla^2 \phi = -4\pi G \rho \quad (4.4.1)$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \vec{\nabla} \phi = 0 \quad (4.4.2)$$

burada G Newton'ın gravitasyon sabiti, $\vec{r}$ test parçacığının 3-boyutlu Öklid geometrisindeki konum vektörü, t Öklid geometrisindeki zaman parametresi, ρ kütle kaynağının hacim yoğunluğu, $\vec{\nabla}$ 3-boyutlu Öklid uzayındaki gradyen operatörü ve ϕ kaynaktan $\vec{r}$ kadar uzaklıktaki gravitasyon alanıdır. Diğer taraftan, Einstein'ın GG' si kapsamında, uzayzaman eğriliğinin madde üzerine etkisi gravitasyon kuvveti olarak yorumlanır ve kütleli noktasal test parçacıkların uzayzaman geçmişinin, zamansal jeodezi eğrileri ile kesiştiği varsayılır, öyle ki bu jeodeziler uzayzaman metriği ile bağlantılıdır. Dolayısıyla maddenin uzayzaman-daki hareketi metrik tarafından belirlenir.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 4\pi G T_{\mu\nu} \quad (4.4.3)$$

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \tilde{\omega}^\mu{}_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \quad (4.4.4)$$

burada $g_{\mu\nu}$ (1+3)-boyutlu Riemannsal-benzeri³ uzayzamanda metrik tensörünün bileşenleridir, $R_{\mu\nu}$ Ricci eğrilik tensörünün bileşenleridir, R eğrilik skaleridir, $T_{\mu\nu}$ lineer momentum (enerji-momentum) tensörünün bileşenleridir, τ afin parametredir (pratikte öz-zaman olarak alınır), x^μ uzayzamanda seçilen bir koordinat sistemidir, $\tilde{\omega}^\mu{}_{\nu\lambda}$ Levi-Civita bağlantı katsayılarıdır (Christoffel sembolleri). Yukarıdaki ilk eşitlik Einstein alan denklemleri ve ikinci eşitlik de Riemannsal-benzeri uzayzamandaki jeodezi denklemi olarak bilinir.

Bu açıklamalar bir süre gözlemlerle uyum içinde süregeldi. Ancak, yine de, Einstein'ın gravitasyon teorisinin ötesine geçmek için birçok sebep vardır, öyle ki karanlık madde ve karanlık enerji gibi gözlemsel çalışmalardan kaynaklı fenomenler olduğu gibi gravitasyonun kuantumlanmasına dair şimdiye kadar yetersiz kalan çabalar da teorik açıdan güçlü bir sebep teşkil eder, (Hehl, McCrea, ve diğ. 1995), (Adak 2010). GG ve geometri arasındaki sıkı ilişki, alternatif gravitasyon modelleri araştırmalarında, GG' nin geometrik altyapısını yeniden gözden geçirmeyi gayet doğal bir seçenek olarak karşımıza çıkarır. Bu durumda, Riemann-dışı geometrilerde kurulan alternatif gravitasyon teorilerinde, klasik olarak otoparalel eğriler üzerine inşa edilen jeodezi hipotezinin modifiye edilmesi gerekebilir. Özetle, Denk.(4.4.4) ile verilen jeodezi denklemi, aşağıdaki otoparalel eğri den-

³pseudo-Riemannsal.

klemi ile değiştirilmelidir

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \omega^\mu{}_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \quad (4.4.5)$$

burada $\omega^\mu{}_{\nu\lambda}$ Riemann-dışı bağlantı katsayılarıdır, öyle ki en genelde Levi-Civita'nın yanında torsiyon ve/veya nonmetrisiti kaynaklı parçalar da içerebilir. Örneğin, (Dereli ve Tucker 2002) ile verilen çalışmada, araştırmacılar Riemann-Cartan uzay-zamanında yazılan Brans-Dicke gravitasyon modelinde Levi-Civita bağlantısının otoparalelleri üzerine kurulan jeodezi hipotezini incelemişler ve şunu ortaya koymuşlardır : Eğer Brans-Dicke skaler alanı madde ile anlamlı biçimde çiftlenirse ve test parçacıklarının bu yeni kurulumun dünya-çizgilerini takip ettiği varsayılırsa, geleneksel jeodezi hioptezi üzerine kurulu olan ve yaygın olarak kabul edilen metotların gözden geçirilmesi gerekebilir. Bu sonuçlar daha sonra geliştirilmiştir (Cebeci, Dereli ve Tucker 2004), öyle ki kendi eksenini etrafında dönen (klasik spinli) gravitasyon kaynağının oluşturduğu geometrilerdeki metrik uyumlu farklı bağlantılar tarafından belirlenen otoparalel eğriler karşılaştırılmıştır. Son çalışmaların birinde ise (Y. Obukhov ve Puetzfeld 2021), alternatif kütleçekim teorilerindeki otoparaleller yeniden ele alınmıştır. Bu çalışmada araştırmacılar, otoparalel eğrileri Riemann-dışı kapsamda açıkça hesaplamışlar ve aynı zamanda bu eğrilerin alternatif gravitasyon teorilerinde test parçacıklar için temel hareket denklemi olup olmadığını tartışmışlardır.

Bir gravitasyon kaynağının varlığında, spinsiz test parçacıklarının jeodezileri mi (torsiyon ve nonmetrisitinin olmadığı durumlarda) yoksa otoparalelleri mi (torsiyon ve nonmetrisitinin olduğu durumlarda) takip edeceği konusunda literatürde henüz bir uzlaşma görünmemektedir. Sadece deneysel ve gözlemsel çalışmalar, parçacıkların metrik jeodezilere mi yoksa tam afin bağlantı nesnesinin otoparalelleri mi uygun hareket edeceğini belirleyecektir, kanımızca. Bununla birlikte, bunlardan hangisinin daha uygun ve doğal olacağına dair teorik bakış açısıyla incelemeler de pekala yapılabilir. Bu bağlamda, (B. J. Jimenez ve Delhom 2020) ile verilen çalışmada ifade edilmiştir ki, metrik jeodezik yörüngeler, fizik ile ilgili mevcut anlayışımıza daha uygun seçenekler olarak görünmektedir.

Riemann-dışı alternatif gravitasyon çalışmaları bağlamında, dinamik nesne olarak sadece nonmetrisitinin var olduğu (torsiyon ve tam eğrilik nesnelerinin sıfırlandığı) simetrik teleparalel gravitasyon (STPG) modelleri incelenmiştir (Adak ve Sert 2005), (Adak 2018), bu çalışmalara öncülük eden (Nester ve Yo 1999). Bu araştırmalar ilgili alanlardaki bilim topluluğunun kayda değer ölçüde ilgisini çekmiştir (Mol 2017), (Hohmann 2021). Verilen tüm bu yeni kütleçekim araştırmaları Lagrangiyen formalizmi ile yapılmıştır. Bu kapsamda alan denklemleri varyasyon

hesapları ile elde edilmiştir. Ardından da, bu alan denklemlerine birtakım çözümler bulunmuş ve bunlar analiz edilmiştir. Ancak, görüldüğü kadarıyla, STPG kapsamında test parçacıklarının yörüngesine dair bir tartışma yapılmamıştır. Bu motivasyonla, tezin bu bölümünde verilen çalışma gerçekleştirilmiştir. Son çalışmaların birinde (J. Z. Yang ve diğ. 2021), araştırmacılar jeodezi sapma denklemini incelemişlerdir, öyle ki bu denklem bir arada olan test parçacıkların görece ivmelenmelerini ifade eder. Bununla birlikte aynı çalışmada, Weyl-tipi $f(Q, T)$ gravitasyon modelindeki deformasyonlar ile ilişkili olan dinamik nesnelerin nasıl evrildiği de incelenmiştir, öyle ki burada nonmetrisiti Q tamamen Weyl vektörü ile belirlenmiş ve standart Weyl formunda verilmişken, T madde enerji-momentum tensörünün izini ifade eder.

Otoparaleller

Riemann geometrisinde, otoparalel eğriye $x^\mu(\tau)$ teğet olan $\mathcal{T}^\mu$ teğet vektörünün, paralel taşınma boyunca aynı "yönü" göstermesi ve boyunu (normunu) koruması istenir (Wald 1984)

$$D\mathcal{T}^\mu = 0 \quad (4.4.6)$$

Öte yandan, otoparalel eğriler sezgisel olarak "mümkün olan en doğru eğri" olarak sayılabilecekleri için, STP geometri kapsamında vektörlerin paralel taşınma esnasında boylarını korumasına dair koşul dışlanabilir. Bilindiği üzere nonmetrisiti, paralel taşınma esnasındaki boylar ve açılar ile ilişkilidir. Buna göre, aşağıda verildiği gibi, klasik tanımından farklı olarak yeni bir paralel taşıma kuralı verelim

$$D\mathcal{T}^\mu = (aQ^\mu{}_\nu + bq^\mu{}_\nu)\mathcal{T}^\nu + cQ\mathcal{T}^\mu \quad (4.4.7)$$

burada $\mathcal{T}^\mu = dx^\mu(\tau)/d\tau$ vektörü $x^\mu(\tau)$ eğrisine teğettir ve bu eğri τ afin parametresi ile parametrize edilmiştir, $Q^\mu{}_\nu$ nonmetrisiti 1-form⁴, $Q = Q^\mu{}_\mu$ Weyl 1-form, $q^\mu{}_\nu$ Denk.(4.1.9) ile verilen ve nonmetrisiti içeren terim ve a, b, c rastgele sabitlerdir. Bu yeni paralel taşıma reçetesi, bu çalışma ile sunulan bir yenilik olarak söylenebilir. Tesadüfi ayar seçimi uygulanır $\omega^\alpha{}_\beta = 0$, ve şu elde edilir $D\mathcal{T}^\mu = d\mathcal{T}^\mu = (\partial_\alpha \mathcal{T}^\mu)dx^\alpha$. Devamında, tüm 1-formlar bileşenleri cinsinden şu şekilde yazılır $Q^\mu{}_\nu = Q^\mu{}_{\nu\alpha}dx^\alpha$, $q^\mu{}_\nu = q^\mu{}_{\nu\alpha}dx^\alpha$ ve $Q = Q^\nu{}_{\nu\alpha}dx^\alpha$. Buna göre Denk.(4.4.7) ile verilen ifade şuna dönüşür

$$\partial_\alpha \mathcal{T}^\mu = (aQ^\mu{}_{\nu\alpha} + bq^\mu{}_{\nu\alpha})\mathcal{T}^\nu + cQ^\nu{}_{\nu\alpha}\mathcal{T}^\mu \quad (4.4.8)$$

⁴Doküman boyunca tensör ifadelerin bileşenleri ile tensörün kendisi birbirlerine yerine kullanılabilir, aksi belirtilmedikçe. Ör. nonmetrisiti 1-form bileşenleri $\equiv$ nonmetrisiti 1-form.

Elde edilen bu ifade $\mathcal{T}^\alpha$ ile çarpılır ve şu tanımlamalar yapılır : $\mathcal{T}^\alpha \partial_\alpha := \frac{d}{d\tau}$ ve $\mathcal{T}^\mu = dx^\mu/d\tau$. Ardından aşağıdaki ifadeye erişilir

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = (aQ^\mu{}_{\nu\alpha} + bq^\mu{}_{\nu\alpha}) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} + cQ^\nu{}_{\nu\alpha} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \quad (4.4.9)$$

Burada tesadüfi ayar seçiminin sonucu olarak, $Q_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}dg_{\alpha\beta}$ kullanılır ve şunlar elde edilir : $Q^\mu{}_{\nu\alpha} = -\frac{1}{2}g^{\mu\beta}(\partial_\alpha g_{\beta\nu})$ ve ilişkili olarak $q^\mu{}_{\nu\alpha} = -\frac{1}{2}g^{\mu\beta}(\partial_\nu g_{\alpha\beta} - \partial_\beta g_{\alpha\nu})$. Sonuçta, otoparalel eğri denklemi metrik cinsinden aşağıdaki gibi verilebilir

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = g^{\mu\beta} \left[-\frac{a+b}{4}(\partial_\alpha g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\alpha}) + \frac{b}{2}(\partial_\beta g_{\alpha\nu}) \right] \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} - \frac{c}{2}g^{\nu\beta}(\partial_\alpha g_{\beta\nu}) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \quad (4.4.10)$$

burada köşeli parantez içindeki ilk terim simetrize edilmiştir, $(\nu\alpha) = \frac{1}{2}(\nu\alpha + \alpha\nu)$. Gözlenebileceği gibi eğer şu seçim yapılırsa $a = b = 1$ ve $c = 0$, o zaman yukarıdaki denklem Riemann geometrisindeki otoparalel eğri denklemi ile örtüşür.

Jeodeziler

Sezgisel olarak jeodezi, "mümkün olan en kısa eğridir". İki nokta arasındaki sonsuz küçük mesafe metrik yardımıyla şu şekilde hesaplanabilir

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (4.4.11)$$

Koordinat eğrileri $x^\mu = x^\mu(\tau)$ şeklinde parametrize edilirse aşağıdaki ifade yazılabilir (metrik imzası şöyle seçilsin $(-, +, +, +)$)

$$s = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)^{1/2} d\tau \quad (4.4.12)$$

burada terimler üzerindeki nokta işareti, afin parametreye τ göre türevin alındığını ifade eder. Yukarıda ifade kullanılarak, verilen sınırlar arasındaki integrali ekstremize etmek mümkündür, varyasyon hesabı ile. Lagrangiyen ifadesi $L = [-g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu]^{1/2}$ olarak alınsın. Aşağıda verilen Euler-Lagrange denklemleri uygulanırsa

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (4.4.13)$$

şu sonuç elde edilir

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} = -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\alpha g_{\mu\nu}) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{\dot{x}^\beta}{2(g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)} \frac{d(g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)}{d\tau} \quad (4.4.14)$$

Burada, eşitliğin sağ tarafındaki son terime dikkat çekelim. Bu terim, nonmetrisinin varlığında, en genelde, vektörün boyunun aynı kalmak zorunda olmaması

sebebiyle belirmiştir. Bu terimi biraz daha analiz edelim. Öncelikle şu şekilde yazılsın $g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = g_{\mu\nu}\mathcal{T}^\mu\mathcal{T}^\nu = \mathcal{T}_\mu\mathcal{T}^\mu$. Buna göre,

$$\begin{aligned} d(\mathcal{T}_\mu\mathcal{T}^\mu) &= (Dg_{\mu\nu})\mathcal{T}^\mu\mathcal{T}^\nu + 2g_{\mu\nu}\mathcal{T}^\mu(D\mathcal{T}^\nu) \\ &= -2Q_{\mu\nu}\mathcal{T}^\mu\mathcal{T}^\nu + 2g_{\mu\nu}\mathcal{T}^\mu(D\mathcal{T}^\nu) \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

Burada Denk.(4.4.7) kullanılırsa şu sonuç elde edilir

$$d(\mathcal{T}_\mu\mathcal{T}^\mu) = 2(a-1)Q_{\mu\nu}\mathcal{T}^\mu\mathcal{T}^\nu + 2cQ\mathcal{T}_\mu\mathcal{T}^\mu \quad (4.4.16)$$

Bu sonuca göre, Denk.(4.4.14) ile verilen STP geometrisindeki jeodezi denklemi, $a = 1$ ve $c = 0$ seçimleri altında Riemann geometrisindeki jeodezi denklemi ile kesişmektedir.

Sonuç olarak, Denk.(4.4.10) ve Denk.(4.4.14) ile STP geometri kapsamında verilen, sırasıyla, otoparalel ve jeodezi ifadeleri en genelde birbirlerinden farklıdır. Bu sonuç, Riemann-dışı geometrilerde beklenen bir durumdur. Ancak Riemann geometrisinde bu iki ifade birbirleriyle kesişir. Yukarıda da belirtildiği üzere, $a = b = 1$, $c = 0$ seçimleri ile Riemann geometrisi koşulu sağlanmış olur ve böylece Denk.(4.4.10) ve Denk.(4.4.14) ile verilen otoparalel ve jeodezi eğrileri kesişir.

Uygulama : Durağan, eksenel simetrik metrik altında test parçacıklarının yörünge ve hız tayini

Test parçacıklarının yörüngesi üzerine bir uygulama olması adına eksenel simetrik bir metrik altında Denk.(4.4.10) ile verilen otoparalel denklemini açıkça hesaplayalım. Bunu yaparken, disk tipi galaksilerin dış yörüngelerindeki hız eğrilerinde gözlenen ve karanlık madde ile tanımlanan problem üzerine de yorumlar yapmaya çalışacağız, öyle ki seçeceğimiz modelin bu hız eğrilerine dair ampirik verilerle uyumlu olup olmadığını araştıracağız. Öncelikle aşağıdaki gibi durağan, eksenel simetrik bir metrik önermesi ile başlayalım

$$g = - \left(1 + \frac{\mathcal{H}m}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{\mathcal{F}m}{r}\right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + \frac{2\mathcal{G}m\ell}{r} \sin^2 \theta dt d\phi \quad (4.4.17)$$

burada m ve $J := m\ell$, sırasıyla, gravitasyon kaynağının kütlesi ve yörüngesel açısal momentumu, $\mathcal{H}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ boyutsuz sabitlerdir. Hızlıca not edelim : Özel olarak GG bağlamında Kerr metriği $\mathcal{H} = -\mathcal{F} = \mathcal{G} = -2$ seçimi ile verilebilir. Bu metrik altında Denk.(4.4.10) denkleminin bileşenleri açık olarak aşağıdaki gibi verilebilir

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta}{d\tau^2} = & \left\{ -\frac{a+b+2c}{r} + \frac{c(\mathcal{H} + \mathcal{F})m}{2r^2} \right\} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} + \frac{2b\mathcal{G}m\ell \sin\theta \cos\theta}{r^3} \frac{dt}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} \\ & + b \sin\theta \cos\theta \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} - c \cot\theta \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} \end{aligned} \quad (4.4.18a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2t}{d\tau^2} = & \left\{ -\frac{2c}{r} + \frac{m[(a+b)\mathcal{H} + c(\mathcal{H} + \mathcal{F})]}{2r^2} \right\} \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} - c \cot\theta \frac{dt}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} \\ & - (a+b) \frac{3\mathcal{G}m\ell \sin^2\theta}{2r^2} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} \end{aligned} \quad (4.4.18b)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{d\tau^2} = & \frac{(a+b)\mathcal{G}m\ell}{2r^4} \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} - \frac{(a+b)\mathcal{G}m\ell \cot\theta}{r^3} \frac{dt}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} \\ & + \left\{ -\frac{a+b+2c}{r} + \frac{c(\mathcal{H} + \mathcal{F})m}{2r^2} \right\} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} - (a+b+c) \cot\theta \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} \end{aligned} \quad (4.4.18c)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{d\tau^2} = & \frac{b\mathcal{H}m}{2r^2} \frac{dt}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} + \left\{ -\frac{2c}{r} + \frac{m[c\mathcal{H} + (a+c)\mathcal{F}]}{2r^2} \right\} \frac{dr}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} - c \cot\theta \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} \\ & - b(m\mathcal{F} - r) \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} - b \sin^2\theta (\mathcal{F}m - r) \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} - \frac{b\mathcal{G}m\ell \sin^2\theta}{r^2} \frac{dt}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} \end{aligned} \quad (4.4.18d)$$

burada $\mu = t, r, \theta, \phi$ koordinat fonksiyonları için $x^t := t$, $x^r := r$, $x^\theta := \theta$, $x^\phi := \phi$ gösterimleri kullanıldı. Bu noktada, genelliği kaybetmeden, ekvator düzleminde hareket eden bir test parçacığı varsayıldı. Bu koşul $\theta = \pi/2$ seçimi ile ifade edilir ve $d\theta/d\tau = 0$ sonucunu verir. Elde edilen bu sonuç yukarıdaki Denk.(4.4.18) ifadelerinde kullanılırsa aşağıdaki denklemlere ulaşılır

$$0 = \frac{d^2t}{d\tau^2} + \left\{ \frac{2c}{r} - \frac{m[(a+b)\mathcal{H} + c(\mathcal{H} + \mathcal{F})]}{2r^2} \right\} \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} + \frac{3(a+b)\mathcal{G}m\ell}{2r^2} \frac{d\phi}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} \quad (4.4.19a)$$

$$0 = \frac{d^2\phi}{d\tau^2} - \frac{(a+b)\mathcal{G}m\ell}{2r^4} \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} + \left\{ \frac{a+b+2c}{r} - \frac{c(\mathcal{H} + \mathcal{F})m}{2r^2} \right\} \frac{d\phi}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} \quad (4.4.19b)$$

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{d^2r}{d\tau^2} - \frac{b\mathcal{H}m}{2r^2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + \left\{ \frac{2c}{r} - \frac{m[c\mathcal{H} + (a+c)\mathcal{F}]}{2r^2} \right\} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 \\ & + b(\mathcal{F}m - r) \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 + \frac{b\mathcal{G}m\ell}{r^2} \frac{dt}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} \end{aligned} \quad (4.4.19c)$$

Bu ifadeler en genelde rotasyon içerir. Yine genelliği kaybetmeden, basitlik olması adına $\ell = 0$ seçimi ile rotasyonun ihmal edildiği statik bir durumu inceleyelim.

Bu koşul altında Denk.(4.4.19) ifadeleri aşağıdaki biçimi alır

$$0 = \frac{d^2 t}{d\tau^2} + \left\{ \frac{2c}{r} - \frac{m[(a+b)\mathcal{H} + c(\mathcal{H} + \mathcal{F})]}{2r^2} \right\} \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} \quad (4.4.20a)$$

$$0 = \frac{d^2 \phi}{d\tau^2} + \left\{ \frac{a+b+2c}{r} - \frac{c(\mathcal{H} + \mathcal{F})m}{2r^2} \right\} \frac{d\phi}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} \quad (4.4.20b)$$

$$0 = \frac{d^2 r}{d\tau^2} + \left\{ \frac{2c}{r} - \frac{m[c\mathcal{H} + (a+c)\mathcal{F}]}{2r^2} \right\} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{b\mathcal{H}m}{2r^2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + b(\mathcal{F}m - r) \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \quad (4.4.20c)$$

Burada Denk.(4.4.20a) ve Denk.(4.4.20b) ifadeleri kullanılarak, lineer (enerji) ve açısal momentum korunumlarına karşılık gelen, E_0 ve L_0 , iki adet hareket sabiti tanımlanabilir

$$\frac{dt}{d\tau} \simeq \frac{E_0}{r^{2c}} \left\{ 1 - \frac{m[(a+b)\mathcal{H} + c(\mathcal{H} + \mathcal{F})]}{2r} \right\} \quad (4.4.21a)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} \simeq \frac{L_0}{r^{a+b+2c}} \left\{ 1 - \frac{mc(\mathcal{H} + \mathcal{F})}{2r} \right\} \quad (4.4.21b)$$

Yukarıdaki sonucun elde edilmesi sırasında birinci derece formalizm kullanılmıştır, yani sadece birinci derece terimler tutulmuştur. Korunum sabitlerini içeren bu sonuçlar Denk.(4.4.20c) ifadesinde yerine yazılırsa, radyal eşitlik için aşağıda verilen birinci derece diferansiyel denklem elde edilir

$$r^{4c} \left(1 + \frac{m[c\mathcal{H} + (a+c)\mathcal{F}]}{r} \right) \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \frac{bm\mathcal{H}E_0^2}{r} + \frac{2bL_0^2}{r^{2(a+b)-2}} \left\{ \frac{(1-a)m\mathcal{F}}{[1-2(a+b)]r} - \frac{1}{2(1-a-b)} \right\} - E_0^2 + \varepsilon = 0 \quad (4.4.22)$$

burada ε integral sabitidir. GG' nin lineer Schwarzschild limiti altında, $\varepsilon = 1$ koşulu kütleli nesneler için zamansal jeodezilere, $\varepsilon = 0$ koşulu ise kütsüz nesneler (ör. foton) için ışımsal jeodezilere karşılık gelir.

Şimdi ise, karanlık madde problemi hakkında yukarıda verilen Riemann-dışı modelin öngörülleri hakkında fikir edinmek adına, gravitasyon kaynağından r kadar uzaklıkta yörüngede hareket eden bir nesne için hız ifadesini hesaplayalım. Bunun için Denk.(4.4.21b) ve Denk.(4.4.22) ifadeleri kullanılırsa

$$v^2 = (dr/d\tau)^2 + r^2(d\phi/d\tau)^2 \quad (4.4.23a)$$

$$= \frac{E_0^2 - \varepsilon}{r^{4c}} - \frac{m\{bE_0^2\mathcal{H} + (E_0^2 - \varepsilon)[c\mathcal{H} + (a+c)\mathcal{F}]\}}{r^{4c+1}} + \frac{(a-1)L_0^2}{r^{2(a+b+2c)-2}} - \frac{mL_0^2}{r^{2(a+b+2c)-1}} \left\{ c(\mathcal{F} + \mathcal{H}) + \frac{2b(1-a)\mathcal{F}}{1-2a-2b} + \frac{b[c\mathcal{H} + (a+c)\mathcal{F}]}{1-a-b} \right\} \quad (4.4.23b)$$

Burada açıkça görüldüğü üzere, serbest parametrelerin uygun seçimi altında, test nesnesinin gravitasyon kaynağına olan uzaklığı arttıkça yörünge hızının belirli

bir değere yakınsadığı söylenebilir! Bu, gözlemsel verilerle uyumlu bir sonuca benzemektedir. Örneğin, (i) $c = 0$ ve $a + b \geq 1$ seçimi altında, $r \rightarrow \infty$ için, $v \rightarrow \sqrt{E_0^2 - \varepsilon}$ değerine, (ii) $c > 0$ ve $a + b + 2c = 1$ seçimi altında, $\lim_{r \rightarrow \infty} v \rightarrow L_0 \sqrt{(a-1)/(a+b-1)}$ değerine yakınsamaktadır.

Karanlık madde hakkında yukarıda verilen analizin yanında, şimdi ise, modelin yörünge denklemi için nasıl bir sonuç vereceğini araştıralım. Denk.(4.4.22) ifadesinde $dr/d\tau = (d\phi/d\tau)(dr/d\phi)$ yazılıp burada Denk.(4.4.21b) ifadesi kullanılır ve klasik analizdeki notasyona benzerlik için $r = 1/u$ değişken dönüşümü yapılırsa aşağıdaki ifadeye ulaşılır

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\phi^2} + \frac{b}{a+b-1}u = & \frac{[2 - (a+b)](E_0^2 - \varepsilon)}{L_0^2} u^{3-2(a+b)} + \frac{3b(3a+2b-2)m\mathcal{F}}{2[1-3(a+b)+2(a+b)^2]} u^2 \\ & - \frac{m[5-2(a+b)][b\mathcal{H}E_0^2 + a\mathcal{F}(E_0^2 - \varepsilon)]}{2L_0^2} u^{4-2(a+b)} \end{aligned} \quad (4.4.24)$$

Bu ifade STP geometri altında verilen model için yörünge denklemdir ve açıkça Riemann-dışı katkılar görünmektedir. GG bağlamında ve Schwarzschild limitindeki yörünge denklemine ulaşmak için tekrar $a = b = 1$, $\mathcal{H} = -\mathcal{F} = -2$ seçimi kullanılırsa şu ifade elde edilir

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{\varepsilon m}{L_0^2} + 3mu^2 \quad (4.4.25)$$

Bu ifade tam olarak, GG bağlamında ve Schwarzschild metriği altında, $\varepsilon = 1$ koşulu ile kütleli nesnelerin (ör. gezegenlerin) ve $\varepsilon = 0$ ile de kütsüz nesnelerin (ör. fotonun) yörünge denklemiyle kesişmektedir. Elbette serbest parametrelerin farklı konfigürasyonları ile farklı yörünge denklemleri elde edilebilir. Bununla beraber, yukarıdaki sonuçtan gözlediğimiz kadarıyla, Newton limitinin empoze edilmesi durumunda (öyle ki güneş sistemi ölçeğinde gözlemlerle uyumlu olması adına), serbest parametrelerin tüm seçimleri benzer formda yörünge denklemleri vermektedir. Buna göre, sadece şu iki seçim yapılabilir : (i) $a + b = 2$ ve (ii) $a + b = 3/2$. Bunun yanında son bir yorum olarak şunu da not edelim : Galaktik hız analizinde yer alan c parametresi, yukarıda görüldüğü üzere yörünge denklemi ifadesinde otomatik olarak ortadan kalkmıştır.

Son sözler

GG' de yaygın olarak kabul edildiği üzere, kütleli spinsiz test parçacıklarının uzayzaman geçmişi, metrik ile verilen zamansal jeodezi (otoparalel) eğriler ile kesişir. Öte yandan, Riemann-dışı geometrilerde, torsiyon ve/veya nonmetrisiti içeren, jeodezi veya otoparalel eğrilerden hangisinin spinsiz test parçacıkları için doğru dünya-çizgilerini oluşturduğu konusunda bir uzlaşma yoktur. Einstein' ın,

Riemannsal-benzeri gravitasyon kurulumunda, afin parametre τ fiziksel açıdan öz-zaman olarak alınır, öyle ki bu parametre zamansal $x^\mu(\tau)$ eğrisi boyunca standart bir saat ile değişmeden ölçülebilir. $x^\mu(\tau)$ eğrisi ile birbirlerine bağlanan iki olay arasındaki öz-zaman ölçümünün yola bağımlılığı göz önüne alındığında, Einsteinsal bir saat yörüngeden bağımsız olarak öz-zamanın yeniden parametrize edilebilmesine olanak tanır. Öte yandan, nonmetrisiti içeren Riemann-dışı bir geometride öz-zaman ölçümü için kullanılacak olan saatin belirlenmesinde daha hassas olunması gerekir. Bu bağlamda, (Quiros 2022) ile verilen çalışmada, STPG teorileri fenomolojik olarak evrenin geçerli bir tanımını veremeyebileceği tartışılmıştır, öyle ki bu geometrilerde var olabilen *ikincil saat etkisi (SCE)* olarak adlandırılan bir etki sebebiyle. Bunun yanında, (Teyssandier ve Tucker 1996), (Teyssandier, Tucker ve Wang 1998) çalışmalarında, Riemann-dışı geometrilerdeki standart saatler incelenmiş ve afin parametreyi ölçebilen yeni bir standart saat tanımı yapılabileceği tartışılmıştır, öyle ki ayar dönüşümleri altında teorinin eylemindeki ve tam bağlantıdaki değişmezlik kullanılarak. Ek olarak, (J. B. Jimenez, Heisenberg ve T. Koivisto 2020) çalışmasındaki Lemma 2 ile gösterilmiştir ki, STP uzayzamanlarda SCE gözlenmez. Ayrıca, (Delhom, Lobo, ve diğ. 2020) çalışmasında araştırmacılar göstermiştir ki, Weyl-değişmez uzayzamanlardaki öz-zaman tanımı, nonmetrisiti içeren daha genel uzayzamanlara doğal olarak genellenebilir.

Bu bölümde, kütleli spinsiz test parçacıkların yörünge hareketi, STP arka-planında ve tesadüfi ayar seçimi altında incelenmiştir, öyle ki bunların dünya-çizgilerinin otoparalel veya jeodezi eğrileri olup olmadığı tartışılmıştır. Yeni bir paralel taşıma kuralı ile Denk.(4.4.7), paralel taşıma sırasında teğet vektörün boyunun değişmeyeceğine dair klasik kabul modifiye edilmiştir. Ardından koordinat haritasında $\{x^\mu\}$, açıkça otoparalel ve jeodezi denklemleri türetilmiştir. Finalde, bazı özel seçimler altında her iki eğrinin de Riemann geometrisindeki jeodezi (otoparalel) eğriler ile kesiştiği gözlenmiştir. Sonuç olarak söylenebilir ki, Riemann-dışı geometrilerde hangi eğrinin spinsiz test parçacıkları için geçerli olduğu, yeni nesil deneysel ve gözlemsel çalışmalar neticesinde ilerleyen zamanlarda belirlenebilir (Belenchia ve al. 2022).

4.4.2 STP geometride *ikincil saat etkisi (SCE)*

GG' de başlangıçta senkron haldeki saatlerin, uzayın farklı yollarında ilerlemeleri esnasında senkronizasyonlarını yitirebilecekleri bilinir. Bu *birincil saat etkisi* olarak adlandırılır.⁵ Öte yandan, nonmetrisiti içeren Riemann-dışı bir geometride

⁵Bu saatler, farklı yolları takip ettikten sonra tekrar uzayın aynı noktasına geldiklerinde, başlangıçtaki senkronizasyonlarının korunduğu gözlenir. Senkronizasyondaki farklılık, yollarda

öz-zaman ölçümü için kullanılacak saatlerin seçiminde daha dikkatli olunması gerektiği, Hermann Weyl' in etkileyici çalışmalarından bu yana (Weyl 1918),(Weyl 1919) bilim topluluğunun dikkatindedir, öyle ki bu çalışmalarda Weyl gravitasyon ve elektromanyetizmayı birleştirmeyi amaçlamıştır. Weyl teorisinde, kovaryant türevin yarı-metrisiti koşulunu $\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = -2B_\sigma g_{\mu\nu}$ sağlamasına ihtiyaç duymuştur, burada B_σ Weyl potansiyel vektörüdür. Yayınından hemen sonra, Einstein' ın bizzat kendisi bu çalışmayı eleştirmiş ve saatlerin frekanslarının uzayzaman yörüngelerine (diğer bir deyişle geçmişlerine) bağlı olmak zorunda olduğunu iddia etmiştir, öyle ki bu durum *ikincil saat etkisi (SCE)* olarak adlandırılır. SCE şimdiye kadar hiçbir zaman gözlenmedi, bununla birlikte Weyl' in çalışması da zaman içinde etkisini yitirdi. (Lobo ve Romero 2018) çalışmasında, CERN' deki hızlandırıcılarda muonların genişletilmiş ömür verileri kullanılarak, SCE üzerine bazı kısıtlar getirilebilmiştir.

Literatürde, nonmetrisiti içeren Riemann-dışı geometrilere çalışılan birçok alternatif gravitasyon modeli vardır, ör. (I. M. Benn ve Tucker 1982), (Pala ve Adak 2022) ve bunlarda sunulan referanslar. Dolayısıyla, SCE' nin olup olmadığına dair veya nonmetrisiti olan geometrilere bu etkinin bertaraf edilemeyeceğine dair çabalar kayda değerdir ve bu konuda birçok çalışma yapılmıştır (Ehlers, Pirani ve Schild 2012), (Quiros n.d.). Araştırmacılar (Ehlers, Pirani ve Schild 2012) çalışmasında, ışık ışınları ve serbest düşüş halinde kütleli parçacıklar bağlamında öz-zaman ölçümü için kullanılabilecek standart saat hakkında çeşitli aksiyomlar ve ispatlar vermiştir. Buna paralel olarak (Perlick 1987) çalışmasında, Weyl manifoldlarda standart saatin sınıflandırılması verilmiştir, öyle ki bu sayede bir saatin standart olup olmadığının test edilebileceği deneysel bir yöntem önerilmiştir. Bunun yanında, (Teyssandier ve Tucker 1996),(Teyssandier, Tucker ve Wang 1998) çalışmalarında, Riemann-dışı geometrilere standart saatler incelenmiş ve afin parametreyi ölçebilen yeni bir standart saat tanımı yapılabileceği tartışılmıştır, öyle ki ayar dönüşümleri altında teoremin eylemindeki ve tam bağlantıdaki değişmezlik kullanılarak. (Avalos, Dahia ve Romero 2018) çalışmasında araştırmacılar Weyl-integrallenebilir bir uzayzamanda, Perlick (Perlick 1987) tarafından tanımlanan genelleştirilmiş saatin SCE ölçmeyeceğini iddia etmiştir. Bunun yanında (J. B. Jimenez, Heisenberg ve T. Koivisto 2020) çalışmasındaki Lemma 2 ile gösterilmiştir ki, STP uzayzamanlarda SCE gözlenmez, zira iç çarpım $R_{(ab)} = 0$ koşulu altında yoldan bağımsız olur. Bununla ilintili olarak, $R_{(ab)} = 0$ koşulunu sağlamayan Riemann-dışı geometrilere SCE hala açık bir problemdir. Son zamanlardaki çalışmalarda (Hobson ve Lasenby 2020),(Hobson ve Lasenby 2022), SCE' nin ilerlemeleri boyunca gözlenebilir.

Weyl ayar teorilerinde olmayabileceği tartışılmıştır, öyle ki bu teoriler hem lokal Poincaré hem de lokal ölçek dönüşümleri altında değişmezdir. Öte yandan bir diğer çalışmada (Delhom, Lobo, ve diğ. 2020), araştırmacılar Perlick tarafından verilen genelleştirilmiş saatlerin herhangi bir Riemann-dışı geometride SCE ölçeğini, ancak sadece $Q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}d\varphi$ formunda (burada φ sürekli bir fonksiyondur) non-metrisiti içeren geometrilerde SCE' nin ölçülmeyeceğini tartıştılar. Bununla ilgili olarak, en genelde STP geometrilerde de genelleştirilmiş saatlerin SCE ölçeğini belirttiler. Benzer olarak (Quiros 2022) çalışmasında, STPG teorilerin SCE sorunundan dolayı geçerli gravitasyon modelleri veremeyeceği tartışıldı. Devamında (Quiros n.d.) çalışmasında aynı araştırmacı, $Q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}d\varphi$ formunda nonmetrisiti içeren Weyl-integrallenebilir uzayzamanların, Weyl ayar teorilerin ve STPG teorilerin SCE ölçmeyeceğini iddia etti.

Tezin bu bölümünde, SCE özellikle STP geometrilerde incelenmiş ve en genelde, sadece Weyl-integrallenebilir uzayzamanlar da değil, nonmetrisiti içeren tüm Riemann-dışı geometrilerde SCE' nin ölçülmek zorunda olmayacağı iddia edilmiştir, öyle ki bunun için lokal genel koordinat dönüşümleri (GCT) ve lokal Weyl (ölçek) dönüşümleri altında değişmez kalan yeni bir paralel taşıma kuralı tanıtılmıştır. Elde edilen sonuçlar sadece STP geometrilerde değil, nonmetrisiti ve torsiyonun her ikisini de içeren Riemann-dışı geometrilerde de geçerlidir. Bunlara ek olarak ikinci bir sonuç olarak şu sonuç elde edilmiştir : Evren, Lorentz simetrisinin yanında eğer Weyl simetrisini de taşıyorsa, geçerli bir alternatif gravitasyon modeli için seçilebilecek en basit (temel) geometri, $Q_{\mu\nu} \neq 0$, $T^\mu = 0$, $R^\mu{}_\nu = 0$ koşulları ile verilen STP geometri olarak belirlemektedir. Üçüncü bir sonuç ise, elde edilen meta-jeodezi eğrisinin spinsiz kütleli test parçacığın yörüngesini belirlemek için, otoparalel eğriler yerine kullanılabilir olabileceğidir. Bu bölümdeki formalizm dış cebir ile verilmiştir (Thirring 1997), (Frankel 2012).

Transformasyonlar

Öncelikle M üzerindeki (lokal) genel koordinat dönüşümlerini (GCT) ele alalım

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = \Gamma^{\mu'}{}_\mu x^\mu + \xi^{\mu'} \quad (4.4.26)$$

burada $\Gamma^{\mu'}{}_\mu$ rotasyonu ve $\xi^{\mu'}$ ötelemeyi temsil eder. Daha fazla detay için bkz. Ek C.

Şimdi, GCT' den bağımsız olarak Weyl (ölçek)⁶ dönüşümlerini tanıtalım

$$g \rightarrow \bar{g} = e^{2\psi(x)} g \quad (4.4.27)$$

⁶Bazı metinlerde bu dönüşümler *konformal* dönüşüm olarak da adlandırılmaktadır.

burada $\psi(x)$ sürekli bir fonksiyon. Yukarıda verilen dönüşüm, koordinat koçerçeve demetinde $CF^*(M)$, ve ortonormal koçerçeve demetinde $OF^*(M)$, sırasıyla aşağıdaki gibi etki eder

$$dx^{\bar{\mu}} = dx^{\mu} \quad \text{ve} \quad g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = e^{2\psi(x)} g_{\mu\nu} \quad (4.4.28a)$$

$$e^{\bar{a}} = e^{\psi(x)} e^a \quad \text{ve} \quad \eta_{\bar{a}\bar{b}} = \eta_{ab} \quad (4.4.28b)$$

İlişkili olarak *vielbein* nesnelerinin Weyl dönüşümü aşağıdaki gibidir

$$h^{\bar{\mu}}_{\bar{a}} = e^{-\psi(x)} h^{\mu}_a \quad \text{ve} \quad h^{\bar{a}}_{\bar{\mu}} = e^{\psi(x)} h^a_{\mu} \quad (4.4.29)$$

Buna göre, nesnelerin Weyl yükleri şu şekilde verilir : $w(dx^{\mu}) = 0$, $w(g_{\mu\nu}) = 2$, $w(e^a) = 1$, $w(\eta_{ab}) = 0$, $w(h^{\mu}_a) = -1$, $w(h^a_{\mu}) = 1$. Weyl dönüşümü vektörlerin boylarını yeniden ölçeklendirirken vektörler arasındaki açılara herhangi bir etkisi olmaz. Dönüşüm elemanları $e^{\psi(x)}$ Weyl grubunu oluştururlar, $\mathcal{W}$. Notasyonda, lokal GCT için kesme işareti (X') ve lokal Weyl dönüşümü için ise bar işareti ($\bar{X}$) kullanılmıştır. Metriğin dönüşümünün yanında, bundan bağımsız olarak, tam bağlantı nesnesinin $CF^*(M)$ ve $OF^*(M)$ üzerindeki $\mathcal{W}$ -dönüşümleri de, sırasıyla aşağıdaki gibi verilir

$$\omega^{\bar{\mu}}_{\bar{\nu}} = \omega^{\mu}_{\nu} \quad \text{ve} \quad \omega^{\bar{a}}_{\bar{b}} = \omega^a_b - \delta^a_b d\psi \quad (4.4.30)$$

Buna göre nonmetrisiti, torsiyon ve tam eğrilik nesnelerinin koordinat koçerçeve demetindeki dönüşümleri aşağıdaki gibi verilir

$$Q_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = e^{2\psi(x)} (Q_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} d\psi(x)) \quad (4.4.31a)$$

$$T^{\bar{\mu}} = T^{\mu} \quad (4.4.31b)$$

$$R^{\bar{\mu}}_{\bar{\nu}} = R^{\mu}_{\nu} \quad (4.4.31c)$$

ortonormal koçerçeve demetindeki dönüşümler aşağıdaki gibi verilir

$$Q_{\bar{a}\bar{b}} = Q_{ab} - \eta_{ab} d\psi(x) \quad (4.4.32a)$$

$$T^{\bar{a}} = e^{\psi(x)} T^a \quad (4.4.32b)$$

$$R^{\bar{a}}_{\bar{b}} = R^a_b \quad (4.4.32c)$$

Buna göre, Weyl dönüşümü ardından geometridek değişim aşağıdaki gibi ver-

ilebilir

	Minkowski	→	Simetrik teleparalel
	Riemann	→	Riemann-Weyl
	Metrik teleparalel	→	Genel teleparalel
$\mathcal{W} :$	Riemann-Cartan	→	Metrik afin
	Simetrik teleparalel	→	Simetrik teleparalel
	Riemann-Weyl	→	Riemann-Weyl
	Genel teleparalel	→	Genel teleparalel
	Metrik afin	→	Metrik afin

Görülebileceği üzere, bir Weyl dönüşümü altında yukarıdaki ilk dört geometri değişirken, son dört geometri değişmez kalır. Eğer evren Lorentz ve Weyl simetrisine birlikte sahip ise bu durumda alternatif gravitasyon modeli oluşturmak için en basit (temel) geometrik kurulum STP geometri olmaktadır.

SCE' nin orijini

Hermann Weyl, orijinal çalışmalarında (Weyl 1918),(Weyl 1919), Weyl potansiyel 1-form B olarak adlandırılan yeni bir alan önerdi. Buna göre, $\mathcal{O}^\mu$ geometrik nesnesinin kovaryant (dış) türevi, koordinat koçerçevesinde aşağıdaki gibi tanımlanabilir

$$\widehat{D}\mathcal{O}^\mu = d\mathcal{O}^\mu + \widehat{\omega}^\mu{}_\nu \wedge \mathcal{O}^\nu \quad (4.4.33)$$

burada $\widehat{\omega}^\mu{}_\nu$ Weyl tam bağlantı olarak adlandırılır ve şu şekilde verilir

$$\widehat{\omega}^\mu{}_\nu = \omega^\mu{}_\nu + w\delta^\mu_\nu B \quad (4.4.34)$$

Burada w , $\mathcal{O}^\mu$ nesnesinin Weyl yüküdür $\mathcal{O}^{\bar{\mu}} = e^{w\psi(x)}\mathcal{O}^\mu$, bunun yanında $\mathcal{O}^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\nu \mathcal{O}^\nu$. Ayrıca $\widehat{D}\mathcal{O}^\mu$ işleminin, hem Weyl hem de GCT altında, $\mathcal{O}^\mu$ ile aynı şekilde dönüşebilmesi için, yani $\widehat{D}\mathcal{O}^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\nu \widehat{D}\mathcal{O}^\nu$ ve $\widehat{D}\mathcal{O}^{\bar{\mu}} = e^{w\psi(x)}\widehat{D}\mathcal{O}^\mu$, aşağıda verildiği üzere Weyl 1-formunun dönüşüm kuralı belirlenir

$$B' = B \quad \text{ve} \quad \bar{B} = B - d\psi(x) \quad (4.4.35)$$

Weyl, teorisinde kovaryant türevin yarı-metrisiti koşulunu sağlamasını istedi, $\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = -2B_\sigma g_{\mu\nu}$. Bu koşul, bizim notasyonumuzda aşağıdaki gibi verilebilir

$$Q_{\mu\nu} = Bg_{\mu\nu} \quad (4.4.36)$$

Bu ifade hem GCT hem de Weyl dönüşümleri altında değişmezdir. Weyl, bu yeni B alanının Maxwell (elektromanyetik) potansiyel 1-form olduğunu düşündü ve devamında gravitasyon ile elektromanyetizmanın birleştirilebileceğine dair argümanlar

sundu. Daha sonra farkedildiği üzere, Weyl potansiyel 1-formu Maxwell akımı ile değil, maddenin dilaton akımı ile çiftlenmektedir. Bu durumda, B alanının parçacık ve antiparçacık ile etkileşimi arasında hiçbir fark olmaz, ancak bu elektromanyetizma bağlamındaki gözlemlerle uyuşmaz. Bilahare Weyl' in teorisine ilk karşı argüman Einstein tarafından öne sürüldü. Einstein' ın iddia ettiği üzere, Weyl' in teorisi SCE içerir, öyle ki saatlerin tik-tak frekansları onların dünya-çizgilerine (yani geçmişlerine) bağlıdır. Fakat bu durum o zamana dek hiç gözlenmemiştir. Bunun yanında, Özel Görelilik ve Genel Görelilik bağlamında iyi bilinen birincil saat etkisi defalarca deneysel olarak doğrulanmıştır. Temel olarak SCE, geometrik bir sonuçtur, öyle ki dünya-çizgisi (uzayzaman yörüngesi) boyunca paralel taşınma esnasında vektörün normunun değişebileceği üzerine kuruludur. Bu motivasyonla aşağıda, λ afin parametresi ile parametrize edilen bir $\mathcal{C} \equiv x^\mu(\lambda)$ eğrisine teğet olan $u^\mu = dx^\mu/d\lambda$ vektörünün paralel taşınması incelenmiştir. Vektörün normu (veya uzunluğu) $u := |u^\mu|$ notasyonu ile verilmiştir, öyle ki bu normun karesi metrik yardımı ile şu şekilde yazılabilir $u^2 = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$. Şimdi, bu ifade tam bağlantıya $\omega^\mu{}_\nu$ göre aşağıdaki şekilde türevlensin

$$Du^2 = D(g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu) \Rightarrow udu = -Q_{\mu\nu}u^\mu u^\nu + g_{\mu\nu}u^\mu Du^\nu \quad (4.4.37)$$

Burada kritik soru şudur : "Bir teğet vektörün, teğet olduğu eğri boyunca, paralel taşınma kuralı ne olmalıdır?" Standart kaynaklarda bu kural aşağıdaki şekilde verilir

$$Du^\mu = 0 \Rightarrow \frac{Du^\mu}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \left(\frac{Du^\mu}{\partial x^\nu} \right) \left(\frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) = 0 \Rightarrow u^\nu D_\nu u^\mu = 0 \quad (4.4.38)$$

öyle ki bileşenler cinsinden aşağıdaki formda yazılabilir

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \omega^\mu{}_{\nu\sigma} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0 \quad (4.4.39)$$

burada $\omega^\mu{}_{\nu\sigma} := \iota_\sigma \omega^\mu{}_\nu$ veya $\omega^\mu{}_\nu = \omega^\mu{}_{\nu\sigma} dx^\sigma$. Hatırlatmakta fayda var, öyle ki $\omega^\mu{}_{\nu\sigma}$ tam bağlantı nesnesi, Denk.(4.1.12) ile verildiği üzere, Levi-Civita, nonmetrisiti ve torsiyon parçaları içerir, en genelde. Denk.(4.4.38) veya Denk.(4.4.39) ile verilen paralel taşıma kuralı, aynı zamanda otoparalel eğri denklemleri olarak da adlandırılır. Sadece Riemann geometrisinde otoparalel eğri ve jeodezi denklemleri kesişir, öyle ki $\int_{\lambda_i}^{\lambda_f} \sqrt{-g_{\mu\nu}(x)(dx^\mu/d\lambda)(dx^\nu/d\lambda)} d\lambda$ integralinin ekstremize edilmesiyle elde edilir ve $x^\mu(\lambda_i)$ ve $x^\mu(\lambda_f)$ sınır noktaları arasındaki zamansal eğrinin uzunluğunu tanımlar. Sonuç olarak Denk.(4.4.38) ile verilen paralel taşıma kuralı kullanılarak, Denk.(4.4.37) aşağıdaki hale gelir

$$udu = -Q_{\mu\nu\sigma}u^\mu u^\nu dx^\sigma$$

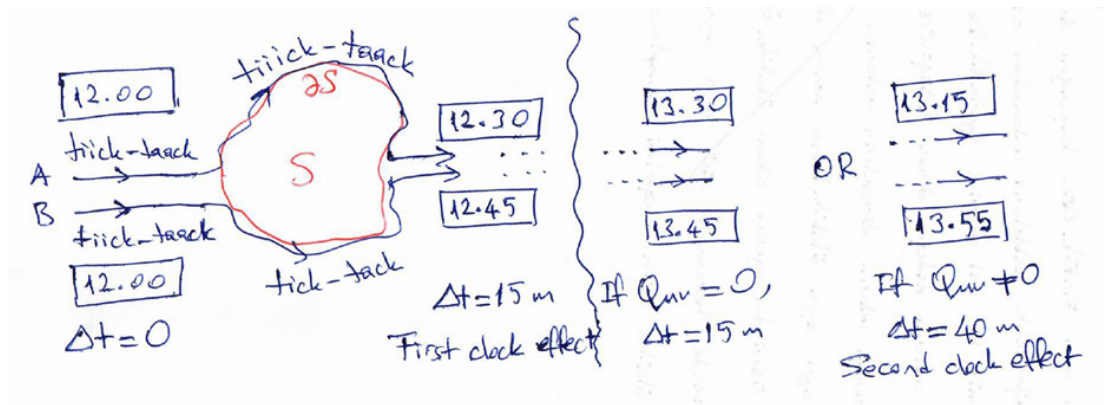
Burada birim vektör şu şekilde tanımlansın $t^\mu = u^\mu/u$. Buna göre yukarıdaki ifade tekrar yazılır ve integrali alınırsa

$$\frac{du}{u} = -Q_{\mu\nu\sigma} t^\mu t^\nu dx^\sigma \Rightarrow u = u_i e^{-\int_{\lambda_i}^{\lambda_f} Q_{\mu\nu\sigma} t^\mu t^\nu dx^\sigma} \quad (4.4.40)$$

burada u_i paralel taşınan vektörün başlangıç boyu ile ilişkili bir integral sabitidir ve u taşınan vektörün final boyudur. Tam bu nokta, SCE ile ilgili tartışmaların kaynak noktasıdır. Nonmetrisitenin varlığında, en genelde, teğet vektörün boyu, kapalı bir otoparalel eğri boyunca paralel taşındığında değişebilir. Orijinal Weyl teorisinde $Q_{\mu\nu} = Bg_{\mu\nu}$ olur, ve bu koşul yukarıdaki sonuç ile birleştirilirse

$$u = u_i e^{\oint_C B_\mu dx^\mu} = u_i e^{\int_{\partial S} B} = u_i e^{\int_S dB} \quad (4.4.41)$$

burada öncelikle, birim vektörlerin zamansal olması sebebiyle $g_{\mu\nu} t^\mu t^\nu = -1$ kullanıldı, ardından da Stokes teorisi kullanıldı. ∂S kapalı eğrisi, S alanının sınırır, öyle ki bu alan saatin iki farklı yörüngesinin oluşturduğu bölgedir. Literatürde dB çizgi eğriliği (veya çizgi alan şiddeti) olarak anılır ve $F = dB$ ile gösterilir. Eğer S bölgesi içinde F sıfır değilse, yolculuklarının başlangıç ve final noktaları aynı dahi olsa, saatlerin tik-tak frekansları değişmiş olacaktır, zira farklı yörüngeleri takip ettiler. Bu etki SCE olarak bilinir. Bkz. Figür 4.2. Eğer Weyl potansiyel 1-formu bir tam form ise, yani $B = d\varphi$ (burada $\varphi(x)$ herhangi bir skaler fonksiyon), bu durumda F otomatik olarak sıfırlanır (Poincaré lemması sebebiyle), yani $F = dB = d^2\varphi = 0$, ve SCE tamamen ortadan kalkar. $B = d\varphi$ koşulunu sağlayan geometriler Weyl-integrallenebilir geometriler olarak adlandırılır.



Figür 4.2: SCE' nin çizim ile gösterilmesi. **Kaynak** : Muzaffer Adak

Paralel taşıma için yeni kural

Tesadüfi ayar seçimi kapsamında teğet vektörün paralel taşınması için standart kural Denk.(4.4.37) ile verilir

$$du^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} = 0 \quad (4.4.42)$$

Bu ifade, spinsiz bir test parçacığının STP geometri içindeki yörüngesini tarif etmekten uzaktır. Bunun üstesinden gelmek adına, (Pala ve Adak 2022) çalışmasında, yeni bir paralel taşıma kuralı önerildi. Bununla birlikte bu çalışmada, verilen yeni paralel taşıma kuralının Weyl değişmezliği ve SCE ile ilişkisi tartışılmadı. Ayrıca, (Pala ve Adak 2022) çalışmasında Denk.(16) ile ve yukarıda Denk.(4.4.38) ile verilen kurallar local GCT altında değişmez kalırken Weyl dönüşümü altında değişmez kalmazlar. Sonuç olarak, aşağıdaki gibi yeni bir paralel taşıma kuralı tanımlanır

$$Du^\mu = Q^\mu{}_\nu u^\nu \quad (4.4.43)$$

öyle ki bu ifade hem lokal GCT hem de Weyl dönüşümleri altında değişmezdir. Bununla birlikte, bu yeni önerme sayesinde, sadece Weyl integrallenebilir uzay-zamanlarda değil, en genelde de SCE etkisi gözlenmez, zira nonmetrisiti içerse dahi bir geometride vektörlerin boyları paralel taşıma sırasında değişmek zorunda değildir, $D|u^\mu| = 0$. Bu yeni kural, (Pala ve Adak 2022) çalışmasında Denk.(16) ile verilen $a = 1$, $b = c = 0$ koşulu ile uyumludur. (Hobson ve Lasenby 2020) çalışmasında yazarlar, aşağıda verildiği gibi yeni bir bir metrik uyumluluk koşulu ve paralel taşıma kuralı önermesi ile, vektörlerin kapalı bir eğri boyunca taşınmaları esnasında boylarının değişmemesini garanti altına almışlar ve böylece SCE gözlenmesi ile ilgili argümanları ortadan kaldırmışlardır

$$\hat{D}g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{ve} \quad \hat{D}u^\mu = 0 \quad (4.4.44)$$

öyle ki bunlar lokal GCT ve Weyl dönüşümleri altında invarianttır. Bu ifadeler aşağıdaki gibi düzenlensin

$$\hat{D}g_{\mu\nu} = Dg_{\mu\nu} + 2g_{\mu\nu}B = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}B \quad (4.4.45a)$$

$$\hat{D}u^\mu = Du^\mu - Bu^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad Du^\mu = Bu^\mu \quad (4.4.45b)$$

Görüleceği üzere, araştırmacıların SCE'yi ortadan kaldırmak için önerdikleri çözüm önerisi nonmetrisiti bileşenlerinin özel bir hali için geçerlidir : Yarı-metrisiti koşulu ile $B = Q/4 = g^{\mu\nu}Q_{\mu\nu}/4$ yazılır, ardından paralel taşıma şöyle verilir $Du^\mu = Qu^\mu/4$. Öte yandan, bizim çalışmamızda Denk.(4.4.43) ile önerilen kural, nonmetrisiti bileşenlerinin tümü için geçerlidir. Örneğin, özel bir çözüm

olarak Denk.(4.4.43) içinde $Q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}Q/4$ alındığında (Hobson ve Lasenby 2020) çalışmasındaki sonuç elde edilir. Benzer şekilde (Quiros n.d.) çalışmasında yazar, argümanlarını $B = Q$ önermesi üzerine temellendirmiştir, öyle ki bu kabul aşağıdaki sonucu verir

$$Q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}Q = g_{\mu\nu}[aQ + (1 - 4a)\iota_\sigma Q^\sigma_\alpha dx^\alpha] \quad (4.4.46)$$

burada a serbest bir parametredir. $a = 1/4$ seçimi Denk.(4.4.45a) ile uyumludur. Bu halde, elde edilen sonuç (Hobson ve Lasenby 2020) çalışmasında verileden daha genel görünmektedir, ancak halen bizim çalışmamızda Denk.(4.4.43) ile verileden daha kısıtlıdır. Çalışmamızda, tartışmaya tesadüfi ayar seçimi altında başlanmış olmasına rağmen, elde edilen sonuçlar nonmetrisiti ve torsiyon içeren tüm Riemann-dışı geometrileri kapsayacak kadar geneldir.

