1 GİRİŞ

Bu bölümde, ileriki bölümlerde kullanılacak olan Fibonacci ve Lucas sayıları, (s, t) Fibonacci ve (s, t) Lucas sayıları, Gauss Fibonacci ve Gauss Lucas sayıları tanımlanmıştır.

1.1 Fibonacci Ve Lucas Sayıları

Bu bölümde, (s, t) Gauss Fibonacci ve (s, t) Gauss Lucas sayı dizisileri için gerekli olan sayı dizilerini tanımlanacaktır.

Tanım 1.1.1: Fibonacci Sayıları dizisi $\{F_n\}$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $n \geq 0$ olmak üzere;

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

indirgeme bağıntısıyla tanımlıdır.

Fibonacci Sayıları $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...$dir. (Cahill ve diğerleri 2003).

Tanım 1.1.2: .Lucas sayıları dizisi $\{L_n\}$, $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $n \geq 0$ olmak üzere;

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$$

indirgeme bağıntısıyla tanımlıdır.

Lucas Sayıları $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, ...$dir.(Cahill ve diğerleri 2003)

Tanım 1.1.3: Pell Sayıları dizisi $\{P_n\}$, $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $n \geq 0$ olmak üzere;

$$P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n$$

indirgeme bağıntısıyla tanımlıdır(Hoggat ve diğerleri 1969).

Tanım 1.1.4: Pell-Lucas Sayıları dizisi $\{Q_n\}$, $Q_0 = 2$, $Q_1 = 2$ başlangıç koşulları ve $n \geq 0$ olmak üzere;

$$Q_{n+2} = 2Q_{n+1} + Q_n$$

indirgeme bağıntısıyla tanımlıdır(Hoggat ve diğerleri,1969).

1.1.1 Binet Formülleri

Teorem 1.1.1.1: $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ indirgeme bağıntısının karakteristik denklemi $x^2 - x - 1 = 0$ ve çözüm kümesi

$$\alpha = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} Altın\ Oran$$

$$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} Gümüs\ Oran$$

ve n. Fibonacci sayısı ve Lucas sayısının Binet Formülleri

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

eşitlikleriyle elde edilir.(El Naschie,2001)

İspat. Fibonacci rekürans bağıntısının karakteristik denklemi $x^2 - x - 1 = 0$ olur.

Bu denklemin kökleri $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ dir. O halde genel çözüm

$$a_n = c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + d\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} a_1 &= c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+d\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=1 \\ a_2 &= c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+d\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2=1 \end{aligned}$$

bu iki eşitlikten c ve d değerlerini bulduğumuzda $c=\frac{1}{\sqrt{5}}$ ve $d=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ olur. genel çözümü düzenlersek

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Burada $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ dir $\alpha-\beta=\sqrt{5}$ dir. O halde genel çözümü şu şekilde yazabiliriz

$$a_n=F_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$$

bu ifade de Fibonacci sayılarının Binet formülüdür.

Benzer şekilde Lucas, Pell, Pell-Lucas sayılarının da binet formülü elde edilebilir

1.1.2 Toplam Formülleri

Teorem 1.1.2.1:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i=F_{n+2}-1.$$

İspat Fibonacci rekürans bağıntısını kullanarak

$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n \quad \Rightarrow \quad F_n=F_{n+2}-F_{n+1} \quad (i=1,2,...,n)$ için yazarsak

$$\begin{aligned}
F_1 &= F_3 - F_2 \\
F_2 &= F_4 - F_3 \\
F_3 &= F_5 - F_4 \\
&\vdots \\
F_{n-1} &= F_{n+1} - F_n \\
F_n &= F_{n+2} - F_{n+1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadeler taraf tarafa toplanacak olursa

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1$$

bulunur.(Taskara ve diğerleri 2010)

Özellik 1.1.2.2

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}.$$

İspat.

$$\begin{aligned}
F_1 &= F_2 - F_0 \\
F_3 &= F_4 - F_2 \\
F_5 &= F_6 - F_4 \\
&\vdots \\
F_{2n-3} &= F_{2n-2} - F_{2n-4} \\
F_{2n-1} &= F_{2n} - F_{2n-2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadeler taraf tarafa toplanırsa

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n} - F_0 = F_{2n}$$

bulunur.

Özellik 1.1.2.3:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1.$$

İspat.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} F_{2i} &= \sum_{i=1}^{2n} F_i - \sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} \\
&= (F_{2n+2} - 1) - F_{2n} \\
&= (F_{2n+2} - F_{2n}) - 1 \\
&= F_{2n+1} - 1
\end{aligned}$$

Bu özdeşlikler benzer şekilde Lucas sayıları için de geçerlidir.