τ öz-zaman parametresi üzerine bir yorum paylaşalım. GG' te şu şekilde tanımlanır $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -d\tau^2$, doğal birimlerin seçimi, $c = G = \hbar = 1$ ve metriğin $(-, +, +, +)$ imzası altında. Bu tanım lokal GCT altında değişmezken, Weyl dönüşümü altında değildir, öyle ki Denk.(4.4.28a) sebebiyle. Literatürde bazen, hız 4-vektörünün Weyl yükü sıfırlanır, bu durumda $u^{\bar{\mu}} = u^\mu$ olur, böylece $dx^{\bar{\mu}}/d\bar{\tau} = dx^\mu/d\tau$ elde edilir, öyle ki bu sonuç Weyl invariant bir öz-zaman sağlar $d\bar{\tau} = d\tau$. Fakat bizim çalışmamızda $w(u^\mu) = -1$, yani $u^{\bar{\mu}} = e^{-\psi(x)}u^\mu$, ve so $d\bar{\tau} = e^{\psi(x)}d\tau$. Weyl invariant bir öz-zaman elde edebilmek adına (Hobson ve Lasenby 2020),(Hobson ve Lasenby 2022) çalışmaları takip edilmiştir, öyle ki bu çalışmalarda λ parametresi öz-zaman olarak alınmamıştır, çünkü $u^\mu = dx^\mu/d\lambda$ kullanılarak $d/d\bar{\lambda} = e^{-\psi(x)}d/d\lambda$ ilişkisi elde edilebilir. Araştırmacılar, bu konuyu açıklığa kavuşturmak için öncelikle Weyl' in teorisi üzerine Einstein' ın öne sürdüğü itirazları ele almışlar ve bu itirazların keskin spektral çizgilerin gözlemi üzerine temellendiğini söyleyerek, bu durumda atomları, gözlemcileri, saatleri, vs. temsil eden madde alanının varlığının da teoriye dahil edilmesi gerektiğini öne sürmüşlerdir. Ardından Weyl ayar teorisi ele almışlar ve maddeyi temsil etmesi için bir Dirac alanını teoriye eklemişlerdir. Sonuçta, Weyl yükü $w(\phi) = -1$ ile verilen skaler bir kompanzator alan⁷ $\phi(x)$ tanıtmışlar ve öz-zaman ölçümünün şu ifade ile yapılabileceğini önermişlerdir, $d\tau = \phi d\lambda$. Tanım gereği buradaki $d\tau$ Weyl invarianttır. Bununla ilgili olarak, araştırmacılar, ölçek-değişmez gravitasyon teorilerinde kompanzator alanın ϕ , hem parçacıkların dinamik olarak kütle kazanmasını sağlayabileceği hem de bunların öz-zamanlarını doğru olarak belirleyebileceği sonucuna varmışlardır. Detaylar için bkz. (Hobson ve Lasenby 2020),(Hobson ve Lasenby 2022).

⁷Buradaki kompanzator alanı ϕ ile, Weyl potansiyel 1-form $B = d\varphi$ tanımında verilen φ arasında hiçbir ilişki yoktur.

Bu noktada, Denk.(4.4.43) ile verilen otoparalel taşıma kuralının test parçacıkları için (ör. Merkür) doğru yörünge denklemi olup olmadığını test edelim. Bunun için, verilen yeni kural STP geometride ve tesadüfi ayar seçimi altında açık haliyle aşağıda gibi yeniden yazılsın

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \frac{1}{4}g^{\mu\beta}(\partial_\sigma g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\sigma}) \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0 \quad (4.4.47)$$

Öz-zaman cinsinden yeniden düzenlensin

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \frac{1}{4}g^{\mu\beta}(\partial_\sigma g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\sigma}) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} + \frac{\partial_\nu \phi}{\phi} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0 \quad (4.4.48)$$

Burada, otoparalel eğri denkleminin bileşenleri açık şekilde küresel simetrik statik bir metrik için hesaplandı ve verilen yeni otoparalel taşıma kuralının spinsiz test parçacıkları için doğru bir yörünge denklemi vermediği görüldü (Merkür gezegeni için bile). Bunun üzerine, jeodezi denklemini ele alalım, test parçacıklarının doğru yörünge denklemi olup olmadığını araştırmak için. Aslında buna meta-jeodezi denklemi⁸ denmesi daha isabetli olabilir, zira Lorentz ve Weyl invariant eylem kompanzatör alanı içermektedir : $I = \int \phi ds = \int_i^f \phi \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$. Ardından, $\delta I = 0$ işlemi ile aşağıdaki meta-jeodezi denklemi elde edilir

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \frac{1}{2}g^{\mu\beta}(\partial_\sigma g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\sigma} - \partial_\beta g_{\nu\sigma}) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} + g^{\mu\nu} \partial_\nu \ln \phi = 0 \quad (4.4.49)$$

Burada, $x^\mu(\tau)$ eğrisi boyunca paralel taşınan teğet vektörün boyunun değişmeyeceği garanti altına alındığı için, normalize 4-hız şöyle varsayıldı $\sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} = 1$. Bu noktada şu yorumları yapalım : Eğer skaler alanın yeterince yavaş değiştiği varsayılırsa, bu durumda ϕ alanının (en azından) güneş sistemi ölçeğinde neredeyse sabit olduğu varsayılabilir ve böylece yukarıdaki denklemde son terim ihmal edilebilir, zira $\partial_\nu \phi \approx 0$. Sonuç olarak, Merkür için doğru bir form elde edildiği söylenebilir. Fakat, diğer taraftan, galaktik ölçekte $\partial_\nu \phi$ terimi anlamlı bir katkı veriyor olabilir (zira bu ölçekte, güçlü etkileşimler ve yüksek enerji altında yavaş değişmek zorunda olmayabilir), öyle ki bu ölçekte spiral galaksilerin dış yörüngelerindeki hız eğrilerinin düz olmasından sorumlu olabilir. Böylesine olası geometrik bir etki, klasik karanlık madde önermesine alternatif olan yeni bir gravitasyon modeli ve hatta yeni bir evren modeli önerebilir. Son olarak, önerilen yeni meta-jeodezi denkleminin, serbest düşüş yapan spinsiz test parçacıklarının doğru dünya-çizgileri için aday olduğu iddia edilebilir.

⁸Bu metnin yazıldığı tarihlerde internet dünyasında "metaverse" kavramı oldukça popülerdi. Bu nedenle "para" veya "semi" gibi ifadeler yerine ön ek olarak "meta" kullanımı tercih edilmiştir!

Son sözler

Bu çalışmada SCE ve öz-zaman fenomenleri STPG modelleri bağlamında incelendi. Başlangıçta, lokal GCT ve Weyl dönüşümleri, hem koordinat hem de ortonormal çerçevelerde verildi. Elde edilen ilk sonuç şu oldu : Eğer evren Lorentz simetrisinin yanında Weyl simetrisini de taşıyorsa, bu koşulu sağlayan en basit geometri, $Q_{ab} \neq 0$, $T^a = 0$, $R^a_b = 0$ koşullarını sağlayan STP geometrisidir. Ardından, $x^\mu(\lambda)$ eğrisi boyunca, bir teğet vektörün $u^\mu := dx^\mu/d\lambda$ paralel taşınması esnasında boyunun değişimi üzerine tartışma yapıldı ve nonmetrisiti varlığı ile ilişkili olarak SCE incelendi. Görüldü ki, literatürde de söylendiği üzere Weyl integrallenebilir uzayzamanlar da SCE ortadan kaldırılabilir. Daha sonra, tesadüfi ayar seçimi altında $\omega^\mu{}_\nu = 0$, STP geometride spinsiz bir test parçacığın yörünge denklemi olması amacıyla otoparalel eğri denklemi türetilti. İkinci sonuç olarak, Denk.(4.4.43) ile verilen, lokal GCT ve Weyl dönüşümleri altında invariant kalan yeni bir paralel taşıma kuralı önermesi yapıldı. Bununla ilintili olarak, SCE' nin sadece STP geometride değil, nonmetrisiti ve torsiyon içeren en genel Riemann-dışı geometrilerde de ortadan kalkabileceği sonucuna varıldı. Devamında, (Hobson ve Lasenby 2020),(Hobson ve Lasenby 2022) çalışmaları takip edilerek, öz-zaman kavramı incelendi. Kompanzatör bir skaler alan $\phi(x)$ yardımıyla, $Gl(4, \mathbb{R})$ ve Weyl dönüşümleri altında invariant kalan bir öz-zaman tanımı verildi. Üçüncü sonuç olarak, otoparalel eğri denkleminin test parçacıklarının dünya-çizgileri için doğru bir tanım olmayabileceği yorumu yapılarak, meta-jeodezi denklemi elde edildi ve bunun güneş sistemi ve galaktik ölçeklerde doğru sonuç verebileceğine dair çıkarımlar yapıldı.

Konu 5

Gravitasyon teorileri

“Aşka düştüğünüz için gravitasyonu suçlayamazsınız.”

Albert Einstein

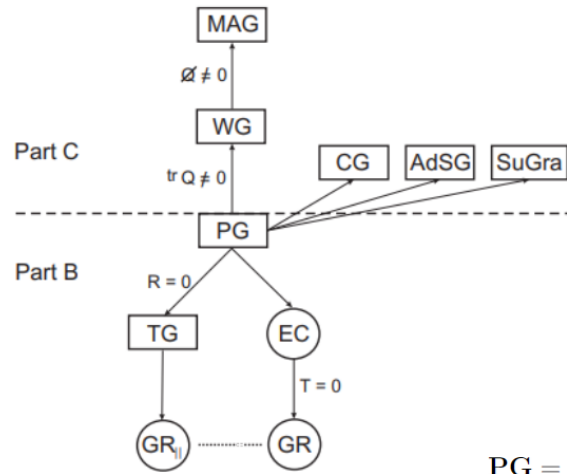
5.1 Gravitasyon ayar kuramları

Kuantum evreninin Standart Model (SM) tanımında, dinamik Lagrangiyenlerde yer alan tüm madde alanları, açıkça uzayzamanın kendisi tarafından (diğer bir deyişle koordinatlar tarafından) parametrelendirilmiştir; bunun yanı sıra, bu alanlar kendilerine karşılık gelen soyut *iç uzaylarında* da var olurlar. Örnek olarak, spinör alanları uzayzamanın noktaları boyunca hareket edebilirken, aynı zamanda (iç) spinör uzaylarında da benzersiz bir şekilde dönüşürler. Yang-Mills tipi madde alanı teorilerinde alanlara uygulanan ayar dönüşümleri, alanı uzayzaman içinde değil, kendi iç uzayında dönüştürür. Bu nedenle literatürde ayar dönüşümleri iç dönüşümler olarak da adlandırılmaktadır. Bu ayar yaklaşımının gravitasyona uygulanması düşünüldüğünde durum farklıdır. En azından günümüz fizik bilgisi kapsamında, SM etkileşimleri için lokal ayar prosedüründe olduğu gibi, madde alanlarına herhangi bir dönüşüm uygulayarak gravitasyon bilgisini elde edemeyiz. Dolayısıyla literatürde bu görev için kullanılan yöntem, dönüşümlerin madde alanlarına değil, uzayzamanın kendisine uygulanmasıdır. Böylece gravitasyonun ayar modellerinin *yeral uzayzaman dönüşümlerinden* ortaya çıktığı sonucuna varılabilir. Başka bir deyişle uzayzaman dönüşümleri koordinat dönüşümleriyle ilişkilidir. Bu nedenle gravitasyon teorilerinin, yani bunlara karşılık gelen Lagrangiyenlerin, koordinat dönüşümleri altında değişmez olması talep edilir.

O zamanlar fark edilmese de Maxwell’ in elektromanyetizma teorisi, ayar teorisinin en basit örneğidir; teorideki simetri dönüşümlerinin ayar (Lie) grubu $U(1)$ grubudur. Yang ve Mills izotopik spinin (C. N. Yang ve Mills 1954) yönelimini

incelediklerinde daha karmaşık ayar teorileri ortaya çıktı. Elektromanyetik alanın, belirli invaryanslık özelliklerini gerektirdiği gibi, Yang-Mills alanının varlığının da belirli invaryanslıkları gerektirdiği ortaya çıktı. 1950' li ve 1960' lı yıllardaki araştırmacılar, gravitasyon alanının varlığı ile Lorentz değişmezliği arasındaki ilişkiyi, arka plandaki bu fikirler ışığında düşünmeye başladılar. Lorentz cebiriyle başlayan Utiyama, 1956' da bir yerçekimi teorisi elde etmek için cebirsel bir yapıya ayar metodunu uyguladı (Utiyama 1956). Birkaç yıl sonra 1961' de Kibble, Poincaré cebirinin tamamını dikkate alarak Utiyama' nın teorisini genişletti (Kibble 1961). Einstein' ın Genel Görelilik teorisini türetebilmeleri, yerçekiminin de bir ayar teorisi olarak yazılabileceğine dair perspektifin başlangıcını işaret ediyordu. Ayrıca yerçekimini bir ayar teorisi olarak incelemek için çeşitli motivasyonlar da vardır.

Gravitasyonun ayar modelleri ile ilgili, günümüze kadar yapılan çalışmaları özetleyen bir görsel verilebilir, bkz. Figür 5.1.



PG = Poincaré ayar teorisi,
 EC = Einstein-Cartan ayar teorisi, GR = Genel Görelilik, TG = Öteleme ayar teorisi,
 GR_{||} = GR' nin öteleme-denklemler ayar teorisi, WG = Weyl ayar teorisi, MAG = Metrik-
 afin ayar teorisi, CG = Konformal ayar teorisi, AdSG = (Anti-)de Sitter ayar teorisi,
 SuGra = Süpergravitasyon (süper-Poincaré ayar teorisi)

Figür 5.1: Gravitasyonun ayar teorilerinin sınıflandırılması. **Kaynak :** (Blagojevic, Hehl ve Kibble 2013)

5.1.1 bölümü altında, Minkowski uzayında çalışırken kullandığımız uzayzaman simetrilerini hatırlatacağız. Bilindiği gibi evrenimizdeki işleyişin temelinde duran Lorentz grubu, göreceli karakterini *rotasyonlardan* ve *boostlardan* oluşan Lorentz dönüşümüyle göstermektedir. Verilen bölümde bu simetriyi, sırasıyla Poincaré ve Weyl (ölçek) dönüşümlerini oluşturan *ötelemeler* ve *ölçeklemeleri* dahil ederek genelleştireceğiz. Daha sonra 5.1.2 bölümünde, grubun parametre-

trelerinin sabit olmadığı, uzayzaman koordinatlarına ilişkin alanlar olduğu, yerel Poincaré dönüşümlerini ele alacağız. Bunu yaparak, Poincaré ayar teorisinin geometrik yapısının, Levi-Civita bağlantı ve torsiyon alanlarını dinamik alanlar olarak içeren, Einstein-Cartan tipi olarak adlandırılan yapıya dönüştüğü sonucuna varacağız. Benzer şekilde Bölüm 5.1.3 altında Weyl ayar teorisini veren küresel Weyl grubuna ayar metodu uygulayacağız. Sonunda, bu teorinin geometrik yapısının Weyl-Cartan tipi geometri tarafından verilebileceğini gözlemleyeceğiz. Bu bölümün genelinde esas olarak (Blagojevic 2002) çalışmasındaki fikirler ve notasyon kullanılmıştır.

5.1.1 Uzayzaman simetrileri

Teorik fiziğin zengin oyun alanında uzayzaman simetrileri, evren anlayışımızın üzerine inşa edildiği temel kaya olarak duruyor. Bu simetriler, en küçük kuantum etkileşimlerinden kozmolojinin geniş ölçeklerine kadar uzanan, fiziksel yasaları değişmeden bırakan çok çeşitli dönüşümleri kapsar. Özünde, uzayzaman simetrisi, uzayzamandaki koordinatların dönüşümleri altında fiziksel yasaların değişmezliğini ifade eder. Bu dönüşümler, ötelemeleri, rotasyonları ve boostları (Lorentz dönüşümleri) ve bunların kombinasyonlarını içerir. Noether Teoremi bu simetrileri, korunan niceliklere zarif bir şekilde bağlayarak simetri ile fiziksel yasalar arasındaki derin bağlantıları ortaya çıkarır (Noether 1971).

Uzayzaman simetrileri bağlamının merkezinde Lorentz simetrisi vardır, öyle ki bu simetri Özel Görelilik ilkelerini korumak için hayati önem taşır ve uzayzaman aralığını (metrik) koruyan rotasyonları ve boostları kapsar. Lorentz simetrisi, görelî teorilerde uzayzamanın yapısını destekler ve parçacık fiziğinden kozmolojiye (Weinberg 1995) kadar çeşitli alanlarda önemli bir rol oynar.

Poincaré simetrisi, uzayzamandaki ötelemeleri dahil ederek Lorentz simetrisini genişletir. Lorentz dönüşümlerini ötelemelerle birleştirerek, bunları Özel Görelilik içinde kapsayan Poincaré grubunun temelini oluşturur. Poincaré grubunun önemi, Kuantum Alan Teorisi ve Görelî Kuantum Mekaniği (Wigner 1939) formülasyonları için bir çerçeve sağlayan, düz uzayzamandaki fizik yasalarının simetri grubu olma rolünde yatmaktadır. Ayrıca Kuantum Alan Teorisi'nde (QFT), uzayzaman simetrileri, karşımıza ayar simetrileri ve Poincaré simetrileri olarak ortaya çıkar ve alanlar ile parçacıklar arasındaki etkileşimlerin yapısını belirler. Poincaré simetrisi enerjinin, momentumun ve açısal momentumun korunumu yasalarını sağlar ve kuantum alanlarının dinamiklerini ve bunların etkileşimlerini yönlendirir (Ryder 1996).

Lorentz ve Poincaré simetrilerine ek olarak, konformal dönüşümler ve Weyl

ölçeklendirmeleri, uzayzaman simetrileri çerçevesinde önemli roller oynamakta ve fiziksel teorilerin yapısına ve bunların çeşitli ölçeklerdeki sonuçlarına ilişkin daha derin içgörüler sunmaktadır.

Konformal dönüşümler, açıları koruyan ancak mesafeleri korumak zorunda olmayan, uzayzaman koordinatlarının eşlemeleridir. Daha teknik olmak gerekirse, konformal bir dönüşüm $x^\mu \rightarrow x'^\mu = f^\mu(x)$ olarak ifade edilebilir; burada $f^\mu(x)$ sürekli bir fonksiyondur. Bu dönüşüm metriğin biçimini, bir konformal (ölçek) faktör ile birlikte korur, yani $g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \Omega(x)^2 g_{\mu\nu}(x)$ burada $\Omega(x)$ konformal faktördür. Konformal simetri özellikle Kuantum Alan Teorisi ve Sicim Teorisi ile yakından ilgilidir ve korelasyon fonksiyonlarının yapısını ve eğri uzayzamanlardaki alanların dinamiklerini etkiler (Francesco, Mathieu ve Sénéchal 1997).

Adını Hermann Weyl' den alan Weyl ölçeklendirmesi, metriğin, pozitif bir fonksiyonla çarpılmasını içerir, $g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega(x)^2 g_{\mu\nu}(x)$. Bu dönüşüm, topolojik yapısını değiştirmeden uzayzamanın geometrik özelliklerini etkiler. Fizikte Weyl ölçeklendirilmesi, gravitasyon teorileri ve eğri uzayzamanların geometrisi çalışmaları gibi (Weyl 1918) konformal simetrinin açıkça ortaya çıktığı teorilerde önemlidir.

Konformal simetri ve Weyl ölçeklendirmesinin fiziğin çeşitli dallarında derin etkileri vardır. QFT' de konformal simetri, korelasyon fonksiyonlarının davranışını kısıtlayarak, gelişmiş hesaplama tekniklerine ve renormalizasyon grup akışına ilişkin içgörülere yol açar. Yerçekimi teorilerinde Weyl ölçeklendirmesi, uzayzaman eğriliğinin dinamiklerini ve bunun madde ve enerji dağılımlarıyla olan ilişkisini keşfetmek için bir çerçeve sağlar (Nakahara 2003). Son araştırmalar, konformal simetri ve Weyl ölçeklendirme uygulamalarını, holografıyı de içeren yeni sınırlara doğru genişletti, öyle ki bu alan AdS / CFT ilişkisinde önemli rol oynamaktadır. Bu ilişki, uzayzamanın sınırdaki QFT' leri daha yüksek boyutlu bir uzayzamandaki yerçekimi teorileriyle ilişkilendirerek, uzayzaman simetrileri ile temel fizikteki teorik çerçeveler arasındaki etkileşimi sergiliyor. Teorik fizikteki tüm bu ilerlemeler, uzayzaman simetrilerinin sınırlarını, kuantum yerçekimi çalışmaları ve Sicim Teorisi de dahil olmak üzere yeni alanlara itmiştir. Bu çalışma sahaları, uzayzamanın temel simetrilerini korurken Kuantum Mekanik'i ni Genel Görelilik ile birleştirmeyi amaçlıyor. Süpersimetri ve yüksek boyutlu simetriler gibi genişletilmiş simetrilerin araştırılması, temel etkileşimlere ve uzayzamanın doğasına ilişkin anlayışımızı daha da zenginleştirir (Polchinski 1998).

Sonuç olarak, uzayzaman simetrilerinin modern fiziğin temel taşı temsil ettiği söylenebilir ve Klasik Mekanik, Görelilik ve Kuantum Alan Teorisi gibi geniş araştırma konularını kapsayan birleşik bir çerçeve sağlar. Bu simetrilerin

araştırılması ve uygulanması, uzayzamanın dokusuna ve evreni yöneten temel yasalara dair derin içgörüler sunarak, bu konudaki çalışmaları teorik fiziğin ön sıralarına taşımaya devam ediyor.

5.1.1.1 Poincaré dönüşümleri

M_4 Minkowski uzayzamanı olsun. Sonsuz küçük aralık (metrik tensörü) aşağıdaki gibi verilir

$$g := ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (5.1.1)$$

Bu ifade $\{dx^\mu\}$ koordinat çerçevesinde yazılmıştır. Şöyle bir çerçeve dönüşümü (transformasyonu) verilsin $S(x) \rightarrow S'(x')$, öyle ki, en genelde böylesi bir dönüşüm sadece çerçeve dönüşümü içerebileceği gibi koordinat dönüşümü de olabilir. Metriğin herhangi bir çerçeveye bağlı olmadığını varsayalım

$$\eta_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu = \eta'_{\lambda\rho}(x') dx'^\lambda dx'^\rho \quad (5.1.2)$$

Eğer $\eta_{\mu\nu}(x) = \eta'_{\mu\nu}(x')$ ise, bu durumda S' çerçevesi *eylemsiz çerçeve* olarak adlandırılır. Fakat, en genelde metriğin formu değişebilir.

Açıklama. Metriğin formunu koruyan transformasyonlar, verilen uzayın izometri grubunu oluşturur. M_4 uzayının izometri grubu Poincaré grubudur, $P(1, 3)$. $\square$

$\phi(x)$ bir alan olsun. *Form varyasyonu* aşağıdaki gibi verilir

$$\delta_0 \phi(x) := \phi'(x) - \phi(x) \quad (5.1.3a)$$

ve *toplam varyasyon* da aşağıdaki gibi verilir

$$\delta \phi(x) := \phi'(x') - \phi(x) \quad (5.1.3b)$$

Sonsuz küçük koordinat transformasyonu için $x' = x + \xi$, şu yazılabilir

$$\delta \phi(x) \approx \delta_0 \phi(x) + \xi^\mu \partial_\mu \phi(x) \quad (5.1.4)$$

Koordinat dönüşümünü aşağıdaki gibi düşünelim

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x) \quad (5.1.5)$$

Bu durumda metrik bileşenleri şu şekilde dönüşür

$$\eta'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \eta_{\lambda\rho} \quad (5.1.6)$$

Birinci derece yaklaşım altında şu yazılabilir

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \approx \delta_\mu^\lambda \delta_\nu^\rho - \delta_\mu^\lambda \xi_{\nu,\rho}^\rho - \delta_\nu^\rho \xi_{\mu,\lambda}^\lambda \quad (5.1.7)$$

ve sonuç olarak şuna erişilir

$$\eta'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - (\xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu}) \quad (5.1.8)$$

Açıklama. En genelde, koordinat dönüşümleri, alanlar üzerinde önemsiz olmayan form varyasyonuna sebep olur. $\square$

M_4 üzerindeki izometri, aşağıdaki koşulun sağlanmasını şart koşar

$$0 = \delta_0 \eta_{\mu\nu} = \eta'_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} = -(\xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu}) \quad (5.1.9)$$

Bu *Killing* denklemdir. Şimdi $\xi^\mu(x)$ terimini seriye açalım

$$\xi^\mu(x) = \tau^\mu + \theta^\mu{}_\nu x^\nu + \theta^\mu{}_{\nu\lambda} x^\nu x^\lambda + \dots \quad (5.1.10)$$

burada τ ve θ sabit parametrelerdir. Yukarıdaki Killing denklemi yardımıyla, şuna erişiriz

$$\theta^{\mu\nu} + \theta^{\nu\mu} = 0 \quad , \quad \tau = \text{rastgele} \quad (5.1.11)$$

Buna göre, sonsuz küçük *global* $P(1, 3)$ dönüşümü şöyle verilebilir

$$\xi^\mu(x) = \tau^\mu + \theta^\mu{}_\nu x^\nu \quad (5.1.12)$$

Bu grubun serbest parametreleri aşağıda verilmiştir

$$\begin{array}{ll} \theta^{\mu\nu} & : \quad 6 \text{ parametre} \\ \tau^\mu & : \quad 4 \text{ parametre} \\ \text{toplam} & : \quad 10 \text{ parametre} \end{array}$$

Buna göre, sonlu Poincaré transformasyonu aşağıdaki gibi ifade edilebilir

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \quad (5.1.13)$$

burada " Λ " ile Lorentz dönüşümleri (rotasyonlar) ve " a " ile ötelemeler temsil edilmiştir. Lorentz dönüşümleri şunu sağlar $\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$.

$P(1, 3)$ grubunun Lie cebiri

$\phi(x)$ bir skaler alan olsun. Sonsuz küçük Poincaré transformasyonu altında $x \rightarrow x' = x + \xi$, skaler alanın $\phi(x)$ toplam varyasyonunun sıfırlanmasını talep edelim, yani $\phi'(x') = \phi(x)$. Denk.(5.1.4) yardımıyla şu yazılabilir

$$\begin{aligned} \delta_0 \phi(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_0 \phi(x) &= -\xi^\mu \partial_\mu \phi(x) \\ &= -(\theta^\mu{}_\nu x^\nu + \tau^\mu) \partial_\mu \phi(x) \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

Yukarıdaki ifade şu şekilde düzenlenebilir

$$\delta_0 \phi(x) = \left(\frac{1}{2} \theta^{\mu\nu} L_{\mu\nu} + \tau^\mu P_\mu \right) \phi(x) \quad (5.1.15)$$

burada jeneratörler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır

$$L_{\mu\nu} := x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu \quad (5.1.16a)$$

$$P_\mu := -\partial_\mu \quad (5.1.16b)$$

Bu jeneratörler aşağıdaki Lie cebirini sağlar

$$\begin{aligned} [L_{\mu\nu}, L_{\lambda\rho}] &= \eta_{\nu\lambda} L_{\mu\rho} - \eta_{\mu\lambda} L_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho} L_{\mu\lambda} + \eta_{\mu\rho} L_{\nu\lambda} \\ &= \frac{1}{2} f_{\mu\nu, \lambda\rho}{}^{\tau\sigma} L_{\tau\sigma} \\ [L_{\mu\nu}, P_\lambda] &= \eta_{\nu\lambda} P_\mu - \eta_{\mu\lambda} P_\nu \\ [P_\mu, P_\nu] &= 0 \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

Açıklama. En genelde, bir alan üzerindeki sonsuz küçük (grup) dönüşümü şu şekilde verilebilir

$$\phi' = e^{m \cdot G} \phi \approx (1 + m \cdot G) \phi = \phi + m \cdot G \phi \quad (5.1.18)$$

burada m ve G , sırasıyla dönüşümün parametresi ve grubun jeneratörüdür. $\square$

Genel rastgele bir alan için Lorentz jeneratörü açısal momentum *spin* parçasını da içerebilir

$$M_{\mu\nu} = \underbrace{L_{\mu\nu}}_{\text{yörüngesel aç. mom.}} + \underbrace{\Sigma_{\mu\nu}}_{\text{spin aç. mom.}} \quad (5.1.19)$$

Örnek. Bir Dirac alanı varsayalım $\Psi(x)$. Bu alana Poincaré dönüşümü uygulanırsın $\Psi' = S(\omega)\Psi$, öyle ki bu dönüşüm sonsuz küçük ω parametresi ile verilmiş olsun. Buna göre, şu dönüşüm elde edilir $\Psi' = \left(1 + \frac{1}{8} \omega^{\mu\nu} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]\right) \Psi$. Dolayısıyla, açısal momentum spin parçası şu şekilde verilebilir

$$\Sigma_{\mu\nu}^D = \frac{1}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] =: \sigma_{\mu\nu}$$

$\square$

Eylemin invaryanslığı ve korunum yasaları

Aşağıdaki eylemi ele alalım

$$I = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x) \quad (5.1.20)$$

(Global) Poincaré transformasyonları, hem koordinat hem de dinamik alan üzerine aşağıdaki gibi uygulanır

$$\begin{aligned} x^\mu &\rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta_0 x^\mu \\ \phi(x) &\rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \delta_0 \phi(x) \end{aligned} \quad (5.1.21)$$

burada form varyasyonları, sabit τ ve θ parametreleri cinsinden şu şekilde verilir

$$\begin{aligned}\delta_0 x^\mu &= \xi^\mu(x) = \theta^\mu{}_\nu x^\nu + \tau^\mu \\ \delta_0 \phi(x) &= \left(\frac{1}{2} \theta^{\mu\nu} M_{\mu\nu} + \tau^\mu P_\mu \right) \phi(x)\end{aligned}\quad (5.1.22)$$

Buna göre, eylemin toplam varyasyonu aşağıdaki gibi yazılır

$$\begin{aligned}\delta I &= \int d^4 x' \mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi', x') - \int d^4 x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x) \\ &= \dots \\ \therefore \delta \mathcal{L} &:= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta_0 \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta_0 (\partial_\mu \phi) + \xi^\mu \partial_\mu \mathcal{L} + \cancel{\mathcal{L} \partial_\mu \xi^\mu} \rightarrow 0\end{aligned}\quad (5.1.23)$$

Yukarıda elde edilen $\delta_0 \phi$ ifadesi ve $\partial_\mu \xi^\mu = 0$ (bu koşul $\theta^{\mu\nu}$ antisimetrik olduğu için sağlanır) kullanılırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \theta^{\mu\nu} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} M_{\mu\nu} \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \phi)} [2M_{\mu\nu} \partial_\rho - (\eta_{\nu\rho} \partial_\mu - \eta_{\mu\rho} \partial_\nu)] \phi \right. \\ &\quad \left. + M_{\mu\nu} \mathcal{L} \right\} + \tau^\mu \left\{ -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \partial_\mu \phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} 2\partial_\mu \partial_\nu \phi + \partial_\mu \mathcal{L} \right\}\end{aligned}\quad (5.1.24)$$

$\theta^{\mu\nu}$ ve τ^μ keyfi sabitler olduğu göz önüne alınır ve eylemin toplam varyasyonunun sıfırlanması koşulu $\delta I = 0$ empoze edilirse, aşağıdaki ifadeler elde edilir

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} M_{\mu\nu} \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \phi)} [2M_{\mu\nu} \partial_\rho - (\eta_{\nu\rho} \partial_\mu - \eta_{\mu\rho} \partial_\nu)] \phi + M_{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (5.1.25a)$$

$$0 = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \partial_\mu \phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} 2\partial_\mu \partial_\nu \phi + \partial_\mu \mathcal{L} \quad (5.1.25b)$$

öyle ki bu ifadeler, sırasıyla, Lorentz (rotasyon) ve öteleme simetri koşulları olarak düşünülebilir. Denk.(5.1.23) kullanılarak aşağıdaki düzenleme yapılsın

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta_0 \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta_0 (\partial_\mu \phi) + \xi^\mu \partial_\mu \mathcal{L} + \mathcal{L} \partial_\mu \xi^\mu \\ &= \underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \right) \delta_0 \phi}_{\text{Euler-Lagrange denk.}} + \partial_\mu \underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \delta_0 \phi + \xi^\mu \mathcal{L} \right)}_{:= J^\mu, \text{korunan akım}}\end{aligned}\quad (5.1.26)$$

Stoke teoremi yardımıyla ve sınır koşulları uygulanması ile (yani varyasyonların sınırlarda sıfırlanması), yukarıda eşitliğin sağ tarafındaki ikinci terim ortadan kaldırılabilir. Böylece olağan Euler-Lagrange denklemleri elde edilir. Dahası, transformasyon sonrasında dinamik alanın, sınırlar üzerinde herhangi bir koşul olmadan, halen Euler-Lagrange denklemlerini sağlaması istenirse, aşağıdaki korunum ifadeleri elde edilir

$$0 = \partial_\mu J^\mu \quad , \quad \text{burada } J^\mu := \frac{1}{2} \theta^{\nu\lambda} M^\mu{}_{\nu\lambda} - \tau^\nu T^\mu{}_\nu \quad (5.1.27)$$

Bu noktada, kanonik *enerji-momentum (lineer momentum) tensörü* ve *açısai momentum tensörü*, sırasıyla, aşağıdaki gibi tanımlanır

$$T^\mu{}_\nu := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \partial_\nu \phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \quad (5.1.28a)$$

$$M^\mu{}_{\nu\lambda} := (x_\nu T^\mu{}_\lambda - x_\lambda T^\mu{}_\nu) - S^\mu{}_{\nu\lambda} \quad (5.1.28b)$$

burada

$$S^\mu{}_{\nu\lambda} := -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \Sigma_{\nu\lambda} \phi \quad (5.1.28c)$$

kanonik *spin tensörü*dür.

Örnek. Şu Lagrangiyen ile verilen bir skaler alan varsayalım, $\mathcal{L}_S = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \lambda \phi^4$. Lineer momentum aşağıdaki gibi hesaplanabilir

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}_S \quad (5.1.29)$$

öyle ki, spin tensörü sıfırlanır. $\square$

Örnek. Dirac Lagrangiyeni ele alalım $\mathcal{L}_D = \frac{1}{2} (i\bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi - 2m\bar{\psi}\psi)$. Aşağıda verilen lineer momentum tensörü ve spin tensörü hesaplanabilir

$$T^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} i\bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\nu \psi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}_D \quad , \quad S^\mu{}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} i\epsilon^\mu{}_{\nu\lambda\rho} \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\rho \psi \quad (5.1.30)$$

Skaler alandan farkı olarak, Dirac alanı için sıfırlanmayan bir spin tensörü mevcuttur. $\square$

Yukarıdaki yaklaşıma benzer şekilde, yine, keyfi θ ve τ parametreleri için aşağıdaki korunum yasası ifadeleri verilebilir

$$0 = \partial_\mu T^\mu{}_\nu \quad (5.1.31a)$$

$$0 = \partial_\mu M^\mu{}_{\nu\lambda} \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu S^\mu{}_{\nu\lambda} = T_{\nu\lambda} - T_{\lambda\nu} \quad (5.1.31b)$$

Klasik olarak her zaman yaptığımız gibi, korunan akımın zaman bileşeni (sıfır bileşeni) 3-boyut üzerinde integrallendiğinde, korunan nicelikler elde edilir. Aşağıda bu korunan nicelikler verilmiştir, sırasıyla, *momentum 4-vektör* ve *açısai momentum*

$$P^\nu = \int d^3x T^{0\nu} \quad (5.1.32a)$$

$$M_{\nu\lambda} = \int d^3x M^0{}_{\nu\lambda} \quad (5.1.32b)$$

Açıklama. Yukarıdaki ifadelerden de görüleceği üzere, lineer momentum tensörü, en genelde, bileşen indisleri üzerinde simetrik olmak zorunda değildir, özellikle maddenin spini dahil edildiği zaman. Belinfante tensörü sayesinde, (modifiye edilen) lineer momentum tensörünün indis simetrisi tekrar sağlanabilir, öyle ki Belinfante tensörü, lineer ve spin tensörlerinin sistematik bir kombinasyonu ile oluşturulur. $\square$

5.1.1.2 Weyl (ölçek) dönüşümleri

Önceki bölümde Poincaré dönüşümleri elde edilirken, ilgili koordinat dönüşümleri altında metrik bileşenlerinin $\eta_{\mu\nu}$ formunun değişmemesi koşulu empoze edilmişti, Denk.(5.1.9), öyle ki bu koşul M_4 uzayının izometrisi tarafından belirlenmişti. Bu koşul sayesinde Killing denklemlerine bir çözüm bulunabilmiş ve bulunan bu çözüm Poincaré transformasyonlarını vermişti, Denk.(5.1.12). Bu bölümde ise, bu koşulu gevşeterek metrik bileşenlerinin $\eta_{\mu\nu}$ formunun da değişebileceğini varsayacağız. Bekleneceği üzere, bu yeni koşul önceki Killing denklemlerini değil başka bir denklem seti verecektir ve bu yeni denklem setinin çözümleri de artık Poincaré değil başka transformasyonlar olacaktır, öyle ki bunlar *Weyl (ölçek) dönüşümleri* olarak adlandırılır. Metrik bileşenleri üzerindeki yeni koşul, öncekine göre daha genel olduğu için (yeni durumda formu invariant olmak zorunda değil), sonuçta elde edilen Weyl dönüşümlerinin de, Poincaré dönüşümlerinden daha genel olmasını beklemek akla yatkındır.

Genel olarak metrik bileşenleri aşağıdaki gibi dönüşür

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow \eta'_{\mu\nu} = S(x)\eta_{\mu\nu} \quad (5.1.33)$$

Dolayısıyla, $\eta_{\mu\nu}$ bileşenlerin form varyasyonu şu şekilde olur

$$\delta_0 \eta_{\mu\nu} = \eta'_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} = (S(x) - 1) \eta_{\mu\nu} \quad (5.1.34)$$

$S(x) = 1$ seçilirse bir önceki bölümde (Poincaré dönüşümü) varılan sonuç elde edilir. Bu seçimin dışında, $\eta_{\mu\nu}$ bileşenlerin form değişimi serbest bırakılmış olur. Denk.(5.1.5) ile verilen koordinat dönüşümü kullanılırsa aşağıdaki ifade yazılabilir

$$-(\xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu}) = (S(x) - 1) \eta_{\mu\nu} = -\frac{2}{D}(\partial \cdot \xi) \eta_{\mu\nu} \quad (5.1.35)$$

burada D , manifoldun boyutudur ve $\partial \cdot \xi := \partial_\mu \xi^\mu$. Yukarıda verilen eşitlik bir önceki bölümde Denk.(5.1.9) ile verilen Killing denkleminin benzeridir ve bu sefer *konformal Killing denklemi* olarak adlandırılır. Yine, seri açılımı uygulanarak ξ^μ için aşağıdaki ifade elde edilir

$$\xi^\mu(x) = \tau^\mu + \theta^\mu{}_\nu x^\nu + \rho x^\mu \quad (5.1.36)$$

Burada τ^μ ve $\theta^\mu{}_\nu$ Poincaré transformasyonlarını oluşturan on parametre ve ρ ölçek transformasyonunu tarif eden bir adet *genişleme veya dilatasyon (dilatation)* parametresidir. Böylece, toplamda 11 parametrelili (τ, θ, ρ) Weyl (ölçek) transformasyonları elde edilir. Denk.(5.1.4) yardımıyla, ϕ skaler alanın Weyl dönüşümü aşağıdaki gibi verilir

$$\begin{aligned}\delta_0\phi(x) &= -\xi^\mu\partial_\mu\phi(x) \\ &= \left(\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}L_{\mu\nu} + \tau^\mu P_\mu + \rho C\right)\phi(x)\end{aligned}\quad (5.1.37)$$

burada jeneratörler şu şekilde tanımlanır

$$\begin{aligned}L_{\mu\nu} &:= x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu \\ P_\mu &= -\partial_\mu \\ C &= -x \cdot \partial = -x^\mu\partial_\mu\end{aligned}\quad (5.1.38)$$

Jeneratörler aşağıdaki Lie cebirini sağlar

$$\begin{aligned}[L_{\mu\nu}, L_{\lambda\rho}] &= \eta_{\nu\lambda}L_{\mu\rho} - \eta_{\mu\lambda}L_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}L_{\mu\lambda} + \eta_{\mu\rho}L_{\nu\lambda} \\ &= \frac{1}{2}f_{\mu\nu,\lambda\rho}{}^{\tau\sigma}L_{\tau\sigma} \\ [L_{\mu\nu}, P_\lambda] &= \eta_{\nu\lambda}P_\mu - \eta_{\mu\lambda}P_\nu \\ [P_\mu, P_\nu] &= 0 \\ [L_{\mu\nu}, C] &= 0 \\ [P_\mu, C] &= -P_\mu \\ [C, C] &= 0\end{aligned}\quad (5.1.39)$$

Açıklama. Genel bir dinamik alan için ϕ , dilatasyon jeneratörü aşağıdaki formda olabilir

$$D = -x \cdot \partial + s = C + s, \quad s \in \mathbb{R} \quad (5.1.40)$$

burada s *ölçek boyutu* olarak adlandırılır. $\square$

Açıklama. Denk.(5.1.35) için verilebilecek en genel çözüm şu formda olabilir

$$\xi^\mu(x) = \tau^\mu + \theta^\mu{}_\nu x^\nu + \rho x^\mu + (c^\mu x^2 - 2cx^\mu) \quad (5.1.41)$$

burada c^μ *özel konformal transformasyonları* tanımlar. Dolayısıyla, toplamda bu 15 parametre (τ, θ, ρ, c) , *konformal transformasyonları* tanımlar. Bununla ilişkili olarak, ϕ skaler alanın form varyasyonu şu şekilde verilebilir

$$\delta_0\phi(x) = \left(\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}M_{\mu\nu} + \tau^\mu P_\mu + \rho D + c^\mu K_\mu\right)\phi(x) \quad (5.1.42)$$

Jeneratörler konformal grubu $C(1, 3)$ oluşturur ve bu grubun Lie cebiri aşağıdaki gibi tanımlanır

$$\begin{aligned}
[M_{\mu\nu}, M_{\lambda\rho}] &= \eta_{\nu\lambda}M_{\mu\rho} - \eta_{\mu\lambda}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\lambda} + \eta_{\mu\rho}M_{\nu\lambda} \\
&= \frac{1}{2}f_{\mu\nu,\lambda\rho}{}^{\tau\sigma}M_{\tau\sigma} \\
[M_{\mu\nu}, P_\lambda] &= \eta_{\nu\lambda}P_\mu - \eta_{\mu\lambda}P_\nu \\
[P_\mu, P_\nu] &= 0 \\
[M_{\mu\nu}, D] &= 0 \\
[P_\mu, D] &= -P_\mu \\
[D, D] &= 0 \\
[M_{\mu\nu}, K_\lambda] &= \eta_{\nu\lambda}K_\mu - \eta_{\mu\lambda}K_\nu \\
[P_\mu, K_\nu] &= 2(M_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}D) \\
[D, K_\mu] &= -K_\mu \\
[K_\mu, K_\nu] &= 0
\end{aligned} \tag{5.1.43}$$

Bunlara göre şu söylenebilir : Weyl grup $W(1, 3)$, konformal grubun $C(1, 3)$ bir alt grubudur. $\square$

Korunum yasaları Tekrar Denk.(5.1.20) ile verilen eylemi göz önüne alalım. Bu eylem üzerine $\delta I = 0$ koşulunu empoze edelim. Bununla birlikte, aşağıda gibi, ölçek dönüşümlerine göre form varyasyonları da verilsin

$$\begin{aligned}
\delta_0\phi &= -\rho(x \cdot \partial - s)\phi \\
\delta_0\phi_{,\nu} &= -\rho(\delta_\nu^\mu \partial_\mu)\phi - \rho(x \cdot \partial - s)\phi_{,\nu} \\
&= -\rho(1 - s + x \cdot \partial)\phi_{,\nu}
\end{aligned} \tag{5.1.44}$$

Ardından, Poincaré dönüşümlerinin rotasyon (Lorentz) ve öteleme simetrilerinin yanında, ölçek simetrisi koşulu da aşağıdaki gibi verilebilir

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta_0\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_0(\partial_\mu \phi) + \xi^\mu \partial_\mu \mathcal{L} + \mathcal{L} \partial_\mu \xi^\mu \\
&= \theta^\mu{}_\nu [\text{Lorentz simetri koşulu, bkz. Denk.(5.1.25a)}] \\
&+ \tau^\mu [\text{öteleme simetri koşulu, bkz. Denk.(5.1.25b)}] \\
&+ \rho \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} s\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\nu}} (s - 1) + 4\mathcal{L} \right]
\end{aligned} \tag{5.1.45}$$

Yukarıdaki ifadede eşitliğin sağ tarafındaki son terim, Lagrangiyenin ölçek simetri koşulunu verir. Son olarak, önceki bölümde Denk.(5.1.27) ile verilen Noether

akımı da aşağıdaki gibi güncellenebilir

$$J^\mu := \frac{1}{2}\theta^{\nu\lambda}M^\mu{}_{\nu\lambda} - \tau^\nu T^\mu{}_\nu - \rho D^\mu \quad (5.1.46)$$

burada $T^\mu{}_\nu$ ve $M^\mu{}_{\nu\lambda}$, sırasıyla, Denk.(5.1.28) ile verilen lineer momentum (enerji-momentum) ve açısal momentum tensörleridir ve

$$D^\mu := x_\nu T^{\mu\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} s\phi \quad (5.1.47)$$

ise dilatasyon akımıdır. Sonuç olarak, $\partial_\mu J^\mu = 0$ koşulu Denk.(5.1.31) ile verilen önceki korunum yasalarını sağladığı gibi Weyl dönüşümlerine ilişkin aşağıdaki yeni korunum yasasını da sağlar

$$\partial_\mu D^\mu = 0 \quad (5.1.48)$$

5.1.2 Poincaré ayar teorisi

Bu bölümde, Bölüm 5.1.1.1 altında verilen Poincare simetrisi genelleştirilecektir, öyle ki dönüşüm parametreleri artık sabit değil birer alan olacak. M_4 ile başlayalım. $\{\partial_\mu\}$ global çerçevenin dışında, her zaman bir ortonormal (Lorentz) çerçeve $\{e_i(x)\}$ seçilebilir, öyle ki şu koşulu sağlasın $g(e_i, e_j) = \eta_{ij}$. Bununla beraber, bir madde alanı $\phi(x)$ her zaman bir Lorentz çerçevesine (veya ortonormal çerçeveye) iliştirilebilir. Böylece koordinat çerçevesinde ve Lorentz çerçevesinde farklı temsilleri verilebilir. İlerleyen kısımlarda, Poincaré transformasyonu altında, verilen madde alanının her iki çerçevedeki davranışı incelenecektir. Bölüm 5.1.1.1 altında da verildiği gibi, $x^i \rightarrow x^i + \xi^i$ koordinat dönüşümü altında madde alanının transformasyonu aşağıdaki gibi olur¹ (bkz. Denk.(5.1.14), Denk.(5.1.15) ve Denk.(5.1.19))

$$\begin{aligned} \delta_0^P \phi &\equiv \delta_0 \phi = -\xi^i \partial_i \phi + \frac{1}{2} \theta^{ij} \Sigma_{ij} \\ &= \left(\frac{1}{2} \theta^{ij} M_{ij} + \tau^i P_i \right) \phi \equiv \left(\frac{1}{2} \theta \cdot M + \tau \cdot P \right) \phi \equiv \mathcal{P} \phi \end{aligned} \quad (5.1.49)$$

Burada δ_0^P gösterimi ile, global Poincaré dönüşümü altındaki varyasyon işlemi ve $\mathcal{P}$ gösterimi ile de, bu varyasyon işleminde kullanılan parametreler ve jeneratörler temsil edilmiştir. Σ spin jeneratörüdür. Bu bölümde, global Poincaré dönüşümleri incelenirken kullanılan *varyasyon notasyonundan* farklı ve buna ek olarak, grup yapısının *üstel gösterimini* kullanarak da işlem yapacağız. Bu notasyonda, Denk.(5.1.49) ile verilen dönüşüm aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\phi' = e^{\mathcal{P}} \phi \quad (5.1.50)$$

¹Aksi belirtilmedikçe, en genelde içsel spine de sahip bir alan varsayılacaktır.

Burada ϕ' , Poincaré dönüşümü sonrasında elde edilen yeni alanı temsil eder. İki notasyon arasındaki geçiş için, birinci derece yaklaşıklık² uygulayalım ve yukarıda verilen iki dönüşüm ifadesinin eşdeğer olduğunu aşağıdaki gibi gösterebiliriz

$$\phi' = e^{\mathcal{P}}\phi \approx (1 + \mathcal{P})\phi = \phi + \mathcal{P}\phi \quad (5.1.51)$$

Buna göre

$$\delta_0^{\mathcal{P}}\phi = \phi' - \phi = \mathcal{P}\phi \quad (5.1.52)$$

öyle ki Denk.(5.1.49) ifadesi ile aynıdır. Şimdi, sabit olan dönüşüm parametreleri, koordinat fonksiyonu olacak şekilde değiştirilsin, $\theta^{ij} = \theta^{ij}(x^\mu)$, $\tau^i = \tau^i(x^\mu)$. Dönüşüm parametrelerinin bu şekilde birer uzayzaman alanı olarak yeniden tanımlanmasıyla, aslında eylemin form invaryanslığı ihlal edilmiş olur, bkz. Denk.(5.1.23), iki sebepten ötürü.

1. $\partial_\mu\phi$ terimi için sağlanan "eski" dönüşüm kuralı³, bkz. Denk.(5.1.54a), yeni durumda değişmiştir, bkz. Denk.(5.1.54b).
2. Artık $\partial_\mu\xi^\mu \neq 0$ olur.

Eylemin yeniden invaryans olmasını sağlamak adına, yukarıda verilen iki durumla da ilgileneceğiz.

Adım #1. İlk olarak $\partial_\mu\phi$ terimini ele alalım. Denk.(5.1.51) kullanılarak, üstel notasyonda aşağıdaki ifade yazılabilir

$$\partial_\lambda\phi' = e^{\mathcal{P}}\partial_\lambda\phi + (\partial_\lambda\mathcal{P})e^{\mathcal{P}}\phi \quad (5.1.53)$$

Burada $\partial_\lambda\mathcal{P}$ ifadesi önemlidir, zira türev ifadesi içerdiği için lokal Poincaré dönüşümleri altında yeni katkı terimleri oluşturacaktır. Lokalizasyon yapılmadan önce (global Poincaré dönüşümü altında) aşağıdaki *eski* dönüşüm kuralı geçerliydi

$$\partial_\lambda^{\mathcal{P}}\phi \equiv \partial_\lambda\phi' = e^{\mathcal{P}}\partial_\lambda\phi - \xi^i{}_{,\lambda}\partial_i\phi \quad (5.1.54a)$$

Burada $\partial_\lambda^{\mathcal{P}}\phi$ ifadesi ile, global Poincaré dönüşümü altında $\partial_\lambda\phi$ işlemi temsil edilmiştir. "Yeni" dönüşüm kuralı⁴ ise şu şekilde verilebilir

$$\begin{aligned} \partial_\lambda^{P(x)}\phi \equiv \partial_\lambda\phi' &= e^{\mathcal{P}}\partial_\lambda\phi - \xi^i{}_{,\lambda}\partial_i\phi + \frac{1}{2}\theta^{ij}{}_{,\lambda}\Sigma_{ij}\phi \\ &= \underbrace{\partial_\lambda^{\mathcal{P}}\phi}_{\text{Eski dönüşüm kuralı}} + \underbrace{\frac{1}{2}\theta^{ij}{}_{,\lambda}\Sigma_{ij}\phi}_{\text{Lokalizasyondan gelen katkı}} \end{aligned} \quad (5.1.54b)$$

²Diğer bir ifadeyle, sonsuz küçük dönüşümün, $\mathcal{P} \ll 1$, uygulandığı durumdur.

³"Eski" ifadesi ile global Poincaré dönüşümü altındaki kural kastedilmiştir.

⁴"Yeni" ifadesi ile lokal Poincaré dönüşümü altındaki kural kastedilmiştir.

Burada $\partial_\lambda^{P(x)}\phi$ ifadesi ile, lokal Poincarè dönüşümü altında $\partial_\lambda\phi$ işlemi temsil edilmiştir. Buna göre, özetle aşağıdaki ifade yazılabilir

$$\partial_\lambda^{P(x)}\phi = \partial_\lambda^P\phi + \mathcal{P}_\lambda \quad (5.1.55)$$

burada

$$\mathcal{P}_\lambda := \frac{1}{2}\theta^{ij}{}_{,\lambda}\Sigma_{ij}\phi \quad (5.1.56)$$

ile lokalizasyondan kaynaklı terim temsil edilmiştir.

Açıklama. Varyasyon notasyonunda Denk.(5.1.53) ifadesi aşağıdaki gibi verilebilir

$$\partial_\lambda\phi' \approx \partial_\lambda\phi + \mathcal{P}\partial_\lambda\phi + (\partial_\lambda\mathcal{P})\phi \quad \Rightarrow \quad \delta_0\partial_\lambda\phi = \mathcal{P}\partial_\lambda\phi + (\partial_\lambda\mathcal{P})\phi \quad (5.1.57a)$$

Denk.(5.1.54a) ifadesi aşağıdaki gibi verilebilir

$$\delta_0^P\partial_\lambda\phi = \mathcal{P}\partial_\lambda\phi - \xi^i{}_{,\lambda}\partial_i\phi \quad (5.1.57b)$$

Denk.(5.1.54b) ifadesi aşağıdaki gibi verilebilir

$$\begin{aligned} \delta_0^{P(x)}\partial_\lambda\phi &= \mathcal{P}\partial_\lambda\phi - \xi^i{}_{,\lambda}\partial_i\phi + \frac{1}{2}\theta^{ij}{}_{,\lambda}\Sigma_{ij}\phi \\ &= \delta_0^P\partial_\lambda\phi + \mathcal{P}_\lambda \end{aligned} \quad (5.1.57c)$$

Burada $\delta_0^{P(x)}$ ifadesi ile, lokal Poincarè dönüşümü altındaki varyasyon işlemi temsil edilmiştir. $\square$

Denk.(5.1.54b) ile verilen eşitliğin sağ tarafındaki ilk terim global dönüşüm altında $\partial_\lambda\phi$ işlemi iken, son terim lokal dönüşümden kaynaklanan (lokal rotasyon parametresinin türevini içeren) katkıdır. Eylemin invaryanslığı için istenilen odur ki, $\partial_\lambda\phi$ terimi, lokal Poincarè dönüşümü altında da halen Denk.(5.1.54a) ile verilen *eski* dönüşüm kuralına tabi olsun. Bunun için -yani Denk.(5.1.54b) ile verilen eşitliğin sağ tarafındaki (lokal) terimin etkilerini ortadan kaldırmak için- aşağıdaki gibi, *eski* kurala göre dönüşen bir kovaryant türev tanımlanır

$$\nabla_\lambda^{P(x)}\phi \equiv \nabla_\lambda\phi' = e^P\nabla_\lambda\phi - \xi^i{}_{,\lambda}\nabla_i\phi \quad (5.1.58)$$

burada

$$\nabla_\lambda\phi := (\partial_\lambda + A_\lambda)\phi \quad (5.1.59)$$

ve

$$A_\lambda := \frac{1}{2}A^{ij}{}_{\lambda}\Sigma_{ij} \quad (5.1.60)$$

ile verilebilir. Burada A_λ (veya A^{ij}_λ) bağlantı nesnesidir ve lokal Poincaré transformasyonu altında aşağıdaki gibi dönüşür

$$\delta_0 A_\lambda = [\mathcal{P}, A_\lambda] - \xi^i_{, \lambda} A_i - \mathcal{P}_\lambda \quad (5.1.61)$$

Adım #2. Bu adımda, eylemin varyasyon ifadesindeki $\partial_\mu \xi^\mu$ terimi ile ilgilenelim. Bu terim global Poincaré dönüşümü altında sıfırlanırken lokal dönüşüm altında sıfır değildir ve dolayısıyla eylemin invaryanslığını ihlal etmiş olur. İlk olarak, Denk.(5.1.58) ile verilen kovaryant türev ifadesine yeniden bakalım. Görüleceği üzere koordinat çerçevesinde $\nabla_\lambda \phi$ verilen bu tanımın içinde, Lorentz çerçevesindeki $\nabla_i \phi$ kovaryant türev işlemi de yer almaktadır ve Lorentz çerçevesindeki bu kovaryant türev de yine *eski* kurala göre dönüşür

$$\nabla_k \phi' = e^{\mathcal{P}} \nabla_k \phi - \xi^i_{, k} \nabla_i \phi \quad (5.1.62)$$

Her iki çerçevede çalışan bu kovaryant türev işlemleri arasındaki ilişkiyi, yeni bir h_k^λ alanı tanımlayarak, aşağıdaki gibi verelim

$$\nabla_k \phi = h_k^\lambda \nabla_\lambda \phi \quad (5.1.63)$$

öyle ki h alanı için dönüşüm kuralı şu şekilde yazılabilir

$$\delta_0 h_k^\lambda = \theta_k^i h_i^\lambda + \xi^i_{, \mu} h_k^\mu h_i^\lambda - \xi^i h_k^\lambda_{, i} \quad (5.1.64)$$

Şimdiye kadar yapılan düzenlemelerle madde alanının Lagrangiyen ifadesi aşağıdaki gibi evrilmiş oldu

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\lambda \phi) \rightarrow \bar{\mathcal{L}}(\phi, \nabla_\lambda \phi) \rightarrow \mathcal{L}'(\phi, \nabla_k \phi) \quad (5.1.65)$$

öyle ki en son Lagrangiyenin içerdiği dinamik alanlar şöyle verilebilir

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}'(\phi, A^{ij}_\lambda, h_k^\lambda) \quad (5.1.66)$$

Bu Lagrangiyen için modifiye edilmiş varyasyon ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}' &= \delta_0 \mathcal{L}' + \left[\mathcal{L}' \partial_\mu \xi^\mu \right] \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \phi} \delta_0 \phi + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\nabla_k \phi)} \delta_0 (\nabla_k \phi) + \xi^\mu \partial_\mu \mathcal{L}' + \left[\mathcal{L}' \partial_\mu \xi^\mu \right] \end{aligned} \quad (5.1.67)$$

Görüldüğü üzere, skaler alanın türevinin varyasyonundan gelen $\delta_0 \partial_\mu \phi$ ekstra terimler kovaryant formülasyon sayesinde $\delta_0 (\nabla_k \phi)$ ortadan kaldırılabilir. Şimdi ise, $\partial_\mu \xi^\mu$ teriminin (lokal) etkisini ortadan kaldırmak için, Lagrangiyen aşağıdaki gibi, uygun bir Λ fonksiyonu ile modifiye edilsin

$$\mathcal{L}' \rightarrow \tilde{\mathcal{L}} = \Lambda \mathcal{L}' \quad (5.1.68)$$

öyle ki bu yeni Λ alanı, teorinin mevcuttaki dinamik alanlarının bir fonksiyonu olsun

$$\Lambda = \Lambda(A^{ij}_{\lambda}, h_k^{\lambda}) \quad (5.1.69)$$

Modifiye edilen bu yeni Lagrangiyen ifadesi $\tilde{\mathcal{L}}$ yukarıdaki varyasyon işleminde kullanılır ve $\delta I = 0$ koşulu empoze edilirse, Λ alanı için aşağıdaki koşul elde edilir

$$0 = \delta_0 \Lambda + \partial_{\mu}(\xi^{\mu} \Lambda) \quad (5.1.70)$$

Bu denklemin çözümü için $\Lambda \equiv \Lambda(h_k^{\lambda})$ varsayılırsa, denklem aşağıdaki forma dönüşür

$$0 = \xi^i{}_{,\nu} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial h_k^{\lambda}} h_i^{\lambda} h_k^{\nu} + h_i^{\nu} \Lambda \right) + \frac{1}{2} \theta^{ij} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial h_k^{\lambda}} h_j^{\lambda} \eta_{ik} - \frac{\partial \Lambda}{\partial h_k^{\lambda}} h_i^{\lambda} \eta_{jk} \right) \quad (5.1.71)$$

Rastgele θ ve τ dönüşüm parametreleri için, yukarıdaki eşitlikte parantez içindeki terimler sıfırlanır. Aşağıdaki gibi, h_k^{λ} alanının tersi tanımlanırsa

$$h_k^{\mu} b^k{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}, \quad h_j^{\lambda} b^i{}_{\lambda} = \delta^i_j \quad (5.1.72)$$

Λ alanı için aşağıdaki gibi bir çözüm bulunabilir

$$\Lambda = \det b^k{}_{\lambda} =: b \quad (5.1.73)$$

Sonuç olarak Lagrangiyenin final formu aşağıdaki gibi verilir

$$\tilde{\mathcal{L}} = b \mathcal{L}'(\phi, \nabla_k \phi) \quad (5.1.74)$$

Son aşamada elde edilen Lagrangiyen ifadesi artık lokal Poincaré dönüşümü altında invarianttır.

Bu sonuca erişmek için, yukarıdaki iki adımda verilen işlemler uygulandı. Özetle,

- $\partial_{\lambda} \phi \rightarrow \partial_k \phi \rightarrow \nabla_k \phi$ dönüşümü gerçekleştirildi, öyle ki bu sayede yeni tanımlanan kompanzator (ayar) alanları h_k^{μ} ve A^{ij}_{μ} sayesinde, öteleme ve Lorentz rotasyon dönüşümlerini belirleyen lokal parametrelerin etkisi ortadan kaldırıldı.
- Lagrangiyen ifadesi, yeni tanımlanan ayar alanı ile modifiye edildi, $b := (\det h_k^{\mu})^{-1} = \det b^k{}_{\mu}$

Yorumlar.

- Poincaré simetrisinin lokalize edilmesinin ardından tüm kanonik türevler ∂_k , kovaryant karşılıkları ∇_k ile değiştirilmelidir. Buna jeneratör tanımlarındaki ifadeler de dahildir, ör. $P_k = -\partial_k \rightarrow -\nabla_k$

- Gözlenebileceği üzere, öteleme ayar alanı h_k^μ (b_k^μ), tensörlerin Lorentz (lokal, ortonormal) çerçeve indisleri ile koordinat (global, dünya) çerçeve indislerinin birbirlerine dönüşmesi için kullanılabilir, ör. $h_k^\mu H^\nu_k = H^\mu_\nu$
- Madde alanının spin matrisi Σ_{ij} , dolayısıyla da Lorentz ayar alanı A^{ij}_λ , sadece maddenin Lorentz dönüşüm özellikleri ile ilişkilidir (Lorentz rotasyon parametresi ile çiftlenmiştir). Buna göre, Lorentz dönüşümü altında önemsiz olmayan bir biçimde dönüşen genel bir alanın, (Lorentz) kovaryant türevi aşağıdaki gibi tanımlanabilir, ör.

$$\nabla_\mu H^i_j = \partial_\mu H^i_j + A^i_{k\mu} H^k_j - A^k_{j\mu} H^i_k \quad (5.1.75)$$

Tanımlanan iki ayar alanı h_k^μ ve A^{ij}_μ için, lokal ve global çerçevelerdeki alan şiddetleri aşağıdaki gibi verilebilir

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\phi = \frac{1}{2} F^{ij}_{\mu\nu} \Sigma_{ij} \phi \quad (5.1.76a)$$

$$[\nabla_k, \nabla_l]\phi = \frac{1}{2} F^{ij}_{kl} \Sigma_{ij} \phi + F^i_{kl} \overset{\nabla}{P}_i \phi \quad (5.1.76b)$$

burada

$$\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu =: \frac{1}{2} F^{ij}_{\mu\nu} \Sigma_{ij} \quad (5.1.77a)$$

$$\nabla_\mu b^i_\nu - \nabla_\nu b^i_\mu =: F^i_{\mu\nu} \quad (5.1.77b)$$

ve

$$F^{ij}_{kl} := h_k^\mu h_l^\nu F^{ij}_{\mu\nu} \quad (5.1.78a)$$

$$F^i_{kl} := h_k^\mu h_l^\nu F^i_{\mu\nu} \quad (5.1.78b)$$

Yukarıda tanımlanan $F^{ij}_{\mu\nu}$ ve $F^i_{\mu\nu}$ nesneleri, sırasıyla, *Lorentz alan şiddeti* ve *öteleme alan şiddeti* olarak adlandırılır. $\overset{\nabla}{P}_i := -\nabla_i$ kovaryant öteleme jeneratörünü temsil eder. Görüldüğü üzere, Lorentz alan şiddeti, spin jeneratörü Σ_{ij} ile çiftlenirken, öteleme alan şiddeti ise kovaryant öteleme jeneratörü $\overset{\nabla}{P}_i$ ile çiftlenir. Bu alan şiddetleri aşağıdaki gibi, Bianchi özdeşliklerini sağlar

$$\nabla_\lambda F^i_{\mu\nu} = F^i_{j\mu\nu} b^j_\lambda \quad (5.1.79a)$$

$$\nabla_\lambda F^{ij}_{\mu\nu} = 0 \quad (5.1.79b)$$

En başta ele alınan (global simetrik) teoride yalnızca madde alanı var iken, şimdi (lokal simetrik) yeni teoride kompanzasyon (ayar) alanları da mevcuttur. Bu ayar alanları kullanılarak ilgili şiddetler de tanımlanabildi. Sonuç olarak, tüm dinamik

alanları içeren ve lokal simetriye sahip yeni bir tüm Lagrangiyen aşağıdaki gibi verilebilir

$$\tilde{\mathcal{L}} = b\mathcal{L}_F(F^{ij}_{\mu\nu}, F^i_{\mu\nu}) + b\mathcal{L}_M(\phi, \nabla_k \phi) \quad (5.1.80)$$

Burada $\mathcal{L}_M$ parçası madde alanını, bunun dinamiğini ve ayar alanlarını içerirken, $\mathcal{L}_F$ parçası ise ayar alanlarının dinamiğini içerir.

5.1.2.1 Geometrik yapı

Diferansiyellenebilir bir manifoldta, paralel taşıma işleminin gerçekleştirilebilmesi için bir bağlantı nesnesi Γ tanımlanabilir

$$V^\mu_{PT}(x + dx) = V^\mu(x) + \Delta V^\mu \quad \Delta V^\mu = -\Gamma^\mu_{\lambda\rho} V^\lambda dx^\rho \quad (5.1.81)$$

Bu bağlantı nesnesi ile ilişkili kovaryant türev şöyle verilebilir

$$D(\Gamma)V^\mu = (\partial_\rho V^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\rho} V^\lambda) dx^\rho \quad (5.1.82)$$

Dahası, bu bağlantı nesnesinin torsiyon ve eğrilik nicelikleri aşağıdaki gibi oluşturulabilir

$$T^\mu_{\lambda\rho} = \Gamma^\mu_{\rho\lambda} - \Gamma^\mu_{\lambda\rho} \quad (5.1.83a)$$

$$R^\mu_{\nu\lambda\rho} = \partial_\lambda \Gamma^\mu_{\nu\rho} - \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} \Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\mu_{\sigma\rho} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \quad (5.1.83b)$$

Genelde, metrik uyumlu bir bağlantı nesnesi için aşağıdaki ayrıştırma yapılabilir

$$\Gamma^\mu_{\lambda\nu} = \tilde{\Gamma}^\mu_{\lambda\nu} + K^\mu_{\lambda\nu} \quad (5.1.84)$$

burada

$$\tilde{\Gamma}^\mu_{\lambda\nu} := \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (g_{\nu\rho,\lambda} + g_{\lambda\rho,\nu} - g_{\lambda\nu,\rho}) \quad (5.1.85a)$$

$$K^\mu_{\lambda\nu} := -\frac{1}{2} (T^\mu_{\lambda\nu} - T^\mu_{\nu\lambda} + T^\mu_{\lambda\nu}) \quad (5.1.85b)$$

sırasıyla, Christoffel sembolleri (Levi-Civita bağlantı katkısı) ve kontrosiyondur. Böyle bir geometri, öyle ki metrik uyumlu en genel bağlantı nesnesi içeren, Riemann-Cartan geometrisi olarak adlandırılır. Koordinat ve Lorentz çerçeve indisleri arasındaki geçiş için tetrad (*vielbein*) nesnesi e aşağıdaki gibi verilebilir

$$e_\mu = e^i_\mu e_i \quad e_i = e_i^\mu e_\mu \quad \text{burada} \quad e_i^\mu := (e^i_\mu)^{-1} \quad (5.1.86)$$

Tetrad, literatürdeki birçok çalışmada önemli olmaktadır. Zira, Lorentz çerçevesindeki nesnelerin koordinat çerçevesine göre nasıl değiştiklerini ifade etmemizi sağlayan, *spin bağlantı* nesnesinin ω^{ij}_μ tanımını verir

$$du^i = -\omega^i_{j\mu} u^j dx^\mu \quad (5.1.87)$$

öyle ki

$$\omega^{ij}_{\mu} = e^i_{\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\rho\mu} e_j^{\rho} + (\partial_{\mu} e^i_{\lambda}) e_i^{\lambda} \quad (5.1.88)$$

Spin bağlantı katsayılarının indislerindeki antisimetri koşulu tanım gereği sağlanır

$$\omega^{ij}_{\mu} + \omega^{ji}_{\mu} = 0 \quad (5.1.89)$$

Buna göre, Lorentz çerçevesindeki nesneler için kovaryant türev aşağıdaki gibi tanımlanabilir

$$D(\omega)u^i = (\partial_{\mu} u^i + \omega^i_{j\mu} u^j) dx^{\mu} \quad (5.1.90)$$

Lorentz kovaryant türev $D(\omega)$, Lorentz grubunun bazı gösterimlerini taşıyan rastgele nesneler Ψ için genelleştirilebilir

$$D(\omega)\Psi = (\partial_{\mu} + \omega_{\mu})\Psi dx^{\mu} \quad \omega_{\mu} := \frac{1}{2} \omega^{ij}_{\mu} \Sigma_{ij} \quad (5.1.91)$$

Dahası, spin bağlantı ve tetrad nesneleri için alan şiddetleri, Lorentz çerçevesinde olağan prosedür ile tanımlanabilir. Tanımlanan bu şiddetler, tetrad yardımıyla, koordinat çerçevesinde verilen eğrilik ve torsiyon ile eşleştirilebilir

$$T^{\mu}_{\nu\lambda}(\Gamma) = e_i^{\mu} F^i_{\nu\lambda}(\omega) \quad (5.1.92a)$$

$$R^{\mu\nu}_{\lambda\rho}(\Gamma) = e_i^{\mu} e_j^{\nu} F^{ij}_{\lambda\rho}(\omega) \quad (5.1.92b)$$

Özetle,

- Poincaré ayar teorisi bağlamındaki ayar alanları A^{ij}_{μ} ve b^i_{μ} , sırasıyla spin bağlantı ω^{ij}_{μ} ve tetrad e^i_{μ} ile eşleştirilebilir.
- Buna göre, Poincaré ayar teorisi bağlamındaki kovaryant türev $\nabla_{\mu}(A)$, geometrik kovaryant türev $D_{\mu}(\omega)$ ile eşleştirilebilir.
- Poincaré ayar teorisinde, metriğin form değişmezliğini $\delta_0 \eta_{ij} = 0$ gerektiren lokal simetri, geometrideki metrisiti koşulu ile eşleştirilebilir $D\eta_{ij} =: Q_{ij} = 0$.

Sonuç olarak iddia edilebilir ki, *Poincaré ayar teorisi, Riemann-Cartan geometrisi ile verilen geometrik bir yapıya sahiptir!*

5.1.3 Weyl ayar teorisi

Bu bölümde, Bölüm 5.1.1.2 altında verilen global Weyl (ölçek) dönüşümleri genelleştirilecektir, yani dönüşüm parametreleri artık sabit olarak değil uzayzaman alanları olarak yorumlanacaktır. Söz konusu genelleştirme için, Bölüm 5.1.1.1 ile verilen global

Poincaré transformasyonlarının Bölüm 5.1.2 altında genelleştirilmesi esnasında izlenen yol takip edilecektir. İlk olarak Lorentz (ortonormal) çerçevesinde verilen bir madde alanının global Weyl transformasyonu altında nasıl dönüştüğünü hatırlayalım, bkz. Denk.(5.1.37)

$$\begin{aligned}\delta_0^W \phi &\equiv \delta_0 \phi = -\xi^i \partial_i \phi + \frac{1}{2} \theta^{ij} \Sigma_{ij} \phi + \rho s \phi \\ &= \left(\frac{1}{2} \theta^{ij} M_{ij} + \tau^i P_i - \rho x^i \partial_i + \rho s \right) \phi \\ &\equiv \left(\frac{1}{2} \theta \cdot M + \tau \cdot P + \rho \cdot D \right) \phi \equiv \mathcal{W} \phi\end{aligned}\quad (5.1.93)$$

Burada δ_0^W gösterimi ile, global Weyl dönüşümü altındaki varyasyon işlemi ve $\mathcal{W}$ gösterimi ile de, bu varyasyon işleminde kullanılan parametreler ve jeneratörler temsil edilmiştir. Bunun yanında global Weyl dönüşüm parametreleri için $\partial_i \xi^i = 4\rho$ olduğunu da hatırlayalım. Şimdi, sabit olan dönüşüm parametreleri uzayzaman alanı olarak değiştirilsin $\theta^{ij} = \theta^{ij}(x^\mu)$, $\tau^i = \tau^i(x^\mu)$, $\rho = \rho(x^\mu)$. Bu değişikliğin sonucu olarak eylemin invaryanslığı ihlal edilmiş olur, iki sebepten ötürü.

1. $\delta_0 \partial_\mu \phi$ terimi için sağlanan *eski* dönüşüm kuralı yeni durumda değişmiştir, zira parametrelerin türev terimlerini içerir.
2. Artık $\partial_\mu \xi^\mu \neq 4\rho$ olur.

Adım #1. İlk olarak $\partial_\mu \phi$ terimini ele alalım. Lokalizasyon yapılmadan önce (global Weyl dönüşümü altında) aşağıdaki *eski* dönüşüm kuralı geçerliydi

$$\partial_\lambda^W \phi \equiv \partial_\lambda \phi' = e^{\mathcal{W}} \partial_\lambda \phi - \xi^i{}_{,\lambda} \partial_i \phi \quad (5.1.94a)$$

Burada $\partial_\lambda^W \phi$ ifadesi ile, global Weyl dönüşümü altında $\partial_\lambda \phi$ işlemi temsil edilmiştir. *Yeni* dönüşüm kuralı ise şu şekilde verilebilir

$$\begin{aligned}\partial_\lambda^{W(x)} \phi &\equiv \partial_\lambda \phi' = e^{\mathcal{W}} \partial_\lambda \phi - \xi^i{}_{,\lambda} \partial_i \phi + \frac{1}{2} \theta^{ij}{}_{,\lambda} \Sigma_{ij} \phi + \rho_{,\lambda} s \phi \\ &= \underbrace{\partial_\lambda^W \phi}_{\text{Eski dönüşüm kuralı}} + \underbrace{\frac{1}{2} \theta^{ij}{}_{,\lambda} \Sigma_{ij} \phi + \rho_{,\lambda} s \phi}_{\text{Lokalizasyondan gelen katkı}}\end{aligned}\quad (5.1.94b)$$

Burada $\partial_\lambda^{W(x)} \phi$ ifadesi ile, lokal Weyl dönüşümü altında $\partial_\lambda \phi$ işlemi temsil edilmiştir. Buna göre, özetle aşağıdaki ifade yazılabilir

$$\partial_\lambda^{W(x)} \phi = \partial_\lambda^W \phi + \mathcal{W}_\lambda \quad (5.1.95)$$

burada

$$\mathcal{W}_\lambda := \frac{1}{2} \theta^{ij}{}_{,\lambda} \Sigma_{ij} \phi + \rho_{,\lambda} s \phi \quad (5.1.96)$$

ile lokalizasyondan kaynaklı terim temsil edilmiştir. Denk.(5.1.94b) ile verilen eşitliğin sağ tarafındaki ilk terim global dönüşüm altında $\partial_\lambda \phi$ işlemi iken, son iki terim lokal dönüşümden kaynaklanan (lokal rotasyon ve ölçek parametrelerinin türevlerini içeren) katkılardır. Eylemin invaryanslığı için istenilen odur ki, $\partial_\lambda \phi$ terimi, lokal Weyl dönüşümü altında da halen Denk.(5.1.94a) ile verilen *eski* dönüşüm kuralına tabi olsun. Bunun için -yani Denk.(5.1.94b) ile verilen eşitliğin sağ tarafındaki (lokal) terimlerin etkilerini ortadan kaldırmak için- aşağıdaki gibi, *eski* kurala göre dönüşen bir kovaryant türev tanımlanır

$$\nabla_\lambda^{W(x)} \phi \equiv \nabla_\lambda \phi' = e^{\mathcal{W}} \nabla_\lambda \phi - \xi^i{}_{,\lambda} \nabla_i \phi \quad (5.1.97)$$

burada

$$\nabla_\lambda \phi := (\partial_\lambda + A_\lambda) \phi \quad (5.1.98)$$

ve

$$A_\lambda := \frac{1}{2} A^{ij}{}_\lambda \Sigma_{ij} + B_\lambda s \quad (5.1.99)$$

ile verilebilir. Burada A_λ (veya $A^{ij}{}_\lambda$, B_λ) bağlantı nesnesidir ve lokal Weyl transformasyonu altında aşağıdaki gibi dönüşür

$$\delta_0 A_\lambda = [\mathcal{W}, A_\lambda] - \xi^i{}_{,\lambda} A_i - \mathcal{W}_\lambda \quad (5.1.100)$$

Adım #2. Bu adımda, eylemin varyasyon ifadesindeki $\partial_\mu \xi^\mu$ terimi ile ilgilenelim. Bu terim global Weyl dönüşümü altında $\partial_\mu \xi^\mu = 4\rho$ iken lokal dönüşüm altında değildir ve dolayısıyla eylemin invaryanslığını ihlal etmiş olur. Bölüm 5.1.2 altında Poincaré dönüşümü için izlenen metoda benzer olarak devam edelim. Lorentz ve koordinat çerçevelerinde tanımlı kovaryant türev işlemleri arasındaki ilişkiyi, yeni bir $h_k{}^\lambda$ alanı tanımlayarak, aşağıdaki gibi verelim

$$\nabla_k \phi = h_k{}^\lambda \nabla_\lambda \phi \quad (5.1.101)$$

öyle ki h alanı için dönüşüm kuralı şu şekilde yazılabilir

$$\delta_0 h_k{}^\lambda = \theta_k{}^i h_i{}^\lambda - \rho h_k{}^\lambda + \xi^i{}_{,\mu} h_k{}^\mu h_i{}^\lambda - \xi^i h_k{}^\lambda{}_{,i} \quad (5.1.102)$$

Şimdiye kadar yapılan düzenlemelerle, skaler alanın türevinin varyasyonundan gelen $\delta_0 \partial_\mu \phi$ ekstra terimler kovaryant formülasyon sayesinde $\delta_0(\nabla_k \phi)$ ortadan kaldırılabilirdi. Şimdi ise, $\partial_\mu \xi^\mu$ teriminin (lokal) etkisini ortadan kaldırmak için, Lagrangiyen aşağıdaki gibi, uygun bir Λ fonksiyonu ile modifiye edilsin

$$\mathcal{L}' \rightarrow \tilde{\mathcal{L}} = \Lambda \mathcal{L}' \quad (5.1.103)$$

Modifiye edilen bu yeni Lagrangiyen ifadesi $\tilde{\mathcal{L}}$ eylemin varyasyon işleminde kullanılır ve $\delta I = 0$ koşulu empoze edilirse, Λ alanı için, Poincaré dönüşümünde elde edilenlerin yanında, aşağıdaki koşul da elde edilir

$$0 = \delta_0 \Lambda + \partial_\mu (\xi^\mu \Lambda) - 4\rho \Lambda \quad (5.1.104)$$

Bu denklemin çözümü için $\Lambda \equiv \Lambda(h_k^\lambda)$ varsayılırsa, denklem aşağıdaki forma dönüşür

$$0 = \rho \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial h_k^\lambda} h_k^\lambda + 4\rho \Lambda \right) \quad (5.1.105)$$

Λ alanı için aşağıdaki gibi bir çözüm bulunabilir

$$\Lambda = \det b^k_\lambda =: b \quad (5.1.106)$$

Sonuç olarak Lagrangiyenin final formu aşağıdaki gibi verilir

$$\tilde{\mathcal{L}} = b \mathcal{L}'(\phi, \nabla_k \phi) \quad (5.1.107)$$

Son aşamada elde edilen Lagrangiyen ifadesi artık lokal Weyl dönüşümü altında invarianttır.

Lokal Weyl dönüşümü altında tanımlanan kovaryant türevde yer alan bağlantı nesnesi, maddenin Lorentz ve ölçek dönüşüm özellikleri ile ilişkilidir (Lorentz rotasyon ve ölçek parametreleri ile çiftlenmiştir). Buna göre, Weyl dönüşümü altında önemsiz olmayan bir biçimde dönüşen genel bir alanın, (Weyl) kovaryant türevi aşağıdaki gibi verilebilir, ör.

$$\nabla_\mu H^i_j = \partial_\mu H^i_j + A^i_{k\mu} H^k_j - A^k_{j\mu} H^i_k - B_\mu H^i_j \quad (5.1.108)$$

Tanımlanan ayar alanları h_k^μ , A^{ij}_μ ve B_μ için, lokal ve global çerçevelerdeki alan şiddetleri aşağıdaki gibi verilebilir

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] \phi = \frac{1}{2} F^{ij}_{\mu\nu} \Sigma_{ij} \phi + F_{\mu\nu} s \phi \quad (5.1.109a)$$

$$[\nabla_k, \nabla_l] \phi = \frac{1}{2} F^{ij}_{kl} \Sigma_{ij} \phi + F^i_{kl} \overset{\nabla}{P}_i \phi + F_{kl} s \phi \quad (5.1.109b)$$

burada

$$\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu =: \frac{1}{2} F^{ij}_{\mu\nu} \Sigma_{ij} \quad (5.1.110a)$$

$$\nabla_\mu b^i_\nu - \nabla_\nu b^i_\mu =: F^i_{\mu\nu} \quad (5.1.110b)$$

$$\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu =: F_{\mu\nu} \quad (5.1.110c)$$

ve

$$F^{ij}_{kl} := h_k^\mu h_l^\nu F^{ij}_{\mu\nu} \quad (5.1.111a)$$

$$F^i_{kl} := h_k^\mu h_l^\nu F^i_{\mu\nu} \quad (5.1.111b)$$

$$F_{kl} := h_k^\mu h_l^\nu F_{\mu\nu} \quad (5.1.111c)$$

Yukarıda tanımlanan $F^{ij}_{\mu\nu}$, $F^i_{\mu\nu}$ ve $F_{\mu\nu}$ nesneleri, sırasıyla, *Lorentz alan şiddeti*, *öteleme alan şiddeti* ve *dilatasyon alan şiddeti* olarak adlandırılır. $\overset{\nabla}{P}_i := -\nabla_i$ kovaryant öteleme jeneratörünü temsil eder. Bu ifadelerde yer alan kovaryant türev operasyonunun (lokal) Weyl dönüşümü için tanımlandığını hatırlatalım. Görüldüğü üzere, Lorentz alan şiddeti spin jeneratörü Σ_{ij} ile, öteleme alan şiddeti kovaryant öteleme jeneratörü $\overset{\nabla}{P}_i$ ile ve dilatasyon alan şiddeti (içsel) ölçek jeneratörü s ile çiftlenir. En başta ele alınan (global simetrik) teoride yalnızca madde alanı var iken, şimdi (lokal simetrik) yeni teoride kompanzasyon (ayar) alanları da mevcuttur. Bu ayar alanları kullanılarak ilgili şiddetler de tanımlanabildi. Sonuç olarak, tüm dinamik alanları içeren ve lokal simetriye sahip yeni bir tüm Lagrangiyen aşağıdaki gibi verilebilir

$$\tilde{\mathcal{L}} = b\mathcal{L}_F(F^{ij}_{\mu\nu}, F^i_{\mu\nu}, F_{\mu\nu}) + b\mathcal{L}_M(\phi, \nabla_k \phi) \quad (5.1.112)$$

Burada $\mathcal{L}_M$ parçası madde alanını, bunun dinamiğini ve ayar alanlarını içerirken, $\mathcal{L}_F$ parçası ise ayar alanlarının dinamiğini içerir.

5.1.3.1 Geometrik yapı

Bölüm 5.1.2 altında yapılan geometrik analizi hatırlayalım. Poincaré dönüşümü, metrik bileşenlerinin formunu koruduğu için, bu bağlamda metrisiti koşulu geçerli olmaktaydı

$$D(\overset{P}{\Gamma})g_{\mu\nu} = 0 \quad (5.1.113)$$

Burada $\overset{P}{\Gamma}$ ile Poincaré dönüşümleri altında tanımlanan bağlantı nesnesi temsil edilmektedir. Bunun sonucu olarak, sözü edilen bağlantı nesnesi ile paralel taşınan nesnelerin boyları korunur

$$D(\overset{P}{\Gamma})|V| = 0 \quad (5.1.114)$$

Ancak Weyl transformasyonu, metrik bileşenlerini aşağıdaki gibi dönüştürür, bkz. Denk.(5.1.33)

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} = \mathcal{S}g_{\mu\nu} = e^{\rho D} g_{\mu\nu} \quad (5.1.115)$$

burada, en genelde

$$\mathcal{S} \approx 1 + \rho D \quad \text{burada} \quad D := -x \cdot \partial + s, \quad s \in \mathbb{R} \quad (5.1.116)$$

Bu dönüşüm altında artık metrisiti koşulu sağlanmaz

$$D(\overset{P}{\Gamma})g_{\mu\nu} = d\mathcal{S} \cdot g_{\mu\nu} \quad (5.1.117)$$

Metrik bileşenlerinin sağladığı bu koşul literatürde *yarı-metrisiti* koşulu olarak da bilinir. Bunun doğal sonucu olarak, $\overset{P}{\Gamma}$ bağlantı nesnesi ile paralel taşınan nesnelerin boyları da korunmaz

$$D(\overset{P}{\Gamma})|V| = d\mathcal{S}|V| \quad (5.1.118)$$

Yeniden metrisiti koşulunun sağlanması için aşağıdaki gibi bir bağlantı nesnesi tanımlansın

$$D(\overset{W}{\Gamma})g_{\mu\nu} = 0 \quad (5.1.119)$$

Yukarıda verilen ifadeler kullanılarak $\overset{W}{\Gamma}$ için aşağıdaki çözüm yazılabilir

$$\overset{W}{\Gamma} = \overset{P}{\Gamma} - \frac{1}{2}d\mathcal{S} \quad (5.1.120)$$

Bu bağlantı nesnesi ile dinamiği verilen geometri, literatürde *Weyl-Cartan* geometrisi olarak bilinir. Şimdi benzer analizi Lorentz çerçevesindeki nesneler için yapalım. Lorentz ve koordinat çerçeveleri arasındaki dönüşüm yine, Poincaré ayar teorisinde verildiği gibi, tetrad e^i_μ nesneleri yardımıyla gerçekleştirilir. Weyl dönüşümü altında yerel çerçevedeki nesnelerin de boyları yukarıda verildiği gibi değişecektir

$$D(\overset{P}{\omega})|u| = d\mathcal{S}|u| \quad (5.1.121)$$

Bu ifade ile birlikte $D(\overset{P}{\omega})\eta_{ij} = 0$ koşulu kullanılırsa, Lorentz nesnelerinin bileşenleri için aşağıdaki ifade yazılabilir

$$D(\overset{P}{\omega})u^i = \frac{1}{2}d\mathcal{S} \cdot u^i \quad (5.1.122)$$

Buna göre, koordinat çerçevesinde yapılabilecek benzer olarak, Lorentz çerçevesindeki nesneler için Weyl kovaryant türev aşağıdaki gibi verilebilir

$$\begin{aligned} D(\overset{W}{\omega})u^i &= du^i + (\overset{W}{\omega})^i_j u^j = du^i + \left[(\overset{P}{\omega})^i_j - \frac{1}{2}d\mathcal{S}\delta^i_j \right] u^j \\ &= \left[\partial_\lambda u^i + (\overset{P}{\omega})^i_{j\lambda} u^j - \frac{1}{2}\mathcal{S}_{,\lambda} u^i \right] dx^\lambda \end{aligned} \quad (5.1.123)$$

Özetle,

- Weyl ayar teorisi bağlamındaki ayar alanları A^{ij}_μ , b^i_μ ve B_μ sırasıyla spin bağlantı ω^{ij}_μ , tetrad e^i_μ ve bağlantı nesnesinin simetrik parçası $\omega^{(ij)}_{\mu ij}$ ile eşleştirilebilir.

- Buna göre, Weyl ayar teorisi bağlamındaki kovaryant türev $\nabla_\mu(A)$, geometrik kovaryant türev $D_\mu(\omega)$ ile eşleştirilebilir.
- Weyl ayar teorisinde, metriğin formundaki değişim $\delta_0\eta_{ij} = (\mathcal{S} - 1)\eta_{ij}$, geometrideki yarı-metrisiti koşulu (ve özel bir nonmetrisiti formu) ile eşleştirilebilir $D\eta_{ij} = d\mathcal{S} \cdot \eta_{ij} =: Q_{ij}$.

Sonuç olarak iddia edilebilir ki, *Weyl ayar teorisi, Weyl-Cartan geometrisi ile verilen geometrik bir yapıya sahiptir!*

5.2 Teleparalel gravitasyon (TPG) modelleri

Bu bölümde, Bölüm 4.3 altında tanıtılan teleparalel geometrilere dayalı yerçekimi modellerini inceleyeceğiz. Bu yerçekimi modelleri literatürde dayandıkları geometrik zeminle doğrudan ilişkili olarak adlandırılmaktadır. Beklediği gibi bunlar GG' den farklı çeşitli sonuçları içerir, öyle ki bunlar arasında geometrik bağlamda daha fazla serbestlik derecesi içermeleri, afin bağlantı ile madde alanı eşleşmeleri, test nesnelerinin jeodeziklerinde sapmalar ve dahası sayılabilir. Bilindiği gibi Riemann-dışı modeller genel olarak GG' ye göre daha fazla serbestlik derecesi barındırabilmektedir. Dolayısıyla bu sonuç, ilintili alanlarda çalışan araştırmacılar için oldukça ilgi çekici bir motivasyon oluşturmaktadır, öyle ki, özellikle, mevcut bilgilerimiz dahilinde GG bağlamında olmayan yeni kütleçekim dalga modlarını (skaler, vektörel, tensöriyel) araştırmak için (Hohmann ve diğ. 2018), (Adak, Dereli, T. S. Koivisto, ve diğ. 2023). Öte yandan, teleparalel gravitasyon modelleri metrik-afin yaklaşım üzerine kurulu olduklarından dolayı -öyle ki afin bağlantı nesnesi artık metrik olmak zorunda değildir- madde alanları ile bağlantı nesnesinin çiflenmesi, bu modellerde önemsiz olmayan bir seçenek haline gelebilir. Örneğin, torsiyon içeren geometriler için, literatürde fermiyonik maddenin spini ile yerçekiminin (geometrinin) torsiyonu arasındaki ilişkiyi araştıran birçok çalışma vardır (Hehl, Heyde, ve diğ. 1976). Son olarak, jeodezikler GG ile karşılaştırıldığında oldukça farklı davranabilir, çünkü afin (tam) bağlantı artık sadece Levi-Civita kısmını değil aynı zamanda torsiyon ve/veya nonmetrisiti varlığı nedeniyle Riemann-dışı katkıları da içermektedir. Sözü geçen modellerin GG ile karşılaştırılmasında beliren bu gibi farklılıklar sorgulanıyor ve araştırılıyor, öyle ki gözlemsel ve deneysel verilerin uygun şekilde açıklanması için, ör. galaktik dış yörüngelerde gözlenen dönüşler ve fenomenolojik karanlık madde yaklaşımına alternatif açıklamalar (Pala, Sert ve Adak 2023), (Pala ve Adak 2022).

Bu bölümün tamamındaki içerik, (Adak, Dereli, T. S. Koivisto, ve diğ. 2023)

çalışması ile ilintilidir.

GG üzerine kısa bir özet

Einstein'ın Genel Görelilik teorisi aşağıdaki Lagrangiyen n -form ile verilir

$$L_{GR} = \tilde{L}_{EH} + \frac{\Lambda}{\kappa} * 1 - L[mat] \quad (5.2.1)$$

burada κ çifflenim sabiti, Λ kozmolojik sabit ve $\tilde{L}_{EH}$ Einstein-Hilbert Lagrangiyenidir (ortonormal çerçevede verilmiştir),

$$\tilde{L}_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \tilde{R}^a{}_b \wedge *e_a{}^b$$

Bu Lagrangiyenin ortonormal koçerçeveye göre varyasyonu, Einstein alan denklemlerini verir

$$-\frac{1}{2} \tilde{R}^b{}_c \wedge *e_{ab}{}^c + \Lambda *e_a = \kappa \tau_a[mat] \quad (5.2.2)$$

burada $\tau_a[mat]$ madde alanının enerji-momentum $(n-1)$ -formudur, öyle ki $\delta L[mat] = \delta e^a \wedge \tau_a[mat]$ işlemi ile hesaplanır. Şu iki noktayı vurgulamaya değer. (i) $n = 2$ için, $\tilde{R}^a{}_b$ terimi sadece bir bileşen içerir ve L_{EH} ise bir tam form olur. Bu durumda GG iki boyutta önemsiz bir teori haline gelir. (ii) $n = 3$ ve vakum koşulu altında, yani $L[mat] = 0$, ve $\Lambda = 0$ koşulu için, $\tilde{R}^a{}_b$ nesnesinin yayılan (dinamik) herhangi bir serbestlik derecesi olmaz. Çünkü, $n(n+1)/2$ ile verilen metriğin bağımsız bileşen sayısı, difeomorfizm simetrisinin $2n$ adet bileşeni belirlemesi sebebiyle, $n(n-3)/2$ sayısına indirgenir. Görülebileceği üzere $n = 3$ için metriğin hiç bağımsız bileşeni kalmaz. Ancak $n \geq 4$ için bileşen sayısı pozitif olur ve Einstein'ın gravitasyon teorisi vakumda yayılan modlar öngörebilir.

5.2.1 Metrik (Weitzenböck) teleparalel gravitasyon (MTPG)

MTPG teorisi aşağıdaki Lagrangiyen ile ifade edilir

$$L_{WTP} = L_{T^2} + \Lambda * 1 - L[mat] + Q_{ab} \wedge \alpha^{ab} + R^a{}_b \wedge \rho^b{}_a \quad (5.2.3)$$

burada L_{T^2} , torsiyon-kareli ve çift-pariteli Lagrangiyendir

$$L_{T^2} = k_1 T^a \wedge *T_a + k_2 (T^a \wedge e_a) \wedge * (T^b \wedge e_b) + k_3 (T^a \wedge e_b) \wedge * (T^b \wedge e_a) \quad (5.2.4)$$

Burada k_1, k_2, k_3 çiftlenim sabitleridir, $\alpha^{ab} = \alpha^{ba}$ Lagrange çarpanı $(n-1)$ -formdur, öyle ki nonmetrisinin sıfırlanmasını sağlar, $\rho^b{}_a$ Lagrange çarpanı $(n-2)$ -formdur, öyle ki tam eğriliğin sıfırlanmasını sağlar. $e^a, \omega^a{}_b, \alpha^{ab}, \rho^b{}_a$ alanlarına

göre varyasyon alınır, sırasıyla, aşağıda verilen MTPG alan denklemleri elde edilir

$$\tau_a[T] + \Lambda * e_a = \tau_a[mat] \quad \text{KOÇERÇEVE DENK.} \quad (5.2.5a)$$

$$\Sigma^b_a[T] + \alpha^b_a + D\rho^b_a = \Sigma^b_a[mat] \quad \text{BAĞLANTI DENK.} \quad (5.2.5b)$$

$$Q_{ab} = 0 \quad \text{METRİSİTİ DENK.} \quad (5.2.5c)$$

$$R^a_b = 0 \quad \text{SIFIR-EĞRİLİK DENK.} \quad (5.2.5d)$$

burada $\tau_a[mat]$ madde alanı için enerji-momentum ve $\Sigma^b_a[mat]$ madde alanı için açısal momentum $(n-1)$ -formlarıdır, öyle ki $\delta L[mat] = \delta e^a \wedge \tau_a[mat] + \delta \omega^a_b \wedge \Sigma^b_a[mat]$ varyasyonu ile hesaplanırlar

$$\tau_a[T] = \sum_{i=1}^3 k_i^{(i)} \tau_a^{(i)}[T] \quad \text{ve} \quad \Sigma^b_a[T] = \sum_{i=1}^3 k_i^{(i)} \Sigma^b_a^{(i)}[T] \quad (5.2.6)$$

$\tau_a^{(i)}[T]$ ve $\Sigma^b_a^{(i)}[T]$ terimlerinin açık halleri aşağıda verilmiştir

$$\tau_a^{(1)}[T] = 2D * T_a - (\iota_a T^b) \wedge * T_b + T_b \wedge (\iota_a * T^b) \quad (5.2.7a)$$

$$\begin{aligned} \tau_a^{(2)}[T] = & 2D [e_a \wedge * (T^b \wedge e_b)] + 2T_a \wedge * (T^b \wedge e_b) \\ & - [\iota_a (T^b \wedge e_b)] \wedge * (T^c \wedge e_c) - (T^c \wedge e_c) \wedge [\iota_a * (T^b \wedge e_b)] \end{aligned} \quad (5.2.7b)$$

$$\begin{aligned} \tau_a^{(3)}[T] = & 2D [e_b \wedge * (T^b \wedge e_a)] + 2T^b \wedge * (T_a \wedge e_b) \\ & - [\iota_a (T^b \wedge e_c)] \wedge * (T^c \wedge e_b) - (T^c \wedge e_b) \wedge [\iota_a * (T^b \wedge e_c)] \end{aligned} \quad (5.2.7c)$$

ve

$$\Sigma^b_a^{(1)}[T] = 2e^b \wedge * T_a \quad (5.2.8a)$$

$$\Sigma^b_a^{(2)}[T] = 2e^b \wedge e_a \wedge * (T_c \wedge e^c) \quad (5.2.8b)$$

$$\Sigma^b_a^{(3)}[T] = 2e^b \wedge e^c \wedge * (T_c \wedge e_a) \quad (5.2.8c)$$

Gravitasyonun dinamiği Denk.(5.2.5a) ile temsil edilirken, diğer ifade Denk.(5.2.5b) ise Lagrange çarpanlarının belirlenmesi için kullanılır. Aşağıdaki konfigürasyon, teorinin GG-eşdeğerini tanımlayan çiftlenim sabitlerini verir ($n \geq 3$ için)

$$k_1 = 0, \quad k_2 = \frac{1}{4\kappa}, \quad k_3 = -\frac{1}{2\kappa} \quad (5.2.9)$$

İki boyutta Denk.(5.2.4) ile verilen Lagrangiyenin ikinci ve üçüncü terimleri 3-form içerdikleri için kaybolur. Yayılan serbestlik dereceleri genel Lagrangiyen için n -boyutta kontrol edilmiştir (T. S. Koivisto ve Tsimperis 2019). Metrik teleparalelizm bağlamında alanların bağımsız bileşenlerinin sayısı n^2 ile verilir. Bu sonuç,

Weitzenböck koşulu uygulanarak ortonormal çerçevede hemen görülebilir, öyle ki *n-bein* nesnesinin tüm bileşenleri bağımsızdır. Alternatif olarak, bu nesne koordinat çerçevesinde incelenirse görülür ki, ilintili n boyutlu kare matrisin simetrik parçaları metrik içinde kodlanmışken, antisimetrik parçaları düz ve metrik bir bağlantı nesnesinin içinde kodlanmıştır, öyle ki bu bağlantı nesnesi bir Lorentz dönüşümü tarafından oluşturulur. Toplamda *n-bein* nesnesinin bileşen sayısı, elbette yine n^2 olur. GG bağlamında, $n = 2$ veya $n = 3$ için lokal serbestlik dereceleri yayılmaz, fakat bu durum daha genel metrik teleparalel Lagrangiyenler için farklı olabilir. Ayrıca alan denklemlerinin sayısının her zaman teorideki bağımsız bileşenlerin sayısına eşit olduğunu not edelim, ancak bu şimdi o kadar açık olmayabilir. Denk.(5.2.5c) ve Denk.(5.2.5d) koşullarının uygulanması bize metrik uyumlu pür-ayar bağlantı nesnesini bırakır, öyle ki bu bağlantı nesnesi üzerindeki koşul için Denk.(5.2.5b) ile verilen eşitliğin kovaryant türevi alınır. Bu işlem sonrasında elde edilen denklemin $n(n-1)/2$ serbest bileşeni vardır. Geriye kalan $n(n+1)/2$ bağımsız denklem ise Denk.(5.2.5a) ile verilir. Koçerçeve hareket denklemi çok fazla bileşen içeriyor gibi görünse de, Ek F altında verilen açıklama kullanılırsa, bu denklemin antisimetrik bileşenlerinin bağımsız olmadığı ancak Denk.(5.2.5b) ile dejenere olduğu görülür.

Bazı açıklamalar verelim. (i) İki boyutta Denk.(5.2.4) ile verilen Lagrangiyenin ikinci ve üçüncü terimleri 3-form içerdikleri için kaybolur. Torsiyonun bağımsız bileşenlerinin sayısı iki iken alan denklemlerinin sayısı dördür. Yani GG' de olduğu gibi burada da, dinamik bir serbestlik derecesi yoktur. (ii) Üç boyutta hem torsiyon hem de alan denklemlerinin bağımsız bileşenlerinin sayısı dokuzdur. Dolayısıyla GG' de olduğu gibi burada da, vakumda yayılan bir serbestlik derecesi yoktur. Yukarıda tanımlanan adımları izleyerek MTPG teorisini tartışan çalışmalar vardır, ör. (Itin 2001).

5.2.2 Symmetric teleparalel gravitasyon (STPG)

STPG teorisi aşağıdaki Lagrangiyen ile ifade edilir

$$L_{STP} = L_{Q^2} + \Lambda * 1 - L[mat] + T^a \wedge \lambda_a + R^a_b \wedge \rho^b_a \quad (5.2.10)$$

burada L_{Q^2} , nonmetrisiti-kareli ve çift-pariteli Lagrangiyendir

$$\begin{aligned} L_{Q^2} = & c_1 Q_{ab} \wedge *Q^{ab} + c_2 (Q_{ab} \wedge e^b) \wedge * (Q^{ac} \wedge e_c) + c_3 (Q_{ab} \wedge e_c) \wedge * (Q^{ac} \wedge e^b) \\ & + c_4 Q \wedge *Q + c_5 (Q \wedge e^b) \wedge * (Q_{ab} \wedge e^a) \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

Burada c_i , $i = 1, 2, \dots, 5$ çiftlenim sabitleridir, λ_a Lagrange çarpanı $(n-2)$ -formdur, öyle ki torsiyonun sıfırlanmasını sağlar, ρ^b_a Lagrange çarpanı $(n-2)$ -

formdur, öyle ki tam eğriliğin sıfırlanmasını sağlar. $e^a, \omega^a_b, \lambda_a, \rho^b_a$ alanlarına göre varyasyon alınır, sırasıyla, aşağıda verilen STPG alan denklemleri elde edilir

$$\tau_a[Q] + \Lambda * e_a + D\lambda_a = \tau_a[mat] \quad \text{KOÇERÇEVE DENK.} \quad (5.2.12a)$$

$$\Sigma^b_a[Q] + e^b \wedge \lambda_a + D\rho^b_a = \Sigma^b_a[mat] \quad \text{BAĞLANTI DENK.} \quad (5.2.12b)$$

$$T^a = 0 \quad \text{SIFIR-TORSİYON DENK.} \quad (5.2.12c)$$

$$R^a_b = 0 \quad \text{SIFIR-EĞRİLİK DENK.} \quad (5.2.12d)$$

burada $\tau_a[mat]$ madde alanı için enerji-momentum ve $\Sigma^b_a[mat]$ madde alanı için açışal momentum $(n-1)$ -formlarıdır, öyle ki $\delta L[mat] = \delta e^a \wedge \tau_a[mat] + \delta \omega^a_b \wedge \Sigma^b_a[mat]$ varyasyonu ile hesaplanırlar

$$\tau_a[Q] = \sum_{i=1}^5 c_i \tau_a^{(i)}[Q] \quad \text{ve} \quad \Sigma^b_a[Q] = \sum_{i=1}^5 c_i \Sigma^b_a^{(i)}[Q] \quad (5.2.13)$$

$\tau_a^{(i)}[Q]$ ve $\Sigma^b_a^{(i)}[Q]$ terimlerinin açık halleri aşağıda verilmiştir

$$\tau_a^{(1)}[Q] = -(\iota_a Q^{bc}) \wedge *Q_{bc} - Q_{bc} \wedge (\iota_a * Q^{bc}) \quad (5.2.14a)$$

$$\begin{aligned} \tau_a^{(2)}[Q] = & -2Q_{ab} \wedge * (Q^{bc} \wedge e_c) - [\iota_a (Q^{dc} \wedge e_c)] \wedge * (Q_{db} \wedge e^b) \\ & + (Q_{db} \wedge e^b) \wedge [\iota_a * (Q^{dc} \wedge e_c)] \end{aligned} \quad (5.2.14b)$$

$$\begin{aligned} \tau_a^{(3)}[Q] = & -2Q^{bc} \wedge * (Q_{ac} \wedge e_b) - [\iota_a (Q^{dc} \wedge e^b)] \wedge * (Q_{db} \wedge e_c) \\ & + (Q_{db} \wedge e_c) \wedge [\iota_a * (Q^{dc} \wedge e^b)] \end{aligned} \quad (5.2.14c)$$

$$\tau_a^{(4)}[Q] = -(\iota_a Q) \wedge *Q - Q \wedge (\iota_a * Q) \quad (5.2.14d)$$

$$\begin{aligned} \tau_a^{(5)}[Q] = & -Q \wedge * (Q_{ab} \wedge e^b) - Q_{ab} \wedge * (Q \wedge e^b) - [\iota_a (Q_{bc} \wedge e^c)] \wedge * (Q \wedge e^b) \\ & + (Q \wedge e^b) \wedge [\iota_a * (Q_{bc} \wedge e^c)] \end{aligned} \quad (5.2.14e)$$

ve

$$\Sigma^b_a^{(1)}[Q] = 2 * Q^b_a \quad (5.2.15a)$$

$$\Sigma^b_a^{(2)}[Q] = e^b \wedge * (Q_{ac} \wedge e^c) + e_a \wedge * (Q^{bc} \wedge e_c) \quad (5.2.15b)$$

$$\Sigma^b_a^{(3)}[Q] = e^c \wedge * (Q_{ac} \wedge e^b) + e_c \wedge * (Q^{bc} \wedge e_a) \quad (5.2.15c)$$

$$\Sigma^b_a^{(4)}[Q] = 2\delta^b_a * Q \quad (5.2.15d)$$

$$\Sigma^b_a^{(5)}[Q] = \delta^b_a e^c \wedge * (Q_{cd} \wedge e^d) + \frac{1}{2} [e_a \wedge * (Q \wedge e^b) + e^b \wedge * (Q \wedge e_a)] \quad (5.2.15e)$$

Gravitasyonun dinamiğini veren alan denklemi, Denk.(5.2.12b) yardımı ile, Denk.(5.2.12a) içindeki $D\lambda_a$ teriminin ortadan kaldırılmasıyla, aşağıdaki gibi elde edilir

$$\iota_b D\Sigma^b_a[Q] + \tau_a[Q] + \Lambda * e_a = \iota_b D\Sigma^b_a[mat] + \tau_a[mat] \quad (5.2.16)$$

$D\lambda_a$ elde edilirken şu sonuçlar kullanıldı : $D(D\rho^b_a) = R^b_c \wedge \rho^c_a - R^c_a \wedge \rho^b_c = 0$ ve $De^a = T^a = 0$. Daha sonra, istenirse, Lagrange çarpanları Denk.(5.2.12a) ve Denk.(5.2.12b) kullanılarak bulunabilir. Aşağıdaki konfigürasyon, teoremin GG-eşdeğerini tanımlayan çiftlenim sabitlerini verir ($n \geq 2$ için)

$$c_1 = \frac{1}{2\kappa}, \quad c_2 = -\frac{1}{\kappa}, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = -\frac{1}{2\kappa}, \quad c_5 = \frac{1}{\kappa} \quad (5.2.17)$$

Metrik teleparalelizm bölümünde verilenlere benzer yorumları burada da yapabiliriz. Dinamik alanlar bağımsız bileşenlerinin sayısı her zaman alan denklemlerinin sayısına eşittir. Simetrik teleparalelizmde bu sayı $n(n+3)/2$ olur ve koordinat çerçevesinde kolaylıkla görülebilir. Bu çerçevede serbestlik dereceleri metriğin ve düz, torsiyonsuz bağlantı nesnesinin içinde kodlanmıştır, öyle ki bu bağlantı nesnesi n -boyutta, n adet difeomorfizm tarafından oluşturulur. Yayılan serbestlik dereceleri, n -boyutlu genel bir teori için incelenmiştir (Conroy ve T. Koivisto 2018). Yine, $n = 2$ ve $n = 3$ için teorilerde dinamik serbestlik dereceleri mevcut olabilir (Adak ve Dereli 2008; Adak, Ozdemir ve Pala 2023). Yukarıda tanımlanan adımları izleyerek STPG teorisini tartışan çalışmalar vardır, ör. (Adak, Sert, ve diğ. 2013; Adak 2018).

Bazı açıklamalar verelim. (i) İki boyutta, nonmetrisitinin bağımsız bileşenlerinin sayısı 6 iken alan denklemlerinin sayısı 4 olur. Bu durumda, GG' nin aksine, iki boyutta STPG teorisinde dinamik serbestlik dereceleri olabilir (Adak ve Dereli 2008). (ii) Üç boyutta, nonmetrisitinin bağımsız bileşenlerinin sayısı 18 iken alan denklemlerinin sayısı 9 olur. Yine, GG' nin aksine, STPG teorisi üç boyutta da dinamik serbestlik dereceleri sunabilir. Bu açıdan bakıldığında, STPG teorisinin GG' ye göre daha zengin bir kurulum verdiği iddia edilebilir.