Özellik 1.1.2.4:

$$\sum_{i=1}^{n} L_i = L_{n+2} - 3.$$

Özellik 1.1.2.5:

$$\sum_{i=2}^{n} L_{2i-1} = L_{2n} - 2.$$

Özellik 1.1.2.6:

$$\sum_{i=1}^{n} L_{2i} = L_{2n+1} - 1.$$

1.1.3 Cassini Özdeşliği

Teorem 1.1.3.1:

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n \quad , \quad n \geq 1.$$

İspat. $n = 1$ için

$$F_0F_2 - F_1^2 = 0.1 - 1 = (-1)^1$$

doğrudur. $n = k$ için doğru olsun yani

$$F_{k-1}F_{k+1} - F_k^2 = (-1)^k$$

olur. $n = k + 1$ için

$$\begin{aligned}
F_kF_{k+2} - F_{k+1}^2 &= (F_{k+1} - F_{k-1})(F_k + F_{k+1}) - F_{k+1}^2 \\
&= F_kF_{k+1} + F_{k+1}^2 - F_{k-1}F_k - F_{k-1}F_{k+1} - F_{k+1}^2 \\
&= F_kF_{k+1} - F_{k-1}F_k - F_k^2 - (-1)^k \\
&= F_kF_{k+1} - F_k(F_{k-1} + F_k) + (-1)^{k+1} \\
&= F_kF_{k+1} - F_kF_{k+1} + (-1)^{k+1} = (-1)^{k+1}
\end{aligned}$$

Özellik 1.1.3.2: Ardışık iki Fibonacci sayısı aralarında asaldır.

İspat. $obeb(F_n, F_{n+1}) = k$ olsun
O halde $k/_{F_n}$ ve $k/_{F_{n+1}}$ dir.
$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ idi .
O halde $k/_{F_{n-1}}$ dir.
$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ idi.
o halde $k/_{F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2}$ dir.

yani $k/_{(-1)^n}$ dir.
Bu durumda ya $k=-1$ veya $k=1$ dir ,
Obeb negatif olamayacağından $k=1$ bulunur.

Özellik 1.1.3.3: $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$.

Özellik 1.1.3.4: $\sum_{i=1}^{n} L_i^2 = L_n L_{n+1} - 2$.

Özellik 1.1.3.5: $L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = 5(-1)^n \quad n \geq 1$.

Özellik 1.1.3.6: $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_m F_{n+1}$.

Özellik 1.1.3.7: $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$.

Özellik 1.1.3.8: $L_n F_n = F_{2n}$.

1.1.4 Genelleştirilmiş Fibonacci Sayıları

Bu bölümde genelleştirilmiş fibonacci sayılarına ait tanımlar ve özeelikler verilmiştir.

Tanım 1.1.4.1:.

$$\begin{aligned} U_n &= pU_{n-1} - qU_{n-2}, \quad U_0 = 0, U_1 = 1 \\ V_n &= pV_{n-1} - qV_{n-2}, \quad V_0 = 2, V_1 = p \end{aligned}$$

şeklinde genelleştirmeler tanımlanmıştır. Burada p ve q , $q(p^2-4q) \neq 0$ olan reel sayılardır. $x^2 - px + q = 0$ denkleminin farklı kökleri

$$\alpha = \frac{p + \sqrt{p^2-4q}}{2} \quad ve \quad \beta = \frac{p - \sqrt{p^2-4q}}{2}$$

olmak üzere

$$U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad ve \quad V_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklindedir.(Pethe 1986)

Bu genelleştirmelerde $p = 1$, $q = -1$ seçilirse

$$\begin{aligned} U_n &= U_{n-1} + U_{n-2}, \quad U_0 = 0, U_1 = 1 \\ V_n &= V_{n-1} + V_{n-2}, \quad V_0 = 2, V_1 = 1 \end{aligned}$$

olup $U_n = F_n$, $V_n = L_n$ bilinen Fibonacci ve Lucas sayıları elde edilir.

$p = 2$, $q = -1$ seçilirse

$$\begin{aligned} U_n &= 2U_{n-1} + U_{n-2}, \quad U_0 = 0, U_1 = 1 \\ V_n &= 2V_{n-1} + V_{n-2}, \quad V_0 = 2, V_1 = 2 \end{aligned}$$

olup $U_n = P_n$, $V_n = Q_n$ bilinen Pell ve Pell-Lucas sayıları elde edilir.