5.2.3 Genel teleparalel gravitasyon (GTPG)

GTPG teorisi aşağıdaki Lagrangiyen ile ifade edilir

$$L_{GTP} = L_{T^2} + L_{Q^2} + L_{QT} + \Lambda * 1 - L[mat] + R^a_b \wedge \rho^b_a \quad (5.2.18)$$

burada L_{T^2} terimi Denk.(5.2.4) ve L_{Q^2} terimi Denk.(5.2.11) ile verilen ifadelerdir. Bunların yanında, L_{QT} çapraz terimleri içeren çift-pariteli Lagrangiyendir

$$L_{QT} = \ell_1(Q^{ab} \wedge e_a \wedge e_b) \wedge *(T^c \wedge e_c) + \ell_2(Q \wedge e_a) \wedge *T^a + \ell_3(Q_{ab} \wedge e^b) \wedge *T^a \quad (5.2.19)$$

Burada ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 çiftlenim sabitleridir, ρ^b_a Lagrange çarpanı $(n-2)$ -formdur, öyle ki tam eğriliğin sıfırlanmasını sağlar. $e^a, \omega^a_b, \rho^b_a$ alanlarına göre varyasyon

alınırsa, sırasıyla, aşağıda verilen GTPG alan denklemleri elde edilir

$$\tau_a[Q] + \tau_a[T] + \tau_a[QT] + \Lambda * e_a = \tau_a[mat] \quad \text{KOÇERÇEVE DENK.} \quad (5.2.20a)$$

$$\Sigma_a^b[Q] + \Sigma_a^b[T] + \Sigma_a^b[QT] + D\rho_a^b = \Sigma_a^b[mat] \quad \text{BAĞLANTI DENK.} \quad (5.2.20b)$$

$$R^a_b = 0 \quad \text{SIFIR-EĞRİLİK DEN.} \quad (5.2.20c)$$

burada $\tau_a[mat]$ madde alanı için enerji-momentum ve $\Sigma_a^b[mat]$ madde alanı için açışal momentum $(n-1)$ -formlarıdır, öyle ki $\delta L[mat] = \delta e^a \wedge \tau_a[mat] + \delta \omega^a_b \wedge \Sigma_a^b[mat]$ varyasyonu ile hesaplanırlar

$$\tau_a[QT] = \sum_{i=1}^3 \ell_i^{(i)} \tau_a^{(i)}[QT] \quad \text{ve} \quad \Sigma_a^b[QT] = \sum_{i=1}^3 \ell_i^{(i)} \Sigma_a^{(i)b}[QT] \quad (5.2.21)$$

$\tau_a^{(i)}[QT]$ ve $\Sigma_a^{(i)b}[QT]$ terimlerinin açık halleri aşağıda verilmiştir

$$\begin{aligned} \tau_a^{(1)}[QT] = & D[e_b \wedge *(Q^{bc} \wedge e_c \wedge e_a)] + e_c \wedge Q_{ab} \wedge *(T^c \wedge e^b) - e_c \wedge Q^{bc} \wedge *(T_a \wedge e_b) \\ & + T^c \wedge *(Q_{ab} \wedge e^b \wedge e_c) - [\iota_a(T^c \wedge e_b)] \wedge *(Q^{db} \wedge e_d \wedge e_c) \\ & - (Q^{db} \wedge e_d \wedge e_c) \wedge [\iota_a*(T^c \wedge e_b)] \end{aligned} \quad (5.2.22a)$$

$$\begin{aligned} \tau_a^{(2)}[QT] = & D*(Q \wedge e_a) - Q \wedge *T_a - (\iota_a T^b) \wedge *(Q \wedge e_b) \\ & + (Q \wedge e_b) \wedge (\iota_a *T^b) \end{aligned} \quad (5.2.22b)$$

$$\begin{aligned} \tau_a^{(3)}[QT] = & D*(Q_{ab} \wedge e^b) - Q_{ab} \wedge *T^b - (\iota_a T^c) \wedge *(Q_{cb} \wedge e^b) \\ & + (Q_{cb} \wedge e^b) \wedge (\iota_a *T^c) \end{aligned} \quad (5.2.22c)$$

ve

$$\begin{aligned} \Sigma_a^{(1)b}[QT] = & e^b \wedge e_d \wedge *(Q^{dc} \wedge e_c \wedge e_a) \\ & + \frac{1}{2} [e_a \wedge e_c \wedge *(T^c \wedge e^b) + e^b \wedge e_c \wedge *(T^c \wedge e_a)] \end{aligned} \quad (5.2.23a)$$

$$\Sigma_a^{(2)b}[QT] = e^b \wedge *(Q \wedge e_a) + \delta_a^b e_c \wedge *T^c \quad (5.2.23b)$$

$$\Sigma_a^{(3)b}[QT] = e^b \wedge *(Q_{ac} \wedge e^c) + \frac{1}{2} [e^b \wedge *T_a + e_a \wedge *T^b] \quad (5.2.23c)$$

Gravitasyonun dinamiği Denk.(5.2.20a) ile temsil edilirken, diğer ifade Denk.(5.2.20b)

ise Lagrange çarpanlarının belirlenmesi için kullanılır. Aşağıdaki konfigürasyon, teoremin GG-eşdeğerini tanımlayan çiftlenim sabitlerini verir ($n \geq 3$ için)

$$\begin{aligned} c_1 = \frac{1}{2\kappa}, \quad c_2 = -\frac{1}{\kappa}, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = -\frac{1}{2\kappa}, \quad c_5 = \frac{1}{\kappa}, \quad (5.2.24) \\ k_1 = 0, \quad k_2 = \frac{1}{4\kappa}, \quad k_3 = -\frac{1}{2\kappa}, \quad \ell_1 = \frac{1}{\kappa}, \quad \ell_2 = 0, \quad \ell_3 = 0 \end{aligned}$$

Genel teleparalelizmde, dinamik alanların $n(3n+1)/2$ adet bağımsız bileşeni vardır ve düzenlemelerin ardından elde edilen alan denklemlerinin sayısı da aynıdır.

İki boyut için örnek

Yukarıdaki fikirlerin daha somut ve anlaşılır olması adına iki boyutta bir örnek verelim. Kullanılan algoritma aşağıda verilmiştir.

Adım #1: Koordinat çerçevesinde $x^\alpha = (t, r)$, statik bir metrik önermesi yapılır

$$ds^2 = -f^2(r)dt^2 + g^2(r)dr^2 \quad (5.2.25)$$

burada $f(r)$ ve $g(r)$ metrik fonksiyonlarıdır.

Adım #2: Metrik ve koçerçeve için ortonormal kovaryant bileşenler yazılır, $ds^2 = \eta_{ab}e^a \otimes e^b$

$$\eta_{ab} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad e^a = \begin{bmatrix} f dt \\ g dr \end{bmatrix} \quad (5.2.26)$$

Adım #3: Metrik ve koçerçeve için karma kovaryant bileşenler yazılır, $ds^2 = g_{AB}e^A \otimes e^B$

$$g_{AB} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & g^2 \end{bmatrix}, \quad e^A = \begin{bmatrix} f dt \\ dr \end{bmatrix} \quad (5.2.27)$$

Adım #4: 2-bein ve tersi hesaplanır, şöyle ki $e^a = h^a_A e^A$ ve $e^A = h^A_a e^a$

$$h^a_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix}, \quad h^A_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/g \end{bmatrix} \quad (5.2.28)$$

Adım #5: Ortonormal afin bağlantı 1-form nesnesi hesaplanır $\omega^a_b = h^a_A dh^A_b$

$$\omega^a_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -e^1 g'/g^2 \end{bmatrix} \quad (5.2.29)$$

Bu adımın ardından yoğunlukla, bilgisayar hesaplama sistemleri olan REDUCE ve onun dış cebir paketi EXCALC kullanılmıştır (Hearn 2004; Schrüfer 2004).

Adım #6: Ortonormal çerçevede şunlar hesaplanır : nonmetrisiti 1-form $Q_{ab} = (\omega_{ab} + \omega_{ba})/2$, torsiyon 2-form $T^a = de^a + \omega^a_b \wedge e^b$ ve tam eğrilik 2-form $R^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b$

$$Q_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(g'/g^2)e^1 \end{bmatrix}, \quad T^a = \begin{bmatrix} -(f'/fg) * 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad R^a_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.2.30)$$

Böylece, tüm dinamik nicelikler metrik fonksiyonları cinsinden yazılmış olur. Şimdi, ortonormal çerçevede elde edilen $e^a, \omega^a_b, Q_{ab}, T^a$ nicelikleri Denk.(5.2.20a) ile verilen alan denkleminde yerine yazılır, öyle ki bu işlem boş uzay varsayımı altında gerçekleştirilir, yani $L[mat] = 0$. Sonuç olarak, $f(r)$ ve $g(r)$ fonksiyonları

için, iki adet ikinci derece bağımlı diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklemler için bulunan iki çözüm sınıfı aşağıda verilmiştir.

Çözüm sınıfı #1: $c_1 + c_4 = 0$, $\ell_2 = 0$ koşulları ve $\Lambda = k_1 m^2$ tanımı altında, aşağıdaki çözüm elde edilir

$$f(r) = e^{-m/r} \quad \text{ve} \quad g(r) = \frac{1}{r^2} \quad (5.2.31)$$

Taylor açılımı kullanılırsa $e^{-m/r} \simeq 1 - m/r$ yazılır ve görüleceği üzere $m = \sqrt{\Lambda/k_1}$ kütle parametresi olur. $r = 0$ noktasında tekillik bulunur, fakat bu esas tekillik gibi görünmez, öyle ki aşağıda verilen ifadelerden ötürü

$$T^a \wedge *T_a = m^2 * 1 \quad \text{ve} \quad Q_{ab} \wedge *Q^{ab} = 4r^2 * 1 \quad (5.2.32)$$

Bu çözüm sınıfı için, Denk.(5.2.20a) ile verilen koçerçeve denkleminin kovaryant türevinin sıfırlandığı teyit edilmiştir. Fakat, bununla birlikte, Denk.(5.2.20b) ile verilen bağlantı denkleminin de kovaryant türevinin kontrol edilmesi gerekir. Bunun için $D(D\rho^b_a) = R^b_c \wedge \rho^c_a - R^c_a \wedge \rho^b_c = 0$ kullanılırsa görülür ki $D(5.2.20b) = 0$. Böylece çiftlenim katsayıları üzerinde yeni koşullar elde edilir. Sonuç olarak, boyutlu olan katsayılar için $k_2 = 0$, $k_3 = 0$, $\ell_1 = 0$ sağlanırken diğerleri için de şu verilenler sağlanır, $c_4 = -c_1$, $c_5 = 2c_1$, $\ell_2 = 0$, $\ell_3 = -2k_1$. Bunların dışında geriye kalan serbest katsayılar ise k_1 , c_1 , c_2 , c_3 olur.

Çözüm sınıfı #2: $c_1 + c_4 = 0$, $\ell_2 = 0$ koşulları ve $\Lambda = 4k_1 m^2 n^2$ tanımı altında, aşağıdaki çözüm elde edilir

$$f(r) = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^n \quad \text{ve} \quad g(r) = \frac{1}{r^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)} \quad (5.2.33)$$

Taylor açılımı kullanılırsa $\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^n \simeq 1 - 2nm/r$ yazılır ve görüleceği üzere $2nm = \sqrt{\Lambda/k_1}$ kütle parametresi olur. $r = 0$ ve $r = 2m$ noktalarında tekillik bulunur, fakat bunlar esas tekillik gibi görünmezler, öyle ki aşağıda verilen ifadelerden ötürü

$$T^a \wedge *T_a = (2nm)^2 * 1 \quad \text{ve} \quad Q_{ab} \wedge *Q^{ab} = 4(r - m)^2 * 1 \quad (5.2.34)$$

Bu çözüm sınıfı için, Denk.(5.2.20a) ifadesinin kovaryant türevi sıfırlanır. Bununla birlikte $D(5.2.20b) = 0$ koşulu ile çiftlenim katsayıları üzerinde yeni koşullar elde edilir. Sonuç olarak, boyutlu olan katsayılar için $k_2 = 0$, $k_3 = 0$, $\ell_1 = 0$ sağlanırken diğerleri için de şu verilenler sağlanır, $c_4 = -c_1$, $c_5 = 2c_1$, $\ell_2 = 0$, $\ell_3 = -2k_1$. Bunların dışında geriye kalan serbest katsayılar ise k_1 , c_1 , c_2 , c_3 olur.

Üç boyut için örnek

Üç boyut için, dairesel simetrik dönen bir metrik ele alalım. Kullanılan algoritma aşağıda verilmiştir.

Adım #1: Koordinat çerçevesinde $x^\alpha = (t, r, \phi)$, metrik önermesi yapılır

$$ds^2 = -f^2(r)dt^2 + g^2(r)dr^2 + r^2 [w(r)dt + d\phi]^2 \quad (5.2.35)$$

burada $f(r)$, $g(r)$ ve $w(r)$ metrik fonksiyonlarıdır.

Adım #2: Metrik ve koçerçeve için ortonormal kovaryant bileşenler yazılır, $ds^2 = \eta_{ab}e^a \otimes e^b$

$$\eta_{ab} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad e^a = \begin{bmatrix} f dt \\ g dr \\ r(w dt + d\phi) \end{bmatrix} \quad (5.2.36)$$

Adım #3: Metrik ve koçerçeve için karma kovaryant bileşenler yazılır, $ds^2 = g_{AB}e^A \otimes e^B$

$$g_{AB} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & g^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad e^A = \begin{bmatrix} f dt \\ dr \\ r(w dt + d\phi) \end{bmatrix} \quad (5.2.37)$$

Adım #4: 3-bein ve tersi hesaplanır, şöyle ki $e^a = h^a_A e^A$ ve $e^A = h^A_a e^a$

$$h^a_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad h^A_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2.38)$$

Adım #5: Ortonormal afin bağlantı 1-form nesnesi hesaplanır $\omega^a_b = h^a_A dh^A_b$

$$\omega^a_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^1 g' / g^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.2.39)$$

Adım #6: Ortonormal çerçevede şunlar hesaplanır : nonmetrisiti 1-form $Q_{ab} = (\omega_{ab} + \omega_{ba})/2$, torsiyon 2-form $T^a = de^a + \omega^a_b \wedge e^b$ ve tam eğrilik 2-form $R^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b$

$$Q_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{g'e^1}{g^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T^a = \begin{bmatrix} -\frac{f'e^{01}}{fg} \\ 0 \\ \frac{fe^{12}-r^2w'e^{01}}{rfg} \end{bmatrix}, \quad R^a_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.2.40)$$

Dikkat edileceği üzere, yine, tüm dinamik nicelikler metrik fonksiyonları cinsinden yazılmış olur. Şimdi, ortonormal çerçevede elde edilen $e^a, \omega^a_b, Q_{ab}, T^a$ nicelikleri

Denk.(5.2.20a) ile verilen alan denkleminde yerine yazılır, öyle ki bu işlem boş uzay varsayımı altında gerçekleştirilir, yani $L[mat] = 0$. Sonuç olarak, $f(r)$, $g(r)$ ve $w(r)$ fonksiyonları için, ikinci derece bağımlı diferansiyel denklemler elde edilir. Bu denklemler uzun ve karmaşık göründüklerinden ötürü burada verilmemiştir. Yine de, bilgisayar hesap sistemleri REDUCE ve onun dış cebir paketi EXCALC yardımıyla (Hearn 2004; Schrüfer 2004), iki adet çözüm sınıfı bulunabildi. Bunlar aşağıda verilmiştir.

Çözüm sınıfı #1: $k_1 = 0$, $c_1 + c_4 = 0$, $\ell_2 = 0$ koşulları altında aşağıdaki çözüm elde edilir

$$f(r) = \frac{1}{g(r)} = \sqrt{m - \frac{\Lambda}{2k_3}r^2} \quad \text{ve} \quad w(r) = w_0 \quad (5.2.41)$$

burada m ve w_0 integrasyon sabitleridir. Bu çözüme göre, $r = \sqrt{2mk_3/\Lambda}$ noktasında olmak üzere bir adet tekillik var gibi görünür. Ancak, $r = 0$ ve $r = \sqrt{2mk_3/\Lambda}$ noktaları için iki adet tekillik bulunabilir, öyle ki aşağıda verilen invaryant ifadeye bakılarak

$$T^a \wedge *T_a = \frac{2m^2k_3^2 - 2mk_3\Lambda r^2 + \Lambda^2r^4}{k_3r^2(2mk_3 - \Lambda r^2)} * 1 \quad (5.2.42a)$$

$$Q_{ab} \wedge *Q^{ab} = \frac{\Lambda r^2}{k_3(2mk_3 - \Lambda r^2)} * 1 \quad (5.2.42b)$$

Bu çözüm sınıfı için, Denk.(5.2.20a) ifadesinin kovaryant türevi sıfırlanır. Dahası, $D(D\rho^b_a) = R^b_c \wedge \rho^c_a - R^c_a \wedge \rho^b_c = 0$ kullanılırsa görülür ki $D(5.2.20b) = 0$. Böylece çiftlenim katsayıları üzerinde, aşağıda verildiği gibi, yeni koşullar elde edilir

$$k_1 = 0, \quad c_4 = -c_1, \quad \ell_2 = 0, \quad \ell_3 = \ell_1 + 2c_1 - c_5 + 2k_3 \quad (5.2.43)$$

burada k_2 , k_3 , c_1 , c_2 , c_3 , c_5 , ℓ_1 yedi adet serbest parametredir.

Çözüm sınıfı #2: Aşağıdaki koşullar altında

$$k_1 = 0, \quad 2k_2 + k_3 = 0, \quad c_1 + c_4 = 0, \quad \ell_2 = 0 \quad (5.2.44)$$

şu çözüm bulundu

$$f(r) = \frac{1}{g(r)} = \sqrt{m + \frac{w_1^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{2k_3}r^2} \quad \text{ve} \quad w(r) = \frac{w_1}{r^2} \quad (5.2.45)$$

burada kütle parametresi m ve rotasyon parametresi w_1 , integrasyon sabitleridir. Bu çözüm, literatürde bilinen BTZ metriğidir. Bu çözüm sınıfı için, Denk.(5.2.20a)

ve Denk.(5.2.20b) ile verilen ifadelerin kovaryant türevlerinin sıfırlandığı teyit edilmiştir. Böylece serbest parametre sayısı azalmıştır.

$$k_1 = 0, \quad k_3 = -2k_2, \quad c_4 = -c_1, \quad c_5 = 2c_1, \quad \ell_1 = 4k_2, \quad \ell_2 = 0, \quad \ell_3 = 0 \quad (5.2.46)$$

burada k_2, c_1, c_2, c_3 dört adet serbest parametredir.

$$r = 0 \quad \text{ve} \quad r = \sqrt{\frac{k_3}{\Lambda} \left(m \pm \sqrt{m^2 + \frac{2k_3 w_1^2}{k_3}} \right)}$$

noktalarında iki adet tekillik görünmektedir. Bunlar aynı zamanda, $T^a \wedge *T_a$ ve $Q_{ab} \wedge *Q^{ab}$ skalerleri için de tekil noktalardır. Son olarak teyit edildi ki, Denk.(5.2.44) ile verilen koşullar, Denk.(5.2.24) ile verilen ifadede sağlanır.

Dört boyut için örnek

Şimdi, daha gerçekçi bir örnek verelim. Öncelikle Kerr-de Sitter ve ardından Reissner-Nordström metrikleri ele alınacaktır.

Adım #1: Kerr-de Sitter metriği Boyer-Lindquist koordinatlarında yazılır $x^\alpha = (t, r, \theta, \phi)$

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\frac{1}{\Omega^2 \Sigma(r, \theta)} [\Delta(r) - j_0^2 \Pi(\theta) \sin^2 \theta] dt^2 + \frac{\Sigma(r, \theta)}{\Delta(r)} dr^2 + \frac{\Sigma(r, \theta)}{\Pi(\theta)} d\theta^2 \\ & + \frac{\sin^2 \theta}{\Omega^2 \Sigma(r, \theta)} [(r^2 + j_0^2) \Pi(\theta) - \Delta(r) j_0^2 \sin^2 \theta] d\phi^2 \\ & + \frac{2j_0 \sin^2 \theta}{\Omega^2 \Sigma(r, \theta)} [\Delta(r) - (r^2 + j_0^2) \Pi(\theta)] dt d\phi \end{aligned} \quad (5.2.47)$$

burada $\Delta(r)$, $\Sigma(r, \theta)$, $\Pi(\theta)$ metrik fonksiyonlarıdır, j_0 rotasyon parametresidir, $\Omega(\Lambda_0, j_0)$ ise rotasyon parametresini ve kozmolojik sabiti içeren bir başka parametredir.

Adım #2: Metrik ve köçerçeve için ortonormal kovaryant bileşenler yazılır, $g = \eta_{ab} e^a \otimes e^b$

$$\eta_{ab} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad e^a = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma \Omega^2}} (dt - j_0 \sin^2 \theta d\phi) \\ \sqrt{\frac{\Sigma}{\Delta}} dr \\ \sqrt{\frac{\Sigma}{\Pi}} d\theta \\ \sqrt{\frac{\Pi}{\Sigma \Omega^2}} \sin \theta [-j_0 dt + (r^2 + j_0^2) d\phi] \end{bmatrix} \quad (5.2.48)$$

Adım #3: Metrik ve koçerçeve için karma kovaryant bileşenler yazılır, $g = g_{AB}e^A \otimes e^B$

$$g_{AB} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta}{\Sigma\Omega^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Pi \sin^2 \theta}{\Sigma\Omega^2} \end{bmatrix}, \quad e^A = \begin{bmatrix} dt - j_0 \sin^2 \theta d\phi \\ \sqrt{\frac{\Sigma}{\Delta}} dr \\ \sqrt{\frac{\Sigma}{\Pi}} d\theta \\ -j_0 dt + (r^2 + j_0^2) d\phi \end{bmatrix} \quad (5.2.49)$$

Adım #4: Vierbein ve tersi hesaplanır, şöyle ki, $e^a = h^a_A e^A$ ve $e^A = h^A_a e^a$

$$h^a_A = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma\Omega^2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{\Pi}{\Sigma\Omega^2}} \sin \theta \end{bmatrix}, \quad h^A_a = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\Sigma\Omega^2}{\Delta}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{\Sigma\Omega^2}{\Pi}} \frac{1}{\sin \theta} \end{bmatrix} \quad (5.2.50)$$

Adım #5: Ortonormal afin bağlantı 1-form nesnesi hesaplanır $\omega^a_b = h^a_A dh^A_b$

$$\omega^a_b = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma\Omega^2}} d\left(\sqrt{\frac{\Sigma\Omega^2}{\Delta}}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{\Pi}{\Sigma\Omega^2}} \sin \theta d\left(\sqrt{\frac{\Sigma\Omega^2}{\Pi}} \frac{1}{\sin \theta}\right) \end{bmatrix} \quad (5.2.51)$$

Adım #6: Ortonormal çerçevede şunlar hesaplanır : nonmetrisiti 1-form $Q_{ab} = (\omega_{ab} + \omega_{ba})/2$, torsiyon 2-form $T^a = de^a + \omega^a_b \wedge e^b$ ve tam eğrilik 2-form $R^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b$

$$Q_{ab} \neq 0, \quad T^a \neq 0, \quad R^a_b = 0 \quad (5.2.52)$$

Metrik fonksiyonları için, çok karmaşık ve uzun olan ikinci derece bağımlı diferansiyel denklemler elde edildi. REDUCE / EXCALC yardımı (Hearn 2004; Schrüfer 2004) ile iki adet çözüm sınıfı bulundu. Bunlar aşağıda verilmiştir.

Çözüm sınıfı #1: Aşağıdaki koşullar altında

$$\begin{aligned} k_1 = 0, \quad k_3 = -2k_2, \quad c_3 = -c_1 - c_2 - 2k_2, \quad c_5 = -c_4 + 2k_2, \\ \ell_2 = \ell_1 - 4k_2, \quad \ell_3 = -\ell_1 + 4k_2, \quad \Lambda = -4k_2\Lambda_0 \end{aligned} \quad (5.2.53)$$

alan denklemleri şu metrik fonksiyonları tarafından sağlanır

$$\Delta(r) = (r^2 + j_0^2) \left(1 - \frac{\Lambda_0}{3} r^2 \right) - 2mr, \quad (5.2.54a)$$

$$\Sigma(r, \theta) = r^2 + j_0^2 \cos^2 \theta, \quad (5.2.54b)$$

$$\Pi(\theta) = 1 + \frac{\Lambda_0}{3} j_0^2 \cos^2 \theta, \quad (5.2.54c)$$

$$\Omega = 1 + \frac{\Lambda_0}{3} j_0^2 \quad (5.2.54d)$$

Şunu ifade etmekte yarar var : $c_1, c_2, c_4, k_2, \ell_1$ parametreleri serbest olduğu için, Denk.(5.2.53) ile verilen kısıtlar, Denk.(5.2.24) ile verilen çiftlenim katsayılarına göre, daha geneldir. Diğer örneklerdekine benzer olarak, yine, Denk.(5.2.20a) ve Denk.(5.2.20b) ile verilen ifadelerin kovaryant türevlerinin sıfırlandığı teyit edildi. Böylece çiftlenim katsayıları üzerinde, aşağıda verildiği gibi, yeni koşullar elde edilir

$$\begin{aligned} k_1 = 0, \quad k_3 = -2k_2, \quad c_3 = -c_1 - c_2 - 2k_2, \quad c_4 = -2k_2, \quad c_5 = 4k_2, \\ \ell_1 = 4k_2, \quad \ell_2 = 0, \quad \ell_3 = 0, \quad \Lambda = -4k_2\Lambda_0 \end{aligned} \quad (5.2.55)$$

Halen üç adet serbest çiftlenim sabiti bulunmaktadır, k_2, c_1, c_2 . Literatürde, metrik teleparalelizm kurulumunda dönen metriklerin incelendiği çalışmalar mevcuttur (Järv ve diğ. 2019; Bahamonde, Valcarcel, Järv ve Pfeifer 2021).

Çözüm sınıfı #2: Aşağıdaki koşullar altında

$$\begin{aligned} k_1 = 0, \quad k_3 = 0, \quad c_3 = -c_1 - c_2, \quad c_5 = -c_4, \\ \ell_2 = \ell_1, \quad \ell_3 = -\ell_1, \quad \Lambda = 0 \end{aligned} \quad (5.2.56)$$

alan denklemleri, aşağıda verilen ortonormal koçerçeve tarafından sağlanır

$$\begin{aligned} e^0 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} \right)^{1/2} dt, \quad e^1 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} \right)^{-1/2} dr, \\ e^2 = r d\theta, \quad e^3 = r \sin \theta d\phi \end{aligned} \quad (5.2.57)$$

burada m ve q integrasyon sabitleridir. Beş adet serbest parametre vardır, $k_2, c_1, c_2, c_4, \ell_1$. Denk.(5.2.20a) ve Denk.(5.2.20b) ile verilen ifadelerin kovaryant türevlerinin sıfırlandığı teyit edildi. Böylece çiftlenim katsayıları üzerinde, aşağıda verildiği gibi, yeni koşullar elde edilir

$$\begin{aligned} k_1 = 0, \quad k_3 = 0, \quad c_3 = -c_1 - c_2, \quad c_4 = 0, \quad c_5 = 0, \\ \ell_1 = 0, \quad \ell_2 = 0, \quad \ell_3 = 0, \quad \Lambda = 0 \end{aligned} \quad (5.2.58)$$

Sonuç olarak, k_2 , c_1 , c_2 üç adet serbest parametre olarak kalmaktadır. İlginç bir nokta şu ki, başlangıçta Denk.(5.2.18) ile verilen Lagrangiyen ifadesinde elektromanyetizmaya dair bir bilgi bulunmamasına rağmen, yukarıda verilen çözüm Einstein-Maxwell teorisinin Reissner-Nordström metrik çözümüdür, öyle ki bu çözüm elektrik yüklü gravitasyon kaynaklarını tanımlar. Benzer sonuçlara, modifiye edilmiş STPG teorileri bağlamında ulaşan çalışmalar da mevcuttur (Cembranos ve Valcarcel 2018), (Bahamonde, Valcarcel, Järv ve Lember 2022).

5.3 Genişletilmiş teoriler

5.3.1 Skaler-tensör (ST) teorileri

Kütleçekiminin temel doğasını anlama arayışı, Einstein'ın 1915'teki Genel Görelilik (GG) teorisinin başlangıcından bu yana teorik fiziğin temel taşı olmuştur. GG, kütleçekim olaylarını hem kozmik hem de kuantum ölçeklerde tanımlamada oldukça başarılı olduğunu kanıtlamış olsa da, alternatif teoriler de ortaya çıkmıştır.

Kütleçekimine ilişkin skaler-tensör teorilerinin temeli, Jordan (Jordan 1955), Brans ve Dicke'nin (Brans ve Dicke 1961) 1960'larda yaptıkları öncü çalışmalara kadar götürülebilir. Bu araştırmacılar, teorilerine metrik tensörden farklı ek bir skaler alan ekleyerek, gravitasyonel etkileşimleri açıklamayı ve böylece GG'yi genelleştirmeyi amaçlamışlardı. Genellikle ϕ olarak ifade edilen bu skaler alan, yerçekimi ile diğer alanlar arasında dinamik bir bağlantıya izin vererek Einstein'ın orijinal teorisinin ötesine geçen teorik bir yapı sunar.

Skaler-tensör teorilerinin ardındaki temel motivasyon, GG bağlamında sabit olduğu varsayılan yerçekimi sabiti G gibi doğanın temel niceliklerini, etkin bir alan olarak barındırma yeteneklerinde yatmaktadır. Bu teoriler, G yerçekimi sabitinin, ϕ skaler alanına bağlı olarak uzayzamanda değişebileceğini, dolayısıyla karanlık enerjiye ihtiyaç duymadan evrenin hızlanarak genişlemesi gibi olgular için potansiyel bir açıklama sağladığını öne sürmektedir. Dahası, skaler-tensör teorileri, ekstra boyutların kompaktlaştırılması işlemi sonrasında metrik tensörün yanında skaler alanların da oluştuğu sicim teorisi ve Kaluza-Klein teorisi gibi daha yüksek boyutlu gravitasyon teorileri bağlamında doğal olarak ortaya çıkar. Bu ilişki, modern fizik çerçevesinde skaler-tensör yerçekiminin teorik zarafetini ve potansiyel tahmin gücünü vurgulamaktadır. Bir başka motivasyon da teorisinin *konformal* (ölçek) dönüşümleri içermesi çabasıdır. Gerçekte $SO(1, n - 1)$ Lorentz grubunun çift kapsayan grubu, yani $Spin(1, n - 1)$ grubu, $\{1, \sigma_{ab}\}$ bazları tarafından kaplanır, burada $\{\sigma\}$ nesneleri Lorentz grubunun jeneratörleridir.

Bunun yanında, $\{1\}$ ögesi de simetri grubuna bir jeneratör olarak dahil edilebilir, öyle ki simetri grubu daha genel ve tam olabilir. Böyle yapılarak, simetri grubu $SO(1, n - 1) \otimes Weyl$ şeklinde genişletilebilir (Pala, Sert ve Adak 2023). Bu genişletme işlemi ise, teoriye bir skaler alan ekleyerek ve bunu geometrik sektörle minimal olmayan bir şekilde çiftleyerek başarılabılır. Bu konu hakkında daha sonra bir örnek verilecektir.

Skaler-tensör teorileri için ampirik destek, astrofizik gözlemler, yerçekimsel dalga tespitleri ve kozmolojik araştırmalar olarak sayılabilir (Damour ve Nordtvedt 1993),(Faraoni 2004). Teorilerin içerdiği parametreler üzerindeki kısıtlamalar genellikle güneş sistemindeki hassas yerçekimi testlerinden kaynaklanır öyle ki burada GG tahminlerinden sapmalar, anormal günberi devinimleri veya yerçekimsel kırmızıya kaymadaki değişiklikler olarak ortaya çıkabilir. Son yıllarda, skaler-tensör teorileri, karanlık madde ve karanlık enerjinin yarattığı zorlukları ele almayı amaçlayan, modifiye edilmiş yerçekimi teorileri bağlamında da yeniden ilgi görmeye başladı. Bu teoriler, galaktik ve kozmolojik ölçeklerde yerçekimsel olaylar için alternatif açıklamalar önererek, gözlemsel verileri teorik tahminlerle potansiyel olarak uzlaştırıyor. Sonuç olarak, skaler-tensör kütleçekim teorileri, kütleçekim etkileşimlerine ilişkin anlayışımızı GG ötesine genişletmek için sağlam bir çerçeveyi temsil ediyor. Bunların tarihsel gelişimi, teorik temelleri ve ampirik sonuçları teorik ve gözlemsel kozmolojideki modern araştırmaları şekillendirmeye devam ediyor.

Bölüm 5.3.1.1 altında, skaler-tensör panteonundaki temeller verilmiş ve Brans-Dicke (BD) teorisi tanıtılmıştır. Teorinin matematiksel içeriği ile ilgili kısa bir özetin ardından sonuçlarından ve GG' den farklı olduğu noktalardan bahsedilmiştir. Daha sonra, Bölüm 5.3.1.2 altında BD teorisinin oluşturulmasında kullanılan fikirler daha genel skaler-tensör teorilerine genelleştirilmiştir. Bu sınıftaki birkaç model için hızlı bir analiz verilmiştir. Son olarak Bölüm 5.3.1.3 altında, bir örnek olması adına, 3-boyutlu STP geometrisinde bir skaler-tensör teorisi çalışılmıştır. Tüm bölümler boyunca tensör ve diferansiyel form formalizmleri, alternatifli olarak kullanılmıştır.

5.3.1.1 Brans-Dicke (BD) teorisi

BD teorisi aşağıdaki Lagrangiyen ile verilir⁵

$$\mathcal{L}_{BD} = \phi R - \frac{\omega_{BD}}{\phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - 2V(\phi) \quad (5.3.1)$$

burada ϕ teorinin skaler alanı, $V(\phi)$ skaler alanın potansiyel terimi (kütle terimi veya öz-etkileşim terimi), ω_{BD} BD parametresidir, öyle ki bu parametre teorinin serbest sabit parametresidir. Açıkça görülebileceği gibi, yukarıdaki ifadenin sağ tarafındaki ilk terimden ötürü, skaler alan ve geometri arasındaki minimal olmayan çiftlenim vardır. Her ne kadar ikinci terimde adi parçalı türevler yer aldığı için bu Lagrangiyen kanonik bir ifade gibi görünse de, aslında halen Riemann geometrisi bağlamında kovaryant yapısını barındırmaktadır, zira standart olarak bilindiği gibi, kovaryant türev skaler alan için adi türeve dönüşmektedir. Dolayısıyla, Denk.(5.3.1) ifadesine, aşağıdaki tanımlamaları yaparak, Minkowski uzayzamanından erişilebilir

$$\eta_{\mu\nu} \mapsto g_{\mu\nu} \quad \partial_\mu \mapsto \nabla_\mu \quad (5.3.2)$$

Alan denklemleri

Aşağıdaki eylemi ele alalım

$$S_{BD} = \int d^4x \sqrt{|g|} (\mathcal{L}_{BD} + 2\mathcal{L}_m) \quad (5.3.3)$$

burada $\mathcal{L}_m$ herhangi bir madde Lagrangiyeni olsun. Bu eylemin, teorinin dinamik alanları olan metrik $g^{\mu\nu}$ ve skaler alan ϕ varyasyonları alınır, aşağıdaki alan denklemleri elde edilir

$$\delta g^{\mu\nu} : 0 = \phi G_{\mu\nu} - (\partial_\mu \partial_\nu - g_{\mu\nu} \square) \phi - T_{\mu\nu}^{(\phi)} - T_{\mu\nu}^{(m)} \quad (5.3.4a)$$

$$\delta \phi : 0 = R - \omega_{BD} \frac{(\partial\phi)^2}{\phi^2} + 2\omega_{BD} \frac{\square\phi}{\phi} - 2\partial_\phi V \quad (5.3.4b)$$

burada Einstein tensörü $G_{\mu\nu}$ ve skaler alanın enerji-momentum tensörü $T_{\mu\nu}^{(\phi)}$ şu şekilde verilir

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &:= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \\ T_{\mu\nu}^{(\phi)} &:= \frac{\omega_{BD}}{\phi} \left[\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial\phi)^2 \right] - g_{\mu\nu} V(\phi) \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

⁵Orijinal çalışmada (Brans ve Dicke 1961), yazarlar başlangıçta potansiyel terimi teoriye dahil etmemişler. Fakat yukarıdaki bağlamda, konuyla ilgili olan birçok literatüre benzer olarak, tamamlayıcı olması adına Lagrangiyene eklenmiştir.

burada $(\partial\phi)^2 := \partial^\mu\phi\partial_\mu\phi$ kısaltması kullanılır ve $T^{(m)}$ madde alanı için enerji-momentum tensörünü ifade eder. Skaler alan denklemi aşağıdaki gibi düzenlenebilir

$$\delta\phi : \quad \square\phi = \frac{1}{3 + 2\omega_{BD}} (2\phi\partial_\phi V - 4V + T^{(m)}) \quad (5.3.6)$$

Denk.(5.3.4) ile verilen alan denklemleri ve aşağıdaki verilen özdeşlikler kullanılarak

$$0 = \nabla^\mu G_{\mu\nu} \quad \text{Bianchi özdeşliği} \quad (5.3.7a)$$

$$R_{\mu\nu}\nabla^\nu\phi = \square(\nabla_\mu\phi) - \nabla_\mu(\square\phi) \quad (5.3.7b)$$

madde alanı standart enerji-momentum korunumu elde edilebilir

$$0 = \nabla^\mu T_{\mu\nu}^{(m)} \quad (5.3.8)$$

Burada birkaç yorum paylaşalım. Denk.(5.3.8) ifadesinden görülebileceği üzere, madde alanı, skaler alanın da olmasına rağmen, halen sadece geometrinin metriği ile etkileşimdedir. Bu sonuç şöyle yorumlanabilir : Madde Lagrangiyeni $\mathcal{L}_m$ skaler alana bağlı değildir. Öte yandan, Denk.(5.3.4) ve Denk.(5.3.6) ifadelerinden görülebileceği gibi, madde, skaler alan için bir kaynak olarak davranmaktadır. Buna göre şu söylenebilir, öyle ki sıklıkla BD teorisi kapsamında ele alınır : Her ne kadar skaler alan ve madde, Lagrangiyen seviyesinde çiflenmemiş olsalar da, alan denklemlerinde etkileşirler. Bu ilişki şöyle açıklanabilir : Madde halen geometriğinin metriğine göre hareket eder, yani metriğin jeodezilerini takip eder, diğer taraftan skaler alan ise, madde ile geometri arasındaki bu etkileşimin şiddetini belirler. Bu davranış, Newton'ın evrensel "sabit"nin, etkin bir alan ile değiştirilmesiyle sağlanabilir

$$G \mapsto G_{eff}(x) \propto \phi(x)$$

G ifadesindeki bu güncellemenin, notasyonun değiştirilmesiyle nasıl ortaya çıktığını gösterelim.

Teorinin alternatif bir gösterimi

Yukarıda tanıtılan BD teorisi farklı bir formda da gösterilebilir. Bunun için, aşağıda verilen tanımlamaları ele alalım

$$\phi \mapsto \frac{1}{2}\xi\varphi^2 \quad , \quad \omega_{BD} \mapsto \frac{1}{4\xi}\epsilon \quad (5.3.9)$$

burada $\varphi(x)$ yeni bir skaler alan, ξ bir serbest boyutsuz sabit, $\epsilon := \pm 1$ ise BD parametresinin ω_{BD} imzasıdır. Bu yeni ifadelerin kullanılmasıyla, Denk.(5.3.1) ile verilen BD Lagrangiyen ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\mathcal{L}_{BD} = \frac{1}{2}\xi\varphi^2 R - \frac{\epsilon}{2}(\partial\varphi)^2 - \tilde{V}(\varphi) \quad (5.3.10)$$

Burada, literatürle (Fujii ve Maeda 2004) senkron olmak adına, $V(\phi) \mapsto \tilde{V}(\varphi) = 2V(\phi(\varphi))$ dönüşümü kullanıldı. Bununla ilintili olarak alan deklemlerinin formu da dönüşür. Görüldüğü gibi, bu yeni notasyonla birlikte, Denk.(5.3.10) içindeki standart kinetik terimi elde edildi, öyle ki bu terim içinde serbest halde bir skaler alan yoktur. Bunun yanında, ilk terim sebebiyle minimal olmayan karakteristik halen geçerlidir. Bu yeni Lagrangiyen, skaler alanın minimal olmayan çiftlenimini içeren Einstein-Hilbert Lagrangiyeni ile karşılaştırıldığında, aşağıdaki eşlemeler yapılabilir

$$\frac{1}{2}\xi\varphi^2 = \phi = \frac{1}{16\pi G} \Rightarrow G_{eff}(x) := \frac{1}{8\pi\phi} \quad (5.3.11)$$

Bu sonuç, BD teorisi bağlamında Newton'ın evrensel kütleçekim sabitinin etkin bir alan olarak ele alınması fikrinin çıkış noktasıdır. Daha fazla detay için bkz. (Quiros 2019; Fujii 2004; Fujii ve Maeda 2004).

5.3.1.2 ST teorilerin genel formu

Literatürde ST teoriler çok farklı biçimlerde karşımıza çıkar, öyle ki bunlar arasında, teorideki çiftlenimler, skaler alanın fonksiyon(el)leri, skaler alanın kinetik / potansiyel terimleri, madde alanları, vb. sayılabilir. BD teorisi de bu bağlamda bir skaler-tensör teori olarak yorumlanabilir, zira minimal olmayan bir şekilde skaler alan içerir. Dahası, BD teorisini başlangıç olarak ele alıp, BD parametresini ω_{BD} bir alan olarak değiştirerek $\omega \equiv \omega(\phi)$, onu güncellemek mümkün olabilir. Sözü edilen bu dönüşüm ile beraber, Denk.(5.3.1) ile verilen BD Lagrangiyen ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\mathcal{L}_{ST} = \phi R - \frac{\omega}{\phi}(\partial\phi)^2 - 2V(\phi) \quad (5.3.12)$$

burada, yine $(\partial\phi)^2 := \partial^\mu\phi\partial_\mu\phi$ kısaltması kullanılır. Sıklıkla, yukarıda verilen Lagrangiyen ifadesi, ST teorilerin⁶ tanımlanmasında kullanılır. Aşağıdaki ST eylemi verilsin

$$S_{ST} = \int d^4x \sqrt{|g|}(\mathcal{L}_{ST} + 2\mathcal{L}_m) \quad (5.3.13)$$

Bu eylemin, dinamik nicelikler olan metrik ve skaler alana göre varyasyonu alınırsa aşağıdaki alan denklemleri elde edilir

$$\delta g^{\mu\nu} : 0 = \phi G_{\mu\nu} - (\partial_\mu\partial_\nu - g_{\mu\nu}\square)\phi - T_{\mu\nu}^{(\phi)} - T_{\mu\nu}^{(m)} \quad (5.3.14a)$$

$$\delta\phi : 0 = R - \left(\omega + \frac{\partial_\phi\omega}{\phi}\right) \frac{(\partial\phi)^2}{\phi^2} + 2\omega \frac{\square\phi}{\phi} - 2\partial_\phi V \quad (5.3.14b)$$

⁶Daha teknik olmak gerekirse, BD-tipi skaler-tensör teoriler.

burada $T_{\mu\nu}^{(\phi)}$ ve $T_{\mu\nu}^{(m)}$, BD durumundaki tanımlara benzerdir, sadece bu yeni durumda $\omega_{BD} \mapsto \omega$ dönüşümü geçerlidir. Sırasıyla, Denk.(5.3.4b) ve Denk.(5.3.14b) ile verilen, BD ve ST teorilerinin skaler alan denklemleri karşılaştırıldığında, ST durumu için skaler alan denkleminin ikinci terimindeki katkı gözlenebilir, öyle ki bu katkı genelleştirilmiş BD parametresinin ω alan yapısından kaynaklanır. Denk.(5.3.6) ile verilen düzenleme, Denk.(5.3.14b) üzerinde de yapılırsa aşağıdaki ifade elde edilir

$$\delta\phi : \quad \square\phi = \frac{1}{3 + 2\omega_{BD}} \left(\partial_\phi\omega(\partial\phi)^2 + 2\phi\partial_\phi V - 4V + T^{(m)} \right) \quad (5.3.15)$$

Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafındaki ilk terim, ω parametresinin alan karakteristiğini yansıtır.

5.3.1.3 Örnek : STP geometrisinde skaler-tensör teorisi

Einstein'ın gravitasyon teorisi Genel Görelilik (GG), metrik bileşenlerin ikinci dereceden türevlerini içeren alan denklemleriyle tanımlanır. Bu denklemler Einstein-Hilbert eylem integralinden bir varyasyon hesabıyla türetilir. Bu çalışmada ise, Riemann-dışı geometriler bağlamında incelemeler yapılacaktır. Bunu yaparken tam eğrilik ve torsiyonun sıfır olduğu ancak nonmetrisinin sıfır olmadığı bir uzayzaman geometrisinde çalışacağız. Bu tür geometriler simetrik teleparalel (STP) uzayzaman veya Minkowski-Weyl uzayzamanı olarak bilinir. Böyle bir geometrinin seçimine ilişkin daha fazla matematiksel motivasyon bir sonraki bölümde verilecektir.

Öte yandan, (2+1) boyutta GG' nin yayılan serbestlik derecesinin olmaması ve kuantum kütleçekimi çalışmalarının 3 boyutlu uzayzamanlarda umut verici sonuçlar vermesi nedeniyle 3 boyutlu gravitasyon modelleri son yıllarda oldukça ilgi görmüştür. Örneğin Banados-Teitelboim-Zanelli (BTZ), Einstein'ın negatif kozmolojik sabit içeren denklemlerine 3 boyutlu bir kara delik çözümü buldu (Banados, Teitelboim ve Zanelli 1992). Bu, hem klasik hem de kuantum düzeyinde ilginç özellikler ortaya çıkardı ve ayrıca bu çözümün 4 boyutlu Kerr kara deliği ile bazı ortak davranışlara sahip oldu fark edildi (Carlip 2005). Aslında 3 boyutlu yerçekimini, teorik fizik çalışmalarının çekici bir alanı haline getiren de bu BTZ kara deliğinin varlığıdır. Bu arada, Einstein-Hilbert eylemine tek-pariteli Chern-Simons terimi eklenirse, Topolojik Kütleli Gravitasyon (TMG) olarak adlandırılan 3 boyutlu yerçekimi teorisi elde edilir (Deser, Jackiw ve Templeton 1982b), (Deser, Jackiw ve Templeton 1982a). Daha sonra holografik yöntemler bağlamında, TMG modelinin üniter veya büyük yapı sınır çökmesi sorununu içerdiği gösterildi (Kraus ve Larsen 2006). Bu sorunu ortadan

kaldırmak için, çift-pariteli ikinci dereceden eğrilik terimleri eklenerek ve TMG bağlamındaki tek-pariteli topolojik Chen-Simons terimi atılarak, Yeni Kütleli Gravitasyon (NMG) teorisi önerilmiştir (Bergshoeff, Hohm ve Townsend 2009). Ancak NMG modelinin de, TMG modelinde karşılaşılan sorunları tam olarak çözemediği görülmüştür. Bu sebeple, büyük yapı sınır probleminin çözülebilmesi umuduyla NMG eylemine tek pariteli Chern-Simons terimi eklenerek Genelleştirilmiş Kütleli Gravitasyon (GMG) modeli tanıtıldı (Bergshoeff, O. Hohm ve Townsend 2009). Daha sonra TMG modeline torsiyon ve bir eksenel alan eklenerek elde edilen Minimal Kütleli Gravitasyon (MMG) modeli önerildi ve bu model, parametrelerin belirli aralıklarında büyük yapı sınır problemini çözdü (Bergshoeff, O. Hohm, Merbis, ve diğ. 2014), (Arvanitakis ve Townsend 2015). Her ne kadar bu tür 3 boyutlu yerçekimi modellerinin gerçek dünyadaki yerçekimine doğrudan etkisi olmasa da, bunların katı hal fiziğinde uygulamaları olması muhtemeldir (Bergshoeff, Rosseel ve Townsend 2018). 3 boyutlu yerçekimi modelleri hakkında daha fazla bilgi edinmek için bkz. (Hortacsu, Ozcelik ve Ozdemir 2008), (Adak, Ozdemir ve Sert 2023). 3 boyutlu yerçekimsel araştırmalara ilişkin yukarıdaki çabalara rağmen, bir kuantum gravitasyon teorisi kesinlikle hala açık bir sorundur. Bu nedenle 3 boyutlu senaryolar üzerinde daha fazla çaba gösterilmesinde fayda olabilir.

Matematiksel motivasyonlar

3 boyutta gravitasyon çalışmaları hakkında kısa bir özetin ardından bu bölümde, çalışmamızla ilgili matematiksel motivasyonlar verilecektir. GG teorisi, dış cebir formalizminde, 4 boyutlu bir uzayzamanda aşağıdaki gibi verilebilir

$$\tilde{G}_a := \frac{1}{2} \tilde{R}^b{}_c \wedge *e_{ab}{}^c = \kappa \tilde{\tau}_a[mat] \quad (5.3.16)$$

burada e^a ortonormal koçerçeveyi temsil eder (veya ortonormal kobaz 1-form), $\tilde{R}^a{}_b$ Riemann eğrilik 2-formudur, $*$ Hodge dualiteyi temsil eder, κ çiftlenim sabitidir, $\tilde{\tau}_a[mat]$ madde alanı için enerji-momentum 3-formudur ve $\tilde{G}_a$ Einstein tensörü 3-formdur. Bilindiği gibi, e^a ve $\tilde{R}^a{}_b$ nicelikleri, metrik tensörü yardımıyla türetilir, $g = \eta_{ab} e^a \otimes e^b$ burada η_{ab} Minkowski metrik katsayılarıdır öyle ki şu imzaya sahiptir $(-, +, +, +)$. 4 boyutta, Einstein tensörünün 16 bileşeni vardır. Diğer taraftan, Riemann eğrilik 2-formu ise 20 adet bağımsız bileşen içerir (" +36" adet $\tilde{R}^a{}_b$ nesnesinden, " -16" adet Bianchi özdeşliğinden, $\tilde{R}^a{}_b \wedge e^b = 0$). Dolayısıyla, vakum koşulunda, yani $\tilde{\tau}_a[mat] = 0$, Einstein tensörünün tüm bileşenleri sıfırlanırken, $\tilde{R}^a{}_b$ niceliğinin bazı bileşenleri halen sıfırdan farklı olabilir ve bu sayede vakumda gravitasyonel dalga için serbestlik dereceleri mümkün

olabilir.

Benzer analizi 3 boyutta yapalım. $\tilde{G}_a$ niceliğinin 9 adet ve $\tilde{R}^a_b$ 2-formunun ise 6 adet bağımsız bileşeni vardır. Sonuç olarak, Einstein tensörü tamamen sıfırlandığında, $\tilde{R}^a_b$ niceliğinin de tüm bileşenleri sıfırlanmak zorunda olur. Bu sebeple, vakumda gravitasyon dalgaları için herhangi bir serbestlik derecesi kalmaz. Buna göre, Einstein'ın GG teorisi üç boyutta dinamik bir teori değildir. Bu sebeple, literatürde 3 boyutta modifiye edilmiş gravitasyon teorileri sıklıkla çalışılmaktadır (Banados, Teitelboim ve Zanelli 1992), (Adak, Ozdemir ve Sert 2023).

GG'yi modifiye etmenin bir yolu Riemann-dışı geometrilerde çalışmaktır. Bu çalışmada ise biz, nonmetrisiti tarafından karakterize edilen STPG geometrisini seçtik (Nester ve Yo 1999), (Pala, Sert ve Adak 2023). Bu alandaki literatürü takip etmek için (Adak, Dereli, T. S. Koivisto, ve diğ. 2023) çalışması incelenebilir. STPG teorisinde de, 3 boyutta GG' de gözlediğimiz durumun olup olmadığını anlamak için, nonmetrisiti bileşenlerini ve alan denklemi bileşenlerini sayalım. STPG için alan denklemleri Denk.(5.3.38) ifadesi ile verilir ($\Lambda = 0$ alınmıştır),

$$\iota_b D\Sigma^b_a + \tau_a = 0 \quad (5.3.17)$$

Burada τ_a ve Σ^b_a 2-form nesneleri ortonormal kobazları e^a ve nonmetrisiti 1-formu Q_{ab} içerir. e^a nesnesi metrik tarafından belirlenirken Q_{ab} nesnesi de tesadüfi ayar seçimi altında metrik tarafından belirlenebilir. STPG alan denklemleri 9 adet ve Q_{ab} nesnesi 18 adet bileşen içerir. Bu durumda, STPG'nin önemsiz olmayan lokal dinamikler içereceği söylenebilir⁷. Hatta 2 boyutta bile, GG teorisi önemsiz iken, STPG vakumda dinamik olabilir (Adak ve Dereli 2008).

Genellikle STPG modelleri, Lorentz grubunu $SO(1, 2)$ oluşturan Lorentz dönüşümleri altında invariant kalacak biçimde değerlendirilir. $SO(1, 2)$ grubu, $Spin(1, 2)$ grubu tarafından çift-katlanmıştır, öyle ki $Spin(1, 2)$ grubu Clifford cebirinin $Cl_+(1, 2)$ bir çift alt cebiri tarafından üretilir. Bununla beraber $Cl_+(1, 2)$ cebiri, $\{1, \sigma_{ab}\}$ baz kümesi tarafından kaplanmıştır. $\sigma_{ab} = -\sigma_{ba}$ bazı, $e^{\sigma_{ab}\theta^{ab}(x)/2} \in SO(1, 2)$ gösterimi ile verilen Lorentz grubunu üretirken, birim baz $\{1\}$ ise Weyl (ölçek) grubunu üretir $e^{1\psi(x)} \in \mathcal{W}$, öyle ki bu gösterimlerdeki $\theta_{ab}(x)$ ve $\psi(x)$ alanları dönüşüm parametrelerini temsil eder. Sonuç olarak söylenebilir ki, STPG modelinin tam ayar grubu $SO(1, 2) \otimes \mathcal{W}$ olabilir (Pala, Sert ve Adak 2023). Bu

⁷Bir başka argüman ise, simetriler göz önüne alınarak verilebilir. Metrik tensörü 3 boyutta toplamda 6 adet bağımsız bileşen içerir, fakat GG'nin difeomorfizm invariantlığı sebebiyle geriye $6 - 2 \times 3 = 0$ adet dinamik serbestlik derecesi kalır. Öte yandan, STPG teorisi simetriyi kırarak bazı serbestlik derecelerinin oluşmasını sağlayabilir.

çıkarm, STPG teorisine bir skaler alanın eklenmesi arkasındaki motivasyonumuzdur.

Bir $SO(1, 2)$ transformasyonu altında metrik $g = \eta_{ab}e^a \otimes e^b$, ve bağlantı 1-form nesnesi ω^a_b , aşağıdaki gibi dönüşür

$$e^{a'} = L^{a'}_a e^a \quad \text{ve} \quad \eta_{a'b'} = L^a_{a'} L^b_{b'} \eta_{ab} \quad (5.3.18a)$$

$$\omega^{a'}_{b'} = L^{a'}_a L^b_{b'} \omega^a_b + L^{a'}_a dL^a_{b'} \quad (5.3.18b)$$

burada $L^{a'}_a(x), L^a_{a'}(x) \in SO(1, 2)$. Diğer yandan, bir Weyl transformasyonu altında ise şu şekilde dönüşürler

$$\hat{e}^a = e^\psi e^a \quad \text{ve} \quad \hat{\eta}_{ab} = \eta_{ab} \quad (5.3.19a)$$

$$\hat{\omega}^a_b = \omega^a_b - \delta^a_b d\psi \quad (5.3.19b)$$

burada $e^\psi(x) \in \mathcal{W}$. Aslında Denk.(5.3.19b) yerine $\hat{\omega}^a_b = \omega^a_b$ seçimi yapılabilir, öyle ki her ikisi de eğrilik nesnesini $R^a_b := d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b$ değişmez bırakır. Fakat, Weyl transformasyonu öncesinde ve sonrasında halen STP geometrisinde kalmak istediğimiz için $\hat{\omega}^a_b = \omega^a_b$ yerine Denk.(5.3.19b) seçilmiştir. Burada belirtelim ki, diğer seçim yapılmış olsaydı Weyl dönüşümü sonrası bazı torsiyon katkıları meydana gelecekti (Adak, Ozdemir ve Sert 2023). Genel olarak, Weyl dönüşümü altındaki en basit (temel) geometri, STP geometrisidir (Pala, Sert ve Adak 2023). Bu çalışmada STP geometrisinin seçilmesinin ana nedenlerinden biri budur.

Yukarıda verilen motivasyonlara ek olarak, elektromanyetik alan da teoriye dahil edilmiştir, öyle ki burada geliştirilen matematiksel tekniklerin fotonik kristaller alanındaki çalışmalara da uygulanabilmesi amacıyla (Yuksel ve diğ. 2024), (Oguz ve diğ. 2023). Sonuç olarak, 3 boyutlu STP geometrisinde tanımlanan modifiye bir gravitasyon teorisi ele alındı, yani STPG teorisi, daha sonra bu teoriye minimal olarak Maxwell alanı eklendi, yani STPG-Maxwell teorisi, ve son olarak ölçek değişmezliği için minimal olmayan biçimde bir skaler alan eklendi, yani STPG-Maxwell-Skaler teorisi. Bu sayede, nonmetrisiti hakkında daha fazla kavrayış edinmek ve nonmetrisiti, elektromanyetik alan, skaler alan arasında yeni etkileşimler araştırmak amaçlanmıştır.

Bir Lorentz transformasyonu $SO(1, 2)$, altında nicelikler aşağıdaki gibi dönüşürler

$$\begin{aligned} e^{a'} &= L^{a'}_a e^a, & \eta_{a'b'} &= L^a_{a'} L^b_{b'} \eta_{ab}, & \omega^{a'}_{b'} &= L^{a'}_a \omega^a_b L^b_{b'} + L^{a'}_a dL^a_{b'}, \\ \phi' &= \phi, & A' &= A \end{aligned} \quad (5.3.20)$$

burada ϕ skaler alan ve A Maxwell potansiyel 1-formudur. Metriğin imzası $\eta_{a'b'} = \eta_{ab} = \text{diag}(-1, +1, +1)$ ile verilir, ve dönüşüm elemanları lokal koordinatlara bağlıdır $L^{a'}_a(x)$ ve $L^a_{a'}(x)$, öyle ki Lorentz grubunu oluştururlar ve şunu sağlarlar

$L^{a'}_a L^a_{b'} = L^a_{a'} L^{a'}_b = \delta^a_b$. Benzer olarak, koordinat bağımlı bir Weyl (ölçek) transformasyonu aşağıdaki dönüşümleri üretir

$$\hat{e}^a = e^{\psi(x)} e^a, \quad \hat{\eta}_{ab} = \eta_{ab}, \quad \hat{\omega}^a_b = \omega^a_b - \delta^a_b d\psi(x), \quad \hat{\phi} = e^{-\psi(x)} \phi, \quad \hat{A} = A \quad (5.3.21)$$

burada transformasyon fonksiyonu $\psi(x)$, reeldir ve $e^{\psi(x)}$ elemanları Weyl grubunu $\mathcal{W}$ oluşturur. Bu transformasyonların Hodge harita üzerindeki etkisi aşağıdaki gibidir

$$\hat{*} \Phi = e^{(3-2p)\psi} * \Phi \quad (5.3.22)$$

burada Φ herhangi bir p -formdur. Son olarak, bir $U(1)$ transformasyonu altında aşağıdaki dönüşümler verilebilir

$$e^a \rightarrow e^a, \quad \eta_{ab} \rightarrow \eta_{ab}, \quad \omega^a_b \rightarrow \omega^a_b, \quad \phi \rightarrow \phi, \quad A \rightarrow A + df(x) \quad (5.3.23)$$

burada transformasyon fonksiyonu $f(x)$ reeldir ve $e^{if(x)} \in U(1)$. Ayrıca $i = \sqrt{-1}$. Bunlarla ilintili olarak, herhangi bir (p, q) -tipi tensör-değerli dış formun $\mathfrak{T}^{a_1 a_2 \dots a_p}_{b_1 b_2 \dots b_q}$ Lorentz-kovaryant dış türevi aşağıdaki gibi verilebilir

$$\begin{aligned} D\mathfrak{T}^{a_1 a_2 \dots a_p}_{b_1 b_2 \dots b_q} = & d\mathfrak{T}^{a_1 a_2 \dots a_p}_{b_1 b_2 \dots b_q} + \omega^{a_1}_c \wedge \mathfrak{T}^{ca_2 \dots a_p}_{b_1 b_2 \dots b_q} + \dots + \omega^{a_p}_c \wedge \mathfrak{T}^{a_1 a_2 \dots c}_{b_1 b_2 \dots b_q} \\ & - \omega^c_{b_1} \wedge \mathfrak{T}^{a_1 a_2 \dots a_p}_{cb_2 \dots b_q} - \dots - \omega^c_{b_q} \wedge \mathfrak{T}^{a_1 a_2 \dots a_p}_{b_1 b_2 \dots c} \end{aligned} \quad (5.3.24)$$

Hesaplamalarda (3 boyutta) aşağıdaki kısaltmalar ve yararlı özdeşlikler kullanılmıştır.

$$e^{ab\dots} := e^a \wedge e^b \wedge \dots, \quad \iota_{ab\dots} := \iota_a \iota_b \dots, \quad \partial_a := \iota_a d \quad (5.3.25a)$$

$$D * e_a = -Q \wedge * e_a + * e_{ab} \wedge T^b \quad (5.3.25b)$$

$$D * e_{ab} = -Q \wedge * e_{ab} + * e_{abc} \wedge T^c \quad (5.3.25c)$$

$$D * e_{abc} = -Q \wedge * e_{abc} \quad (5.3.25d)$$

burada $*$ Hodge haritasıdır ve şu şekilde verilir $*1 = \frac{1}{3!} \epsilon_{abc} e^a \wedge e^b \wedge e^c = e^{012}$. Bu ifadede, ϵ_{abc} tümüyle antisimetrik epsilon tensörüdür ve $Q = \eta_{ab} Q^{ab}$ ise nonmetrisi 1-formun izidir.

Probleme direkt olarak saldırmak yerine, kolaydan zora doğru üç adım şeklinde ilerleyeceğiz. Bu bağlamda, önce skaler alan ve elektromanyetik alan ihmal edilerek pür geometrik STPG teorisi ele alınacaktır.

Teori #1 : Üç boyutta STPG teorisi

STPG teorisi, aşağıdaki Lagrangiyen 3-formu ile verilir

$$L_1[Q] = L[Q^2] + \Lambda * 1 + T^a \wedge \lambda_a + R^a_b \wedge \rho^b_a \quad (5.3.26)$$

burada Λ kozmolojik sabittir, λ_a ve ρ^b_a Lagrange çarpımı 1-formlardır, öyle ki sırasıyla tosiyon ve (tam) eğriliği sıfırlar, ve $L[Q^2]$ ise aşağıda verildiği gibi, sadece nonmetrisiti içeren çift-pariteli kuadratik Lagrangiyen 3-formudur

$$L[Q^2] = c_1 Q_{ab} \wedge *Q^{ab} + c_2 (Q_{ab} \wedge e^b) \wedge * (Q^{ac} \wedge e_c) + c_3 (Q_{ab} \wedge e_c) \wedge * (Q^{ac} \wedge e^b) \\ + c_4 Q \wedge *Q + c_5 (Q \wedge e^b) \wedge * (Q_{ab} \wedge e^a) \quad (5.3.27)$$

Burada c_i , $i = 1, 2, \dots, 5$ çiftlenim sabitleridir. Dış cebir formalizmi ile verilen yukarıdaki ifadenin, literatürdeki tensör formalizmi bağlamındaki karşılıklarını takip edebilmek adına şunu yazalım $Q_{ab} = Q_{abc}e^c$ burada Q_{abc} (0,3)-tipi non-metrisiti tensör 0-formudur ve ilk iki indiste simetriktir $Q_{abc} = Q_{(ab)c}$. Bununla ilintili olarak, $L[Q^2]$ ifadesi şu forma dönüşür

$$L[Q^2] = \{ (c_1 + c_2 + c_3) Q_{abc} Q^{abc} - c_2 Q_{abc} Q^{acb} - c_3 Q_{ab}{}^b Q^{ac}{}_c \\ + (c_4 + c_5) Q^a{}_{ac} Q_b{}^{bc} - c_5 Q^a{}_{ab} Q^{bc}{}_c \} * 1 \quad (5.3.28)$$

Denk.(5.3.27) veya Denk.(5.3.28) ile verilen Lagrangiyen ifadeleri Lorentz invarianttır ve GG-eşdeğer teori için çiftlenim katsayıları aşağıdaki gibidir

$$c_1 = \frac{1}{2\kappa}, \quad c_2 = -\frac{1}{\kappa}, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = -\frac{1}{2\kappa}, \quad c_5 = \frac{1}{\kappa} \quad (5.3.29)$$

burada κ çiftlenim sabitidir. Bu değerler, (Adak, Sert, ve diğ. 2013) çalışmasında Denk.(31) sonrasında yazılan ifadelerle ve (Iosifidis ve T. Koivisto 2019) çalışmasında Denk.(54) sonrasında yazılan ifadelerle uyum içindedir.

Şimdi Denk.(5.3.26) ile verilen Lagrangiyen üzerinde varyasyon hesabı yapalım. Bu hesaplar sırasında (Adak, Kalay ve Sert 2006) çalışmasında elde edilen sonuçlar kullanılacaktır, şöyle ki

$$\delta(\alpha \wedge * \beta) = \delta\alpha \wedge * \beta + \delta\beta \wedge * \alpha - \delta e^a \wedge [(\iota_a \beta) \wedge * \alpha - (-1)^p \alpha \wedge (\iota_a * \beta)] \quad (5.3.30)$$

burada α ve β nicelikleri n boyutta hernagi birer p -formdur, ($0 \leq p \leq n$). Buna göre, $\delta\lambda_a$, $\delta\rho^b_a$, δe^a ve $\delta\omega^a_b$ parametrelerine göre alınan varyasyonlar, sırasıyla, aşağıdaki alan denklemlerini verir

$$T^a = 0 \quad (5.3.31a)$$

$$R^a{}_b = 0 \quad (5.3.31b)$$

$$\tau_a[Q] + \Lambda * e_a + D\lambda_a = 0 \quad (5.3.31c)$$

$$\Sigma^b{}_a[Q] + e^b \wedge \lambda_a + D\rho^b{}_a = 0 \quad (5.3.31d)$$

burada Lagrangiyenin varyasyon ifadesindeki tam formlar ihmal edilmiştir. Non-metrisiti için enerji-momentum 2-formu aşağıdaki gibi verilir

$$\tau_a[Q] = \sum_{i=1}^5 c_i \tau_a^{(i)}[Q] \quad (5.3.32)$$

burada

$$\tau_a^{(1)}[Q] = -(\iota_a Q^{bc}) \wedge *Q_{bc} - Q_{bc} \wedge (\iota_a *Q^{bc}) \quad (5.3.33a)$$

$$\begin{aligned} \tau_a^{(2)}[Q] = & -2Q_{ab} \wedge *(Q^{bc} \wedge e_c) - [\iota_a (Q^{dc} \wedge e_c)] \wedge *(Q_{db} \wedge e^b) \\ & + (Q_{db} \wedge e^b) \wedge [\iota_a *(Q^{dc} \wedge e_c)] \end{aligned} \quad (5.3.33b)$$

$$\begin{aligned} \tau_a^{(3)}[Q] = & -2Q^{bc} \wedge *(Q_{ac} \wedge e_b) - [\iota_a (Q^{dc} \wedge e^b)] \wedge *(Q_{db} \wedge e_c) \\ & + (Q_{db} \wedge e_c) \wedge [\iota_a *(Q^{dc} \wedge e^b)] \end{aligned} \quad (5.3.33c)$$

$$\tau_a^{(4)}[Q] = -(\iota_a Q) \wedge *Q - Q \wedge (\iota_a *Q) \quad (5.3.33d)$$

$$\begin{aligned} \tau_a^{(5)}[Q] = & -Q \wedge *(Q_{ab} \wedge e^b) - Q_{ab} \wedge *(Q \wedge e^b) - [\iota_a (Q_{bc} \wedge e^c)] \wedge *(Q \wedge e^b) \\ & + (Q \wedge e^b) \wedge [\iota_a *(Q_{bc} \wedge e^c)] \end{aligned} \quad (5.3.33e)$$

Nonmetrisiti için açısal momentum (hipermomentum) 2-formu aşağıdaki gibi verilir

$$\Sigma_a^b[Q] = \sum_{i=1}^5 c_i \Sigma_a^{(i)b}[Q] \quad (5.3.34)$$

burada

$$\Sigma_a^{(1)b}[Q] = 2 * Q^b_a \quad (5.3.35a)$$

$$\Sigma_a^{(2)b}[Q] = e^b \wedge *(Q_{ac} \wedge e^c) + e_a \wedge *(Q^{bc} \wedge e_c) \quad (5.3.35b)$$

$$\Sigma_a^{(3)b}[Q] = e^c \wedge *(Q_{ac} \wedge e^b) + e_c \wedge *(Q^{bc} \wedge e_a) \quad (5.3.35c)$$

$$\Sigma_a^{(4)b}[Q] = 2\delta_a^b * Q \quad (5.3.35d)$$

$$\Sigma_a^{(5)b}[Q] = \delta_a^b e^c \wedge *(Q_{cd} \wedge e^d) + \frac{1}{2} [e_a \wedge *(Q \wedge e^b) + e^b \wedge *(Q \wedge e_a)] \quad (5.3.35e)$$

Tüm açısal momentum 1-formları simetriktir $\Sigma_{ab}^{(i)}[Q] = \Sigma_{ba}^{(i)}[Q]$. Denk.(5.3.31c) ifadesindeki $D\lambda_a$ terimi, Denk.(5.3.31d) ifadesinin kovaryant türevi alınarak ortadan kaldırılabilir

$$D\Sigma_a^b[Q] - e^b \wedge D\lambda_a = 0 \quad (5.3.36)$$

burada STP geometri bağlamında $De^b = T^b = 0$ ve $D^2\rho^b{}_a = R^b{}_c \wedge \rho^c{}_a - R^c{}_a \wedge \rho^b{}_c = 0$ sonuçları kullanıldı. Ardından, yukarıdaki ifade ι_b çarpılır ve şu sonuç elde edilir

$$D\lambda_a = \iota_b D\Sigma^b{}_a[Q] \quad (5.3.37)$$

burada şu özdeşlikler kullanıldı : $\iota_a e^b = \delta_a^b$ ve $e^a \wedge \iota_a \alpha = p\alpha$ burada α herhangi bir p -formdur. Bulunan bu sonuç Denk.(5.3.31c) yerine yazılırsa STPG için ana alan denklemi elde edilir, öyle ki bu ana denklem Denk.(5.3.31c) ve Denk.(5.3.31d) ifadelerinin bir kombinasyonu olur

$$G_a[Q, \Lambda] := \iota_b D\Sigma^b{}_a[Q] + \tau_a[Q] + \Lambda * e_a = 0 \quad (5.3.38)$$

Burada tanımlanan yeni tensör 2-formu $G_a[Q, \Lambda]$ niceliği, Denk.(5.3.29) içindeki ifadeler ve $\kappa = -1$ koşulu altında $\tilde{G}_a[\tilde{R}, \Lambda] := -\frac{1}{2}\tilde{R}^b{}_c \wedge e_{ab}{}^c + \Lambda * e_a$ ile verilen Einstein 2-formunun STPG bağlamındaki karşılığıdır.

STPG modelimizi, metrik (Weitzenböck) teleparalel yerçekimi modeli (MTPG) olarak adlandırılan muadili ile karşılaştırmak aydınlatıcı olabilir⁸, öyle ki bu model bağlamında STPG' den çok daha fazla literatür bulunmaktadır, bkz. (Gonzalez, Saridakis ve Vasquez 2012), (Capozziello, Gonzalez, ve diğ. 2013), (Krssak ve Saridakis 2016), (Ren ve diğ. 2021). MTPG genellikle ortonormal çerçevede formüle edilir. Ortonormal (veya spin) bağlantı 1-formu sıfırlandığında $\omega^a{}_b = 0$, nonmetrisiti ve eğrilik de otomatik olarak sıfırlanırken torsiyon sıfırlanmaz $T^a = de^a \neq 0$, Denk.(4.1.4) ile verilen tanım sebebiyle. Buna göre, metrik teleparalelizm kurulumu oluşturmak için sıfırlanan bir spin bağlantı nesnesi yeterli görünüyor. Eğer bu en başta, yani Lagrangiyen seviyesinde yapılırsa, geliştirilen teori Lorentz transformasyonları altında invariant olmaz. Bu durumda $\omega^a{}_b = 0$ seçimi, ayar serbestliğinden vazgeçmek anlamına gelir. Başka bir deyişle, bu bir ayar sabitlemesidir. Böylece, invariant olmayan Lagrangiyen ifadesinden türetilen alan denklemleri kovaryant olmayacak ve bulunan çözüm sınıfları o ayar seçimine veya o çerçeveye özel olacaktır. Sonuç olarak, koçerçevelerin köşegen ve köşegen olmayan seçimleri, çerçeveye bağımlılıklarından kaynaklanan sorunlara yol açacaktır. Öte yandan, spin bağlantı nesnesinin sıfırlanma koşulu MTPG Lagrangiyeni üzerine empoze edilmezse, o zaman teori Lorentz-invariant ve varyasyonlar ile elde edilen alan denklemleri de kovaryant olurlar. Dolayısıyla, bu modelin çözümlerinde, çerçeveye bağımlıktan kaynaklı sorunlar yaşanmaz (Krssak ve Saridakis 2016), (Ren ve diğ. 2021). Denk.(5.3.26) ve Denk.(5.3.27) ile ver-

⁸Uzayzamanda yalnızca torsiyon ile geliştirilen gravitasyon modeline geçmişte teleparalel gravitasyon modeli deniyordu, ancak günümüzde daha çok metrik (Weitzenböck) teleparalel gravitasyon modeli olarak adlandırılmaktadır.

ilen Lagrangiyen ifadesinde görülebileceği gibi, seçtiğimiz STPG teorisi Lorentz-invarianttır ve alan denklemleri de Lorentz-kovaryanttır. Dolayısıyla da, koçerçevenin köşegen veya köşegen olmayan seçimlerinden kaynaklı sorunları içermez. Örnek olarak, Denk.(5.3.46) ile verilen çözüm sınıfı, aşağıdaki dönüşümler altında geçerlidir

$$e^0 \rightarrow e^{0'} = \left(1 + \frac{w_0^2}{r^2}\right) e^0 - w_0 \frac{f(r)}{r} e^2 \quad (5.3.39a)$$

$$e^1 \rightarrow e^{1'} = e^1 \quad (5.3.39b)$$

$$e^2 \rightarrow e^{2'} = -\frac{w_0}{rf(r)} \left(1 + \frac{w_0^2 + r^2}{r^2}\right) e^0 + \frac{w_0^2 + r^2}{r^2} e^2 \quad (5.3.39c)$$

öyle ki bu ifadeler aşağıdaki dönüşümler tarafından üretilmişlerdir

$$t \rightarrow t - w_0 \varphi, \quad r \rightarrow r, \quad \varphi \rightarrow \varphi, \quad w_0 \rightarrow -w_0 \quad (5.3.40)$$

Dönen dairesel simetrik metrik ve tesadüfi ayar seçimi

Şimdi Denk.(5.3.31a), Denk.(5.3.31b) ve Denk.(5.3.38) ile verilen alan denklemlerine çözüm arayalım. Dairesel simetrik Riemann geometrisinde Einstein alan denklemlerinin (negatif kozmolojik sabit altında) BTZ kara delik çözümleri, klasik ve kuantum düzeyinde ilginç sonuçlar içerir ve 4 boyuttaki Kerr kara delik çözümleri ile bazı olumlu özellikler paylaşırlar. Bu sebeple biz de çalışmamızda önerme olarak, dönen dairesel simetrik metrik seçtik. Çözüm çalışmaları sırasında tesadüfi ayar seçimi (doğal ve içsel ayar seçimi) metodu kullanılmıştır (Adak 2006), (J. B. Jimenez, Heisenberg ve T. Koivisto 2018).

Adım #1. Kutupsal koordinatlarda (t, r, φ) dönen dairesel simetrik metrik önermesi yapılır

$$ds^2 = -f^2(r)dt^2 + g^2(r)dr^2 + h^2(r)[w(r)dt + d\varphi]^2 \quad (5.3.41)$$

burada $f(r), g(r), h(r), w(r)$ bilinmeyen metrik fonksiyonlarıdır ve alan denklemleri tarafından belirlenmelidir.

Adım #2. Metrik için ortonormal koçerçeve seçimi yapılır

$$e^0 = f(r)dt, \quad e^1 = g(r)dr, \quad e^2 = h(r)[w(r)dt + d\varphi] \quad (5.3.42)$$

burada $ds^2 = -(e^0)^2 + (e^1)^2 + (e^2)^2$. Ortonormal koçerçevenin, tamamen metrik fonksiyonları cinsinden yazıldığına dikkat çekelim.

Adım #3. Dreibein ve tersi hesaplanır $e^a = h^a_\mu dx^\mu$ ve $dx^\mu = h^\mu_a e^a$

$$h^a_\mu = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ wh & 0 & h \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad h^\mu_a = \begin{bmatrix} 1/f & 0 & 0 \\ 0 & 1/g & 0 \\ -w/f & 0 & 1/h \end{bmatrix} \quad (5.3.43)$$

Tüm dreibein bileşenleri, yine metrik fonksiyonları cinsinden yazılmıştır.

Adım #4. Bağlantı 1-form nesnesi hesaplanır $\omega^a_b = h^a_\mu dh^\mu_b$

$$\omega^a_b = \begin{bmatrix} -e^1 f'/fg & 0 & 0 \\ 0 & -e^1 g'/g^2 & 0 \\ -e^1 hw'/fg & 0 & -e^1 h'/gh \end{bmatrix} \quad (5.3.44)$$

Bağlantı nesnesinin tüm bileşenleri metrik fonksiyonları cinsinden yazılmıştır.

Adım #5. $T^a = 0$, $R^a_b = 0$ ve aşağıdaki nonmetrisiti hesabı yapılır

$$Q_{ab} = \frac{1}{2}(\omega_{ab} + \omega_{ba}) = \begin{bmatrix} e^1 f'/fg & 0 & -e^1 hw'/2fg \\ 0 & -e^1 g'/g^2 & 0 \\ -e^1 hw'/2fg & 0 & -e^1 h'/gh \end{bmatrix} \quad (5.3.45)$$

Nonmetrisiti 1-form nesnesinin tüm bileşenleri metrik fonksiyonları cinsinden yazılmıştır.

Q_{ab} nesnesinin tesadüfi ayar seçimi altında metrik fonksiyonları cinsinden ifade edilmesinin ardından, Einstein alan denklemlerinin, aşağıda verilen, BTZ çözüm metriği uygulanır

$$h(r) = r, \quad w(r) = \frac{w_0}{r^2}, \quad f(r) = \frac{1}{g(r)} = \sqrt{m_0 + \frac{w_0^2}{r^2} - \Lambda r^2} \quad (5.3.46)$$

burada m_0 ve w_0 sabitlerdir. Denk.(5.3.38) ile verilen STPG alan denklemlerinin, aşağıda verilen çiftlenim sabitleri için sağlandığı kontrol edilmiştir

$$c_1 = -\frac{1}{2}, \quad c_3 = 1 - c_2, \quad c_4 = \frac{1}{2}, \quad c_5 = -1 \quad (5.3.47)$$

Burada dört adet serbest parametre vardır, c_2 , m_0 , w_0 , Λ . İntitli olarak, Denk.(5.3.38) ile verilen STPG alan denkleminin kovaryant türevi hesaplandı, öyle ki bu işleminin sonucunun sıfırlanıp sıfırlanmadığını bulabilmek için, zira standart GG bağlamında karşılık gelen işlem sıfırlanır $\tilde{D}\tilde{G}_a[\tilde{R}, \Lambda] = 0$. Görüldü ki, GG' de olduğu gibi $DG_a[Q, \Lambda] = 0$. Devamında, Denk.(5.3.31c) ve Denk.(5.3.31d) ifadelerinin de kovaryant türevleri hesaplandı. Öncelikle, $D^2\lambda_a = -R^b_a \wedge \lambda_b = 0$ kullanılarak bu

hesaplama koçerçeve alan denklemi için yapıldı ve $D(\tau_a[Q] + \Lambda * e_a + D\lambda_a) = 0$ sonucu bulundu. Ardından benzer hesap, Denk.(5.3.37) ve $D^2\rho^b_a = 0$ ifadeleri kullanılarak bağlantı alan denklemi için de yapıldı ve $D(\Sigma^b_a[Q] + e^b \wedge \lambda_a + D\rho^b_a) = 0$ sonucu bulundu. Sonuç olarak, halen elimizde dört adet serbest parametre vardır c_2, m_0, w_0, Λ .

Yukarıda verilen çözümün yanında, STPG teorimize GG-olmayan bir çözüm sınıfı daha bulundu, sıfırlanan kozmolojik sabit koşulu $\Lambda = 0$ altında, şöyle ki

$$h(r) = r, \quad w(r) = \frac{w_0}{r^2}, \quad f(r) = \frac{1}{g(r)} = \sqrt{m_0 + \frac{w_0^2}{r^2} + \frac{m_0^2}{2w_0}r^2} = \frac{m_0 r}{2w_0} + \frac{w_0}{r} \quad (5.3.48)$$

Bu çözüm, çiftlenim sabitlerinin aşağıdaki kısıtı altında geçerlidir

$$c_3 = -(3c_1 + c_2), \quad c_4 = -c_1, \quad c_5 = 2c_1 \quad (5.3.49)$$

Burada dört adet serbest parametre vardır c_1, c_2, m_0, w_0 . Denk.(5.3.29) ile verilen GG-eşdeğer katsayı değerleri sağlanmaz, zira $c_3 = -(3c_1 + c_2)$ sebebiyle. Bu sebeple bu çözüm sınıfı "GG-olmayan çözüm sınıfı" olarak adlandırılmıştır. Çözüm sınıflarının bulunması esnasında bilgisayar sistemleri REDUCE (Hearn 2004) ve bunun dış cebir paketi EXCALC (Schrüfer 2004) kullanılmıştır.

Son olarak, yukarıda verilen çözümlerin tekililikleri ile ilgili yorumlar verelim. Bu bağlamda ilk olarak, hangi r değerlerinde metrik fonksiyonlarının sıfır veya sonsuz olduğunu bulalım. Bununla beraber, bu tekililikler, koordinat tekililikleri olabileceği için, genelde izlenen yol, teoremin çeşitli invariant ifadelerinin de hesaplanmasıdır. Buna göre söylenebilir ki, eğer bu invariant ifadeler (herhangi bir çerçevede) bir noktada ıraksıyor ise, o zaman bütün koordinat sistemlerinde ıraksar. Fakat, bunun tersi her zaman doğru olmak zorunda değildir, yani invariant ifadelerin yakınsak olması fiziksel bir tekililiğin olmadığı anlamına gelmez, ör. GG' nin BTZ kara delik çözümleri. STPG teorisinde, nonmetrisiti içeren tüm invariant ifadeler zaten Denk.(5.3.27) ifadesinde verildiği için, biz $*L[Q^2]$ 0-form ifadesini hesaplayacağız. Ayrıca, Riemann eğrilik 2-formu cinsinden yazılan aşağıdaki $*K[\tilde{R}]$ 0-formunu da hesaplarız

$$K[\tilde{R}] = l_1 \tilde{R}^{ab} \wedge *e_{ab} + l_2 (\iota_a \tilde{R}^{ab}) \wedge *(\iota^c \tilde{R}_{cb}) + l_3 \tilde{R}^{ab} \wedge *\tilde{R}_{ab} \quad (5.3.50)$$

burada l_1, l_2, l_3 keyfi sabitlerdir, öyle ki şu verilen invariant ifadelerin takip edilmesini sağlarlar : $\tilde{R}^{ab} \wedge *e_{ab}$ Riemannsal Einstein-Hilbert 3-formudur, $\iota_a \tilde{R}^{ab}$ Riemannsal Ricci eğrilik 1-formudur ve $\tilde{R}^{ab} \wedge *\tilde{R}_{ab}$ ise Kretschmann skaleridir. Bu tanımların ardından, elde ettiğimiz iki çözüm sınıfını inceleyelim. Denk.(5.3.46) ile verilen

çözüm sınıfı bağlamında, metrik fonksiyonları için aşağıdaki gibi üç adet tekillik içeren nokta belirlendi

$$r_0 = 0, \quad r_{\pm} = \sqrt{\frac{m_0}{2\Lambda} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\Lambda w_0^2}{m_0^2}} \right)} \quad (5.3.51)$$

Bununla beraber her iki invaryant ifade de, uzayzamanın tamamında sonlu değere sahip oldu

$$*L[Q^2] = -\Lambda, \quad *K[\tilde{R}] = -6l_1\Lambda - 12l_2\Lambda^2 - 13l_3\Lambda^2 \quad (5.3.52)$$

Görüleceği üzere, $w_0^2 \leq m_0^2/4\Lambda$ koşulu, $r_{\pm}$ tekilliklerinin var olabilmesi için sağlanmak zorundadır. Buna göre, Denk.(5.3.46) ile verilen STPG çözüm sınıfının, GG ile aynı tekillik ve ufuk yapısını taşıdığı söylenebilir. Benzer hesaplamalar, Denk.(5.3.48) ile verilen çözüm sınıfı için de gerçekleştirilirse

$$r_0 = 0, \quad r = \sqrt{\frac{-2w_0^2}{m_0}}, \quad *L[Q^2] = 0, \quad *K[\tilde{R}] = \frac{12l_1m_0^2w_0^2 - 6l_2m_0^4 - 3l_3m_0^4}{8w_0^4} \quad (5.3.53)$$

Bu durumda, dışsal bir tekillik (ve ufuk yapısı) varlığı için $m_0 < 0$ koşulunun sağlanması gerekir. Özetle, STPG modelinin tekillik, ufuk ve karadelik yapıları hakkında daha derin analizlerin yapılabilmesi için ışık-jeodeziler bağlamında Raychaudhuri ve optik denklemlerin incelenmesi gerekir (J. Z. Yang ve diğ. 2021).

Teori #2 : Maxwell alanının minimal olarak STPG teorisine bağlanması

İkinci aşama olarak teoriye elektromanyetik alan dahil edilir. Denk.(5.3.26) ile verilen STPG teorisine minimal olarak Maxwell alanının eklendiği yeni model, STPG-Maxwell teorisi, aşağıdaki gibi verilir

$$L_2[Q, A] = L_1[Q] + dA \wedge *dA \quad (5.3.54)$$

burada A elektromanyetik potansiyel 1-formudur. Bu Lagrangiyen, $SO(1, 2) \otimes U(1)$ grubu altında simetriktir. Varyasyonel alan denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir

$$T^a = 0 \quad (5.3.55a)$$

$$R^a_b = 0 \quad (5.3.55b)$$

$$\tau_a[Q] + \Lambda * e_a + \tau_a[A] + D\lambda_a = 0 \quad (5.3.55c)$$

$$\Sigma^b_a[Q] + e^b \wedge \lambda_a + D\rho^b_a = 0 \quad (5.3.55d)$$

$$d * dA = 0 \quad (5.3.55e)$$

burada $\tau_a[Q]$ ifadesi Denk.(5.3.32) ile verilir, $\Sigma^b_a[Q]$ ifadesi Denk.(5.3.34) ile verilir ve elektromanyetik alan için enerji-momentum 2-formu da aşağıdaki gibi verilir

$$\tau_a[A] = -(\iota_a dA) \wedge *dA + dA \wedge (\iota_a *dA) \quad (5.3.56)$$

Denk.(5.3.55e) ile verilen Maxwell denklemlerinden başka bir şey değildir. Yine, önceki aşamada yapıldığı gibi, koçerçeve ve bağlantı alan denklemleri birleştirilerek STPG-Maxwell teorisinin ana alan denklemi elde edilir

$$\iota_b D\Sigma^b_a[Q] + \tau_a[Q] + \tau_a[A] + \Lambda *e_a = 0 \quad (5.3.57)$$

Denk.(5.3.42) ile verilen metrik önermesinin yanında, elektromanyetik potansiyel 1-form için de aşağıdaki gibi bir önerme yapılır

$$A = E(r)dt + B(r)d\varphi \quad (5.3.58)$$

burada $E(r)$ ve $B(r)$, metrik fonksiyonlarının yanında bilinmeyen yeni fonksiyonlardır ve bunların tümü alan denklemleri ile belirlenmelidir. Literatürde yer alan, dönen yüklü kaynaklar için verilen çözümlerden, ör. (Clement 1996), (Martinez, Teitelboim ve Zanelli 2000), (Dereli ve Y. N. Obukhov 2000), ilham alınarak aşağıdaki konfigürasyon önerilir

$$f(r) = \frac{r}{h(r)} \sqrt{\frac{r^2}{l^2} - \frac{l_0^2 q_0^2}{l^2} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)} \quad (5.3.59a)$$

$$g(r) = \frac{r}{h(r)f(r)} \quad (5.3.59b)$$

$$h(r) = \sqrt{r^2 + w_0^2 q_0^2 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)} \quad (5.3.59c)$$

$$w(r) = -\frac{w_0 q_0^2}{[h(r)]^2} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad (5.3.59d)$$

$$E(r) = -\frac{B(r)}{w_0} = -k_0 q_0 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad (5.3.59e)$$

burada l , l_0 , r_0 , q_0 , w_0 , k_0 serbest parametrelerdir. Çiftlenim sabitlerinin ve serbest parametrelerin arasında verilen aşağıdaki koşullar altında

$$\begin{aligned} c_1 &= -k_0^2, & c_3 &= 2k_0^2 - c_2, & c_4 &= k_0^2, & c_5 &= -2k_0^2, \\ \Lambda &= -\frac{2k_0^2}{l^2}, & l_0^2 &= l^2 - w_0^2 \end{aligned} \quad (5.3.60)$$

Denk.(5.3.59) ile verilen çözüm sınıfının, Denk.(5.3.55) ile verilen bizim teorimizin alan denklemlerini de sağladığı teyit edilmiştir. Burada, c_2 , w_0 , q_0 , r_0 , l , k_0 altı adet serbest parametredir. Ayrıca, koçerçeve, bağlantı ve birleşik alan

denklemlerinin kovaryant türevleri de, sırasıyla, aşağıda verildiği gibi hesaplandı

$$D(\tau_a[Q] + \Lambda * e_a + \tau_a[A] + D\lambda_a) = 0 \quad (5.3.61a)$$

$$D(\Sigma^b_a[Q] + e^b \wedge \lambda_a + D\rho^b_a) = 0 \quad (5.3.61b)$$

$$D(\iota_b D\Sigma^b_a[Q] + \tau_a[Q] + \tau_a[A] + \Lambda * e_a) = 0 \quad (5.3.61c)$$

Dahası, elektromanyetik enerji-momentum ifadesinin tam bağlantıya göre kovaryant türevi sıfırlanmazken $D\tau_a[A] \neq 0$, Levi-Civita bağlantısına göre (Riemannsal) kovaryant türevi sıfırlanır $\tilde{D}\tau_a[A] = 0$. Bu durum, Denk.(4.1.13) ile verilen ifadenin ayrıştırılması kullanılarak açıklanabilir, öyle ki bu ayrıştırma şunu verir $D\tau_a[A] = \tilde{D}\tau_a[A] - L^b_a \wedge \tau_b[A]$. Eğer $D\tau_a[A] = 0$ koşulunun da sağlanması istenirse, bu durumda $l^2 = w_0^2$ (veya $l_0 = 0$) kısıtı gerekir. Buna göre bilinmeyen fonksiyonlar aşağıdaki formu alır

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{r^2}{lh(r)}, \quad g(r) = \frac{l}{r}, \quad h(r) = \sqrt{r^2 + l^2 q_0^2 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}, \\ w(r) &= -\frac{lq_0^2}{[h(r)]^2} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right), \quad E(r) = -\frac{B(r)}{l} = -k_0 q_0 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \end{aligned} \quad (5.3.62)$$

Bu konfigürasyonda, serbest parametre sayısı beşe düşer.

Bir önceki adımda yapılan analize benzer olarak, tekillik ve ufuk yapısının incelenmesi için $r^2 - l_0^2 q_0^2 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = 0$ denkleminin çözülmesi gerekir, öyle ki bu denklem, $r = 0$ dışında da tekil noktaların elde edilebilmesi için Denk.(5.3.59) ile verilen çözüm ifadesinden türetilmiştir. Görülebileceği gibi, en genelde bu denklem transandantal bir denlemdir ve kökleri analitik olarak bulunamaz. Bu amaçla $y_1(r) = r^2$ ve $y_2(r) = l_0^2 q_0^2 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$ fonksiyonları aynı eksen takımı üzerinde çizilir ve kesişim noktaları araştırılırsa, üç durumun gerçekleşebileceği gözlemlenir. Ya hiç kesişim yoktur, ya bir adet kesişim noktası bulunabilir ya da iki adet kesişim noktası bulunabilir. Bu koşulların tümü l_0 ve q_0 sabitlerinin değerlerine bağlıdır. Ayrıca, ilintili invariant ifadeler de hesaplandı $*L[Q^2]$ ve $*K[\tilde{R}]$. Görüldü ki, $r = 0$ noktasında tekillik içerirler. Buna göre şu söylenebilir : Merkezde ($r = 0$ noktasında) yer alan tekilliği çevreleyen dışsal bir tekillik daha bulunabilirse, bu durumda standart kara delik yapısı sağlanabilir. Denk.(5.3.62) ile verilen çözüm sınıfına dair tekillik yapısına daha sonra tekrar değineceğiz.

Teori #3 : STPG-Maxwell teorisine minimal olmayan biçimde skaler alan bağlanması

Üçüncü ve son aşamada bir skaler alan ϕ minimal olmayan biçimde, Denk.(5.3.54) ile verilen STPG-Maxwell teorisine bağlanacaktır. Bu yeni teori aşağıdaki La-

grangiye ile verilir

$$L_3[Q, A, \phi] = \phi L[Q^2] + \phi^{-1} d\phi \wedge *d\phi + c_6 Q \wedge *d\phi + c_7 (Q_{ab} \wedge e^b) \wedge *(d\phi \wedge e^a) \\ + \Lambda \phi^3 * 1 + \phi^{-1} dA \wedge *dA + T^a \wedge \lambda_a + R^a{}_b \wedge \rho^b{}_a \quad (5.3.63)$$

burada c_6 ve c_7 yeni çiftlenim sabitleridir. $\phi = 1$ koşulu altında yukarıdaki teori, Denk.(5.3.54) ile verilen STPG-Maxwell teorisine indirgenir. Denk.(5.3.63) ifadesinin $SO(1, 2) \otimes U(1)$ altındaki invaryanslığı açıktır, bununla birlikte Denk.(5.3.21) ile verilen Weyl transformasyonları altında da invaryant olabilmesi için sabit parametreler arasında aşağıdaki koşulların sağlanması gerekir

$$2c_2 + 2c_3 + 3c_5 + c_7 = 0 \quad (5.3.64a)$$

$$2c_1 + 2c_2 + 2c_3 + 6c_4 + 5c_5 + c_6 + c_7 = 0 \quad (5.3.64b)$$

$$1 + 3c_1 + 2c_2 + 2c_3 + 9c_4 + 6c_5 + 3c_6 + 2c_7 = 0 \quad (5.3.64c)$$

$$2 + 3c_6 + 2c_7 = 0 \quad (5.3.64d)$$

Yukarıdaki dört denklemden sadece üç tanesi lineer bağımsızdır. Aşağıdaki gibi, skaler alanın Weyl-kovaryant türevi tanımlanırsa

$$\mathcal{D}\phi = d\phi + [k_6 \eta^{ab} Q_{ab} + k_7 (\iota_a Q^{ab}) e_b] \phi \quad (5.3.65)$$

Denk.(5.3.63) ile verilen Lagrangiyen aşağıdaki gibi daha kompakt bir formda yazılabilir

$$L'_3[Q, A, \phi] = \phi L'[Q^2] + \phi^{-1} \mathcal{D}\phi \wedge *\mathcal{D}\phi + \Lambda \phi^3 * 1 + \phi^{-1} dA \wedge *dA \\ + T^a \wedge \lambda_a + R^a{}_b \wedge \rho^b{}_a \quad (5.3.66)$$

burada

$$L'[Q^2] = k_1 Q_{ab} \wedge *Q^{ab} + k_2 (Q_{ab} \wedge e^b) \wedge *(Q^{ac} \wedge e_c) + k_3 (Q_{ab} \wedge e_c) \wedge *(Q^{ac} \wedge e^b) \\ + k_4 Q \wedge *Q + k_5 (Q \wedge e^b) \wedge *(Q_{ab} \wedge e^a) \quad (5.3.67)$$

Yukarıdaki ifadede k_i , $i = 1, 2, \dots, 7$ yeni (dönüştürülmüş) çiftlenim sabitleridir. Denk.(5.3.63) ve Denk.(5.3.66) ile verilen Lagrangiyen ifadelerinin, çiftlenim sabitleri arasında aşağıda verilen koşullar altında, birbirlerine eşit olduğu gösterilebilir

$$c_1 = k_1 + k_7^2, \quad c_2 = k_2, \quad c_3 = k_3 - k_7^2, \quad c_4 = k_4 + k_6^2 + 2k_6 k_7, \\ c_5 = k_5 - 2k_6 k_7, \quad c_6 = 2(k_6 + k_7), \quad c_7 = -2k_7 \quad (5.3.68)$$

Açıklama. Denk.(5.3.66) ifadesi ile Lagrangiyen yeniden yazıldığında, bunun formunun, Bölüm 5.3.1 altında tanımlanan skaler-tensör teorisinin Lagrangiyen formuna benzerliği daha açık şekilde görülebilmektedir. Burada eğrilik skaleri,

Denk.(5.3.67) ile verilen (nonmetrisiti ile belirlenen) skaler ile değiştirilmelidir. Bununla birlikte, BD parametresi $\omega_{BD} = -1$ ve skaler alanın potansiyel terimi $V(\phi) = \Lambda\phi^3 * 1$ olur. $\square$

Ayrıca, Weyl invaryanslığı için Denk.(5.3.64) ile verilen koşulların, (Iosifidis ve T. Koivisto 2019) çalışmasındaki Denk.(56) ile uyumlu olduğu ($n = 3$ için) teyit edilmiştir.

$\delta\lambda_a, \delta\rho^b_a, \delta\phi, \delta A, \delta e^a$ ve $\delta\omega^a_b$ varyasyonları, sırasıyla, aşağıdaki alan denklemlerini verir

$$T^a = 0 \quad (5.3.69a)$$

$$R^a_b = 0 \quad (5.3.69b)$$

$$L[Q^2] - 2\phi^{-1}d * d\phi + \phi^{-2}d\phi \wedge *d\phi + 3\Lambda\phi^2 * 1 - \phi^{-2}dA \wedge *dA - c_6 d * Q - c_7 d[e^a \wedge *(Q_{ab} \wedge e^b)] = 0 \quad (5.3.69c)$$

$$d(\phi^{-1} * dA) = 0 \quad (5.3.69d)$$

$$\tau_a[Q] + \tau_a[\phi] + \tau_a[A] + D\lambda_a = 0 \quad (5.3.69e)$$

$$\Sigma^b_a[Q] + \Sigma^b_a[\phi] + e^b \wedge \lambda_a + D\rho^b_a = 0 \quad (5.3.69f)$$

Nonmetrisiti için enerji-momentum 2-formu şu şekilde verilir

$$\tau_a[Q] = \phi \sum_{i=1}^5 c_i \tau_a^{(i)}[Q] \quad (5.3.70)$$

burada $\tau_a^{(i)}[Q]$ nicelikleri Denk.(5.3.33) ile verilmiştir. Nonmetrisiti için açısal momentum (hipermomentum) 2-formu aşağıdaki gibi verilir

$$\Sigma^b_a[Q] = \phi \sum_{i=1}^5 c_i \Sigma^b_a^{(i)}[Q] \quad (5.3.71)$$

burada $\Sigma^b_a^{(i)}[Q]$ nicelikleri Denk.(5.3.35) ile verilir. Elektromanyetik alan için enerji-momentum 2-formu Denk.(5.3.56) ile hesaplanır ve aşağıdaki gibidir

$$\tau_a[A] = -\phi^{-1} [(\iota_a dA) \wedge *dA - dA \wedge (\iota_a * dA)] \quad (5.3.72)$$

Skaler alan için enerji-momentum 2-formu aşağıdaki gibi verilir

$$\begin{aligned} \tau_a[\phi] = & -\phi^{-1} [(\iota_a d\phi) \wedge *d\phi + d\phi \wedge (\iota_a * d\phi)] - c_6 [(\iota_a d\phi) \wedge *Q + Q \wedge (\iota_a * d\phi)] \\ & - c_7 [\iota_a (d\phi \wedge e^b) \wedge *(Q_{bc} \wedge e^c) - (Q_{bc} \wedge e^c) \wedge \iota_a * (d\phi \wedge e^b)] \\ & - c_7 [Q_{ab} \wedge *(d\phi \wedge e^b) + d\phi \wedge *(Q_{ab} \wedge e^b)] + \Lambda\phi^3 * e_a \end{aligned} \quad (5.3.73)$$

Skaler alan için açısai momentum 2-formu aşığıdaki gibi verilir

$$\Sigma^b_a[\phi] = c_6 \delta^b_a * d\phi + \frac{c_7}{2} \left[e^b \wedge *(d\phi \wedge e_a) + e_a \wedge *(d\phi \wedge e^b) \right] \quad (5.3.74)$$

Skaler alanın teoriye minimal olmayan biçimde bağlanması nedeniyle, skaler alanın açısai momentum niceliğı ortaya çıkar. Tüm açısai momentum 2-form terimleri simetriktir, $\Sigma_{ab} = \Sigma_{ba}$. Yine, önceki aşamalarda yapıldığı gibi, koçerçeve ve bağlantı alan denklemleri birleştirilebilir ve aşığıdaki gibi verilir

$$\iota_b D(\Sigma^b_a[Q] + \Sigma^b_a[\phi]) + \tau_a[Q] + \tau_a[A] + \tau_a[\phi] = 0 \quad (5.3.75)$$

En genelde çözümesi gereken alan denklemleri Denk.(5.3.69a), Denk.(5.3.69b), Denk.(5.3.69c), Denk.(5.3.69d) ve Denk.(5.3.75) ifadeleridir. Ancak, tesadüfi ayar seçimi altında otomatik olarak sağlanan sıfır-torsiyon ve sıfır-eğrilik koşulları altında, etkin olarak çözeceğimiz alan denklemleri Denk.(5.3.69c), Denk.(5.3.69d) ve Denk.(5.3.75) ifadeleridir.

Denk.(5.3.69d) ile verilen Maxwell denklemleri üzerine birkaç yorum paylaşalım. Elektromanyetik alanın diğeri alanlara minimal olmayan bağlanmasının etkileri, tanımlanan bir yardımcı tensör içine kodlanabilir. Elektromanyetik 2-formu için, $F = dA$, rastgele bir ortamda Maxwell denklemleri şu şekilde verilebilir

$$dF = 0 \quad \text{and} \quad d * G = J \quad (5.3.76)$$

burada G eksitasyon (uyarım) 2-formu ve J kaynak elektrik akım 2-formudur (bu nesne 4 boyut içinde 3-form halinde gelir). Sistemin kapalı olabilmesi için G, J, F arasında ilişkilerin kurulması gerekir. Bizim durumumuzda, halihazırda $J = 0$ koşulunun yanında basit lineer bir ilişki $G = \mathcal{Z}(F)$ varsayılabilir, burada $\mathcal{Z}$ is $(2, 2)$ -tip yardımcı bir tensördür. Teorimiz için bu ifade şöyle verilir

$$G = \phi^{-1} F \quad (5.3.77)$$

Şimdi ise, Denk.(5.3.45), Denk.(5.3.58) ve $\phi = \phi(r)$ koşulları altında, Denk.(5.3.69c), Denk.(5.3.69d) ve Denk.(5.3.75) ile verilen alan denklemlerine dönen dairesel simetrik çözümler bulmaya çalışalım. İlk olarak, Denk.(5.3.59) ile verilen çözümün, Denk.(5.3.69) için de bir çözüm sağladığı gözlenebilir, öyle ki $\phi(r) = 1$ ve aşığıdaki koşullar altında

$$\begin{aligned} c_1 &= -k_0^2, & c_3 &= 2k_0^2 - c_2, & c_4 &= k_0^2, & c_5 &= -2k_0^2, \\ c_6 &= 0, & c_7 &= 2k_0^2, & \Lambda &= -\frac{2k_0^2}{l^2}, & l_0^2 &= l^2 - w_0^2 \end{aligned} \quad (5.3.78)$$

Burada $c_2, k_0, l, r_0, w_0, q_0$ altı adet serbest parametredir. Yukarıda verilen koşullar, Denk.(5.3.64) ifadesindeki Weyl invaryanslık koşullarını sağlamazlar. Bunun yanında,

$D(5.3.75) = 0$, $D(5.3.69e) = 0$, $D(5.3.69f) = 0$, $D\tau_a[A] \neq 0$ ve $\tilde{D}\tau_a[A] = 0$ kısıtlarının sağlandığı teyit edilmiştir. $w_0 = l$ (veya $l_0 = 0$) kısıtı altında, öyle ki bu kısıt serbest parametrelerin sayısını beşe düşürür, $D\tau_a[A] = 0$ olur ve Denk.(5.3.62) ifadesi yeni bir çözüm sınıfı olur. Bu durumda da, halen, Denk.(5.3.64) ile verilen Weyl invaryanslık koşulları sağlanmaz.

Bir sonraki adımda, Denk.(5.3.21) ile verilen Weyl transformasyonları ışığında ve $\phi(r) = e^{-\psi(r)}$ alınarak, ortonormal çerçeve ve bağlantı nesnesi aşağıdaki gibi belirlenir

$$e^0 = e^{\psi(r)} f(r) dt, \quad e^1 = e^{\psi(r)} g(r) dr, \quad e^2 = e^{\psi(r)} h(r) [w(r) dt + d\varphi], \quad (5.3.79)$$

$$\omega^a_b = \begin{bmatrix} -e^1(f' + f\psi')/(fge^\psi) & 0 & 0 \\ 0 & -e^1(g' + g\psi')/(g^2e^\psi) & 0 \\ -e^1hw'/(fge^\psi) & 0 & -e^1(h' + h\psi')/(ghe^\psi) \end{bmatrix} \quad (5.3.80)$$

burada $\psi(r)$ Weyl (ölçek) fonksiyonudur. Yukarıda verilen bağlantı nesnesi, tesadüfî ayar seçimi altında, Denk.(5.3.79) ile verilen ortonormal köçerçeve kullanılarak türetilmiştir. Bu durumda, Denk.(5.3.62) ile verilen fonksiyonlar, aşağıdaki kısıtlar altında bir çözüm sınıfı sağlar

$$\begin{aligned} c_3 &= k_0^2 - c_1 - c_2, & c_4 &= \frac{1 - 7c_1 - 2k_0^2}{3}, & c_5 &= \frac{10c_1 + 2k_0^2 - 1}{3}, \\ c_6 &= \frac{16c_1 + 8k_0^2 - 4}{3}, & c_7 &= 1 - 8c_1 - 4k_0^2, & \Lambda &= \frac{16c_1 + 8k_0^2 - 1}{3l^2}, & w_0 &= l \end{aligned} \quad (5.3.81)$$

Burada $c_1, c_2, k_0, l, r_0, q_0, \psi(r)$ keyfi parametrelerdir. Bu yeni konfigürasyon, Denk.(5.3.64) ile verilen Weyl (ölçek) invaryanslığını sağlar. Bunun yanında, $D(5.3.75) = 0$, $D(5.3.69e) = 0$, $D(5.3.69f) = 0$, $D\tau_a[A] = 0$ ve $\tilde{D}\tau_a[A] = 0$ kısıtlarının sağlandığı da teyit edilmiştir.

En son verilen çözüm sınıfının tekillik analizi için Denk.(5.3.62) ifadesine bakalım. Bu fonksiyonlar sadece $r = 0$ noktasında tekillik içerirler. Bir ufuk yapısına sahip olmamaları, bunları çıplak tekillik olduğunu gösterir. Bununla beraber, metrik fonksiyonları $e^{\psi(r)}$ terimi ile modifiye edilmişlerdir ve $\psi(r)$ keyfidir. $*L[Q^2]$ ve $*K[\tilde{R}]$ invaryant ifadeleri yine hesaplandı ve görüldü ki, bu çözüm sınıfı için, $\psi(r)$ fonksiyonunun davranışına bağlı olarak, merkezin $r = 0$ dışında da dışsal tekillik noktaları olabilir.

5.3.2 $f(R)$ teorileri

Yerçekimi teorileri alanında, $f(R)$ teorileri Einstein'ın GG teorisinden önemli bir ayrılığı temsil eder. Bu teoriler, Ricci skalerini R daha genel bir $f(R)$ fonksiyonuyla değiştirerek, böylece uzayzamanın dinamiklerini yöneten alan denklemlerini de değiştirerek, Einstein-Hilbert eyleminin güncellenmesini önerir. $f(R)$ teorilerinin geliştirilmesinin ve araştırılmasının arkasındaki motivasyon, kozmoloji ve temel fizikte karşılaşılan çeşitli teorik ve gözlemsel problemler olarak söylenebilir.

$f(R)$ teorilerinin kökenleri, kozmik enflasyon ve karanlık enerji gibi olguları açıklamak için, GG'ye alternatif çalışmaların yapıldığı 20. yüzyılın ortalarına kadar götürülebilir. Bu bağlamda ufuk açıcı çalışmalardan biri, 1918'de, Ricci skaleri ve skaler alanın fonksiyonunu içeren bir teori öneren H. Weyl'e atfedilir. Ancak modern formülasyon, 1970'lerde ve 1980'lerde R^2 enflasyon modellerini ortaya koyan Starobinsky'nin çalışmalarıyla ivme kazandı (Starobinsky 1980). 1990'ların sonu ve 2000'lerin başında $f(R)$ teorileri, karanlık enerjiye başvurmadan evrenin hızlanan genişlemesini açıklama potansiyelleri nedeniyle yeniden ilgi görmeye başladığında çok önemli bir gelişme yaşandı. Bu dönemde $f(R)$ fonksiyoneli için bazı önermeler içeren çalışmalar verildi, ör. Starobinsky tarafından (Starobinsky 1980) yazılan $f(R) = R + \alpha R^2$, Hu ve Sawicki tarafından (Hu ve Sawicki 2007) yazılan $f(R) = R - \mu^4/R$. Bu çalışmalar, enflasyon ve geç dönem kozmik ivmesi gibi kozmolojik özellikleri yeniden üretmeyi amaçladı.

$f(R)$ teorilerinin temelinde, Einstein-Hilbert eyleminin aşağıdaki gibi modifiye edilmesi yatmaktadır

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} f(R) + L_m \right] \quad (5.3.82)$$

burada $\kappa^2 = 8\pi G$ ile verilir, g metrik tensörünün determinantıdır ve L_m madde Lagrangiyenidir. Bu eylemden türetilen alan denklemleri, $f(R)$ fonksiyonunun formundan kaynaklanan modifiyelerle beraber, madde alanlarının varlığında yerçekimi dinamiklerini yönetir. İlk araştırmalar, modifiye edilmiş alan denklemlerinin türetilmesi ve bunların kozmoloji ve astrofizik açısından çıkarımlarının analiz edilmesine odaklandı. Örneğin modifiye edilmiş Friedmann denklemleri, evrenin $a(t)$ ölçek faktörünün, $f(R)$ yerçekimi etkisi altında evrimini belirler (Capozziello ve Laurentis 2011). Kozmik mikrodalga arka plan radyasyonu ve büyük ölçekli yapıların gözlemleri de dahil olmak üzere gözlemsel verilerle uyumluluklarını anlamak için $f(R)$ modellerin kozmolojik çözümleri de incelendi. Bu modellerin bazı uygulamaları, egzotik enerji türlerini devreye sokmadan evrenin ilk zamanlarındaki enflasyon dönemini ve geç dönemdeki hızlandırılmış genişlemesini açıklamak için bir çerçeve sunuyorlar. Bununla birlikte, lokal gravitasyon testleri

ve kozmolojik veriler gibi gözlemlerden kaynaklanan katı kısıtlamalar, $f(R)$ modelleri için zorluklar oluşturmıştır. Kısıtlamalar tipik olarak, $f(R)$ teorilerinin güneş sistemindeki ve standart yerçekimi testlerinin geçerli olduğu yerel ortamlarda GG ile uyumlu olması gerekliliğinden kaynaklanmaktadır. Bu bağlamda, güneş sistemi deneyleri, yerçekimsel dalga tespitleri ve hassas kozmolojik ölçümler, $f(R)$ modellerinin parametrelerine sınırlar getirmiştir (Clifton ve diğ. 2012).

Öte yandan, R^2 , $R^{\mu\nu}{}_{\mu\nu}$, $R^{\mu\nu\lambda\sigma}{}_{\mu\nu\lambda\sigma}$ gibi kuadratik terimlerin eklenmesi, kuantum yerçekimi çalışmaları için umut verici modeller sunar (Stelle 1977) ve ayrıca GG' nin olağan kütleli tensör modunun yanı sıra yayılan kütleli modlara da sahiptirler (Stelle 1978), (Hindawi, Ovrut ve Waldram 1996a), (Hindawi, Ovrut ve Waldram 1996b). Ancak bu modeller çeşitli kararsızlık sorunlarıyla karşı karşıyadır. Diğerleri arasında en iyi bilineni, birden fazla zaman türevini içeren Lagrangiyenlerde doğrusal bir kararsızlığın varlığını ifade eden Ostrogradsky kararsızlığıdır (Ostrogradsky 1850). Yukarıda sözü geçen ve kuadratik terimler içeren modellerin yanında, sadece $f(R)$ tipindeki modeller Ostrogradsky kararsızlığı yaşamayan modeller olarak biliniyor (Woodard 2007). Bu önemli sonuç da, $f(R)$ modellerin çalışılmasındaki motivasyonlardan biridir.

Sonuç olarak, $f(R)$ teorileri Einstein' ın yerçekimi teorisi üzerinde yapılabilecek modifikasyonları araştırmak için verimli bir zemini temsil ediyor. Teorik tahminleri gözlemsel verilerle uzlaştırmaya yönelik ilk girişimlere kadar uzanan bu teoriler, zaman içinde kozmolojik problemler ve temel fizik soruları tarafından yönlendirilerek önemli ölçüde gelişti. $f(R)$ modellerin teorik öngörülerini gözlemsel kısıtlarla uzlaştırma konusunda zorluklar devam ederken, yapılan araştırmalar bu teorileri geliştirmeye ve bunların yerçekimi ve evren anlayışımıza yönelik daha geniş sonuçlarını keşfetmeyi sürdürüyor.