1.1.5 Üreteç Fonksiyonu

Teorem 1.1.5.1:

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 \\ F_2 &= 1 \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n > 2 \end{aligned}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlı Fibonacci dzisinin genel biçimini üreteç fonksiyonları yardımıyla bulabiliriz.(Horadam,1961)

İspat: Bu rekürans bağıntısının üreteç fonksiyonu $g(x)$ olsun

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n \\
&= F_1 x + F_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} F_n x^n \\
&= x + x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \left(F_{n-1} + F_{n-2}\right) x^n \\
&= x + x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=3}^{\infty} F_{n-2} x^n \\
&= x + x^2 + x \sum_{n=3}^{\infty} F_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=3}^{\infty} F_{n-2} x^{n-2} \\
&= x + x^2 + x \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n \\
&= x + x^2 + x \sum_{n=1}^{\infty} \left(F_n x^n - x\right) + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n \\
&= x + x^2 + x(g(x) - x) + x^2 g(x) \\
&= x + x^2 + x g(x) - x^2 + x^2 g(x)
\end{aligned}
$$

İki tarafı düzenlersek

$$\left(1 - x - x^2\right) g(x) = x$$

olup buradan

$$g(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

elde edilir.

$$
\begin{aligned}
1-x-x^2 &= \left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right) \\
&= (1-\alpha x)(1-\beta x)
\end{aligned}
$$

biçiminde çarpanlara ayrıldığından

$$
\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{A}{1-\alpha x}+\frac{B}{1-\beta x}
$$

olarak yazılırsa

$$
A=-B=\frac{1}{\sqrt{5}}
$$

olur. Dolayısıyla

$$
g(x)=\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\alpha x}+\frac{\frac{-1}{\sqrt{5}}}{1-\beta x}
$$

olup seri açılımını yaparsak

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n x^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=1}^{\infty}\beta^n x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}\right)x^n
\end{aligned}
$$

olur. Bu da

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$$

demektir. Bu da yine Fibonacci sayıları için Binet formülüdür.

Not 1.1.5.2: Benzer biçimde Lucas ve Pell sayıları için de üreteç fonksiyonları bulunabilir.

1.1.6 Gauss Fibonacci Ve Gauss Lucas Sayıları

Bu bölümde Gauss Fibonacci sayılar, Gauss Lucas Sayıları ve bu sayılara ait özellikler incelenmiş ve tanımlar verilmiştir. Bu tanımlamalarda Horadam (1961), Harman (1981), Berzensyi (1977), Jordan (1965), Aşcı ve Gürel (2013) makalelerinden yararlanılmıştır.

Tanım 1.1.6.1: Gauss Fibonacci sayıları $GF_0 = i$, $GF_1 = 1$ olmak üzere $n \geq 2$ için

$$GF_n = GF_{n-1} + GF_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı tanımlıdır.

$$GF_n = F_n + iF_{n-1}$$

olduğu görülür.

$$\begin{aligned}
GF_2 &= 1 + i \\
GF_3 &= 2 + i \\
GF_4 &= 3 + 2i \\
GF_5 &= 5 + 3i \\
GF_6 &= 8 + 5i \\
&\vdots
\end{aligned}$$

şeklinde devam eder.

Tanım 1.1.6.2: Gauss Lucas sayıları $GL_0 = 2 - i$, $GL_1 = 1 + 2i$ olmak üzere $n \geq 2$ için

$$GL_n = GL_{n-1} + GL_{n-2}$$

indirgeme bağıntısıyla tanımlıdır.

$$GL_n = L_n + iL_{n-1}$$

olduğu görülür.

$$\begin{aligned} GL_2 &= 3 + i \\ GL_3 &= 4 + 3i \\ GL_4 &= 7 + 4i \\ GL_5 &= 11 + 7i \\ GL_6 &= 18 + 11i \\ &\vdots \end{aligned}$$

şeklinde devam eder.

1.1.7 Gauss Fibonacci Ve Gauss Lucas Matrisleri

Bu bölümde Gauss Fibonacci ve Gauss Lucas Matris dizilerinin tanımları ve bu matris dizilerine ait bazı özellikler verilmiştir..

Tanım 1.1.7.1: Gauss Fibonacci Matrisleri $gf_0 = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1-i \end{bmatrix}$,

$gf_1 = \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$ olmak üzere $n \geq 2$için

$$gf_n = gf_{n-1} + gf_{n-2}$$

indirgeme bağıntısıyla tanımlıdır.(Civciv 2009)

$$gf_n = \begin{bmatrix} GF_{n+1} & GF_n \\ GF_n & GF_{n-1} \end{bmatrix}$$

olduğu görülür.

$$\begin{aligned} gf_2 &= \begin{bmatrix} 2+i & 1+i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix} \\ gf_3 &= \begin{bmatrix} 3+2i & 2+i \\ 2+i & 1+i \end{bmatrix} \\ gf_4 &= \begin{bmatrix} 5+3i & 3+2i \\ 3+2i & 2+i \end{bmatrix} \\ gf_5 &= \begin{bmatrix} 8+5i & 5+3i \\ 5+3i & 3+2i \end{bmatrix} \\ gf_6 &= \begin{bmatrix} 13+8i & 8+5i \\ 8+5i & 5+3i \end{bmatrix} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Tanım 1.1.7.2: Gauss Lucas matrisleri $gl_0 = \begin{bmatrix} 1+2i & 2-i \\ 2-i & -1+3i \end{bmatrix}$
$gl_1 = \begin{bmatrix} 3+i & 1+2i \\ 1+2i & 2-i \end{bmatrix}$ olmak üzere $n \geq 2$ için

$$gl_n = gl_{n-1} + gl_{n-2}$$

indirgeme bağıntısıyla tanımlıdır.(Civciv 2009)

$$gl_n = \begin{bmatrix} GL_{n+1} & GL_n \\ GL_n & GL_{n-1} \end{bmatrix}$$

olduğu görülür.