$f(R)$ teoriler için eylem aşağıdaki gibi verilebilir

$$S_{metrik} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_{madde}(g_{\mu\nu}, \psi) \quad (5.3.83)$$

Burada, *metrik* formalizminde çalışıldığı için, madde eylemi en genelde, geometrik anlamda metriğe ve aynı zamanda da harici madde alanına ψ bağlıdır. Bunun yanında, metrik formalizminde bağlantı nesnesi Levi-Civita olduğu için, eğrilik skaleri R de sadece metriğin bir fonksiyonudur. Fakat, eğrilik skalerinin temel tanımında da olduğu gibi, aslında bağlantı nesnesine bağlı bir niceliktir. Sadece metrik formalizmde bu bağımlılık önemsiz olmaktadır. İlerleyen bölümlerde, metrik-afin yaklaşım ele alındığında, bu noktaya tekrar değinilecektir. Yukarıda verilen eylemin, metriğe göre varyasyonu alınırse aşağıdaki ifade elde edilir (Quiros

2019)

$$f' R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu f' + g_{\mu\nu} \square f' = \kappa T_{\mu\nu} \quad (5.3.84)$$

burada $f' := \partial_R f(R)$ ve $T_{\mu\nu} = \delta S_{matter} / \delta g^{\mu\nu}$ madde alanı için enerji-momentum tensörüdür. Bu eşitlik, iyi bilindiği gibi, sol taraftaki son terimin varlığından ötürü metriğe göre dördüncü derece bir diferansiyel denklemdir.

Metrik ve bağlantı nesnesinin birbirlerinden bağımsız olarak ele alındığı metrik-afin formalizmde de inceleme yapılabilir. Bu durumda bağlantı nesnesi Levi-Civita olmak zorunda değildir ve afin bağlantı olarak adlandırılır. Bu formalizme göre eğrilik skaleri R sadece metriğe bağlı bir nicelik olarak yazılamaz, öyle ki artık (afin) bağlantı nesnesine ilintilidir. Metrik formalizmi ile arasındaki farklılığı vurgulamak için, metrik-afin durumda eğrilik skaleri şu şekilde gösterilecektir⁹ $\tilde{R} := R(\Gamma) = g^{\mu\nu} \tilde{R}_{\mu\nu}$. Ek olarak, metrik-afin formalizmde madde eylemi en genelde, metriğin yanında bağlantı nesnesini de içerebilir, öyle ki metrik formalizmde sadece metriğe bağlıydı. Tüm bunların ışığında, metrik-afin formalizmde $f(\tilde{R})$ teorisini aşağıdaki gibi yazabiliriz

$$S_{maff} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(\tilde{R}) + S_{madde}(g_{\mu\nu}, \Gamma^\lambda_{\mu\nu}, \psi) \quad (5.3.85)$$

Metrik ve bağlantı nesnesine göre bağımsız varyasyon işlemlerinin gerçekleştirilmesinin ardından alan denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir

$$\delta g^{\mu\nu} : \quad f' \tilde{R}_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2} f g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (5.3.86a)$$

$$\delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} : \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[-\nabla_\lambda (\sqrt{-g} f' g^{\mu\nu}) + \nabla_\sigma (\sqrt{-g} f' g^{\sigma(\mu}) \delta^\nu_{\lambda}) \right] = \kappa \Delta_\lambda^{\mu\nu} \quad (5.3.86b)$$

burada $f' := \partial_{\tilde{R}} f(\tilde{R})$, $T_{\mu\nu} = \delta S_{matter} / \delta g^{\mu\nu}$ ve $\Delta_\lambda^{\mu\nu} = \delta S_{madde} / \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ madde için enerji-momentum ve açıl-momentum tensörleridir, sırasıyla. Bu arada, metrik-afin formalizmde de, madde eyleminin bağlantı nesnesinden bağımsız olduğu bir seçim yapılabilir. Bu durumda, teorinin sadece geometrik kısmı afin bağlantı nesnesini içerirken, madde eylemi aynen metrik formalizmde olduğuna benzer şekilde davranır. Literatürde, bu seçim bazen $f(R)$ teorisinin Palatini formalizmi olarak adlandırılır ve ilgili eylem aşağıdaki gibi yazılabilir

$$S_{Palatini} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(\tilde{R}) + S_{madde}(g_{\mu\nu}, \psi) \quad (5.3.87)$$

Açıkça görülebileceği gibi, Palatini formalizminde maddenin açıl-momentumu $\Delta_\lambda^{\mu\nu}$, dolayısıyla Denk.(5.3.86b) ifadesinin sağ tarafı, sıfırlanır. $f(R)$ teorilerin

⁹Bölüm 5.3.2 ve Bölüm 5.3.3 boyunca kullanılan ”~” sembolü, metrik ve metrik-afin formalizm arasındaki farkı vurgulamak için tercih edilmiştir. Aynı sembolün, daha önceki bölümlerde Levi-Civita bağlantı nesnesine ilintili nesnelerin gösterimi için kullanılması ile bir ilgisi yoktur.

farklı formalizmleri için gözlenen bu farklılık, öyle ki madde eyleminin yapısındaki farklılıklardan kaynaklanan, ilerleyen bölümlerde skaler-tensör ve $f(R)$ teoriler arasındaki ilişkiden bahsedilirken önemli olacaktır.

Tablo 5.1: $f(R)$ teorilerin farklı formalizmleri.

Formalizm	Geometrik kısım	Madde kısmı
metrik	$f(R)$	$L_{madde}(g_{\mu\nu}, \psi)$
Palatini	$f(\tilde{R})$	$L_{madde}(g_{\mu\nu}, \psi)$
metrik-afin	$f(\tilde{R})$	$L_{madde}(g_{\mu\nu}, \Gamma^\lambda_{\mu\nu}, \psi)$

5.3.3 Skaler-tensör ve $f(R)$ teoriler arasındaki ilişki

Denk.(5.3.83) ile verilen $f(R)$ teori eylemini yeniden ele alalım. Şimdi, farklı bir (skaler alan içeren) eylem oluşturarak bunun *dinamik* olarak metrik $f(R)$ eylemine eşit olduğu gösterilecektir. Yeni eylem aşağıdaki gibi verilsin

$$S_{skaler} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [f(Y) + f'(Y) \cdot (R - Y)] + S_{madde}(g_{\mu\nu}, \psi) \quad (5.3.88)$$

burada Y rastgele bir alandır ve $f' := \partial_Y f(Y)$. Bu eylemin Y alanına göre varyasyonu alınırsa aşağıdaki ifade elde edilir

$$0 = f''(Y) \cdot (R - Y) \quad (5.3.89)$$

Bu sonuç bağlamında $f(Y)$ üzerine, $f'' \neq 0$ koşulu uygulanırsa $R = Y$ sonucu elde edilir. Bulunan bu ifade Denk.(5.3.88) içinde yerine yazılırsa köşeli parantez "[...]" içindeki ikinci terim sıfırlanır ve Denk.(5.3.83) ile verilen metrik $f(R)$ eylemine ulaşılır. Buna göre, yukarıda verilen bu iki eylemin dinamik olarak eş oldukları söylenebilir, $S_{metrik} \equiv S_{skaler}$. Dahası, aşağıda verilen tanımları ele alalım

$$\Phi := f'(Y) \quad , \quad V(\Phi) := \Phi Y(\Phi) - f(Y) \quad (5.3.90)$$

Bu yeni değişkenler, Denk.(5.3.88) ifadesinde yerine yazılırsa şu elde edilir

$$S_{skaler} \equiv S_{metrik} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [\Phi R - V(\Phi)] + S_{madde}(g_{\mu\nu}, \psi) \quad (5.3.91)$$

Elde edilen bu eylem, Denk.(5.3.3) ile verilen eylemle karşılaştırılırsa görülür ki, yeni eylem aslında sıfırlanmış BD parametresi içeren $\omega_{BD} = 0$ bir BD teorisinden başka bir şey değildir! Sonuç olarak söylenebilir ki, metrik $f(R)$ teorisi dinamik olarak, sıfırlanmış bir kinetik terim içeren (veya sıfırlanmış bir BD parametresi içeren) BD teorisi ile eşittir.

Şimdi ise, Denk.(5.3.85) ile verilen metrik-afin $f(R)$ eylemi ile başlayalım ve Denk.(5.3.90) ile verilen tanımlamaları benzer şekilde uygulayalım. Aşağıdaki ifade elde edilir

$$S_{maff} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\Phi \tilde{R} - V(\Phi) \right] + S_{madde}(g_{\mu\nu}, \Gamma^\lambda_{\mu\nu}, \psi) \quad (5.3.92)$$

Yukarıdaki eylemin formu ile Denk.(5.3.83) ifadesi ile verilen metrik eylemin formunun benzerliği gözlenebilir. Her ne kadar formları benzer olsa da, aslında bu iki teori dinamik olarak farklıdır, öyle ki şu sebeplerden ötürü : (i) Metrik eylemde, eğrilik skaleri tamamen metriktir $R \equiv R(g)$, öte yandan metrik-afin eylemde ise bağlantı nesnesi ile ilintilidir, yani afin bir nesnedir, $\tilde{R} \equiv \tilde{R}(\Gamma)$. (ii) Metrik formalizmde madde eylemi sadece metriği içerirken, diğer durumda hem metrik hem de bağlantı nesnesini içerebilir. Bu sebeplerden ötürü, metrik-afin $f(R)$ teori, kinetik terimi sıfırlanmış bir BD-tipi teori olarak ifade edilemez, fakat başka tipte bir teoriye benzeyebilir. Yine de, metrik-afin formalizmde, madde eyleminden bağlantı nesnesi dışlanarak BD-tipi bir modele eşlenebilir. Bu yapılarak, teorinin geometrik kısmının, $\tilde{R}$ sayesinde halen metrik-afin kalması sağlanırken madde eylemi metrik forma indirgenir $S_{matter} \mapsto S_{matter}(g_{\mu\nu}, \psi)$. Daha önce bahsettiğimiz gibi, bu $f(R)$ teorisinin Palatini formalizmidir. Madde eylemi tamamen metrik olduğundan, maddenin açısıl-momentumu sıfırlanır. Bu koşul altında, Denk.(5.3.86) ile verilen ifadeler kullanılarak alan denklemleri şu şekilde yazılabilir

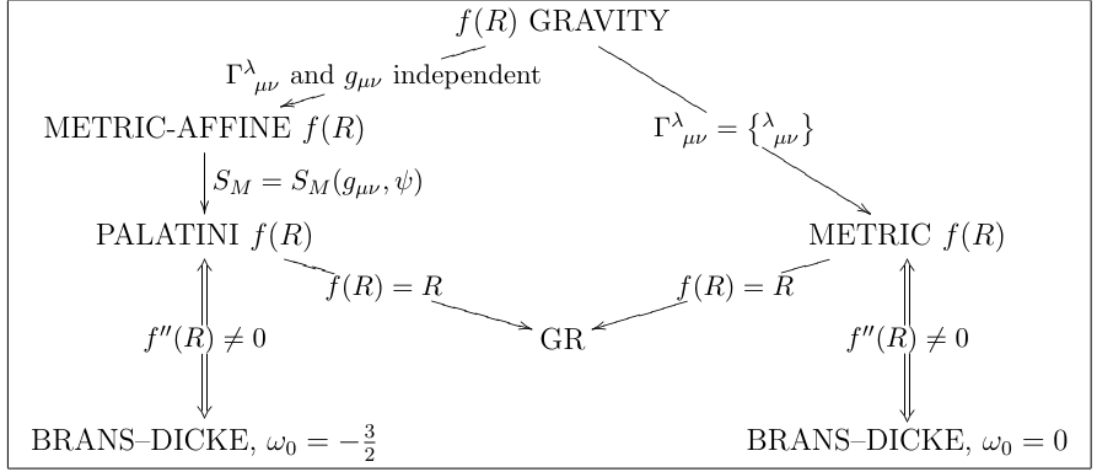
$$\delta g^{\mu\nu} : \quad f' \tilde{R}_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2} f g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (5.3.93a)$$

$$\delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} : \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[-\nabla_\lambda (\sqrt{-g} f' g^{\mu\nu}) + \nabla_\sigma (\sqrt{-g} f' g^{\sigma(\mu} \delta^{\nu)}) \right] = 0 \quad (5.3.93b)$$

Burada, bağlantı alan denkleminin sağ tarafının sıfırlanması önemli bir etki oluşturur. Denk.(5.3.93b) ifadesinin izi kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir

$$\nabla_\lambda \left(\sqrt{-g} f'(\tilde{R}) g^{\mu\nu} \right) = 0 \quad (5.3.94)$$

Elde edilen bu sonuç, Palatini formalizmindeki bağlantı nesnesinin sadece metriğe bağlı olmasını, yani Levi-Civita olmasını gerektirir, öyle ki bu bağlılık orijinal metriğe $g_{\mu\nu}$ göre değil, konformal olarak dönüşmüş olan metriğe $\Phi := f'(\tilde{R})$ göre! Buna göre, konformal olarak dönüşen metrik baz alındığında, teoride bağlantı nesnesine olan bağlılık ortadan kaldırılır, öyle ki eğrilik skaleri ve madde eylemi sadece dönüşmüş olan metriğe göre yazılabilecektir. Madde eyleminin sadece metriğe bağlılığı zaten başlangıçtaki koşulumuzdu. Dahası, hesaplamaların ardından, metrik-afin formalizmdeki afin eğrilik skalerinin $\tilde{R}$ aşağıdaki gibi ayrışabileceği



Figür 5.2: Gravitasyonun skaler-tensör ve $f(R)$ teorileri arasındaki ilişki. **Kaynak :** (Sotiriou 2006)

görülr

$$\tilde{R} = R + \frac{3}{2\Phi} \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi - \frac{3}{\Phi} \square \Phi \quad (5.3.95)$$

Elde edilen bu sonuçlar Denk.(5.3.92) ifadesinde yerine yazılır ve konformal olarak dönüşmüş metrik kullanılırsa (teknik olarak, Palatini formalizmdaki metriği değiştirmekle eşdeğerdir) aşağıdaki sonuç elde edilir

$$S_{Palatini} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\Phi R + \frac{3}{2\Phi} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - V(\Phi) \right] + S_{madde}(g_{\mu\nu}, \psi) \quad (5.3.96)$$

diverjans terimi ihmal edilmiştir. Elde edilen bu ifade, tam olarak $\omega_{BD} = -3/2$ için BD teorisi. Hatırlayalım, buradaki metrik konformal olarak dönüşmüş olandır Φg , ve hem eğrilik skaleri hem de bağlantı nesnesi bu dönüşmüş metrik cinsinden verilmektedir, yani $R \equiv R(\Phi g)$, $\Gamma \equiv \Gamma(\Phi g)$, $R \neq R(g)$, $\Gamma \neq \Gamma(h)$. Yukarıdaki sonuçları içeren bir görsel için bkz. Figür 5.2

5.3.3.1 Konformal dönüşümler, Jordan ve Einstein çerçeveleri

Son olarak, metriğin aşağıdaki gibi konformal dönüşümü altında $f(R)$ teorisinin nasıl evrildiği hakkında kısa bir özet verelim

$$g_{\mu\nu} \mapsto \Omega^2 g_{\mu\nu} \quad g^{\mu\nu} \mapsto \Omega^{-2} g^{\mu\nu} \quad (5.3.97)$$

Bu dönüşüm altında, diğer bazı niceliklerin transformasyonu aşağıdaki gibi verilebilir (Quiros 2019)

$$\sqrt{|g|} \mapsto \Omega^{-4} \sqrt{|g|} \quad (5.3.98a)$$

$$R_{\mu\nu} \mapsto R_{\mu\nu} + 2\nabla_\mu(\ln \Omega) \nabla_\nu(\ln \Omega) - 2g_{\mu\nu}(\nabla \ln \Omega)^2 + 2\nabla_\mu \nabla_\nu(\ln \Omega) + g_{\mu\nu} \square \ln \Omega \quad (5.3.98b)$$

$$R \mapsto \Omega^2 [R + 6\square \ln \Omega - 6(\nabla \ln \Omega)^2] \quad (5.3.98c)$$

Şimdi, tekrar Denk.(5.3.3) ile verilen metrik BD teorisini ele alalım

$$S_{BD} = \int d^4x \sqrt{|g|} \left[\phi R - \frac{\omega_{BD}}{\phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - 2V(\phi) + 2\mathcal{L}_{madde} \right] \quad (5.3.99)$$

Denk.(5.3.97) ve Denk.(5.3.98a) ile verilen kurallar uygulanırsa aşağıdaki sonuç elde edilir

$$S_{BD}^{transform} = \int d^4x \sqrt{|g|} \Omega^{-4} \left(\phi \Omega^2 [R + 6\square \ln \Omega - 6(\nabla \ln \Omega)^2] - \frac{\omega_{BD}}{\phi} (g^{\mu\nu} \Omega^2) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - 2V(\phi) + 2\mathcal{L}_{madde} \right) \quad (5.3.100)$$

Bu noktada skaler alan için aşağıda verilen eşlemeyi yapalım

$$\Omega^2 := \phi = e^\varphi \quad (5.3.101)$$

ve bunu yukarıdaki eylemde yerine yazalım

$$\begin{aligned} S_{BD}^{transform} &= \int d^4x \sqrt{|g|} \left(R - \frac{3}{2} (\nabla \varphi)^2 - \phi^{-2} [\omega_{BD} \phi^2 g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - 2V(\phi) + 2\mathcal{L}_{madde}] \right. \\ &\quad \left. + 3\square \varphi \right) \\ &= \int d^4x \sqrt{|g|} \left[R + 3\square \varphi - \left(\omega_{BD} + \frac{3}{2} \right) (\nabla \varphi)^2 - 2\phi^{-2} V(\phi) + 2\phi^{-2} \mathcal{L}_{madde} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{3\square \varphi}_{\text{boundary term}} \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{|g|} \left[R + 3\square \varphi - \left(\omega_{BD} + \frac{3}{2} \right) (\nabla \varphi)^2 - 2V(\varphi) + 2e^{-2\varphi} \mathcal{L}_{madde} \right] \end{aligned} \quad (5.3.102)$$

Son satırda, metriğin konformal dönüşümüne göre $V(\varphi) = \phi^{-2} V(\phi)$ yazıldı ve sınır terimi ihmal edildi. Sonuç olarak elde edilen teori, skaler alanın minimal olarak çiftlendiği ve sıfırlanmamış bir potansiyel terim içeren Genel Görelilik

oldu! Başlangıçta skaler alanın minimal olmayan çiftlenimini içeren BD teorisi ile başlandı ve metriğin konformal dönüşümünün ardından, skaler alanın minimal çiftlendiği GG elde edildi. Elde edilen eylem ifadeleri aşağıda tekrar verildi

$$S_{BD}^{Jordan} = \int d^4x \sqrt{|g|} \left[\phi R - \frac{\omega_{BD}}{\phi} (\nabla \phi)^2 - 2V(\phi) + 2\mathcal{L}_{madde} \right] \quad (5.3.103a)$$

$$S_{BD}^{Einstein} = \int d^4x \sqrt{|g|} \left[R + 3\Box\varphi - \left(\omega_{BD} + \frac{3}{2} \right) (\nabla \varphi)^2 - 2V(\varphi) + 2e^{-2\varphi} \mathcal{L}_{madde} \right] \quad (5.3.103b)$$

Literatürde, BD teorisinin metrik formalizmde verildiği çerçeveye *Jordan çerçevesi* adı verilir. Diğer yandan, konformal dönüşümden sonra skaler alanın minimal çiftlenimini içeren GG' nin verildiği çerçeve ise *Einstein çerçevesi* olarak adlandırılır. Hangi çerçevenin fiziksel olarak kabul edilebilir olduğuna dair araştırmacılar arasında uzun zamandır devam eden tartışmalar vardır. Söz konusu fikir ayrılıklarının temelde iki sebebi vardır. (i) Skaler alan geometri ile nasıl etkileşmelidir, yani minimal biçimde mi yoksa minimal olmayan biçimde mi? (ii) Skaler alan madde ile nasıl etkileşmelidir? Jordan çerçevesinde maddenin metrik olduğu açıktır, zira teori tamamen metrik olarak oluşturulmuştur ve bu bağlamda maddenin geometriye minimal bağlanması gerektiği söylenebilir. Öte taraftan, Einstein çerçevesinde de maddenin konformal dönüşmüş metriğe minimal bağlanmış olduğu görülse de, aslında içsel olarak orijinal metriğe minimal bağlandığı söylenemez. Dolayısıyla Einstein çerçevesinde, Jordan çerçevesinden farklı olarak, maddenin geometriye minimal olmayan çiftlenimi söz konusu olabilir. Daha fazla detay için (Sotiriou 2006) çalışması ve buradaki referanslar incelenebilir.

5.4 Gravitasyon ve madde etkileşimi

5.4.1 Örnek : Bir Dirac alanının Riemann-dışı geometriye bağlanması

Her ne kadar Einstein' ın kütleçekimi teorisi olan Genel Görelilik (GG) matematiksel olarak zarif ve güneş sisteminde çok başarılı olsa da, astrofizik ve kuantum bağlamında GG' nin modifiye edilmesi için güçlü nedenler de vardır. Bu kapsamda, gravitasyonun Riemann-dışı geometrilerde ve ayar teoriksel yaklaşımla çalışılması, günümüzde çok aktif bir araştırma alanıdır. Ayar teorisi modern fizikte doğayı açıklamada başarılı bir yaklaşımdır. Bu doğrultuda (Adak 2018) çalışmasında, bir STPG modeli bağlamında gravitasyonun lokal ayar invariant bir Lagrangiyen ile ifade edilebileceği belirtilmiştir, öyle ki metrik yerçekimi

alanını temsil ederken tam bağlantı nesnesi ayar potansiyeli olarak yorumlanır. Sözü geçen bu modelde Riemannsal olmayan eğrilik sıfırlanmıştır. Maxwell-Dirac teorisiyle olan benzerliğe bakıldığında, sıfır-eğrilik kısıtlaması aşırı kısıtlama olarak görülebilir, bkz. Tablo 5.2. Bu nedenle, nonmetrisiti ve eğriliğin her ikisinin de önemsiz olmayan biçimde yer aldığı bir teori, STPG' nin ayar yaklaşımını genelleştirmek için incelenebilir (Pala 2019). Sonuç olarak bu çalışmamızda, nonmetrisiti ve tam eğrilik açısından kuadratik olan ve sadece tam eğrilik skalerine göre lineer olan bir Lagrangiyeni ele alacağız. Teori ortonormal (Lorentz) çerçevede ve koordinat bağımsız bir formalizm olan dış cebir ile formüle edilmiştir.

Bütün bunlarla birlikte bu çalışmamızda, gravitasyon Lagrangiyenine minimal biçimde Dirac alanı ekliyoruz ve varyasyonel alan denklemlerini türetiyoruz (Kok 2020). Şu andan itibaren kendimizi iki boyutla sınırlandırıyoruz, zira 2 boyutlu gravitasyon modellerinin incelenmesi, matematiksel anlamda daha yüksek boyutlarda mevcut olan karmaşıklıkların ve zorluklarının ihmal edilebilmesine olanak vererek, özellikle kuantum gravitasyonla ilgili temel sorulara odaklanmamıza izin verir. İki boyutta, bilhassa sicim benzeri modellerde, kara deliklerin önemli özellikleri çalışılarak kuantum sistemler hakkında değerli içgörüler ve bilgiler edinilebilir. Bu modeller, klasik bir arka plan geometrisi kullanmadan, madde-geometri etkileşimi dahil edilmişken bile, kuantum alan teorisi bağlamında sistematik bir araştırma imkanı sunabilirler. İki boyutta dilaton yerçekimi üzerine yapılan bir inceleme (Grumiller, Kummer ve Vassilevich 2002), bu sonuçları tutarlı bir şekilde bir araya getirmeye ve bunları konu hakkında oldukça geniş bir literatüre dahil etmeye çalışıyor. Bir diğer çalışma (Grumiller, Ruzziconi ve Zwikel 2002), 2 boyutta genelleştirilmiş dilaton gravitasyon modeli bağlamında ölçek invaryant modellerin bir alt kümesine odaklanıyor.

Bununla beraber, spinör tanımının iki boyutta, ilk planda göze çarpmayan bazı incelikli sorunları olabilir. İki boyutta, rotasyonların imkansız, *boost*ların kolineer ve Thomas devinimi gibi bazı kinematik hareketlerin saklı olmasına rağmen, Özel Görelilik bakış açısının $(1 + 1)$ boyuta uygulanması halen bazı fiziksel incelemeler yapılmasına yeterli olur. (N. Wheeler 2000) çalışmasında yazar, aslında iki boyutlu çalışmalarda çıkarılabilecek birçok değerli ders olabileceğini ve derin şeylerden ilgi çekici bir sadelikle bahsedilebileceğini söylüyor. Matematiksel olarak, 2 boyutlu uzayzamanda spinörler, Lorentz grubunun $SO(1, 1)$ iki katlı örten grubuna göre bir gösterime sahip kompleks vektörler ile temsil edilirler. Bundan başka, (Delhom, Olmo ve Ronco 2018) çalışmasında araştırmacılar nonmetrisitinin gözlenebilir etkiler yaratabileceği ölçek için 1 TeV mertebesinde bir alt sınır koyulabileceğini tartıştılar, öyle ki bu öngöründe bulunurken e^+e^- saçılma

deneyinin verilerinden faydalandılar. Sonuç olarak, iki boyutlu bir uzayzamanda, Dirac alanı, nonmetrisiti ve eğrilik içeren bir oyuncak model çalışılması için yeterli motivasyona sahip olduğumuzu düşünüyoruz.

Teorinin Lagrangiyen formülasyonu

n -boyutta bir gravitasyon teorisinin Lagrangain formalizminde öncelikle aşağıdaki gibi bir eylem yazılır

$$I = \int_M L \quad (5.4.1)$$

burada L Lagrangiyen n -formdur. Lagrangiyen formalizmi hakkında daha detaylı bilgi için bkz. Ek F. Bu çalışmamızda, kendimizi iki boyut ile sınırlandırıyoruz. Dış cebir lisanında Lagrangiyen ortonormal teğet demetinde $OT(M)$ yazılır, ve böylece koordinat bağımsız oluşu garanti altına alınır. Buna göre, herhangi bir teorisinin, tanımı gereği genel koordinat dönüşümleri altında invaryant olabilmesi sağlanır, bkz. Ek C. Bununla beraber, tam çözüm araştırmaları esnasında bir koordinat sistemi seçilir ve n -beine yardımıyla koordinat teğet demetine $CT(M)$ geçilir. Bu çalışmada ayrıca bir Dirac alanı da dahil edildiği için, spinör demetinin de tanımlanması gerekli olur ve bu demete geçiş $OT(M)$ üzerinden yapılabilir. Sonuç olarak, aşağıda verilen Lagrangiyen 2-form ile teorimizi tanımlarız

$$L = \kappa R^a_b \wedge *e^b_a + \mu R^a_b \wedge *R^b_a + \nu Q_{ab} \wedge *Q^{ab} + \lambda_a T^a + \Lambda * 1 + \frac{i}{2} [\bar{\psi} * \gamma \wedge (D\psi) + (D\bar{\psi}) \wedge * \gamma \psi] + \frac{imc}{\hbar} \bar{\psi} \psi * 1 \quad (5.4.2)$$

burada κ, μ, ν çiftlenim sabitleridir, Λ kozmolojik sabittir, λ_a Lagrange çarpanı 0-formdur, öyle ki torsiyonu sıfırlar, m Dirac parçacığının kütlesidir, c vakumda ışık hızıdır, $\hbar$ Planck sabitidir ve i kompleks birim elemandır $i^2 = -1$. Yukarıdaki Lagrangiyen ifadesinin ilk satırı geometrik (gravitasyonel) parçayı ve ikinci satırı da Dirac Lagrangiyen 2-formu içerir. İlk satırın ilk terimi, Riemann-dışı formda Einstein-Hilbert terimidir. Yang-Mills reçetesi ile çalışmamıza rağmen (yani eğrilik ve nonmetrisitinin kuadratik terimleri seçildi), yine de bu Einstein-Hilbert terimi eklendi, zira uygun koşullar altında Einstein limiti araştırıldığında eklenen bu terim sayesinde Einstein denklemleri elde edilebilsin. Nonmetrisiti yerine torsiyon kullanılan bir başka çalışmada da mevcuttur (Tseytlin 1982), burada belirtildiği üzere Poincaré gravitasyon teorisinin standart Yang-Mills formülasyonu doğru sonuçlar vermez. Dirac spinörünün kovaryant dış türevi aşağıdaki gibi verilir

$$D\psi = d\psi + \frac{1}{2} \omega^{[ab]} \sigma_{ab} \psi + bQ\psi \quad (5.4.3)$$

burada b keyfi bir sabittir (kompleks veya reel). (Janssen ve Jimenez-Cano 2018) çalışmasına göre, b parametresi reel olduğunda, spinörün lokal ölçeklendirmesi ile ilişkili olurken, pür kompleks olduğunda da spinörün lokal $U(1)$ transformasyonu ile ilişkilidir. Burada Dirac matrisleri γ_0 ve γ_1 , antikomütasyon ilişkisini sağlayarak $\{\gamma_a, \gamma_b\} = 2\eta_{ab}I$, Clifford cebirini $\mathcal{Cl}_{1,1}$ üretirler, burada I matrisi 2×2 boyutlu birim matristir. Dirac matrisleri aşağıdaki gibi seçilmiştir

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.4.4)$$

Bu gösterimde Dirac spinörleri iki bileşenli kolon matrisleri ile verilebilir. ψ Dirac alanının eşleniği şu şekilde verilir $\bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma_0$. İntili olarak şu yazılabilir

$$D\bar{\psi} = d\bar{\psi} - \frac{1}{2}\bar{\psi}\sigma_{ab}\omega^{[ab]} + b^* Q\bar{\psi} \quad (5.4.5)$$

ve $\gamma = \gamma_a e^a$ niceliği $\mathcal{Cl}_{1,1}$ -değerli 1-form olarak adlandırılır. Burada ** kompleks eşleniği temsil eder, $i^* = -i$. Bunun yanında $\sigma_{ab} := \frac{1}{4}[\gamma_a, \gamma_b]$ niceliği Lorentz grubunun $SO(1,1)$ jeneratörüdür. Buna göre, M_2 üzerinde tanımlı spinörler, $SO(1,1)$ grubunun çift kaplayan grubuna ilişkin bir gösterim taşıyan kompleks vektörler olurlar.

Ayar teorisi yaklaşımı mikroskobik dünyada hem teorik hem de deneysel olarak çok iyi çalıştığından, modifiye edilmiş bir gravitasyon teorisini araştırmak için bize rehberlik etmesi adına bu çalışmamızda kullanıyoruz. Bu bağlamda (Adak 2018) çalışmasında verilen argümanlar benimsenmiştir ve bunları Tablo 5.2 ile özetlenmiştir, öyle ki burada A potansiyel 1-formu ve F Maxwell 2-formudur. Diğer sembollerin anlamlarına bu bölümün diğer kısımlarında değinilecektir.

Şimdi, Lagrangiyen ifadesinin λ_a , e^a , ω^a_b ve $\bar{\psi}$ niceliklerine göre, sırasıyla, varyasyonu alındığında aşağıdaki alan denklemleri elde edilir

$$T^a = 0 \quad (5.4.6a)$$

$$D\lambda_a + \tau_a[R] + \tau_a[Q] + \tau_a[\psi] + \Lambda * e_a = 0 \quad (5.4.6b)$$

$$\lambda_a e^b + \Sigma_a^b[R] + \Sigma_a^b[Q] + \Sigma_a^b[\psi] = 0 \quad (5.4.6c)$$

$$*\gamma \wedge \left\{ D + \frac{1}{2} [(\iota_b Q^{ab})e_a - (1 + b + b^*)Q] \right\} \psi + \frac{mc}{\hbar} \bar{\psi} \psi * 1 = 0 \quad (5.4.6d)$$

burada enerji-momentum 1-formları, $\tau_a[\cdot]$, aşağıdaki gibi verilir

$$\tau_a[R] := -\mu(\iota_a R^c_b) \wedge *R^b_c \quad (5.4.7a)$$

$$\tau_a[Q] := -\nu[(\iota_a Q^{bc}) \wedge *Q_{bc} + Q^{bc} \wedge (\iota_a * Q_{bc})] \quad (5.4.7b)$$

$$\tau_a[\psi] := \frac{i}{2} [\bar{\psi} * (\gamma \wedge e_a) \wedge (D\psi) - (D\bar{\psi}) \wedge *(\gamma \wedge e_a)\psi] + \frac{imc}{\hbar} \bar{\psi} \psi * e_a \quad (5.4.7c)$$

Tablo 5.2: Gravitasyon ve Maxwell-Dirac teorisi arasındaki benzerlik. Ek C ile verildiği üzere, vurgulamak isteriz ki, $Gl(n, \mathbb{R})$ ayar grubu ortonormal çerçevede Lorentz grubuna indirgenir.

Tanım	Maxwell-Dirac	Gravitasyon
Fiziksel alan	$\psi(x)$	$g_{\alpha\beta}(x)$
Global ayar simetrisi içeren Lagrangiyen	$\frac{i}{2}(\bar{\psi} * \gamma \wedge d\psi + d\bar{\psi} \wedge * \gamma \psi) + im\bar{\psi}\psi * 1$	$\frac{\kappa}{8}dg_{\alpha\beta} \wedge * dg^{\alpha\beta} + \frac{M}{4}g_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} * 1$
Global ayar dönüşümleri	$\psi \rightarrow e^{i\theta}\psi$ burada θ herhangi bir reel sayıdır	$g \rightarrow \Omega^T g \Omega$ burada Ω reel sayılar içerir
Lokal ayar simetrisi içeren Lagrangiyen	$\frac{i}{2}(\bar{\psi} * \gamma \wedge \mathcal{D}\psi + \mathcal{D}\bar{\psi} \wedge * \gamma \psi) + im\bar{\psi}\psi * 1 + F \wedge * F$ burada $\mathcal{D}\psi := (d - iA)\psi,$ $F := dA$	$\frac{\kappa}{8}Dg_{\alpha\beta} \wedge * Dg^{\alpha\beta} + M * 1 + R^\alpha_\beta \wedge * R^\beta_\alpha$ burada $Dg_{\alpha\beta} := \frac{1}{2}(-dg_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha}), R^\alpha_\beta := d\omega^\alpha_\beta + \omega^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma_\beta$
Lokal ayar dönüşümleri	$\psi \rightarrow e^{i\theta(x)}\psi,$ $A \rightarrow A + d\theta$	$g \rightarrow \Omega^T(x)g\Omega(x),$ $\omega \rightarrow \Omega^{-1}\omega\Omega + \Omega^{-1}d\Omega$
Ayar grubu	$U(1)$	$Gl(n, \mathbb{R})$
Ayar alanı (potansiyeli)	A	ω^α_β
Bianchi özdeşlikleri	$\mathcal{D}^2\psi = -iF\psi,$ $dF = 0$	$D^2g_{\alpha\beta} = -(R_{\alpha\beta} + R_{\beta\alpha}),$ $DR^\alpha_\beta = 0$

ve açısal momentum (veya hipermomentum) 1-formları, $\Sigma_a^b[\cdot]$, aşağıdaki gibi verilir

$$\Sigma_a^b[R] := 2\mu D * R^b_a \quad (5.4.8a)$$

$$\Sigma_a^b[Q] := \kappa[2Q^{bc} \wedge * e_{ac} - Q \wedge * e_a^b] + 2\nu * Q_a^b \quad (5.4.8b)$$

$$\Sigma_a^b[\psi] := \frac{i(b^* - b)}{2} \delta_a^b \bar{\psi} * \gamma \psi \quad (5.4.8c)$$

öyle ki sırasıyla eğrilik, nonmetrisiti ve spinör alanlarına göre verilmiştir. Not edelim ki, b reel bir sabit olduğunda spinörün açısal momentumu sıfırlanır. Yukarıdaki hesaplarda şu kısaltma kullanılmıştır $D * R_a^b := d * R_a^b + \omega_c^b \wedge * R_a^c - \omega_a^c \wedge * R_c^b$. Denk.(5.4.6c) ile verilen bağlantı alan denklemi, λ_a Lagrange çarpanına göre matematiksel bir ifadedir ve bu denkleme ι_b uygulanarak bu Lagrange çarpanı hesap edilebilir

$$\lambda_a = -\frac{1}{2} \iota_b (\Sigma_a^b[R] + \Sigma_a^b[Q] + \Sigma_a^b[\psi]) \quad (5.4.9)$$

Şimdi Denk.(5.4.9) ifadesi Denk.(5.4.6b) ile verilen ifadeye yerleştirilmelidir. Bir çözüm sınıfı araştırmak için e^a , Q_{ab} ve ψ nicelikleri için önermelerde bulunacağız, öyle ki bu alanlar Denk.(5.4.6a), Denk.(5.4.6b) ve Denk.(5.4.6d) ile verilen alan denklemlerini sağlasın. Ayrıca Denk.(5.4.9) sonucu Denk.(5.4.6c) ifadesine yerleştirilirse şu kısıt elde edilir $2\Sigma_a^b - (\iota_c \Sigma_a^c) e^b = 0$, burada $\Sigma_a^b \equiv \Sigma_a^b[R] + \Sigma_a^b[Q] + \Sigma_a^b[\psi]$.

Durağan çözüm sınıfları

Genel olarak teoride toplam 16 adet bilinmeyen vardır (4 adet e^a , 8 adet ω^{ab} , 2 adet λ_a , 2 adet ψ). Bununla uyumlu olacak şekilde 16 adet alan denklemi elde edildi, şöyle ki 2 adet Denk.(5.4.6a), 4 adet Denk.(5.4.6b), 8 adet Denk.(5.4.6c), 2 adet Denk.(5.4.6d). Genel durumda, alan denklemlerine tam durağan bir çözüm sınıfı bulunamadı, bu sebeple şu strateji izlendi : Öncelikle ψ alanının gravitasyona etkisi ihmal edilir, yani Denk.(5.4.6b) ve Denk.(5.4.6c) ifadelerinde $\tau_a[\psi] = 0$ ve $\Sigma_a^b[\psi] = 0$ alınır, ardından elde edilen denklemlere vakum için çözüm aranır. Bunun ardından Dirac denklemi, elde edilen bu gravitasyon alanı için çözülür. Bu amaçla, $x^\mu = (t, x)$ koordinat haritasında aşağıdaki konfigürasyon ile verilen bir gravitasyon alanı ele alalım

$$e^0 = cf(x)dt, \quad e^1 = g(x)dx, \quad (5.4.10)$$

$$Q_{00} = h_1(x)dx, \quad Q_{11} = h_2(x)dx, \quad Q_{01} = Q_{10} = 0 \quad (5.4.11)$$

burada $f(x), g(x), h_1(x), h_2(x)$ reel bilinmeyen fonksiyonlardır. Denk.(5.4.11) ifadesi kullanılarak şu elde edilir $Q = [h_2(x) - h_1(x)]dx$.

Denk.(5.4.10) ifadesi, Denk.(4.1.14) içine yerleştirilerek Levi-Civita bağlantı 1-formu aşağıdaki gibi hesaplanır

$$\tilde{\omega}_{01} = -\tilde{\omega}_{10} = -\frac{f'}{fg}e^0, \quad \tilde{\omega}_{00} = \tilde{\omega}_{11} = 0 \quad (5.4.12)$$

ve Denk.(5.4.11) ifadesi, Denk.(4.1.16) içine yerleştirilerek q_{ab} için aşağıdaki ifade elde edilir

$$q_{01} = -q_{10} = \frac{h_1}{g}e^0, \quad q_{00} = q_{11} = 0 \quad (5.4.13)$$

burada $(')$ işareti x değişkenine göre türevi temsil eder. Denk.(5.4.11), Denk.(5.4.12) ve Denk.(5.4.13) ifadeleri, Denk.(4.1.13) içinde birleştirilerek ve $K_{ab} = 0 \Leftrightarrow T^a = 0$ kısıtı kullanılarak tam bağlantı 1-form için aşağıdaki sonuç elde edilir

$$\omega_{01} = -\omega_{10} = -\frac{f' - fh_1}{fg}e^0, \quad \omega_{00} = \frac{h_1}{g}e^1, \quad \omega_{11} = \frac{h_2}{g}e^1 \quad (5.4.14)$$

Bulunanlar kullanılarak Denk.(5.4.6a) ile verilen sıfır-torsiyon koşulunun sağlandığı teyit edildi. Bununla birlikte, eğrilik 2-formu da, Denk.(4.1.4c) ifadesi kullanılarak hesaplanabilir.

Bir çözüm sınıfı bulmak amacıyla, bilinmeyen fonksiyonlar arasında aşağıdaki koşullar varsayıldı

$$h_1(x) = a_1 f' / f, \quad h_2(x) = a_2 h_1, \quad fg = 1 \quad (5.4.15)$$

burada a_1 ve a_2 keyfi sabitlerdir. İlintili olarak aşağıdaki ifadeler bulundu

$$f = C_1 + C_0 x, \quad g = \frac{1}{C_1 + C_0 x}, \quad h_1 = \frac{a_1 C_0}{C_1 + C_0 x}, \quad h_2 = \frac{a_1 a_2 C_0}{C_1 + C_0 x} \quad (5.4.16)$$

burada C_1 keyfi bir integral sabitidir. Kritik sabit C_0 ise, çiftlenim sabitleri κ , μ ve ν ile beraber, nonmetrisitiyi belirleyen a_1 ve a_2 sabitleri cinsinden, aşağıdaki gibi verilir

$$C_0^2 = \frac{\kappa(2a_1 - 1)(a_2 + 1) - 2\nu(2a_1 a_2^2 + 1)}{2\mu(a_2 + 1)[2a_1^3(a_2 - 1) - 3a_1^2(a_2 - 3) + a_1(a_2 - 10) + 3]} \quad (5.4.17)$$

Bu noktada bazı noktalarla ilgili yorumlar paylaşalım.

- i. $C_0 = 0$ kısıtı düz uzayzaman verir. Buna göre, C_0 parametresinin gravitasyon kaynağı olarak davrandığı yorumu yapılabilir.
- ii. Nonmetrisiti ve eğrilik nesnelerinin aşağıdaki gibi açık şekilde yazılmasıyla

$$Q_{01} = Q_{10} = 0, \quad Q_{00} = C_0 a_1 e^1, \quad Q_{11} = C_0 a_1 a_2 e^1 \quad (5.4.18a)$$

$$R^0_0 = R^1_1 = 0, \quad R^0_1 = -C_0^2 [a_1(a_2 + 1) - 1] (a_1 - 1) e^{01},$$

$$R^1_0 = C_0^2 [a_1(a_2 + 1) + 1] (a_1 - 1) e^{01} \quad (5.4.18b)$$

gravitasyon etkisine nonmetrisiti ve Riemann eğriliğinden gelen katkılar takip edilebilir. $a_2 = 0$ koşulu Q_{11} terimini sıfırlar, devamında $a_1 = 0$ koşulu da Q_{ab} nesnesinin geri kalanını sıfırlar ve son olarak $\kappa + 2\nu = 0$ koşulu Riemann katkısını sıfırlar.

- iii. Çözüm sınıfı, $a_2 = -1$ veya $\mu = 0$ altında geçerli değildir, zira bu değerler için C_0 sonsuza ıraksar.

- iv. Üç adet tekil nokta vardır, şöyle ki $x = -C_1/C_0$ ve $x = \pm\infty$. Bu tekil noktalar, $x \rightarrow 1/x$ koordinat transformasyonu ile, şu şekilde değiştirilebilirler $x = -C_0/C_1$ ve $x = 0$. Bu yeni tekillikler hakkında içgörü kazanmak için aşağıdaki invaryant nicelikler hesaplanır

$$*(Q_{ab} \wedge *Q^{ab}) = -C_0^2 a_1^2 (1 + a_2^2) \quad (5.4.19a)$$

$$*(R^a_b \wedge *R^b_a) = -2C_0^4 [(a_1^2 a_2 + a_1^2 - a_1 a_2 - 2a_1)^2 - 1] \quad (5.4.19b)$$

Buna göre, tekil noktalar, koordinat tekilliği gibi durmaktadır çünkü yukarıdaki her iki skaler nicelik de bu tekil noktalarda sonludur. Riemannsal geometrilere test parçacıkları geometrinin jeodezilerini takip ederler. Bununla birlikte, Einsteinsal geometrilere test parçacıklarının tamamlanmayan yörüngeleri olduğunu gösteren tekillik teoremleri de vardır. Bu tartışmalar kara deliklerin var olmalarıyla bitmiştir (Hawking ve Penrose 1970), (Hawking ve Ellis 1973), (Wald 1984). Bahsi geçen bu adımların yerine, pratikte karar delik testi için metrik fonksiyonlarının ve Riemann eğrilik skalerinin tekilliklerine bakılır. Öte yandan bu çalışmamızda, nonmetrisiti içeren Riemann-dışı geometride çalışıyoruz ve bu bağlamda tamamlanmayan yörüngelere dair herhangi bir teori yoktur. Dahası, Riemann-dışı bir geometride test parçacıkların hangi eğriyi izleyeceklerine dair kesin bir bilgimiz de yoktur (Pala ve Adak 2022). Buna göre, önerilen çözüm sınıfının bir kara delik yapısı sergileyip sergilemediği konusunda bir sonuca varamayız.

- v. $a_1 = 0$ altında nonmetrisiti sıfırlanır ve teori bir Riemann teorisine indirgenir. Ardından $fg = 1$ koşulu empoze edilerek iki çözüm sınıfı daha bulunabilir

$$f = \left[D_2 + D_1 x \pm \left(-\frac{\Lambda}{2\mu} \right)^{1/2} x^2 \right]^{1/2} \quad (5.4.20a)$$

$$f = D_1 + \left(-\frac{\Lambda}{2\mu} \right)^{1/4} x \quad (5.4.20b)$$

burada D_1 ve D_2 keyfi integral sabitleridir.

- vi. $a_1 = 1$ altında tam eğrilik sıfırlanır (fakat Riemann eğriliği sıfır değildir) ve teori STPG teorisine indirgenir. (Adak ve Dereli 2008) çalışmasında verilenler ile aynı sonuçlar elde edilir. Ek olarak, iki adet çözüm sınıfı daha verebiliriz

- $\kappa = 2\nu$, $a_2 \neq 0$ ve $g = 1/f$ koşulları altında

$$h_1 = f'/f, \quad h_2 = \frac{1}{f} \left(\frac{\Lambda}{\nu} - f'^2 \right)^{1/2} \quad (5.4.21a)$$

$$f = D_0 \pm \sqrt{\frac{4\Lambda}{5\nu}}x \quad \text{or} \quad f = \left(D_1 + D_0x + \frac{\Lambda}{\nu}x^2 \right)^{1/2} \quad (5.4.21b)$$

burada D_0 ve D_1 keyfi integral sabitleridir.

- $\kappa \neq 2\nu$, $a_2 = 0$ ve $g = 1$ koşulları altında

$$h_1 = f'/f, \quad h_2 = 0, \quad f = (D_1 + D_0x)^{\frac{\kappa + 2\nu}{\kappa - 2\nu}} \quad (5.4.22)$$

burada D_0 ve D_1 keyfi integral sabitleridir.

Gravitasyon alanı içinde spinli bir parçacığın Hamiltoniyen ifadesi

Bu noktada, Denk.(5.4.16) ile tarif edilen gravitasyon alanı içindeki spinli bir Dirac parçacığının Hamiltoniyen ifadesini elde edelim. Denk.(5.4.16) ile elde edilen sonuçlar, Denk.(5.4.6d) ile verilen Dirac denkleminde yerleştirilirse aşağıdaki gibi, açık halde Dirac denklemi verilebilir

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(i\gamma_0 m c^2 f + i\gamma_0 \gamma_1 \hbar c N f - \gamma_0 \gamma_1 c f^2 i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi \quad (5.4.23)$$

burada

$$N := \frac{C_0}{2} [a_1(a_2 - 1)(b - b^*) + 1] \quad (5.4.24)$$

Kanonik momentumun Hermitsel olduğu varsayılır ve aşağıdaki gibi tanımlanır

$$\hat{p} := -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{N}{f} \right) \quad (5.4.25)$$

Sonuç olarak Dirac denklemi aşağıdaki forma dönüşür

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (i\gamma_0 m c^2 f + \gamma_0 \gamma_1 c f^2 \hat{p}) \psi \quad (5.4.26)$$

Bu ifade Schrödinger denklemi ile karşılaştırılırsa $i\hbar \partial \psi / \partial t = \hat{H} \psi$, Hamiltoniyen matrisi şu şekilde elde edilir

$$\hat{H} = f (i\gamma_0 m c^2 + \gamma_0 \gamma_1 c f \hat{p}) = \begin{pmatrix} 0 & f (-i m c^2 + c f \hat{p}) \\ f (i m c^2 + c f \hat{p}) & 0 \end{pmatrix} \quad (5.4.27)$$

Bu 2×2 Hermitsel matrisin özdeğerleri şu şekilde bulunur $\pm f (m^2 c^4 + f^2 p^2 c^2)^{1/2}$, burada p değeri, $\hat{p}$ operatörünün özdeğeridir. Belirtelim ki, C_0 sifıra yakınsadıkça, gravitasyon alanı sıfırlanır ve bu durum $f = 1$ koşulunu gerektirir. Bu koşul altında özdeğerler, iyi bilinen şu değerlere indirgenir $\pm (m^2 c^4 + p^2 c^2)^{1/2}$, burada $\hat{p} = -i\hbar \partial / \partial x$. Elde edilen bu sonuçlar (Adak, Dereli ve Ryder 2004) çalışmasında elde edilenlerle uyumludur.

Dirac denkleminin tam çözümü

Denk.(5.4.23) ile verilen Dirac denkleminin bir çözüm bulabilmek için aşağıdaki gibi bir spinör önermesi yapalım

$$\psi = \begin{pmatrix} \alpha(x) \\ \beta(x) \end{pmatrix} e^{i\Omega t} \quad (5.4.28)$$

burada $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ kompleks değerli bilinmeyen fonksiyonlardır ve Ω bir reel sabittir. Bu önerme Dirac denkleminde kullanılırsa aşağıdaki gibi, bağlı iki adet diferansiyel denklem elde edilir

$$f\alpha' + (N - \frac{mc}{\hbar})\alpha + \frac{i\Omega}{c} \frac{\beta}{f} = 0 \quad (5.4.29a)$$

$$f\beta' + (N + \frac{mc}{\hbar})\beta + \frac{i\Omega}{c} \frac{\alpha}{f} = 0 \quad (5.4.29b)$$

Bu diferansiyel denklemlere tam bir çözüm sınıfı bulunamadı. Daha sonra, $N \gg mc/\hbar$ yaklaşımı ile $mc/\hbar$ terimi ihmal edildi ve bu sayede aşağıda verildiği gibi bir çözüm sınıfı bulunabildi, öyle ki bu çözüm altında $a_2 = 1$ olması gerekir, yani $N = C_0/2$ ve $Q = 0$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{C_1 + C_0 x}} \left(D_0 e^{\frac{i\Omega}{c C_0 (C_1 + C_0 x)}} + D_1 e^{-\frac{i\Omega}{c C_0 (C_1 + C_0 x)}} \right) \quad (5.4.30a)$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{C_1 + C_0 x}} \left(D_0 e^{\frac{i\Omega}{c C_0 (C_1 + C_0 x)}} - D_1 e^{-\frac{i\Omega}{c C_0 (C_1 + C_0 x)}} \right) \quad (5.4.30b)$$

burada D_0 ve D_1 keyfi sabitlerdir. Bu çözüm sınıfının, Denk.(5.4.7c) ve Denk.(5.4.8c) ile tanımlanan $\tau_a[\psi] = 0$ ve $\Sigma_a^b[\psi] = 0$ koşullarını sağlamadığı görüldü. Özetle, ilk başta vakum teorisine bir çözüm bulundu ve arından da spesifik bir arka planda Dirac denkleminin bir çözüm bulundu. Denk.(5.4.17) sonrasında bahsedildiği gibi, C_0 gravitasyon kaynağı olarak davranır ve N değeri, Denk.(5.4.24) ifadesi üzerinden C_0 ile orantılıdır. Buna göre N terimi bir çeşit gravitasyon kütlesi içerebilir. $N \gg mc/\hbar$ varsayımı ile, aslında bu gravitasyon kütlesinin Dirac parçacığının kütlesinden çok büyük olduğu ifade edilmiş oldu. Her iki çözüm fonksiyonu da sönümlü osilatör formundadır zira her iki dalga fonksiyonu $x \rightarrow \pm\infty$ için sıfıra gider. Belirtelim ki, her iki çözüm de $x_0 = -C_1/C_0$ noktasında tekilliğe sahiptir. Denk.(5.4.19) ifadesinden sonra belirtildiği üzere, bu tekillik aslında uzayzamanın kendisine aittir. Yani, spinör çözümleri bu noktada geçerli değildir. Fiziksel olarak şu şekilde yorumlanabilir : Dirac parçacığı (veya bunun anti-parçacığı) bahsi geçen bu tekillik noktasından geçemez. Bu yorum teorisinin

mevcut yapısı için anlamlı görünür, zira bir boyutlu uzay ele alındı ve gravitasyon kaynağı bu uzay ekseninde bir yerde, muhtemelen $x_0 = -C_1/C_0$ noktasında bulunmaktadır.

Son sözler

Nonmetrisiti ve tam eğrilik tensörleri içeren geometrik teoriye bir Dirac parçacığının minimal biçimde bağlandığı bir gravitasyon modeli çalışıldı. Ayar teorisinin mikroskobik olayları açıklamada çok başarılı olduğu iyi bilinmektedir. Bu nedenle, ayar teorisinin temellerini içeren Maxwell-Dirac teorisi ile yeni gravitasyon modelimiz arasında bir benzetme yaparak, nonmetrisiti ve eğrilik tensörlerine göre kuadratik olan bir Lagrangiyen seçtik. Bizim anlayışımıza göre, metrik tensörü fiziksel gravitasyon alanını temsil ederken tam bağlantı nesnesi ise ayar alanını / potansiyelini temsil eder. GG' nin etkilerini izlemek için Riemannsal olmayan Einstein-Hilbert terimini de Lagrangiyen içinde tutuyoruz. Bir sonraki adımda Dirac spinörünün dış kovaryant türevini tanıttık ve Dirac Lagrangiyeni gravitasyon Lagrangiyeni minimal biçimde bağladık. Bu noktaya kadar yapılan tüm tartışmalar ve elde edilen sonuçlar her boyut için geçerlidir. Ardından da, 2 boyutta varyasyonel alan denklemleri elde edildi. Modifiye edilmiş gravitasyon modelimiz için bazı çözüm sınıflarını araştırdık. Durağan bir çözüm bulmaya çalıştık ancak kesin bir çözüm elde edemediğimiz için basitleştirme stratejisi izlemeye karar verdik. Bu nedenle, koçerçeve ve bağlantı alan denklemlerinde, Dirac alanı için verilen enerji-momentumu $\tau_a[\psi]$ ve açısal momentumu (veya hipermomentumu) $\Sigma_a[\psi]$, ihmal ettik. Buna bağlı olarak çeşitli vakum çözüm sınıfları elde edebildik ve bunların bazılarının (Adak ve Dereli 2008) çalışmasında elde edilen sonuçlarla aynı olduğunu fark ettik. Ana çözümümüzde, Denk.(5.4.17) ile verilen ve bir tür gravitasyon kaynağını temsil ettiği söylenebilecek ilginç bir sabitimiz var. Bu çözümler üzerine bazı tartışmalar yaptıktan sonra, hem nonmetrisiti hem de tam eğrilik içeren belirli bir arka plan geometrisinde spinli bir parçacığı temsil eden Dirac denklemini ele aldık. Öncelikle Dirac denklemini Schrödinger denklemiyle karşılaştırarak Hamiltoniyen matrisini elde ettik ve özdeğerlerini hesapladık. Elde edilen sonuçların (Adak, Dereli ve Ryder 2004) çalışmasında bulunanlar ile uyumlu olduğunu gözlemledik. Sonunda, Dirac denklemine, belirli koşullar altında sönümlü bir osilatör gibi davranan kesin bir çözüm bulabildik.

Kısım III

Son açıklamalar

Konu 6

Sonuçlar

“Dünyada her şey için, maddiyat için, maneviyat için,
başarı için en hakiki mürşit ilimdir, fendir. İlim ve fennin
haricinde mürşit aramak gaflettir, cehalettir, dalalettir.”

M.K. Atatürk

Bu tezde alternatif gravitasyon kuramları incelenmiş, öyle ki bu geniş çalışma sahasının kapsadığı çok farklı alt başlıklar arasında, özellikle Riemann-dışı geometrilere kurulan gravitasyon modelleri üzerine araştırmalar yapılmıştır. Tezdeki araştırma süresince, yapılan çalışmalardan elde edilen bulgular uluslararası saygın dergilerde yayınlanabilmiştir. Bu bulgular tezin ilgili bölümlerinde verilmiştir. Özetlemek adına, bunlardan kısaca aşağıda tekrar bahsedelim.

- Gravitasyonun ayar kuramsal modelleri çalışıldı ve ayar teorik yaklaşımın, Kuantum Mekanığı bağlamındaki başarılı örnekleri (Yang-Mills tipi teoriler) ile aralarındaki benzerlikler / ilişkiler incelendi. Bu karşılaştırma için Bölüm 5.1.2 ve Bölüm 5.1.3 altında, sırasıyla, Poincaré ve Weyl alan teorileri, hiçbir geometrik nosyonla ilintilendirilmeden lokalize edildi, yani bir ayar kuramı olarak türetilti. Ardından bu (ayar) alan teorilerinin geometrik yapıları bağımsız olarak araştırıldı ve literatürde bilinen Riemann-dışı geometriler ile aralarındaki benzerlikler sunuldu. Sonuçta söylenebilir ki, alan teorilerindeki başarılı ayar yaklaşımının, metrik-afin gravitasyon modelleri için de uygulanabilmesi pekala mümkün görünmektedir. Zira yapılan analizde gösterilmiştir ki, Riemann-dışı geometrilerdeki temel dinamik geometrik nesneler, yani *eğrilik*, *torsiyon* ve *nonmetrisiti* (diğer bir deyişle Cartan yapıları), bu geometrilerde kurulan gravitasyon teorilerinin lokal simetrisini sağlamak için tanımlanan ayar alanlarının, yani *rotasyon (Lorentz)*, *öteleme* ve *dilatasyon (ölçek)* ayar alanlarının, şiddetleri olarak karşımıza çıkmaktadır, bkz. Denk.(5.1.110)¹.

¹Eski ve aktif bir araştırma sahası olarak, kütleçekiminin bir ayar kuramı olarak ifade

- Bir önceki başlıkta, Riemann-dışı gravitasyon modellerinin birer ayar kuramı olarak yorumlanabileceğinden bahsettik. Bu sonuçla beraber, Bölüm 4.3 altında Riemann-dışı geometrilerin özel bir alt sınıfı olan *teleparalel* geometri ailesi ve Bölüm 5.2 altında da bu kurulumdaki gravitasyon teorileri araştırıldı. Literatürde daha çok bilindiği gibi, STPG ve MTPG modellerinin, sırasıyla, koordinat ve ortonormal çerçevede tesadüfi ayar seçimi altında, sadece metrik nesnesi ile ifade edilebileceği gösterildi. Benzer metodu, en genel teleparalel gravitasyon modeli olan GTPG için de uygulayabilmek adına, literatürde çok az bilinen *karma* çerçeve önerildi ve tesadüfi ayar seçimi bu çerçevede yapıldı, bkz. Denk.(4.3.7). Böylece, yaptığımız çalışma ile tüm teleparalel gravitasyon modellerinin tesadüfi ayar seçimi altında metrik bir teori olarak ifade edilebileceği gösterildi. Bu çalışma üzerinde, yazarlar da dahil, araştırmacılar halen tartışmaktadır. Bu tartışmalarda karşı argüman olarak, (i) ayar seçimi ile teorinin Lorentz simetrisinin bozulacağı ve (ii) çerçeveler arasındaki geçişi mümkün kılan *n-bein* nesnelerinin serbestlik derecesinin, metrik nesnesinin serbestlik derecesinden daha fazla olduğu için bu teorileri sadece metrik ile vermenin mümkün olmayacağı, fikirleri söylenebilir. Bu tartışmalar ve tezde elde edilen sonuçlar bağlamında çalışmalarımız sürmektedir.

- Tez kapsamında Riemann-dışı geometrilerde kurulan alternatif gravitasyon modelleri çalışıldı. Bu bağlamda, standart GG' nin eşdeğeri olan fakat Riemann-dışı teleparalel geometrilerde tanımlanan alternatif teorilerin de, GG ile geometrik yapılarının farklı olmasından dolayı, GG' nin Riemann geometrisindeki davranışından farklı sapmalar sergilemesi beklenebilir. Bu anlamda, herhangi bir gravitasyon modeline referans vermeden, temelde geometrik yapılarındaki farklılıktan ötürü, Riemann-dışı geometrilerde bazı davranışlar araştırıldı. Örnek olması adına teleparalel geometri ailesinin bir üyesi olan STP geometri bağlamında incelemeler yapıldı. Elbette ilgili bölümde verilen benzer analizler diğer teleparalel hatta diğer alternatif geometrik kurulumlar için de yapılabilir. Bölüm 4.4 altında STP ge-

edilebilmesi üzerine bilim insanları arasında halen tartışmalar sürmektedir. Bu tartışmaların orijinini kısaca verelim : GG' nin orijinal olarak metrik geometrik bir kurulumda verilmesi, bu bağlamda Levi-Civita bağlantı nesnesinin bağımsız olarak kavranmasını pek mümkün kılmaz. Bu halde, GG bağlamında gravitasyonun metrik alanı ile temsil edilmesi bir gelenek olmuştur. Bu gelenek sadece GG bağlamında kalmamış ve genel olarak diğer gravitasyon modellerinde de bu eğilim devam etmiştir. Öte yandan, Yang-Mills tipi teorilerde ayar alanı kuantum fiziksel etkileşimleri verebilmektedir ve geometrik olarak bu ayar alanı, bağlantı nesnesi ile özdeşdir. Bu noktada gravitasyonun da bir ayar alanı ile temsil edilebilirliği sorgulanmaktadır. Doktora adayı, bu alandaki yoğun çalışmalarını sürdürmektedir.

ometrisindeki test parçacıkları için jeodezik ve otoparalel eğrilerin, en genelde birbirlerinden farklı olabildiği gösterildi, bkz. Denk.(4.4.10) ve Denk.(4.4.14), öyle ki Riemann geometrisinde bu iki eğri özdeştir. Hangi eğrinin spinsiz bir test parçacığı için yörünge olabileceğine dair yorumlar verildi. Ayrıca *ikincil saat etkisi* (SCE) yine STP geometride incelendi ve literatürdeki genel kanının (Quiros n.d.) aksine, STP geometrilerin en genel nonmetrisiti için bile SCE göstermeyebileceklerine dair sonuçlar verildi, bkz. Denk.(4.4.43). Yine bu analizde gösterildi ki, Lorentz simetrisi ile birlikte Weyl (ölçek) simetrisinin de evrenin temel simetrilerinden biri olduğu varsayılırsa, STP geometri bu anlamda en basit geometrik kurulum olarak karşımıza çıkmaktadır, bkz. Denk.(4.4.32). Bu sonuçlar, Weyl' in gravitasyon ve elektromanyetizmanın birleştirilmesi adına yaptığı çalışmalara (Weyl 1918), (Weyl 1919) karşı üretilen argümanları geçersiz kılmaktadır. Belki de, bu konuda Einstein yanılmıştı!

- GG' nin orijinal formunda, madde ve geometri birbirlerine etki ederler. GG' nin alan denklemleri, geometrideki eğrilik tensörü ile gravitasyon kaynağı olan maddenin lineer momentum (enerji-momentum) tensörü arasında, lineer olmayan ve metriğe göre ikinci derece diferansiyel denklem seti aracılığıyla bir ilişki kurar. Zaman içerisinde GG' nin bağlamı dışında alternatif modeller çalışıldıkça görülmüştür ki, geometrideki dinamizm maddenin sadece lineer momentumu ile değil, açısal momentumu ile de bağlanabilir. Gravitasyon modellerindeki metrik-afin yaklaşım bu nevi ilişkileri gözlemek için bir altyapı sağlar, öyle ki ele alınan teorinin geometrik sektöründe artık metrik ve bağlantı nesneleri birbirlerinden bağımsızdır ve bunların, sırasıyla, maddenin lineer ve açısal momentumları ile bağlanabileceği öne sürülür. Astronomik ölçekte maddenin geometri üzerindeki etkisi -ki modern fizik çerçevesinde bu bizim gravitasyon anlayışımızdır- çok yüksek enerji rejimlerinde gerçekleştiği için yeterince gözlenebilir ve ölçülebilir düzeydedir. Öte yandan kuantum ölçeğinde atomik ve atom altı maddenin, etraflarındaki geometrik yapıda meydana getirdiği etkiler, kuramsal olarak mümkün görünüyorsa da, pratikte kayda değer ölçekte bir etki olmaktan uzaktır. Bu konu, araştırmacıları uzun süredir motive eden, fiziğin en uç çeperlerindeki çalışma alanlarından biridir aslında. Zira olası kuantum gravitasyon modellerinden beklenti, bir şekilde, temel parçacık düzeyinde maddenin, etrafındaki geometri ile etkileşimini, ampirik olarak desteklenebilecek öngörüler sunarak, açık bir şekilde kuramsal olarak verebilmesidir. Bu ilgi ve motivasyonla, biz de tez çalışmaları kapsamında, Riemann-dışı bir geometrideki fermiyonik madde alanını inceledik. Bölüm 5.4.1 altında verilen iki boyutlu bir oyuncak modelde, Riemann-dışı genel

bir gravitasyon teorisi ile Dirac alanı bağlanmıştır. Bu gibi geometri-madde bağ kuram teorilerin matematiksel yapısının ve analitik çözümlerin bulunmasındaki zorluklar bilinmektedir. Biz de açıkça yazdığımız alan denklemlerine en genel durum için analitik çözüm sınıfları bulamadık, bkz. Denk.(5.4.6). Bunun devamında takip edilen bazı stratejiler kapsamında teoriye ve alan denklemlerine çeşitli koşullar uygulandı ve sonuçta durağan olarak modellenen bir gravitasyon kaynağının varlığında Dirac parçacığının Hamiltoniyen matrisi elde edildi, bkz. Denk.(5.4.1). Açıkça görüldü ki, durağan gravitasyon kaynağının civarındaki dinamik geometrinin metrik fonksiyonları, Dirac parçacığının Hamiltoniyen fonksiyonunda sapmalara yol açmaktadır. Analitik olarak verdiğimiz sonuçlar üzerinde nicel bir analiz yapılmadı, zira elde edilen sonuca ulaşmak için Dirac parçacığının kütesinin, gravitasyon kaynağının kütlesi yanında ihmal edildiği bir yaklaşıklık kullanıldı ve bu durumda Dirac parçacığının mevcut arkaplan geometrisine etkisi ihmal edilmiş oldu. Belki bir gün, yeterli teknolojik altyapı sağlandığında, söz konusu ölçekte bir Dirac parçacığının Hamiltoniyen özdeğerleri yeterince hassas ölçülebilir ve o zaman bizim verdiğimiz ve literatürdeki benzer çalışmalardan elde edilen sonuçlar ampirik olarak test edilebilir.

Konu 7

Olası devam çalışmaları

“Bir bilimsel düşüncenin büyüklüğünün ölçüsü, insan zihnini ne kadar harekete geçirdiği ve yeni araştırma alanları açtığıdır.”

P.A.M. Dirac

Bu tezde sunulanlar, diğer pek çok bilimsel çalışmada olduğu gibi, muhakkak kendisinden sonraki muhtemel başka araştırmalar için motivasyon olabilecek ve kaynak teşkil edebilecektir. Doktora adayının bizzat kendisi de, tez kapsamında yapılanları temel alan daha farklı ve tezde yapılanları genelleştiren devam çalışmalarına başlamıştır ve sürdürmektedir. Elbette, bilimsel bir konu hakkında farklı araştırmacıların farklı yorumları, değerlendirmeleri ve bu konu hakkında öne sürebilecekleri pek çok farklı yeni fikir ve öneri olacaktır. Biz de, bilhassa lisanüstü öğrenciler ve doktora sonrası araştırmacılar başta olmak üzere aktif bilim insanlarına fikir olması ve belki zihinlerinde yeni düşünce pencereleri açması adına, tez kapsamında yapılan çalışmaları takiben ne gibi yeni araştırmaların yapılabileceğine dair, naçizane fikirlerimizi özetleyelim.

- Tezin ana konularından biri, gravitasyonun bir ayar teorisi olarak çalışılmasıdır. Özellikle Konu 5 altında, (lokal) Lorentz simetrisini genelleştiren bazı uzayzaman simetrisi tartışılmış, bu simetrisi altındaki alan teorileri incelenmiş ve neticede bu lokal simetrik alan teorilerinin yapısının, (metrik-afin olan) Riemann dışı geometrilerle ne kadar benzer olduğu gösterilmiştir. Bu, çok aktif bir çalışma sahasıdır. Devamında, tezde verilen uzayzaman simetrisi dışında konformal simetrik alan teorileri ve bunların karşılık geldiği geometrik yapılar araştırılabilir. Bu bağlamda *n-bein* ve *spin bağlantı* nesneleri pek önemli olmaktadır. Zira madde alanının iç uzaydaki bileşenleri ile uzayzaman geometrisi arasındaki ilişki bu nesneler ile sağlanır. Söz konusu gravitasyon modellerinin alan denklemleri göstermektedir ki, maddenin içsel spin özelliği ile geometrinin torsiyon nesnesi

birbirlerine bağlanabilmektedir. Henüz, içsel spin ve torsiyon hakkında yukarıda verilen ilişkiye dair ampirik bir veri bulunamadı ve çalışmalar devam etmekte. Bu sonuç, madde alanı ile geometri arasında benzer başka ilişkiler olup olmadığı sorusunu doğal olarak üretiyor ve bu çok çekici ve ilginç bir araştırma alanı. Örneğin, nonmetrisiti nesnesinin madde alanı ile, maddenin içsel bir özelliği üzerinden bağlanabilmesi mümkün olabilir mi? Eğer böyleyse, bu içsel özellik nedir?

- Yine ayar teorik yaklaşım bağlamında, GG' nin de Yang-Mills tipi bir ayar teorisi olarak yazılması üzerine araştırmalar, literatürdeki derin fenomolojik sahalarından biridir. GG orijinal haliyle metrik bir teoridir ve Levi-Civita bağlantı nesnesi bu açıdan önemsizdir, zira tamamen metrik ile belirlenebilir. Ancak gerçek bir (Yang-Mills tipi) ayar teorik koşul, bağlantı nesnesinin dinamik bir alan olarak bir fiziksel etkileşime (burada gravitasyon) karşılık gelmesini gerektirir. Bu, eskiden beri süregelen tartışmaların yer aldığı bir başlıktır. Gravitasyon, uzayzaman metriği ile mi yoksa bağlantı nesnesi ile mi tarif edilmelidir? Bağlantı nesnesi, sadece metrik tarafından belirlenen bir "ara geçiş" nesnesi olmanın yanında daha derin bir doğaya sahip olabilir. Bu bağlamda, farklı uzayzaman simetrilerini, bunların bağlantı nesnesinde meydana getirdiği değişiklikleri ve teorilerin kovaryant formu üzerine çalışmak ve sonuçları farklı biçimlerde yorumlamak, gravitasyonun ayar teorik doğası hakkında yeni ve belki de daha derin kavrayışlar elde edilmesini sağlayabilir. Doktora adayı da, bu bahisler üzerinde yoğun çalışmalarını sürdürmektedir.

- Bölüm 5.3.1.3 altında verilen ve STP geometride standart Lorentz simetrisini, (lokal) ölçek dönüşümleri ile genelleştiren bir model, ilgili bölümde de paylaşıldığı gibi, çeşitli sebeplerden ötürü 3-boyutta çalışıldı. Burada verilen bütün matematiksel teknikler 4-boyut için de uygulanabilir. Dolayısıyla söz konusu modelin 4-boyuta genelleştirilmesi daha gerçekçi bir gravitasyon modeli olacaktır. 4-boyutta elde edilebilecek yeni çözüm sınıflarının bulunması ve bunları yorumlanması literatüre kayda değer bir katkı sunacaktır. Bunun yanında, doktora adayının da sürdürdüğü devam çalışmalarından biri olarak, hali hazırda $U(1)$ simetrisini bozonik madde alanı (elektromanyetik alan) üzerinden içeren söz konusu modele, fermiyonik bir madde alanının bağlanması, gayet çekici ve doğal bir devam yolu olarak verilebilir. Dirac parçacığı üzerinde, ayrı ayrı, pür STP geometrinin ve ölçek değişmezliği içeren daha spesifik bir geometrinin, nasıl etkiler bırakacağını (parçacığın yörüngesinde, Hamiltoniyen matrisinde, vb.) araştırmak ziyadesiyle

zengin bir çalışma olacaktır.

- Bölüm 5.4.1 altında Riemann-dışı bir geometriye Dirac alanının bağlandığı, 2-boyutlu oyuncak bir model çalışılmıştır. Yukarıda belirtildiği gibi, yine bu modelin de 4-boyuta genellemesi yapılabilir. Bununla beraber, verilen bu modeller, nonmetrisinin yanında torsiyon da içeren geometrilerde incelenebilir.

- Gravitasyonun kuantum modelleri bu tezin kapsamı dışındadır. Ancak çok güncel ve aktif bir çalışma sahası olan bu alanda da çalışmalar yapmak gayet ilgi çekicidir. GG' nin, standart yöntemler ile kuantize edilmesinin ortaya çıkardığı bazı problemler üzerine zengin bir literatür vardır. Bu haliyle GG, renormalize olabilen bir formda değildir. Bu bağlamda, $f(R)$ teoriler, yüksek dereceli R terimleri içeren modeller, skaler-tensor teoriler, vb. gibi yaklaşımlar yoğun bir şekilde çalışılmaktadır. Genel olarak, bu modeller Riemann geometrisinde uygulanırlar. Dolayısıyla, benzer yaklaşımların Riemann-dışı geometrik altyapılarda çalışılması daha ilginç olabilir. Örneğin, teleparalel bir gravitasyon teorisinin kuantize edilmesi ile, GG' nin sonuçlarından nasıl farklılaşacağını araştırmak, bir fikir olarak önerilebilir.

- Gravitasyon dalgaları bu tezin kapsamı dışındadır. 2017 yılında Nobel Fizik Ödülü' nün, LIGO ile gravitasyon dalgalarının gözlenmesi üzerine yapılan çalışmalara verilmesinin ardından, bu çalışma sahası astrofizik araştırmalarda çok önemli bir konuma erişti. Bu alanda çok fazla yayın üretildi ve devam etmektedir. LIGO gözlemi GG' nin bağlamında, yani Riemann geometrisi üzerinde yapılmıştır ve GG' nin öngördüğü tensörel modları doğrulamıştır. Diğer taraftan, son dönem çalışmalarda, Riemann-dışı geometrilerde öne sürülebilen ve tensörel modların yanında başka dalga modlarının da var olabileceğine dair iddialar ilgi çekicidir. Henüz, GG' nin öngördüklerinin dışında yeni bir dalga moduna dair amipirik bir veri yok. Ancak bu konudaki teorik çalışmalar, birçok alana temas edebilmesi açısından zevkli ve nitelikli uğraşlar olabilir.

Kısım IV

Ekler

Ek A

Group teorisi ve Lie grupları

$M(n \times n)$ ile, tüm $n \times n$ matrislerin kümesi gösterilsin. n^2 -boyutlu Öklidyen bir uzayda, $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{nn}$ koordinatlarına sahip her bir noktaya bir x matrisi atansın. Topolojik olarak, $M(n \times n)$ kümesi n^2 -boyutlu Öklidyen bir uzay olur! **Genel Lineer Group** $GL(n, \mathbb{R})$, tüm reel $n \times n$ matrislerin oluşturduğu, $x = (x_{ij})$, ve $\det x \neq 0$ sağlayan gruptur. (i) $\det x$ işlemi, $M(n \times n)$ üzerinde sürekli bir fonksiyondur, (ii) sıfırdan farklı reel sayılar $\mathbb{R}$ üzerinde bir açık küme oluşturur, (iii) açık bir kümenin sürekli bir harita altındaki görüntüsü de açık bir küme oluşturur; bu şartlar sağlandığı için $GL(n, \mathbb{R})$ grubu, $M(n \times n)$ kümesinin açık bir alt kümesi olur. Dolayısıyla, topolojik olarak $GL(n, \mathbb{R})$, Öklidyen bir uzayın açık alt kümesidir ve n^2 -boyutlu bir *manifold*dur. Bu yaklaşım bizi Lie grubu tanımına götürür.

Tanım A.1 (Lie grubu). Bir Lie grubu, diferansiyellenebilir bir manifoldtur G , öyle ki aşağıdaki gibi bir "işlem" ile verilir

$$G \times G \longrightarrow G \quad (g, h) \longrightarrow gh \quad (\text{A.0.1})$$

Bu sayede G , bir grup yapısı kazanır. Ayrıca aşağıdaki gibi bir ters harita da verilir

$$G \longrightarrow G \quad g \longrightarrow g^{-1} \quad (\text{A.0.2})$$

Yukarıda tanımlanan iki harita da diferansiyellenebilirdir. $\square$

Fizikte kullanılan bazı önemli Lie grupları şu şekilde verilebilir :

- $G = GL(n, \mathbb{R})$, **reel genel lineer grup**, öyle ki tüm reel $g \equiv n \times n$ matrislerden oluşur ve $\det g \neq 0$.
- $G = GL(n, \mathbb{C})$, **kompleks genel lineer grup**, öyle ki tüm kompleks $g \equiv n \times n$ matrislerden oluşur ve $\det g \neq 0$.

- $G = SL(n, \mathbb{R})$, **özel lineer grup**, $GL(n, \mathbb{R})$ grubunun bir alt grubudur ve $x \in SL(n, \mathbb{R})$ için $\det x = 1$.
- $G = O(n)$, **ortogonal grup**, $GL(n, \mathbb{R})$ grubunun bir alt grubudur ve $x \in O(n)$ için $xx^T = \mathbb{I}$, dolayısıyla $\det x = \pm 1$.
- $G = SO(n)$, **özel ortogonal (rotasyon) grup**, $O(n)$ grubunun bir alt grubudur ve $x \in SO(n)$ için $\det x = +1$. Özel olarak, $SO(2)$ ve $SO(3)$, sırasıyla, iki ve üç boyutlarda rotasyonlara karşılık gelir.
- $G = U(n)$, **üniter grup**, $GL(n, \mathbb{C})$ grubunun bir alt grubudur ve $z \in U(n)$ için $z^\dagger = z^{-1}$, dolayısıyla $\det z = \pm 1$. Özel olarak, $U(1)$, tek Abelian üniter gruptur ve $SO(2)$ ile izomorfiktir.
- $G = SU(n)$, **özel üniter grup**, $U(n)$ grubunun bir alt grubudur ve $z \in SU(n)$ için $\det z = +1$. Özel olarak, $SU(2)$ grubu, $SO(3)$ ile izomorfiktir.

Bir manifold olarak Lie grubu, şu sebepten ötürü çok özeldir : Bir Lie grubu her zaman iki adet, global olarak tanımlanabilen, difeomorfizme sahiptir, yani sağ ve sol ötelemeler. $g, h \in G$ için, bu ötelemeler aşağıdaki gibi verilir

$$L_g : G \longrightarrow G \quad L_g(h) = gh \quad (\text{A.0.3a})$$

$$R_g : G \longrightarrow G \quad R_g(h) = hg \quad (\text{A.0.3b})$$

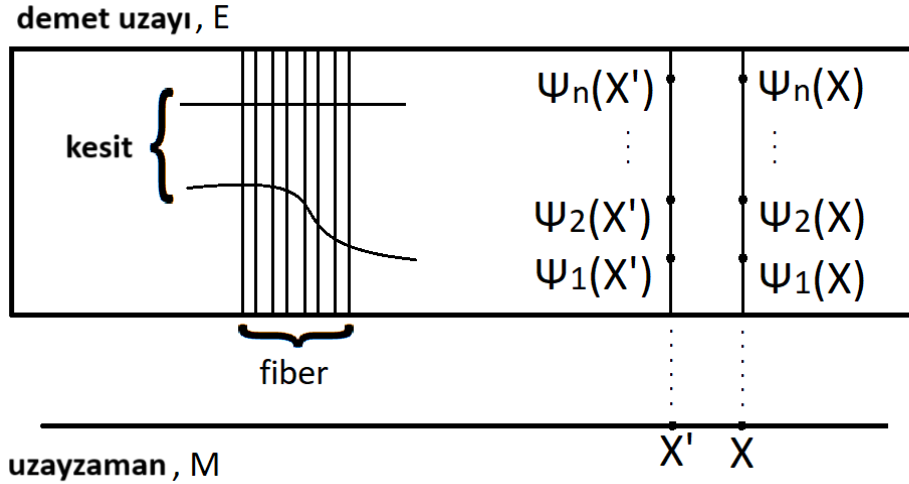
Ek B

Demet yapısı

Fiber demeti bir uzay olarak tanımlanabilir, öyle ki lokalde bir çarpım uzayı iken, global olarak farklı bir topoljik yapıya sahip olabilir. Bir fiber demeti şu yapıları içerir : (i) Bir manifold F^k , *fiber* olarak adlandırılır, (ii) Bir manifold E , *demet uzayı* olarak adlandırılır, (iii) Bir manifold M , *baz uzayı* olarak adlandırılır, (iv) E ve M arasında bir harita. E manifoldu lokalde bir çarpım uzayı olarak tanımlanır, şu şekilde : M^n uzayı, $U, V, \dots$ açık kümeleri tarafından kaplansın, öyle ki $\pi^{-1}(U)$ ile $U \times F$ difeomorfik olsunlar. Buna göre aşağıdaki gibi bir difeomorfizm vardır

$$\Phi_U : U \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U) \quad (\text{B.0.1})$$

burada her bir $y_U \in F$ için $\Phi_U(p, y_U) \in \pi^{-1}(p)$. Ayrıca her bir $p \in U$ için, $y \in F \longrightarrow \Phi_U(p, y) \in \pi^{-1}(p)$ haritası da bir difeomorfizm olur, öyle ki p üzerinde tanımlanan $\pi^{-1}(p)$ fiberi, F fiberinin difeomorfik bir kopyası olur.



Figür B.1: Fiber demet yapısı

$U \cap V$ kesişiminde yer alan $e \in \pi^{-1}(U \cap V)$ noktası, iki gösterime sahip olur

$$e = \Phi_U(p, y_U) = \Phi_V(p, y_V) \quad (\text{B.0.2})$$

Bununla beraber aşağıdaki dönüşüm tanımlanır

$$y_V = c_{VU}(p)[y_U] \quad (\text{B.0.3})$$

burada $c_{VU}(p) : F \rightarrow F$, fiber üzerinde bir difeomorfizmdir. Vektör demetinde, $F = \mathbb{R}^k$ veya $\mathbb{C}^k$, her $c_{VU}(p) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ haritası lineer bir dönüşüm iken, en genelde, F bir manifold yapısına sahip olduğu için lineer olmak zorunda değildir.

Eğer tüm $c_{UV}(p)$ haritaları, F fiberinde tanımlı difeomorfizmlerin bir alt grubunda, G , yer alıyorsa, bu durumda G grubu fiber demetinin *yapı grubu* adını alır. Örnek olarak, Riemann manifoldu üzerinde birim teğet uzayını T_0M ele alalım. Burada ortonormal çerçeve kullanılırsa, her bir $c_{VU}(p) : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ haritası, birim çember $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ üzerindeki ortogonal dönüşüme $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ indirgenir. Böylece, ortonormal çerçeve kullanılarak, fiber demetinin yapı grubu, S^{n-1} üzerindeki tüm difeomorfizmleri içeren genel gruptan, sadece ortogonal dönüşümleri içeren $O(n)$ alt grubuna indirgenmiş olur.

Bir (yerel) *kesit*, $s : U \rightarrow E$ haritası ile verilebilir, öyle ki $\pi \circ s = id$. **Kesit** s , basitçe tüm $s_U : U \rightarrow V$ haritalarının bileşimidir, öyle ki $U \cap V$ kesişiminde şu kural geçerli olsun $\{s_U = c_{UV}(p)[s_V(p)]\}$.

Genel olarak, fiber demeti

$$\{P, M, \pi, F, G\}$$

bir **temel demet** olarak adlandırılır, öyle ki eğer F fiberi, G grubu ile aynı olursa ve $c_{UV}(x)$ geçiş fonksiyonları $F = G$ üzerine sol öteleme olarak etkirse. Özel olarak, çerçeve demeti FM bir temel demettir, öyle ki teğet demeti TM ile **ilintilidir**. Çerçeve demeti, teğet demetinde olmayan önemli bir özelliğe sahiptir : *Yapı grubu G , grup dönüşüm operasyonu olarak, FM üzerine doğal bir biçimde uygulanır.* $g \in G$ bir matris ve $\vec{f} = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ ise p noktasında tanımlı bir çerçeve olsun, öyle ki $\vec{f}$ çerçevesi FM üzerinde bir nokta olsun. Buna göre, g matrisi, $\vec{f}$ üzerinde doğal bir biçimde $g(\vec{f}) := \vec{f}g$ dönüşümünü gerçekleştirir

$$(\vec{f}g)_\beta = \vec{f}_\alpha g^\alpha_\beta \quad (\text{B.0.4})$$

Verilen bu işlemin içsel olduğuna dikkat çekelim. Yani hiçbir lokal çarpım (işlem) kullanılmamıştır! Bunun yanında, G grubunun, teğet demeti üzerinde benzer doğal bir operasyonu yoktur. Örnek olarak, M^3 3-boyutlu bir uzay, $\vec{v}$ bir teğet vektör ve g ise 3×3 bir matris olsun. Buna göre $g(\vec{v})$ gösterimi ne olabilir? $\vec{v}$ vektörü için bir kolon matrisi ataması yapılamaz, zira bunun için öncelikle M^3 üzerinde bir lokal çerçeve seçilmelidir ve ancak bu seçili baza göre vektörün bileşenleri belirlenebilir. Özel olarak bir baz seçimi ise doğal bir yöntem değildir! Yukarıda verilen doğal operasyon, tüm temel demetler için geçerlidir.

Teorem B.1. P bir temel demet olsun. Yapı grubu G , temel demet üzerine aşağıdaki gibi "sağ taraftan" etki eder

$$(\vec{f} \in P, g \in G) \longrightarrow (\vec{f}g) \in P \quad (\text{B.0.5})$$

Bu dönüşüm fiber yapısını korur, yani $\pi(\vec{f}g) = \pi(\vec{f})$. $\square$

Yukarıda verilen tanımlar ışığında şunlar söylenebilir.

- G grubunun fiber üzerine *sol ötelemeler* ile etki etmesi koordinat dönüşümleri ile eşleştirilebilir.
- G grubunun fiber üzerine *sağ ötelemeler* ile etki etmesi ayar dönüşümleri ile eşleştirilebilir.

Bu dönüşümler, aynı fiber demetinin kesitlerine etki ettikleri için *yer değiştirirler* (komütatiftirler).

Ek C

Genel lineer koordinat dönüşümleri

Genel lineer koordinat dönüşümü (GCT) $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}$ aşağıdaki gibi verilsin

$$x^{\mu'} = \Gamma^{\mu'}_{\mu} x^\mu + \xi^{\mu'} \quad (\text{C.0.1})$$

burada $\Gamma^{\mu'}_{\mu} = \Gamma^{\mu'}_{\mu}(x)$ rotasyon parçasını ve $\xi^{\mu'} = \xi^{\mu'}(x)$ öteleme parçasını temsil eder. Öteleme parçasının varlığından ötürü, iki koordinat sisteminin $\{x^\mu\}$ ve $\{x^{\mu'}\}$, orjinleri kesişmek zorunda değildir. Bu dönüşüm aşağıdaki gibi matris formunda verilebilir

$$\begin{pmatrix} x^{\hat{0}'} \\ x^{\hat{1}'} \\ x^{\hat{2}'} \\ x^{\hat{3}'} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma^{\hat{0}'}_{\hat{0}} & \Gamma^{\hat{0}'}_{\hat{1}} & \Gamma^{\hat{0}'}_{\hat{2}} & \Gamma^{\hat{0}'}_{\hat{3}} & \xi^{\hat{0}'} \\ \Gamma^{\hat{1}'}_{\hat{0}} & \Gamma^{\hat{1}'}_{\hat{1}} & \Gamma^{\hat{1}'}_{\hat{2}} & \Gamma^{\hat{1}'}_{\hat{3}} & \xi^{\hat{1}'} \\ \Gamma^{\hat{2}'}_{\hat{0}} & \Gamma^{\hat{2}'}_{\hat{1}} & \Gamma^{\hat{2}'}_{\hat{2}} & \Gamma^{\hat{2}'}_{\hat{3}} & \xi^{\hat{2}'} \\ \Gamma^{\hat{3}'}_{\hat{0}} & \Gamma^{\hat{3}'}_{\hat{1}} & \Gamma^{\hat{3}'}_{\hat{2}} & \Gamma^{\hat{3}'}_{\hat{3}} & \xi^{\hat{3}'} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{\hat{0}} \\ x^{\hat{1}} \\ x^{\hat{2}} \\ x^{\hat{3}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.0.2})$$

Burada 5×5 dönüşüm matrisleri afin grubu oluşturur. En genelde, GCT koordinat bağımlı olabilir, yani $\Gamma^{\mu'}_{\mu} = \Gamma^{\mu'}_{\mu}(x)$ ve $\xi^{\mu'} = \xi^{\mu'}(x)$. Şimdi Denk.(C.0.1) ifadesinin dış türevini alalım

$$dx^{\mu'} = \Omega^{\mu'}_{\mu} dx^\mu \quad (\text{C.0.3})$$

burada $\Omega^{\mu'}_{\mu}(x) := [\partial_\mu \Gamma^{\mu'}_{\nu}(x)]x^\nu + \Gamma^{\mu'}_{\mu}(x) + \partial_\mu \xi^{\mu'}(x)$ ve bu dönüşüm elemanları genel lineer grubu $GL(n, \mathbb{R})$ oluşturur. Eğer $CF^*(M)$ üzerinde tanımlı tam bağlantı nesnesi aşağıdaki gibi olağan biçimde dönüşürse

$$\omega^{\mu'}_{\nu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} \omega^{\mu}_{\nu} \Lambda^{\nu}_{\nu'} + \Lambda^{\mu'}_{\mu} d\Lambda^{\mu}_{\nu'} \quad (\text{C.0.4})$$

kovaryant dış türev de, kovaryant biçimde dönüşebilir. Dolayısıyla $CF^*(M)$ üzerinde tanımlı nonmetirisiti 1-form, torsiyon 2-form ve tam eğrilik 2-form nesneleri de kovaryant biçimde dönüşür

$$Q_{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu}_{\mu'} \Lambda^{\nu}_{\nu'} Q_{\mu\nu} \quad (\text{C.0.5a})$$

$$T^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} T^{\mu} \quad (\text{C.0.5b})$$

$$R^{\mu'}_{\nu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} R^{\mu}_{\nu} \Lambda^{\nu}_{\nu'} \quad (\text{C.0.5c})$$

GCT' nin etkilerini görmek için, *n-beine* kullanarak ortogonal çerçeveye geçelim

$$dx^{\mu'} = h^{\mu'}_{a'} e^{a'} \quad \text{ve} \quad dx^\mu = h^\mu_a e^a \quad (\text{C.0.6})$$

burada $h^{\mu'}_{a'} = h^{\mu'}_{a'}(x'(x))$ ve $h^\mu_a = h^\mu_a(x)$. Bu ifadeler ve $h^{b'}_{\mu'} h^{\mu'}_{a'} = \delta^{b'}_{a'}$ kullanılarak ortonormal kobazlar için şu dönüşüm kuralı elde edilir

$$e^{b'} = L^{b'}_b e^b \quad (\text{C.0.7})$$

burada $L^{b'}_b(x'(x)) := h^{b'}_{\mu'} \Omega^{\mu'}_\mu h^\mu_b$. Görüldüğü üzere, Denk.(C.0.1) ile verilen GCT altında, ortonormal çerçevenin dönüşümü bir öteleme terimi içermez. Bununla birlikte metriğin de ortonormal çerçevedeki dönüşümüne bakalım

$$g = \eta_{ab} e^a \otimes e^b = \eta_{a'b'} e^{a'} \otimes e^{b'} \quad (\text{C.0.8})$$

burada $\eta_{ab} = \eta_{a'b'} = \text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$ Minkowski metrik bileşenleridir. $e^{a'} = L^{a'}_a e^a$ dönüşümü, bileşenlerin $\eta_{a'b'} = L^{a'}_a \eta_{ab} L^b_{b'}$ şeklinde dönüşümünü gerektirir. Matris notasyonunda aşağıdaki gibi verilebilir

$$e' = L^{-1} e \quad \rightarrow \quad \eta' = L^T \eta L \quad (\text{C.0.9})$$

burada T işareti matriste transpoz işlemini temsil eder. Bu sonuçtan görüleceği üzere, söylenebilir ki, GCT ile verilen dönüşüm elemanları, ortonormal demet üzerinde Lorentz grubu $SO(1, n-1)$ oluştururlar. Literatürde bazen, ortonormal 1-form nesnelerinin, Lorentz kobazları olarak isimlendirilmesinin altındaki sebep budur. Ortonormal çerçevede tam bağlantı nesnesi de şu şekilde dönüşür

$$\Lambda^{a'}_{b'} = L^{a'}_a \Lambda^a_b L^b_{b'} + L^{a'}_a dL^a_{b'} \quad (\text{C.0.10})$$

Bununla beraber, nonmetrisiti 1-form, torsiyon 2-form ve tam eğrilik 2-form nesneleri de aşağıdaki gibi kovaryant olarak dönüşür

$$Q_{a'b'} = L^a_{a'} Q_{ab} L^b_{b'} \quad (\text{C.0.11a})$$

$$T^{a'} = L^{a'}_a T^a \quad (\text{C.0.11b})$$

$$R^{a'}_{b'} = L^{a'}_a R^a_b L^b_{b'} \quad (\text{C.0.11c})$$

Ek D

Çerçeveler ve aralarındaki dönüşümler

$x^\alpha(p)$, $\alpha = \hat{0}, \hat{1}, \dots, \hat{n} - \hat{1}$, bir koordinat sistemi olsun, herhangi bir $p \in M$ noktasında. Bu koordinat sistemi doğal bir referans çerçevesi oluşturur, $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(p) \equiv \partial_\alpha(p)$. Bu çerçeve, *koordinat çerçevesi* olarak adlandırılır ve $T_p(M)$ teğet uzayı için, p noktasındaki baz vektörleri tarafından meydana gelir. Bunun gibi, M üzerindeki tüm teğet uzaylarının birleşimi koordinat teğet demetini oluşturur, $CT(M) = \bigcup_{p \in M} T_p(M)$. Benzer şekilde, koordinat fonksiyonlarının diferansiyelleri de $dx^\alpha(p) \equiv e^\alpha(p)$, p noktası üzerinde tanımlı $T_p^*(M)$ koteğit uzayı için, *koordinat (holonomik) koçerçevesi*ni oluşturur. Yine, tüm koteğit uzaylarının birleşimi koordinat koteğit demetini meydana getirir, $CT^*(M) = \bigcup_{p \in M} T_p^*(M)$. Bu çerçeveler arasındaki dualite aşağıdaki gibi verilebilir

$$dx^\alpha(\partial_\beta) = \delta_\beta^\alpha \quad (\text{D.0.1})$$

burada δ_β^α Kronecker sembolüdür. Koordinat çerçevesinde metrik aşağıdaki gibi ayrıştırılabilir

$$g = g_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha \otimes dx^\beta \quad (\text{D.0.2})$$

burada $\otimes$ sembolü, simetrik tensör çarpımını temsil eder, $g_{\alpha\beta}(x) = g_{\beta\alpha}(x)$. Görüleceği gibi, metrik tensörünün bileşenleri koordinat bağımlıdır, $g(\partial_\alpha, \partial_\beta) = g_{\alpha\beta}(x)$ veya $dg_{\alpha\beta} \neq 0$, burada d dış türev sembolüdür.

Diğer taraftan, metrik yardımıyla her zaman bir metrik-ortonormal çerçeve kurulabilir X_a , $a = 0, 1, \dots, n - 1$. Burada X_a , *g-ortonormal çerçeve* olarak adlandırılabilir ve bu çerçevede metrik bileşenleri şu formu alır : $g(X_a, X_b) = \eta_{ab}$ burada $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ Minkowski metrik bileşenleridir. Ortonormal ve koordinat çerçeveleri birbirlerine *n-bein* nesnesi ile bağlanabilirler, h^α_a veya tersi H^a_α

$$X_a(x) = h^\alpha_a(x)\partial_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\alpha = H^a_\alpha(x)X_a(x) \quad (\text{D.0.3})$$

öyle ki $h^\alpha_a(x)H^a_\beta(x) = \delta_\beta^\alpha$ ve $H^a_\alpha(x)h^\alpha_b(x) = \delta^a_b$. Bunlar genel lineer grubun $GL(n, \mathbb{R})$ elemanlarıdır. Dolayısıyla, *ortonormal koçerçeve* e^a aşağıdaki dualite

ile tanımlanabilir

$$e^a(X_b) = \delta_b^a \quad (\text{D.0.4})$$

Bu ifade, Denk.(D.0.1) ile verilen dualite ilişkisinin bir başka gösterimidir. n -*bein* kullanılarak, her zaman koordinat ve ortonormal köçerçeveler arasında geçiş yapılabilir

$$dx^\alpha = h^\alpha_a(x) e^a(x) \quad \Leftrightarrow \quad e^a(x) = H^a_\alpha(x) dx^\alpha \quad (\text{D.0.5})$$

$X_a(p)$ bazları, $T_p(M)$ teğet uzayının ortonormal bazlarını oluştururken, bunların duali $e^a(p)$ kobazları ise, $T_p^*(M)$ koteğet uzayının ortonormal kobazlarını oluştururlar. Sonuç olarak, ortonormal bazları içeren tüm teğet uzaylarının birleşimi ortonormal teğet demetini $OT(M)$, ortonormal kobazları içeren tüm koteğet uzaylarının birleşimi de ortonormal koteğet demetini $OT^*(M)$ meydana getirir. Ortonormal bazda, metrik aşağıdaki gibi ayrıştırılabilir

$$g = \eta_{ab} e^a(x) \otimes e^b(x) \quad (\text{D.0.6})$$

Burada metrik bileşenleri koordinat bağımsızdır, $g(X_a, X_b) = \eta_{ab}$ veya $d\eta_{ab} = 0$. Bunların yanında, bir başka seçenek olarak, her zaman bir *karma çerçevede* çalışmak da mümkündür. Bu çerçevede, en genelde, hem metrik bileşenleri hem de kobazlar koordinat bağımlı olabilirler, $dg_{AB}(x) \neq 0$ and $de^A(x) \neq 0$. Buna göre, metrik aşağıdaki gibi yazılabilir

$$g = g_{AB}(x) e^A(x) \otimes e^B(x) \quad (\text{D.0.7})$$

burada $A, B, \dots = \bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{n} - \bar{1}$ karma çerçeve indislerini gösterir. Bkz. Tablo D.1.

Tablo D.1: Koordinat, ortonormal ve karma çerçevelerin karşılaştırılması.

koordinat çerçevesi (holonomik)	ortonormal çerçeve (Lorentz, anholonomik)	karma çerçeve (anholonomik)
$dg_{\alpha\beta} \neq 0$	$d\eta_{ab} = 0$	$dg_{AB} \neq 0$
$de^\alpha = d^2x^\alpha = 0$	$de^a \neq 0$	$de^A \neq 0$

Çerçeve dönüşümleri

Çerçeveler ve bu çerçevelerde yazılan temel geometrik nesneler arasındaki dönüşümlerle ilgili bazı temel bilgiler verelim.

1. Koordinat ve ortonormal çerçeveler arasında, *n-bein* h^α_a ve tersi kullanılarak

$$\begin{aligned} e^a &= H^a_\alpha dx^\alpha, & \eta_{ab} &= h^\alpha_a g_{\alpha\beta} h^\beta_b, & \omega^a_b &= H^a_\alpha \omega^\alpha_\beta h^\beta_b + H^a_\alpha dh^\alpha_b, \\ T^a &= H^a_\alpha T^\alpha, & Q_{ab} &= h^\alpha_a Q_{\alpha\beta} h^\beta_b, & R^a_b &= H^a_\alpha R^\alpha_\beta h^\beta_b \end{aligned} \quad (D.0.8)$$

burada $h^\alpha_a, H^a_\alpha \in GL(n, \mathbb{R})$.

2. Koordinat ve karma çerçeveler arasında, *n-bein* h^α_A ve tersi kullanılarak

$$\begin{aligned} e^A &= h^A_\alpha dx^\alpha, & g_{AB} &= h^\alpha_A g_{\alpha\beta} h^\beta_B, & \omega^A_B &= h^A_\alpha \omega^\alpha_\beta h^\beta_B + h^A_\alpha dh^\alpha_B, \\ T^A &= h^A_\alpha T^\alpha, & Q_{AB} &= h^\alpha_A Q_{\alpha\beta} h^\beta_B, & R^A_B &= h^A_\alpha R^\alpha_\beta h^\beta_B \end{aligned} \quad (D.0.9)$$

burada $h^\alpha_A, h^A_\alpha \in GL(n, \mathbb{R})$.

3. Ortonormal ve karma çerçeveler arasında, *n-bein* h^a_A ve tersi kullanılarak

$$\begin{aligned} e^a &= h^a_A e^A, & \eta_{ab} &= h^A_a g_{AB} h^B_b, & \omega^a_b &= h^a_A \omega^A_B h^B_b + h^a_A dh^A_b, \\ T^a &= h^a_A T^A, & Q_{ab} &= h^A_a Q_{AB} h^B_b, & R^a_b &= h^a_A R^A_B h^B_b \end{aligned} \quad (D.0.10)$$

burada $h^A_a, h^a_A \in GL(n, \mathbb{R})$.

4. İki farklı koordinat çerçevesi arasında, koordinat dönüşümü $L^\alpha_{\alpha'}$ ve tersi kullanılarak

$$\begin{aligned} dx^{\alpha'} &= L^{\alpha'}_\alpha dx^\alpha, & g_{\alpha'\beta'} &= L^\alpha_{\alpha'} g_{\alpha\beta} L^\beta_{\beta'}, & \omega^{\alpha'}_{\beta'} &= L^{\alpha'}_\alpha \omega^\alpha_\beta L^\beta_{\beta'} + L^{\alpha'}_\alpha dL^\alpha_{\beta'}, \\ T^{\alpha'} &= L^{\alpha'}_\alpha T^\alpha, & Q_{\alpha'\beta'} &= L^\alpha_{\alpha'} Q_{\alpha\beta} L^\beta_{\beta'}, & R^{\alpha'}_{\beta'} &= L^{\alpha'}_\alpha R^\alpha_\beta L^\beta_{\beta'} \end{aligned} \quad (D.0.11)$$

burada $L^\alpha_{\alpha'}, L^{\alpha'}_\alpha \in GL(n, \mathbb{R})$ ve $x^\alpha \rightarrow x^{\alpha'}$ (x^α) koordinat dönüşümü temsil eder, öyle ki $L^{\alpha'}_\alpha = \partial x^{\alpha'} / \partial x^\alpha$ ve $L^\alpha_{\alpha'} = \partial x^\alpha / \partial x^{\alpha'}$.

5. İki farklı karma çerçeve arasında, dönüşüm nesnesi $L^A_{A'}$ ve tersi kullanılarak

$$\begin{aligned} e^{A'} &= L^{A'}_A e^A, & g_{A'B'} &= L^A_{A'} g_{AB} L^B_{B'}, & \omega^{A'}_{B'} &= L^{A'}_A \omega^A_B L^B_{B'} + L^{A'}_A dL^A_{B'}, \\ T^{A'} &= L^{A'}_A T^A, & Q_{A'B'} &= L^A_{A'} Q_{AB} L^B_{B'}, & R^{A'}_{B'} &= L^{A'}_A R^A_B L^B_{B'} \end{aligned} \quad (D.0.12)$$

burada $L^A_{A'}, L^{A'}_A \in GL(n, \mathbb{R})$.

6. İki farklı ortonormal çerçeve arasında, dönüşüm nesnesi $L^a_{a'}$ ve tersi kullanılarak

$$\begin{aligned} e^{a'} &= L^{a'}_a e^a, & \eta_{a'b'} &= L^a_{a'} \eta_{ab} L^b_{b'}, & \omega^{a'}_{b'} &= L^{a'}_a \omega^a_b L^b_{b'} + L^{a'}_a dL^a_{b'}, \\ T^{a'} &= L^{a'}_a T^a, & Q_{a'b'} &= L^a_{a'} Q_{ab} L^b_{b'}, & R^{a'}_{b'} &= L^{a'}_a R^a_b L^b_{b'} \end{aligned} \quad (D.0.13)$$

burada $L^a_{a'}, L^{a'}_a \in SO(1, n-1)$. Ortonormal çerçevede metrik bileşenleri $\eta_{a'b'} = \eta_{ab} = \text{diag}(-1, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{(n-1) \text{ adet}})$ ile verildiği için, dönüşüm nesnelerinin oluşturduğu grup genel lineer grup değil, Lorentz grubu olur (Frankel 2012).

Ek E

Tensör formülasyonu

$\{M, g, \nabla\}$ bir uzay olsun. Burada M , n -boyutlu diferansiyellenbilir ve integral-lenebilir bir manifold, g simetrik dejenere olmayan ikinci derece kovaryant metrik tensörü, ∇ bağlantı nesnesi olsun. Öncelikle bir koordinat sistemi seçelim $\{\bar{x}^\mu\}$, $\mu = 0, 1, \dots, n-1$. Buna göre, metrik, nonmetrisiti 1-form, torsiyon 2-form ve eğrilik 2-form, sırasıyla, aşağıdaki gibi verilebilir

$$g = \bar{g}_{\mu\nu} d\bar{x}^\mu \otimes d\bar{x}^\nu \quad (\text{E.0.1a})$$

$$\bar{Q}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (d\bar{g}_{\mu\nu} - \bar{\omega}^\sigma{}_\mu \bar{g}_{\sigma\nu} - \bar{\omega}^\sigma{}_\nu \bar{g}_{\mu\sigma}) \quad (\text{E.0.1b})$$

$$\bar{T}^\mu = d(d\bar{x}^\mu) + \bar{\omega}^\sigma{}_\mu \wedge d\bar{x}^\nu \quad (\text{E.0.1c})$$

$$\bar{R}^\mu{}_\nu = d\bar{\omega}^\mu{}_\nu + \bar{\omega}^\mu{}_\sigma \wedge \bar{\omega}^\sigma{}_\nu \quad (\text{E.0.1d})$$

burada d dış türev, $\otimes$ simetrik tensör çarpımı, $\wedge$ dış çarpım, $d\bar{x}^\mu$ koçerçeve (veya (ko)baz 1-form), $\bar{\omega}^\mu{}_\nu$ bağlantı 1-formdur. Son üç eşitlik Cartan yapı denklemleri olarak adlandırılır.

Şimdi, x^μ bir diğer koordinat sistemi olarak seçilsin. Yukarıda verilen ifadeler, bu yeni koordinat sisteminde aşağıdaki gibi yazılabilir

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \quad (\text{E.0.2a})$$

$$Q_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (dg_{\mu\nu} - \omega^\sigma{}_\mu g_{\sigma\nu} - \omega^\sigma{}_\nu g_{\mu\sigma}) \quad (\text{E.0.2b})$$

$$T^\mu = d(dx^\mu) + \omega^\sigma{}_\mu \wedge dx^\nu \quad (\text{E.0.2c})$$

$$R^\mu{}_\nu = d\omega^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\sigma \wedge \omega^\sigma{}_\nu \quad (\text{E.0.2d})$$

Bu noktada, aşağıdaki gibi bir genel koordinat dönüşümü varsayalım

$$x^\mu = x^\mu(\bar{x}) \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{x}^\mu = \bar{x}^\mu(x) \quad (\text{E.0.3})$$

Bu koordinat dönüşümü altında, koçerçeveseler aşağıdaki gibi dönüşür

$$dx^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu d\bar{x}^\nu \quad \Longleftrightarrow \quad d\bar{x}^\mu = (\Lambda)^\mu{}_\nu dx^\nu \quad (\text{E.0.4})$$

burada dönüşüm elemanları $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\sigma (\Lambda)^\sigma{}_\nu = (\Lambda)^\mu{}_\sigma (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$ koşulunu sağlar ve aşağıdaki gibi verilebilir

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu := \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} \quad \Longleftrightarrow \quad (\Lambda)^\mu{}_\nu := \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \quad (\text{E.0.5})$$

Bu dönüşüm elemanları, 0-form verisi içeren $n \times n$ matrislerden oluşur ve genel lineer grubun birer elemanı olurlar, $(\Lambda)^\mu{}_\nu \in GL(n, \mathbb{R})$. En genelinde, bir $GL(n, \mathbb{R})$ matrisi n^2 adet girdi içerir, fakat açıkça görüldüğü üzere yukarıda verilen genel koordinat dönüşüm matrisi n adet koordinat fonksiyonu $\bar{x}^\mu(x)$ tarafından belirlenir. Bu indirgenmiş durum, pratikte $GL(n, \mathbb{R})$ grubunun alt grubu ile çalışıldığını gösterir. Koçerçevenin yanında ve bundan bağımsız olarak, bağlantı 1-form nesnesi de homojen olmayan biçimde şu şekilde dönüşür

$$\omega^\mu{}_\nu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\sigma \bar{\omega}^\sigma{}_\gamma (\Lambda)^\gamma{}_\nu + (\Lambda^{-1})^\mu{}_\sigma d(\Lambda)^\sigma{}_\nu \quad (\text{E.0.6a})$$

$$\bar{\omega}^\mu{}_\nu = (\Lambda)^\mu{}_\sigma \omega^\sigma{}_\gamma (\Lambda^{-1})^\gamma{}_\nu + (\Lambda)^\mu{}_\sigma d(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu \quad (\text{E.0.6b})$$

Bununla ilintili olarak, verilen koordinat dönüşümü altında, metrik, nonmetrisiti, torsiyon ve eğrilik de şu şekilde dönüşür

$$g_{\mu\nu} = (\Lambda)^\alpha{}_\mu (\Lambda)^\beta{}_\nu \bar{g}_{\alpha\beta} \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{g}_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu (\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu g_{\alpha\beta} \quad (\text{E.0.7a})$$

$$Q_{\mu\nu} = (\Lambda)^\alpha{}_\mu (\Lambda)^\beta{}_\nu \bar{Q}_{\alpha\beta} \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{Q}_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu (\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu Q_{\alpha\beta} \quad (\text{E.0.7b})$$

$$T^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \bar{T}^\nu \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{T}^\mu = (\Lambda)^\mu{}_\nu T^\nu \quad (\text{E.0.7c})$$

$$R^\mu{}_\nu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\sigma \bar{R}^\sigma{}_\gamma (\Lambda)^\gamma{}_\nu \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{R}^\mu{}_\nu = (\Lambda)^\mu{}_\sigma R^\sigma{}_\gamma (\Lambda^{-1})^\gamma{}_\nu \quad (\text{E.0.7d})$$

Bir örnek olması adına, bu noktada, x^μ koordinat sisteminde teleparalelizm koşulunu empoze edelim, $R^\mu{}_\nu = 0$. Bu koşul altında şunlar elde edilir

$$d(dx^\mu) = 0 \quad \text{ve} \quad \omega^\mu{}_\nu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\sigma d(\Lambda)^\sigma{}_\nu \quad (\text{E.0.8})$$

Dahası, $g_{\mu\nu}(x)$ metrik bileşenleri, yeni bir simetrik kovaryant tensörün bileşenleri $c_{\alpha\beta}(x)$ cinsinden yazılırsa

$$g_{\mu\nu} = (\Lambda)^\alpha{}_\mu (\Lambda)^\beta{}_\nu c_{\alpha\beta} \quad (\text{E.0.9})$$

Denk.(E.0.2b-E.0.2d) ile verilen Cartan yapı denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir

$$Q_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (\Lambda)^\alpha{}_\mu (\Lambda)^\beta{}_\nu dc_{\alpha\beta}, \quad T^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\sigma d(\Lambda)^\sigma{}_\nu \wedge dx^\nu = 0, \quad R^\mu{}_\nu = 0 \quad (\text{E.0.10})$$

burada torsiyonun sıfırlandığı görülür, zira koordinat dönüşüm elemanı $\Lambda^\mu{}_\nu$ bir Jacobian formundadır ve dış türevi kapalı bir 1-formdur. Ancak en genelinde, bir $GL(n, \mathbb{R})$ grup elemanı bu davranışı sergilemek zorunda değildir. Denk.(E.0.6) ve

Denk.(E.0.7) ile verilen ifadelerin yardımıyla $\bar{x}^\mu$ koordinat sistemine geçilebilir. Ardından $c_{\mu\nu}(x) = \bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}(x))$ eşitliği ve aşağıdakiler elde edilebilir

$$\bar{\omega}^\mu{}_\nu = 0, \quad d\bar{x}^\mu = (\Lambda)^\mu{}_\nu dx^\nu, \quad \bar{g}_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu (\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu g_{\alpha\beta} \quad (\text{E.0.11a})$$

$$\bar{Q}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}d\bar{g}_{\alpha\beta}, \quad \bar{T}^\mu = 0, \quad \bar{R}^\mu{}_\nu = 0 \quad (\text{E.0.11b})$$

Sonuç olarak söylenebilir ki, simetrik teleparalelizm koşulu empoze edilerek (koordinat dönüşüm elemanları tarafından oluşturulan bağlantı nesnesi kullanılarak), herhangi bir gravitasyon teorisi metrik bileşenleri cinsinden ifade edilebilir. Fakat, bu durumda metrik bileşenleri, özellikle seçilmiş olan bir çerçevede yazılmış olur.

Ek F

Varyasyonel alan denklemleri

Bir gravitasyon teorisinin alan denklemlerini elde etmenin bir yolu da, teoriyi ifade eden Lagrangiyen ifadesi üzerinde, teorideki bağımsız dinamik değişkenlere göre varyasyon işlemi gerçekleştirilmesidir. Dolayısıyla öncelikle, en genelde, g_{AB} , e^A , ω^A_B , Q_{AB} , T^A , R^A_B dinamik geometrik alanlara ve madde alanına Ψ bağlı bir Lagrangiyen n -formu önerilmelidir. Burada Ψ , skaler alan, elektromanyetik alan, tensör alan, spinör alan, vb. gibi tüm madde alanlarını içerebilir. Bununla beraber, nonmetrisiti, torsiyon ve eğrilik gibi geometrik nesneler, Denk.(4.1.1) ile verildiği üzere, metrik, koçerçeve ve bağlantı nesneleri cinsinden yazılabildiğinden ötürü, teorisinin bağımsız dinamik değişkenleri aslında g_{AB} , e^A , ω^A_B ve Ψ olarak verilebilir. Dolayısıyla Lagrangiyen n -formu $L = L[g_{AB}, e^A, \omega^A_B, \Psi]$ şeklinde yazılabilir. Ardından bağımsız dinamik değişkenlere göre varyasyon işlemi aşağıdaki gibi hesaplanabilir

$$\begin{aligned} \delta L = & \delta g_{AB} \wedge \sigma^{AB}[g_{AB}, e^A, \omega^A_B, \Psi] + \delta e^A \wedge \tau_A[g_{AB}, e^A, \omega^A_B, \Psi] \\ & + \delta \omega^A_B \wedge \Sigma^B_A[g_{AB}, e^A, \omega^A_B, \Psi] + \delta \Psi \wedge \mathcal{M}[g_{AB}, e^A, \omega^A_B, \Psi] + mod(d) \end{aligned} \quad (F.0.1)$$

burada $\sigma^{AB} = \sigma^{BA}$ metrik n -formu, τ_A enerji-momentum $(n-1)$ -formu ve Σ^B_A açısıl (hiper)-momentum $(n-1)$ -formu, $\mathcal{M}$ madde $(n-p)$ -formu ve $mod(d)$ ise aşağıdaki gibi bir tam formdur

$$\begin{aligned} mod(d) = & d\{ \delta g_{AB} \wedge \mathcal{A}^{AB}[g_{AB}, e^A, \omega^A_B, \Psi] + \delta e^A \wedge \mathcal{B}_A[g_{AB}, e^A, \omega^A_B, \Psi] \\ & + \delta \omega^A_B \wedge \mathcal{C}^B_A[g_{AB}, e^A, \omega^A_B, \Psi] + \delta \Psi \wedge \mathcal{F}[g_{AB}, e^A, \omega^A_B, \Psi] \} \end{aligned} \quad (F.0.2)$$

Burada $\mathcal{A}^{AB} = \mathcal{A}^{BA}$ bir $(n-1)$ -form, $\mathcal{B}_A$ bir $(n-2)$ -form, $\mathcal{C}^B_A$ bir $(n-2)$ -form ve $\mathcal{F}$ bir $(n-p-1)$ -formdur. $mod(d)$ terimi alan denklemlerine herhangi bir katkıda bulunmaz, ancak korunan Noether akımlarının ve yüklerinin hesaplanmasında kullanılır (J. B. Jimenez ve T. S. Koivisto 2022). Hamilton ilkesi,

$\delta L = 0$, uygulandığında aşağıdaki alan denklemleri elde edilir

$$\sigma^{AB}[g_{AB}, e^A, \omega^A_B, \Psi] = 0, \quad \text{METRİK DENK.} \quad (\text{F.0.3a})$$

$$\tau_A[g_{AB}, e^A, \omega^A_B, \Psi] = 0, \quad \text{KOÇERÇEVE DENK.} \quad (\text{F.0.3b})$$

$$\Sigma^B_A[g_{AB}, e^A, \omega^A_B, \Psi] = 0, \quad \text{BAĞLANTI DENK.} \quad (\text{F.0.3c})$$

$$\mathcal{M}[g_{AB}, e^A, \omega^A_B, \Psi] = 0. \quad \text{MADDE DENK.} \quad (\text{F.0.3d})$$

Yukarıda verilen türetmede karma çerçeve kullanılmıştır ve Lagrangiyen ifadesi $GL(n, \mathbb{R})$ transformasyonu altında invarianttır. Daha ileri bir analiz gösterir ki, yukarıdaki metrik, koçerçeve ve bağlantı denklemleri birbirlerinden bağımsız değildir. Benzer sonuç koordinat çerçevesi için de geçerlidir. Ancak, teori ortonormal çerçevede yazıldığında, metrik bileşenlerinin koordinat bağımsız olmasından ötürü, $\delta\eta_{ab} = 0$, Lagrangiyen ifadesinin metrik varyasyonu $\delta L[\eta_{ab}, e^a, \omega^a_b, \Psi]$, doğrudan, aynı Lagrangiyen ifadesinin ortonormal 1-form e^a varyasyonuna eşit olur. Dolayısıyla aşağıdaki formda bir varyasyon elde edilir

$$\begin{aligned} \delta L = \delta e^a \wedge \tau_a[\eta_{ab}, e^a, \omega^a_b, \Psi] + \delta \omega^a_b \wedge \Sigma^b_a[\eta_{ab}, e^a, \omega^a_b, \Psi] \\ + \delta \Psi \wedge \mathcal{M}[\eta_{ab}, e^a, \omega^a_b, \Psi] + \text{mod}(d), \end{aligned} \quad (\text{F.0.4})$$

ve varyasyonel alan denklemleri şöyle verilebilir

$$\tau_a[\eta_{ab}, e^a, \omega^a_b, \Psi] = 0, \quad \text{KOÇERÇEVE DENK.} \quad (\text{F.0.5a})$$

$$\Sigma^b_a[\eta_{ab}, e^a, \omega^a_b, \Psi] = 0, \quad \text{BAĞLANTI DENK.} \quad (\text{F.0.5b})$$

$$\mathcal{M}[\eta_{ab}, e^a, \omega^a_b, \Psi] = 0. \quad \text{MADDE DENK.} \quad (\text{F.0.5c})$$

Aslında, yukarıdaki koçerçeve ve bağlantı denklemleri de tam olarak birbirlerinden bağımsız değildir. Bu iki denklemin toplam bileşen sayısı $n^2(n+1)$ iken, koçerçeve ve bağlantı nesnesinden gelen toplam bilinmeyen sayısı ise $n^3 + n(n+1)/2$ olur. Dolayısıyla, denklem sisteminin kapalı olması istendiğinde, $n(n-1)/2$ kadar alan denkleminin fazla olduğu görülür. Bu sonuca göre, denklemler arasında bazı kısıtlar olması gerektiği öngörülebilir, öyle ki bağımsız alan denklemlerinin ve bilinmeyenlerin sayısı eşit olsun. Bu analiz sırasında madde alan denkleminin bileşen sayısının, madde alanına ait bilinmeyen sayısına eşit olduğu varsayıldı. Bu varsayım altında, kısa bir matematik hesabın ardından koçerçeve ve bağlantı denklemleri aşağıdaki gibi birleştirilebilir¹

$$\iota_a D \Sigma^a_b[\eta_{ab}, e^a, \omega^a_b, \Psi] + \tau_b[\eta_{ab}, e^a, \omega^a_b, \Psi] = 0 \quad (\text{F.0.6})$$

¹Hesap detayları için, bkz. (Adak, Dereli, T. S. Koivisto, ve diğ. 2023).

Yukarıdaki denklemin getirdiği kısıt sayesinde artık varyasyonel alan denklemlerinin oluşturduğu denklem sistemi kapalıdır ve prensipte teoriyi tanımlayan bağımsız bilinmeyenler hesaplanabilir (elbette bu her zaman kolay olmaz!).

Son olarak şu notu da verelim : Eğer Lagrangiyen ifadesi içinde Hodge yıldız işlemi yer alıyorsa, bu durumda varyasyon uygulamak basit olmayabilir. Bu durumda, aşağıda verilen en genel sonucu hesaplamalarda kullanmak faydalı olacaktır (Adak, Kalay ve Sert 2006)

$$\delta(\alpha \wedge * \beta) = \delta \alpha \wedge * \beta + \delta \beta \wedge * \alpha - \delta e^a \wedge [(\iota_a \beta) \wedge * \alpha - (-1)^p \alpha \wedge (\iota_a * \beta)] \quad (\text{F.0.7})$$

burada α ve β nesneleri, n -boyutlu bir uzayda keyfi p -formlardır, $(0 \leq p \leq n)$.

Referanslar

- Adak, M. (2006). “The Symmetric Teleparallel Gravity”. *Turk. J. Phys.* 30.5, p. 379. DOI: [10.48550/arXiv.gr-qc/0611077](https://doi.org/10.48550/arXiv.gr-qc/0611077). arXiv: [gr-qc/0611077](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0611077). URL: <https://journals.tubitak.gov.tr/physics/vol30/iss5/> (ref. verildiği sayfalar [4](#), [59](#), [132](#)).
- (2010). *Non-Riemannian Theories of Gravitation and the Dirac Equation*. Lambert Academic Pub. ISBN: 978-3-8383-5139-1 (ref. verildiği sayfa [61](#)).
- (2018). “Gauge approach to the symmetric teleparallel gravity”. *Int. J. Geomet. Meth. Modern Phys.* 15.12, p. 1850198. DOI: [10.1142/S0219887818501980](https://doi.org/10.1142/S0219887818501980). arXiv: [1809.01385](https://arxiv.org/abs/1809.01385) (ref. verildiği sayfalar [62](#), [110](#), [149](#), [152](#)).
- Adak, M. ve T. Dereli (2008). “The quadratic symmetric teleparallel gravity in two dimensions”. *EPL* 82.3, p. 30008. DOI: [10.1209/0295-5075/82/30008](https://doi.org/10.1209/0295-5075/82/30008). arXiv: [hep-th/0607058](https://arxiv.org/abs/hep-th/0607058) (ref. verildiği sayfalar [110](#), [126](#), [156](#), [159](#)).
- Adak, M., T. Dereli, T. S. Koivisto, ve diğ. (2023). “General teleparallel metrical geometries”. *Int. J. Geomet. Meth. Mod. Phys.* 20.suppl01, p. 2350215. DOI: [10.1142/S0219887823502158](https://doi.org/10.1142/S0219887823502158). arXiv: [2303.17812](https://arxiv.org/abs/2303.17812) (ref. verildiği sayfalar [3](#), [4](#), [54](#), [105](#), [126](#), [183](#)).
- Adak, M., T. Dereli, E. Kok, ve diğ. (2024). “A new theory of continuum defects in terms of the general teleparallel geometry and exterior algebra”. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2408.06184>. arXiv: [2408.06184](https://arxiv.org/abs/2408.06184) (ref. verildiği sayfa [55](#)).
- Adak, M., T. Dereli ve L. H. Ryder (2004). “Possible effects of spacetime non-metricity on neutrino oscillations”. *Phys. Rev. D* 69, p. 123002. DOI: [10.1103/PhysRevD.69.123002](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.69.123002). arXiv: [gr-qc/0303080](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0303080) (ref. verildiği sayfalar [157](#), [159](#)).
- Adak, M., M. Kalay ve O. Sert (2006). “Lagrange formulation of the symmetric teleparallel gravity”. *Int. J. Mod. Phys. D* 15, pp. 619–634. DOI: [10.1142/S0218271806008474](https://doi.org/10.1142/S0218271806008474). arXiv: [gr-qc/0505025](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0505025) (ref. verildiği sayfalar [54](#), [129](#), [184](#)).
- Adak, M., N. Ozdemir ve C. Pala (2023). “Weyl-Lorentz-U(1)-invariant symmetric teleparallel gravity in three dimensions”. *Eur. Phys. J. C* 83.606, p. 606.

- DOI: [10.1140/epjc/s10052-023-11771-w](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-023-11771-w). arXiv: [2304.05209](https://arxiv.org/abs/2304.05209) (ref. verildiği sayfalar [3](#), [4](#), [110](#)).
- Adak, M., N. Ozdemir ve O. Sert (2023). “Scale invariant Einstein–Cartan theory in three dimensions”. *Eur. Phys. J. C* 83, p. 106. DOI: [10.1140/epjc/s10052-023-11255-x](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-023-11255-x). arXiv: [2212.02917](https://arxiv.org/abs/2212.02917) (ref. verildiği sayfalar [125](#)–[127](#)).
- Adak, M. ve O. Sert (2005). “A Solution to Symmetric Teleparallel Gravity”. *Turk. J. Phys.* 29, p. 1. DOI: [10.48550/arXiv.gr-qc/0412007](https://doi.org/10.48550/arXiv.gr-qc/0412007). arXiv: [gr-qc/0412007](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0412007). URL: <https://journals.tubitak.gov.tr/physics/vol29/iss1/> (ref. verildiği sayfa [62](#)).
- Adak, M., O. Sert, ve diğ. (2013). “Symmetric Teleparallel Gravity: Some exact solutions and spinor couplings”. *Int. J. Mod. Phys. A* 28.32, p. 1350167. DOI: [10.1142/S0217751X13501674](https://doi.org/10.1142/S0217751X13501674). arXiv: [0810.2388](https://arxiv.org/abs/0810.2388) (ref. verildiği sayfalar [110](#), [129](#)).
- Arvanitakis, A. S. ve P. K. Townsend (2015). “Minimal massive 3D gravity unitarity redux”. *Class. Quant. Grav.* 32, p. 085003. DOI: [10.1088/0264-9381/32/8/085003](https://doi.org/10.1088/0264-9381/32/8/085003). arXiv: [1411.1970](https://arxiv.org/abs/1411.1970) (ref. verildiği sayfa [125](#)).
- Avalos, R., F. Dahia ve C. Romero (2018). “A Note on the Problem of Proper Time in Weyl Space–Time”. *Found. Phys.* 48, p. 253. DOI: [10.1007/s10701-017-0134-z](https://doi.org/10.1007/s10701-017-0134-z). arXiv: [1611.10198](https://arxiv.org/abs/1611.10198) (ref. verildiği sayfa [70](#)).
- Babcock, W. H. (1939). “The rotation of the Andromeda Nebula”. *Lick Observatory Bulletin* 498, pp. 41–51. DOI: [10.5479/ADS/bib/1939LicOB.19.41B](https://doi.org/10.5479/ADS/bib/1939LicOB.19.41B) (ref. verildiği sayfa [7](#)).
- Bahamonde, S., J. Gigante Valcarcel, L. Järv ve J. Lember (2022). “Black hole solutions in scalar-tensor symmetric teleparallel gravity”. *JCAP* 08, p. 082. DOI: [10.1088/1475-7516/2022/08/082](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2022/08/082). arXiv: [2206.02725](https://arxiv.org/abs/2206.02725) (ref. verildiği sayfa [119](#)).
- Bahamonde, S., J. Gigante Valcarcel, L. Järv ve C. Pfeifer (2021). “Exploring Axial Symmetry in Modified Teleparallel Gravity”. *Phys. Rev. D* 103, p. 044058. DOI: [10.1103/PhysRevD.103.044058](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.103.044058). arXiv: [2012.09193](https://arxiv.org/abs/2012.09193) (ref. verildiği sayfa [118](#)).
- Banados, M., C. Teitelboim ve J. Zanelli (1992). “The Black hole in three-dimensional space-time”. *Phys. Rev. Lett.* 69, p. 1849. DOI: [10.1103/PhysRevLett.69.1849](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.69.1849). arXiv: [hep-th/9204099](https://arxiv.org/abs/hep-th/9204099) (ref. verildiği sayfalar [124](#), [126](#)).
- Belenchia, A. ve et. al. (2022). “Quantum Physics in Space”. *Physics Reports* 951, p. 1. DOI: [10.1016/j.physrep.2021.11.004](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2021.11.004). arXiv: [2108.01435](https://arxiv.org/abs/2108.01435) (ref. verildiği sayfa [69](#)).

- Bergmann, P. G. (1968). “Comments on the scalar-tensor theory”. *Int. J. Theor. Phys.* 1.25, p. 25. DOI: [10.1007/BF00668828](#) (ref. verildiği sayfa 3).
- Bergshoeff, E. A., O Hohm ve P. K. Townsend (2009). “Massive gravity in three dimensions”. *Phys. Rev. Lett.* 102, p. 201301. DOI: [10.1103/PhysRevLett.102.201301](#). arXiv: [0901.1766](#) (ref. verildiği sayfa 125).
- Bergshoeff, E. A., O. Hohm, W. Merbis, ve diğ. (2014). “Minimal massive 3D gravity”. *Class. Quant. Grav.* 31, p. 145008. DOI: [10.1088/0264-9381/31/14/145008](#). arXiv: [1404.2867](#) (ref. verildiği sayfa 125).
- Bergshoeff, E. A., O. Hohm ve P. K. Townsend (2009). “More on massive 3D gravity”. *Phys. Rev D* 79, p. 124042. DOI: [10.1103/PhysRevD.79.124042](#). arXiv: [0905.1259](#) (ref. verildiği sayfa 125).
- Bergshoeff, E. A., J. Rosseel ve P. K. Townsend (2018). “Gravity and the Spin-2 Planar Schrödinger Equation”. *Phys. Rev. Lett.* 120, p. 141601. DOI: [10.1103/PhysRevLett.120.141601](#). arXiv: [1712.10071](#) (ref. verildiği sayfa 125).
- Blagojevic, M. (2002). *Gravitation and Gauge Symmetries*. IOP Publishing Ltd. ISBN: 0-7503-0767-6 (ref. verildiği sayfa 82).
- Blagojevic, M., F. W. Hehl ve T. W. B. Kibble (2013). *Gauge Theories of Gravitation*. Imperial College Press. ISBN: 978-1-84816-726-1 (ref. verildiği sayfa 81).
- Bosma, A. (1978). “The distribution and kinematics of neutral hydrogen in spiral galaxies of various morphological types”. PhD thesis. University of Groningen (ref. verildiği sayfa 7).
- Bott, R. ve L. Tu (1982). *Differential forms in Algebraic Topology*. Springer (ref. verildiği sayfa 33).
- Brans, C. ve R. H. Dicke (1961). “Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation”. *Phys. Rev.* 124.3, p. 925. DOI: [10.1103/PhysRev.124.925](#) (ref. verildiği sayfalar 119, 121).
- Buchdahl, H. (1970). “Non-linear Lagrangians and cosmological theory”. *Monthly Not. Roy. Astr. Soc.* 150.1, p. 1. DOI: [10.1093/mnras/150.1.1](#) (ref. verildiği sayfa 3).
- Cai, Y. F. ve diğ. (2016). “f(T) teleparallel gravity and cosmology”. *Reports on Progress in Physics* 79, p. 106901. DOI: [10.1088/0034-4885/79/10/106901](#). arXiv: [1511.07586](#) (ref. verildiği sayfa 57).
- Capozziello, S., P. A. Gonzalez, ve diğ. (2013). “Exact charged black-hole solutions in D-dimensional f(T) gravity: torsion vs curvature analysis”. *J. High Energ. Phys.* 2013, p. 39. DOI: [10.1007/jhep02\(2013\)039](#). arXiv: [1210.1098](#) (ref. verildiği sayfa 131).

- Capozziello, S. ve M. De Laurentis (2011). “Extended Theories of Gravity”. *Phys. Rept.* 509, p. 167. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2011.09.003>. arXiv: [1108.6266](#) (ref. verildiği sayfa [142](#)).
- Carlip, S. (2005). “Conformal field theory, (2+1)-dimensional gravity, and the BTZ black hole”. *Class. Quant. Grav.* 22, R85. DOI: [10.1088/0264-9381/22/12/R01](#). arXiv: [gr-qc/0503022](#) (ref. verildiği sayfa [124](#)).
- Carroll, Sean M. (2004). *Spacetime and Geometry : An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley (ref. verildiği sayfa [38](#)).
- Cartan, E. (1922). “Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion”. *C.R. Acad. Sci* 174. English translation by G.D. Kerlick: On a generalization of the notion of Riemann curvature and spaces with torsion, in: “Proc. of the 6th Course of Internat. School on Cosmology and Gravitation: Spin, Torsion, Rotation, and Supergravity” (Erice, 1979), pp. 593–595 (ref. verildiği sayfalar [50](#), [56](#)).
- Cebeci, H., T. Dereli ve R. W. Tucker (2004). “Autoparallel Orbits in Kerr Brans–Dicke Spacetimes”. *Int. J. Mod. Phys. D* 13.1, p. 137. DOI: [10.1142/S0218271804004487](#). arXiv: [gr-qc/0311080](#) (ref. verildiği sayfa [62](#)).
- Cembranos, J. A. R. ve J. Gigante Valcarcel (2018). “Extended Reissner-Nordström solutions sourced by dynamical torsion”. *Phys. Lett. B* 779, p. 143. DOI: [10.1016/j.physletb.2018.01.081](#). arXiv: [1708.00374](#) (ref. verildiği sayfa [119](#)).
- Clement, G. (1996). “Spinning charged BTZ black holes and self-dual particle-like solutions”. *Phys. Lett. B* 367, p. 70. DOI: [10.1016/0370-2693\(95\)01464-0](#). arXiv: [gr-qc/9510025](#) (ref. verildiği sayfa [136](#)).
- Clifton, T. ve diğ. (2012). “Modified Gravity and Cosmology”. *Physics Reports* 513, p. 1. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2012.01.001>. arXiv: [1106.2476](#) (ref. verildiği sayfa [143](#)).
- Conroy, A. ve T. Koivisto (2018). “The spectrum of symmetric teleparallel gravity”. *Eur. Phys. J. C* 78, p. 923. DOI: [10.1140/epjc/s10052-018-6410-z](#). arXiv: [1710.05708](#) (ref. verildiği sayfa [110](#)).
- Corbelli, E. ve P. Salucci (2000). “The extended rotation curve and the dark matter halo of M33”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 311.2, pp. 441–447. DOI: [10.1046/j.1365-8711.2000.03075.x](#). arXiv: [astro-ph/9909252](#) (ref. verildiği sayfa [8](#)).
- Damour, T. ve K. Nordtvedt (1993). “Tensor-scalar cosmological models and their observational constraints”. *Phys. Rev. D* 48.8, p. 3436. DOI: [10.1103/PhysRevD.48.3436](#) (ref. verildiği sayfa [120](#)).

- Dark Matter and Dark Energy*. (N.d.). Last accessed 25.08.2024. URL: <https://science.nasa.gov/astrophysics/focus-areas/what-is-dark-energy> (ref. verildiği sayfa 6).
- Dark Matter*. (N.d.). Last accessed 25.08.2024. URL: <https://home.cern/science/physics/dark-matter> (ref. verildiği sayfa 6).
- Delhom, A., I. P. Lobo, ve diğ. (2020). “Conformally invariant proper time with general non-metricity”. *Eur. Phys. J. C* 80, p. 415. DOI: [10.1140/epjc/s10052-020-7974-y](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-020-7974-y). arXiv: [2001.10633](https://arxiv.org/abs/2001.10633) (ref. verildiği sayfalar 69, 71).
- Delhom, A., G. J. Olmo ve M. Ronco (2018). “Observable traces of non-metricity: New constraints on metric-affine gravity”. *Phys. Lett. B* 780, p. 294. DOI: [10.1016/j.physletb.2018.03.002](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2018.03.002). arXiv: [1709.04249](https://arxiv.org/abs/1709.04249) (ref. verildiği sayfa 150).
- Dereli, T. ve Y. N. Obukhov (2000). “General analysis of self-dual solutions for the Einstein-Maxwell-Chern-Simons theory in (1+2) dimensions”. *Phys. Rev. D* 62, p. 024013. DOI: [10.1103/PhysRevD.62.024013](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.62.024013). arXiv: [gr-qc/0001017](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0001017) (ref. verildiği sayfa 136).
- Dereli, T., N. Ozdemir ve O. Sert (2013). “Einstein-Cartan-Dirac Theory in (1+2)-Dimensions”. *Eur. Phys. J. C* 73, p. 2279. DOI: [10.1140/epjc/s10052-013-2279-z](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-013-2279-z). arXiv: [1002.0958](https://arxiv.org/abs/1002.0958) (ref. verildiği sayfa 4).
- Dereli, T. ve R. W. Tucker (1994). “Non-metricity induced by dilaton gravity in two dimensions”. *Class. Quantum Grav.* 11, pp. 2575–2584 (ref. verildiği sayfa 54).
- (2002). “On the Detection of Scalar Field Induced Space-time Torsion”. *Mod. Phys. Lett. A* 17.7, p. 421. DOI: [10.1142/S021773230200662X](https://doi.org/10.1142/S021773230200662X). arXiv: [gr-qc/0104050](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0104050) (ref. verildiği sayfa 62).
- Deser, S. (1970). “Self-Interaction and Gauge Invariance”. *Gen. Relat. Grav.* 1.9, p. 9. DOI: [10.1007/BF00759198](https://doi.org/10.1007/BF00759198). arXiv: [gr-qc/0411023](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0411023) (ref. verildiği sayfa 3).
- Deser, S., R. Jackiw ve S. Templeton (1982a). “Three-dimensional massive gauge theories”. *Phys. Rev. Lett.* 48, p. 975. DOI: [10.1103/PhysRevLett.48.975](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.48.975) (ref. verildiği sayfa 124).
- (1982b). “Topologically massive gauge theories”. *Annals Phys.* 140, p. 372. DOI: [10.1016/0003-4916\(82\)90164-6](https://doi.org/10.1016/0003-4916(82)90164-6) (ref. verildiği sayfa 124).
- Deser, S., J. G. McCarthy ve Z. Yang (1989). “Polynomial formulations and renormalizability in quantum gravity”. *Phys. Lett. B* 222.1, p. 61. DOI: [10.1016/0370-2693\(89\)90723-5](https://doi.org/10.1016/0370-2693(89)90723-5) (ref. verildiği sayfa 4).
- Ehlers, J., F. Pirani ve A. Schild (2012). “The geometry of free fall and light propagation”. *Gen Relat. Grav.* 44. This is a republication of the original

- paper first published in 1972., p. 1587. DOI: [10.1007/s10714-012-1353-4](https://doi.org/10.1007/s10714-012-1353-4) (ref. verildiği sayfa 70).
- Einstein, A. (1928). “Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus”. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften* 17, pp. 217–221 (ref. verildiği sayfa 56).
- Schrüfer, E. (2004). *EXCALC: A system for doing calculations in the calculus of modern differential geometry*. URL: <http://www.reduce-algebra.com/docs/excalc.pdf> (ref. verildiği sayfalar 112, 115, 117, 134).
- Faraoni, V. (2004). *Cosmology in scalar-tensor gravity*. Springer. ISBN: 978-1-4020-1988-3 (ref. verildiği sayfa 120).
- Francesco, P. Di, P. Mathieu ve D. Sénéchal (1997). *Conformal Field Theory*. Springer. ISBN: 978-0-387-94785-3 (ref. verildiği sayfa 83).
- Frankel, T. (2012). *The Geometry of Physics : An Introduction*. 3rd ed. Cambridge University Press (ref. verildiği sayfalar 71, 178).
- Freeman, K. C. (1970). “On the Disks of Spiral and S0 Galaxies”. *The Astrophysical Journal* 160, pp. 811–830. DOI: [10.1086/150474](https://doi.org/10.1086/150474) (ref. verildiği sayfa 7).
- Fujii, Y. (2004). “Some aspects of the scalar-tensor theory”. Based on the talks delivered at Second Advanced Research Workshop, Gravity, Astrophysics, and Strings, Kiten, Bulgaria, June 10-16, 2004. DOI: [10.48550/arXiv.gr-qc/0410097](https://doi.org/10.48550/arXiv.gr-qc/0410097). arXiv: [gr-qc/0410097](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0410097) (ref. verildiği sayfa 123).
- Fujii, Y. ve K. Maeda (2004). *The scalar-tensor theory of gravitation*. Cambridge University Press. ISBN: 0-521-81159-7 (ref. verildiği sayfa 123).
- Gonzalez, P. A., E. N. Saridakis ve Y. Vasquez (2012). “Circularly symmetric solutions in three-dimensional teleparallel, $f(T)$ and Maxwell- $f(T)$ gravity”. *J. High Energ. Phys.* 2012, p. 53. DOI: [10.1007/JHEP07\(2012\)053](https://doi.org/10.1007/JHEP07(2012)053). arXiv: [1110.4024](https://arxiv.org/abs/1110.4024) (ref. verildiği sayfa 131).
- Griffiths, D. J. (1987). *Introduction to Elementary Particles*. Wiley (ref. verildiği sayfa 3).
- Grumiller, D., W. Kummer ve D.V. Vassilevich (2002). “Dilaton gravity in two dimensions”. *Phys. Rep.* 369.4, p. 327. DOI: [10.1016/S0370-1573\(02\)00267-3](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(02)00267-3). arXiv: [hep-th/0204253](https://arxiv.org/abs/hep-th/0204253) (ref. verildiği sayfa 150).
- Grumiller, D., R. Ruzziconi ve C. Zwickel (2002). “Generalized dilaton gravity in 2d”. *SciPost Phys.* 12, p. 032. DOI: [10.21468/SciPostPhys.12.1.032](https://doi.org/10.21468/SciPostPhys.12.1.032). arXiv: [2109.03266](https://arxiv.org/abs/2109.03266) (ref. verildiği sayfa 150).
- Hammond, R. T. (2002). “Torsion gravity”. *Rep. Prog. Phys.* 65, pp. 599–649. DOI: [10.1088/0034-4885/65/5/201](https://doi.org/10.1088/0034-4885/65/5/201) (ref. verildiği sayfa 4).

- Hawking, S. W. ve G. F. R. Ellis (1973). *The Large Scale Structure of Space-time*. Cambridge University Press. ISBN: 9780511524646 (ref. verildiği sayfa [156](#)).
- Hawking, S. W. ve R. Penrose (1970). “The singularities of gravitational collapse and cosmology”. *Proc. Roy. Soc. Lond. A* 314, p. 529. DOI: [10.1098/rspa.1970.0021](#) (ref. verildiği sayfa [156](#)).
- Hayashi, K. ve T. Shirafuji (1979). “New general relativity”. *Physical Review D* 12.19, pp. 3524–3553 (ref. verildiği sayfa [57](#)).
- Hehl, F. W., P. von der Heyde, ve diğ. (1976). “General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects”. *Reviews of Modern Physics* 3.48, pp. 393–416. DOI: [10.1103/RevModPhys.48.393](#) (ref. verildiği sayfa [105](#)).
- Hehl, F. W. ve A. Macias (1999). “Metric-affine gauge theory of gravity II: Exact solutions”. *Int. J. Mod. Phys. D* 8.399, p. 399. DOI: [10.1142/S0218271899000316](#). arXiv: [gr-qc/9902076](#) (ref. verildiği sayfa [3](#)).
- Hehl, F. W., J. D. McCrea, ve diğ. (1995). “Metric-affine gauge theory of gravity: field equations, Noether identities, world spinors, and breaking of dilation invariance”. *Physics Reports* 258.1, pp. 1–171. DOI: [10.1016/0370-1573\(94\)00111-F](#). arXiv: [gr-qc/9402012](#) (ref. verildiği sayfalar [53–55](#), [61](#)).
- Hindawi, A., B. A. Ovrut ve D. Waldram (1996a). “Consistent spin-two coupling and quadratic gravitation”. *Phys. Rev. D* 53, p. 5583. DOI: [10.1103/PhysRevD.53.5583](#). arXiv: [hep-th/9509142](#) (ref. verildiği sayfa [143](#)).
- (1996b). “Nontrivial vacua in higher-derivative gravitation”. *Phys. Rev. D* 53, p. 5597. DOI: [10.1103/PhysRevD.53.5597](#). arXiv: [hep-th/9509147](#) (ref. verildiği sayfa [143](#)).
- Hobson, M. P. ve A. N. Lasenby (2020). “Weyl gauge theories of gravity do not predict a second clock effect”. *Phys. Rev. D* 102, p. 084040. DOI: [10.1103/PhysRevD.102.084040](#). arXiv: [2009.06407](#) (ref. verildiği sayfalar [70](#), [76](#), [77](#), [79](#)).
- (2022). “Note on the absence of the second clock effect in Weyl gauge theories of gravity”. *Phys. Rev. D* 105, p. L021501. DOI: [10.1103/PhysRevD.105.L021501](#). arXiv: [2112.09967](#) (ref. verildiği sayfalar [70](#), [77](#), [79](#)).
- Hohmann, M. (2021). “General covariant symmetric teleparallel cosmology”. *Phys. Rev. D* 104, p. 124077. DOI: [10.1103/PhysRevD.104.124077](#). arXiv: [2109.01525](#) (ref. verildiği sayfa [62](#)).
- Hohmann, M. ve diğ. (2018). “Propagation of gravitational waves in teleparallel gravity theories”. *Phys. Rev. D* 98, p. 124004. DOI: [10.1103/PhysRevD.98.124004](#). arXiv: [1807.04580](#) (ref. verildiği sayfalar [57](#), [105](#)).

- Hortacsu, M., H. T. Ozcelik ve N. Ozdemir (2008). “2+1 dimensional solution of Einstein Cartan equations”. arXiv: [0807.4413](#) (ref. verildiği sayfa [125](#)).
- Hu, W. ve I. Sawicki (2007). “Models of $f(R)$ cosmic acceleration that evade solar system tests”. *Phys. Rev. D* 76, p. 064004. DOI: [10.1103/PhysRevD.76.064004](#). arXiv: [0705.1158](#) (ref. verildiği sayfa [142](#)).
- I. M. Benn, T. Dereli ve R. W. Tucker (1982). “A critical analysis of some fundamental differences in gauge approaches to gravitation”. *J. Phys. A* 15, pp. 849–866 (ref. verildiği sayfalar [53](#), [70](#)).
- Iosifidis, D. ve T. Koivisto (2019). “Scale transformations in metric-affine geometry”. *Universe* 5, p. 82. DOI: [10.3390/universe5030082](#). arXiv: [1810.12276](#) (ref. verildiği sayfalar [129](#), [139](#)).
- Isham, C. J. (1981). *C. J. Isham, Quantum Gravity 2: A Second Oxford Symposium*. Clarendon Press (ref. verildiği sayfa [3](#)).
- Itin, Y. (2001). “Coframe teleparallel models of gravity”. *Int. J. Mod. Phys. D* 10.4, p. 547. DOI: [10.1142/S0218271801001025](#). arXiv: [gr-qc/9912013](#) (ref. verildiği sayfa [108](#)).
- Janssen, B. ve A. Jimenez-Cano (2018). “Projective symmetries and induced electromagnetism in metric-affine gravity”. *Phys. Lett. B* 786, p. 462. DOI: [10.1016/j.physletb.2018.10.032](#). arXiv: [1807.10168](#) (ref. verildiği sayfa [152](#)).
- Järv, L. ve diğ. (2019). “Flat connection for rotating spacetimes in extended teleparallel gravity theories”. *Universe* 5, p. 142. DOI: [10.3390/universe5060142](#). arXiv: [1905.03305](#) (ref. verildiği sayfa [118](#)).
- Jimenez, B. J. ve A. Delhom (2020). “Instabilities in metric-affine theories of gravity with higher order curvature terms”. *Eur. Phys. J. C* 80.585, p. 585. DOI: [10.1140/epjc/s10052-020-8143-z](#). arXiv: [2004.11357](#) (ref. verildiği sayfalar [3](#), [62](#)).
- Jimenez, J. B., L. Heisenberg, D. Iosifidis, ve diğ. (2020). “General teleparallel quadratic gravity”. *Phys. Lett. B* 805, p. 135422. DOI: [10.1016/j.physletb.2020.135422](#). arXiv: [1909.09045](#) (ref. verildiği sayfa [58](#)).
- Jimenez, J. B., L. Heisenberg ve T. Koivisto (2018). “Coincident General Relativity”. *Phys. Rev. D* 98, p. 044048. DOI: [10.1103/PhysRevD.98.044048](#). arXiv: [1710.03116](#) (ref. verildiği sayfalar [59](#), [132](#)).
- (2020). “The coupling of matter and spacetime geometry”. *Class. Quant. Grav.* 37, p. 195013. DOI: [10.1088/1361-6382/aba31b](#). arXiv: [2004.04606](#) (ref. verildiği sayfalar [69](#), [70](#)).

- Jimenez, J. B., L. Heisenberg ve T. S. Koivisto (2019). “The Geometrical Trinity of Gravity”. *Universe* 5, p. 173. DOI: [10.3390/universe5070173](#). arXiv: [1903.06830](#) (ref. verildiği sayfa [53](#)).
- Jimenez, J. B. ve T. S. Koivisto (2022). “Noether charges in the geometrical trinity of gravity”. *Phys. Rev. D* 105, p. L021502. DOI: [10.1103/PhysRevD.105.L021502](#). arXiv: [2111.04716](#) (ref. verildiği sayfalar [55](#), [58](#), [182](#)).
- Jordan, P. (1955). “Schwerkraft und Weltall”. *Vieweg and Sohn, Braunschweig*, pp. 207–213 (ref. verildiği sayfa [119](#)).
- Kaluza, T. (1921). “On the Unification Problem in Physics”. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Phys. Math. Kl.* 1.966, p. 1870001. DOI: [10.1142/S0218271818700017](#). arXiv: [1803.08616](#) (ref. verildiği sayfa [4](#)).
- Kapteyn, J. C. (1922). “First attempt at a theory of the arrangement and motion of the sidereal system”. *Astrophysical Journal* 55, pp. 302–327. DOI: [10.1086/142670](#) (ref. verildiği sayfa [6](#)).
- Karahan, C. N., A. Altas ve D. A. Demir (2013). “Scalars, vectors and tensors from metric-affine gravity”. *Gen. Relativ. Gravit.* 45.1, p. 319. DOI: [10.1007/s10714-012-1473-x](#). arXiv: [1110.5168](#) (ref. verildiği sayfa [4](#)).
- Kibble, T. W. B. (1961). “Lorentz Invariance and the Gravitational Field”. *J. Math. Phys.* 2.2, pp. 212–221. DOI: [10.1063/1.1703702](#) (ref. verildiği sayfa [81](#)).
- Klein, O. (1926). “Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity”. *Z. Phys.* 37.895, p. 895. DOI: [10.1142/9789814571616_0006](#) (ref. verildiği sayfa [4](#)).
- Koivisto, T. (2018). “An integrable geometric foundation of gravity”. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* 15.1840006, p. 1840006. DOI: [10.1142/S0219887818400066](#). arXiv: [1802.00650](#) (ref. verildiği sayfa [3](#)).
- Koivisto, T. S. (2022). “Energy in the relativistic theory of gravity”. *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* 19, p. 2240007. DOI: [10.1142/S0219887822400072](#). arXiv: [2202.11522](#) (ref. verildiği sayfa [58](#)).
- Koivisto, T. S. ve G. Tsimperis (2019). “The spectrum of teleparallel gravity”. *Universe* 5, p. 80. DOI: [10.3390/universe5030080](#). arXiv: [1810.11847](#) (ref. verildiği sayfa [107](#)).
- Kok, E. (2020). “A Dirac spinor coupling to a theory of gravity in a two-dimensional non-Riemannian geometry with curvature and nonmetricity”. MA thesis. Institute of Science (ref. verildiği sayfa [150](#)).
- Kowalski, M. ve diğ. (2008). “Improved Cosmological Constraints from New, Old and Combined Supernova Datasets”. *The Astrophysical Journal* 686, pp. 749–778. DOI: [10.1086/589937](#). arXiv: [0804.4142](#) (ref. verildiği sayfa [9](#)).

- Kraichnan, R. H. (1955). “Special-Relativistic Derivation of Generally Covariant Gravitation Theory”. *Phys. Rev.* 98.1118, p. 1118. DOI: [10.1103/PhysRev.98.1118](#) (ref. verildiği sayfa [3](#)).
- Kraus, P. ve F. Larsen (2006). “Holographic gravitational anomalies”. *JHEP* 01, p. 022. DOI: [10.1088/1126-6708/2006/01/022](#). arXiv: [hep-th/0609074](#) (ref. verildiği sayfa [124](#)).
- Kretschmann, E. (1917). “Über den physikalischen sinn der relativitätspostulate”. *Annalen der Physik* 53.575, p. 38. DOI: [10.1002/andp.19183581602](#) (ref. verildiği sayfa [3](#)).
- Krssak, M. ve E. N. Saridakis (2016). “The covariant formulation of f(T) gravity”. *Class. Quantum Grav.* 33, p. 115009. DOI: [10.1088/0264-9381/33/11/115009](#). arXiv: [1510.08432](#) (ref. verildiği sayfa [131](#)).
- Kuijken, K. ve G. Gilmore (1989). “The Mass Distribution in the Galactic Disc – Part III – the Local Volume Mass Density”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 239.2, pp. 651–664. DOI: [10.1093/mnras/239.2.651](#) (ref. verildiği sayfa [6](#)).
- Lobo, I. P. ve C. Romero (2018). “Experimental constraints on the second clock effect”. *Phys. Lett. B* 783, p. 306. DOI: [10.1016/j.physletb.2018.07.019](#). arXiv: [1807.07188](#) (ref. verildiği sayfa [70](#)).
- Lyra, J. de ve diğ. (1992). “The quantized O(1,2)/O(2)xZ2 sigma model has no continuum limit in four dimensions. I. Theoretical framework”. *Phys. Rev. D* 46, p. 2527. DOI: [10.1103/PhysRevD.46.2527](#) (ref. verildiği sayfa [4](#)).
- Martinez, C., C. Teitelboim ve J. Zanelli (2000). “Charged rotating black hole in three spacetime dimensions”. *Phys. Rev. D* 61, p. 104013. DOI: [10.1103/PhysRevD.61.104013](#). arXiv: [hep-th/9912259](#) (ref. verildiği sayfa [136](#)).
- Misner, C. W. (1968). “The Isotropy of the Universe”. *Astrophysical Journal* 151.2, p. 431. DOI: [10.1086/149448](#) (ref. verildiği sayfa [5](#)).
- Misner, C. W., K. S. Thorne ve J. A. Wheeler (1973). *Gravitation*. San Francisco, pp. 489–490, 525–526. ISBN: 978-0-7167-0344-0 (ref. verildiği sayfa [5](#)).
- Mol, I. (2017). “The Non-metricity Formulation of General Relativity”. *Adv. Appl. Clifford Algebras* 27, p. 2607. DOI: [10.1007/s00006-016-0749-8](#). arXiv: [1406.0737](#) (ref. verildiği sayfa [62](#)).
- Nakahara, M. (2003). *Geometry, Topology and Physics*. 2nd ed. CRC Press. ISBN: 978-0750306065 (ref. verildiği sayfa [83](#)).
- Nester, J. M. ve H. J. Yo (1999). “Symmetric teleparallel general relativity”. *Chinese J. Phys.* 37, p. 113. arXiv: [gr-qc/9809049](#) (ref. verildiği sayfalar [62](#), [126](#)).

- Noether, E. (1971). “Invariant Variation Problems”. *Transport Theory and Statistical Physics* 1.3. M. A. Tavel’s English translation of Noether’s Theorems (1918), reproduced by Frank Y. Wang. Thanks to Lloyd Kannenberg for corrigend., pp. 186–207. DOI: <https://doi.org/10.1080/00411457108231446>. arXiv: [physics/0503066](https://arxiv.org/abs/physics/0503066) (ref. verildiği sayfa 82).
- Obukhov, Y. ve D. Puetzfeld (2021). “Demystifying autoparallels in alternative gravity”. *Phys. Rev. D* 104, p. 044031. DOI: [10.1103/PhysRevD.104.044031](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.104.044031). arXiv: [2105.08428](https://arxiv.org/abs/2105.08428) (ref. verildiği sayfa 62).
- Oguz, H. ve diğ. (2023). “Symmetry Breaking and Rainbow Trapping: Insights from Coupled Cavity Photonic Crystal Waveguides”. DOI: [10.48550/arXiv.2312.06303](https://doi.org/10.48550/arXiv.2312.06303). arXiv: [2312.06303](https://arxiv.org/abs/2312.06303) (ref. verildiği sayfa 127).
- Oort, J.H. (1932). “The force exerted by the stellar system in the direction perpendicular to the galactic plane and some related problems”. *Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands* 6, pp. 249–287. URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1932BAN....6..249O/abstract> (ref. verildiği sayfa 6).
- (1940). “Some problems concerning the structure and dynamics of the galactic system and the elliptical nebulae NGC 3115 and 4494”. *The Astrophysical Journal* 91, pp. 273–306. DOI: [10.1086/144167](https://doi.org/10.1086/144167) (ref. verildiği sayfa 7).
- Ostrogradsky, M. (1850). “Memoires sur les equations differentielles, relatives au probleme des isoperimetres”. *Mem. Ac. St. Petersburg* 6, pp. 385–517 (ref. verildiği sayfa 143).
- Pala, C. (2019). “Gauge theory of gravity in two-dimensional Riemann-Weyl geometry”. MA thesis. Institute of Science (ref. verildiği sayfa 150).
- Pala, C. ve M. Adak (2022). “A novel approach to autoparallels for the theories of symmetric teleparallel gravity”. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2191, p. 012017. DOI: [10.1088/1742-6596/2191/1/012017](https://doi.org/10.1088/1742-6596/2191/1/012017). arXiv: [1102.1878](https://arxiv.org/abs/1102.1878) (ref. verildiği sayfalar 60, 70, 76, 105, 156).
- Pala, C., E. Kok, ve diğ. (2022). “A modified gravity model coupled to a Dirac field in 2D spacetimes with quadratic nonmetricity and curvature”. *Int. J. Geomet. Meth. Mod. Phys.* 19.3, p. 2250045. DOI: [10.1142/S0219887822500451](https://doi.org/10.1142/S0219887822500451). arXiv: [2011.10982](https://arxiv.org/abs/2011.10982) (ref. verildiği sayfa 4).
- Pala, C., O. Sert ve M. Adak (2023). “Weyl covariance, second clock effect and proper time in theories of symmetric teleparallel gravity”. *Eur. Phys. J. C* 83.17. DOI: [10.1140/epjc/s10052-023-11171-0](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-023-11171-0). arXiv: [2202.10165](https://arxiv.org/abs/2202.10165) (ref. verildiği sayfalar 60, 105, 120, 126, 127).

- Peebles, P. J. E. ve B. Ratra (2003). “The cosmological constant and dark energy”. *Reviews of Modern Physics* 75, pp. 559–606. DOI: [10.1103/RevModPhys.75.559](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.75.559). arXiv: [astro-ph/0207347](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0207347) (ref. verildiği sayfalar 3, 8).
- Perlick, V. (1987). “Characterization of Standard Clocks by Means of Light Rays and Freely Falling Particles”. *Gen Relat. Grav.* 19, p. 1059. DOI: [10.1007/BF00759142](https://doi.org/10.1007/BF00759142) (ref. verildiği sayfa 70).
- Perlmutter, S. ve diğ. (1999). “Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae”. *Astronomical Journal* 517, pp. 565–586. DOI: [10.1086/307221](https://doi.org/10.1086/307221). arXiv: [astro-ph/9812133](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9812133) (ref. verildiği sayfa 8).
- Polchinski, J. (1998). *String Theory, Volume 1: An Introduction to the Bosonic String*. Cambridge University Press. ISBN: 978-0-511-33821-2 (ref. verildiği sayfa 83).
- Quiros, I. (2019). “Selected topics in scalar–tensor theories and beyond”. *International Journal of Modern Physics D* 28.07, p. 1930012. DOI: [10.1142/S021827181930012X](https://doi.org/10.1142/S021827181930012X). arXiv: [1901.08690](https://arxiv.org/abs/1901.08690) (ref. verildiği sayfalar 123, 143, 148).
- (2022). “Nonmetricity theories and aspects of gauge symmetry”. *Phys. Rev. D* 105, p. 104060. DOI: [10.1103/PhysRevD.105.104060](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.105.104060). arXiv: [2111.05490](https://arxiv.org/abs/2111.05490) (ref. verildiği sayfalar 69, 71).
- (n.d.). “Gauge invariant approach to nonmetricity theories and the second clock effect” (). arXiv: [2201.03076](https://arxiv.org/abs/2201.03076) (ref. verildiği sayfalar 70, 71, 77, 163).
- Hearn, A. C. (2004). *REDUCE User’s Manual Version 3.8*. URL: <http://www.reduce-algebra.com/docs/reduce.pdf> (ref. verildiği sayfalar 112, 115, 117, 134).
- Ren, X. ve diğ. (2021). “Deflection angle and lensing signature of covariant f(T) gravity”. *JCAP* 10, p. 062. DOI: [10.1088/1475-7516/2021/10/062](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2021/10/062). arXiv: [2105.04578](https://arxiv.org/abs/2105.04578) (ref. verildiği sayfa 131).
- Riemann, B. (1854). “Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen”. *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* (ref. verildiği sayfa 50).
- Riess, A. G. ve diğ. (1998). “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant”. *Astronomical Journal* 116, pp. 1009–1038. DOI: [10.1086/300499](https://doi.org/10.1086/300499). arXiv: [astro-ph/9805201](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9805201) (ref. verildiği sayfa 8).
- Rindler, W. (1956). “Visual Horizons in World-Models”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 116.6, pp. 662–677. DOI: [10.1093/mnras/116.6.662](https://doi.org/10.1093/mnras/116.6.662) (ref. verildiği sayfa 5).

- Roychowdhury, A. ve A. Gupta (2017). “Non-metric Connection and Metric Anomalies in Materially Uniform Elastic Solids”. *J. Elast.* 126, p. 1. DOI: [10.1007/s10659-016-9578-1](#). arXiv: [1601.06905](#) (ref. verildiği sayfa [55](#)).
- Rubin, V. C. ve W. K. Ford (1970). “Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions”. *The Astrophysical Journal* 159, pp. 379–403. DOI: [10.1086/150317](#) (ref. verildiği sayfa [7](#)).
- Rubin, V. C., W. K. Ford ve N. Thonnard (1980). “Rotational Properties of 21 Sc Galaxies with a Large Range of Luminosities and Radii from NGC 4605 ($R = 4\text{kpc}$) to UGC 2885 ($R = 122\text{kpc}$)”. *The Astrophysical Journal* 238, p. 471. DOI: [10.1086/158003](#) (ref. verildiği sayfa [7](#)).
- Ryder, L. H. (1996). *Quantum Field Theory*. 2nd ed. Cambridge University Press. ISBN: 978-0521478144 (ref. verildiği sayfa [82](#)).
- Sotiriou, T. P. (2006). “ $f(R)$ gravity and scalar–tensor theory”. *Classical and Quantum Gravity* 23, p. 5117. DOI: [10.1088/0264-9381/23/17/003](#). arXiv: [gr-qc/0604028](#) (ref. verildiği sayfalar [147](#), [149](#)).
- Starobinsky, A. A. (1980). “A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity”. *Phys. Lett. B* 91.99, p. 99. DOI: [10.1016/0370-2693\(80\)90670-X](#) (ref. verildiği sayfalar [3](#), [142](#)).
- Stelle, K. S. (1977). “Renormalization of higher-derivative quantum gravity”. *Phys. Rev. D* 16, pp. 953–969. DOI: [10.1103/PhysRevD.16.953](#) (ref. verildiği sayfa [143](#)).
- (1978). “Classical gravity with higher derivatives”. *Gen. Rel. Grav.* 9, pp. 353–371. DOI: [10.1007/BF00760427](#) (ref. verildiği sayfa [143](#)).
- Teyssandier, P. ve R. W. Tucker (1996). “Gravity, gauges and clocks”. *Class. Quantum Grav.* 13, p. 145. DOI: [10.1088/0264-9381/13/1/013](#). arXiv: [gr-qc/9510045](#) (ref. verildiği sayfalar [69](#), [70](#)).
- Teyssandier, P., R. W. Tucker ve C. Wang (1998). “On an interpretation of non-Riemannian gravitation”. *Acta Phys. Pol. B* 29, p. 987. URL: <https://www.actaphys.uj.edu.pl/R/29/4/987/pdf> (ref. verildiği sayfalar [69](#), [70](#)).
- Thirring, W. (1997). *Classical Mathematical Physics: Dynamical Systems and Field Theories*. 3rd ed. Springer-Verlag (ref. verildiği sayfa [71](#)).
- Tremblay, N. L. ve V. Faraoni (2007). “The Cauchy problem of $f(R)$ gravity”. *Class. Quantum Grav.* 24, pp. 5667–5679. DOI: [10.1088/0264-9381/24/22/024](#). arXiv: [0709.4414](#) (ref. verildiği sayfa [3](#)).
- Trimble, V. (1987). “Existence and nature of dark matter in the universe”. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 25, pp. 425–472. DOI: [10.1146/annurev.aa.25.090187.002233](#) (ref. verildiği sayfalar [3](#), [7](#)).

- Tseytlin, A. A. (1982). “Poincare and de Sitter gauge theories of gravity with propagating torsion”. *Phys. Rev. D* 26, pp. 3327–3341. DOI: [10.1103/PhysRevD.26.3327](#) (ref. verildiği sayfa [151](#)).
- Tucker, R. W. ve C. Wang (1995). “Black holes with Weyl charge and non-Riemannian waves”. *Class. Quantum Grav.* 12, pp. 2587–2606 (ref. verildiği sayfa [53](#)).
- Utiyama, Ryoyu (1956). “Invariant Theoretical Interpretation of Interaction”. *Phys. Rev.* 101, p. 1597. DOI: [10.1103/PhysRev.101.1597](#) (ref. verildiği sayfa [81](#)).
- Wald, R. M. (1984). *General Relativity*. The University of Chicago Press. ISBN: 0-226-87033-2 (ref. verildiği sayfalar [63](#), [156](#)).
- Weinberg, S. (1971). *Gravitation and Cosmology*. John Wiley, pp. 740, 815. ISBN: 978-0-471-92567-5 (ref. verildiği sayfa [5](#)).
- (1995). *The Quantum Theory of Fields, Volume 1: Foundations*. Cambridge University Press. ISBN: 978-0521670531 (ref. verildiği sayfa [82](#)).
- Weyl, H. (1918). *Gravitation und Elektrizität*. Also as a chapter in the book *Das Relativitätsprinzip*, English translation at http://www.tgeorgiev.net/Gravitation_and_Electricity.pdf. Sitzungsber. Preuss. Akad. Berlin (ref. verildiği sayfalar [70](#), [73](#), [83](#), [163](#)).
- (1919). “A new extension of the theory of relativity”. *Annalen der Physik* 59.101, p. 8. DOI: [10.1002/andp.19193641002](#) (ref. verildiği sayfalar [3](#), [70](#), [73](#), [163](#)).
- Wheeler, N. (2000). *Dirac Equation in 2-dimensional spacetime*. Last accessed 13.07.2024. URL: <https://www.reed.edu/physics/faculty/wheeler/documents/Classical%20Field%20Theory/Miscellaneous%20Essays/A.%20D%20Dirac%20Equation.pdf> (ref. verildiği sayfa [150](#)).
- Wigner, E. P. (1939). “On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group”. *Annals of Mathematics* 40, pp. 149–204. DOI: <https://doi.org/10.2307/1968551> (ref. verildiği sayfa [82](#)).
- Witten, E. (1988). “(2+1)-Dimensional Gravity as an Exactly Soluble System”. *Nucl. Phys. B* 311.1, p. 46. DOI: [10.1016/0550-3213\(88\)90143-5](#) (ref. verildiği sayfa [4](#)).
- Woodard, R. P. (2007). “The Invisible Universe: Dark Matter and Dark Energy”. Springer. Chap. Avoiding Dark Energy with 1/R Modifications of Gravity, pp. 403–433. arXiv: [astro-ph/0601672](#) (ref. verildiği sayfa [143](#)).

- Yang, C. N. ve R. L. Mills (1954). “Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance”. *Phys. Rev.* 96, p. 191. DOI: [10.1103/PhysRev.96.191](#) (ref. verildiği sayfa [80](#)).
- Yang, J. Z. ve diğ. (2021). “Geodesic deviation, Raychaudhuri equation, Newtonian limit, and tidal forces in Weyl-type $f(Q,T)$ gravity”. *Eur. Phys. J. C* 81, p. 111. DOI: [10.1140/epjc/s10052-021-08910-6](#). arXiv: [2101.09956](#) (ref. verildiği sayfalar [63](#), [135](#)).
- Yuksel, Z. M. ve diğ. (2024). “Enhanced self-collimation effect by low rotational symmetry in hexagonal lattice photonic crystals”. *Phys. Scr.* 99, p. 065017. DOI: [10.1088/1402-4896/ad4426](#). arXiv: [2311.11270](#) (ref. verildiği sayfa [127](#)).
- Zwicky, F. (1933). “Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln [eng. The red shift of extragalactic nebulae]”. *Helvetica Physica Acta* 6, pp. 110–127 (ref. verildiği sayfa [6](#)).
- (1937). “On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae”. *The Astrophysical Journal* 86, pp. 217–246. DOI: [10.1086/143864](#) (ref. verildiği sayfa [6](#)).