$$
\begin{aligned}
gl_2 &= \begin{bmatrix} 4+3i & 3+i \\ 3+i & 1+2i \end{bmatrix} \\
gl_3 &= \begin{bmatrix} 7+4i & 4+3i \\ 4+3i & 3+i \end{bmatrix} \\
gl_4 &= \begin{bmatrix} 11+7i & 7+4i \\ 7+4i & 4+3i \end{bmatrix} \\
gl_5 &= \begin{bmatrix} 18+11i & 11+7i \\ 11+7i & 7+4i \end{bmatrix} \\
gl_6 &= \begin{bmatrix} 29+18i & 18+11i \\ 18+11i & 11+7i \end{bmatrix} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

1.1.8 (s,t) Fibonacci Ve (s,t) Lucas Sayıları

Tanım 1.1.8.1: (s,t) Fibonacci Sayıları $F_0(s,t) = 0$, $F_1(s,t) = 1$ olmak üzere $n \geq 2$ için

$$F_n(s,t) = sF_{n-1}(s,t) + tF_{n-2}(s,t)$$

indirgeme bağıntısıyla tanımlıdır.(Civciv ve Türkmen 2008[a,b])

$$
\begin{aligned}
F_2 &= s \\
F_3 &= s^2 + t \\
F_4 &= s^3 + 2st \\
F_5 &= s^4 + 3s^2t + t^2 \\
F_6 &= s^5 + 4s^3t + 3st^2 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Tanım 1.1.8.2: (s,t) Lucas Sayıları $L_0(s,t) = 2$, $L_1(s,t) = s$ olmak üzere $n \geq 2$ için

$$L_n(s,t) = sL_{n-1}(s,t) + tL_{n-2}(s,t)$$

indirgeme bağıntısıyla tanımlıdır(Civciv ve Türkmen 2008[a,b]).

$$\begin{aligned}
L_2(s,t) &= s^2 + 2t \\
L_3(s,t) &= s^3 + 3st \\
L_4(s,t) &= s^4 + 4s^2t + 2t^2 \\
L_5(s,t) &= s^5 + 5s^3t + 5st^2 \\
L_6(s,t) &= s^6 + 6s^4t + 9s^2t^2 + 2t^3 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

olarak devam eder.

1.1.9 (s,t) Fibonacci Ve (s,t) Lucas Matrisleri

Tanım 1.1.9.1: $s^2 + 4t > 0$ olacak şekildeki $s > 0$ ve $t \neq 0$ tamsayıları için I_2, $2x2$ tipinde birim matris olmak üzere

$$\mathcal{F}_0(s,t) = I_2, \mathcal{F}_1(s,t) = \begin{bmatrix} s & 1 \\ t & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$\mathcal{F}_{n+1}(s,t) = s\mathcal{F}_n(s,t) + t\mathcal{F}_{n-1}(s,t), \quad n \geq 1$$

ile tanımlanan $\{\mathcal{F}_n(s,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ matris dizisine $(s,t) - Fibonacci\ matris\ dizisi$ denir(Civciv ve Türkmen 2008[a,b]).

Tanım 1.1.9.2: .$s^2 + 4t > 0$ olacak şekildeki $s > 0$ ve $t \neq 0$ tamsayıları için;

$$\mathcal{L}_0(s,t)=\begin{bmatrix} s & 2 \\ 2t & -s \end{bmatrix}, \mathcal{L}_1(s,t)=\begin{bmatrix} s^2+2t & s \\ st & 2t \end{bmatrix}$$

ve

$$\mathcal{L}_{n+1}(s,t)=s\mathcal{L}_n(s,t)+t\mathcal{L}_{n-1}(s,t), \quad n\geq 1$$

ile tanımlanan $\{\mathcal{L}_n(s,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ matris dizisine $(s,t)-$*Lucas matris dizisi* denir(Civciv ve Türkmen 2008^{a,b}).

1.1.10 (s,t) Fibonacci ve (s,t) Lucas Matris Dizileri ile İlgili Özellikler

Teorem 1.1.10.1: $n\geq 0$ tamsayısı için,

$$\mathcal{F}_n(s,t)=\begin{bmatrix} F_{n+1}(s,t) & F_n(s,t) \\ F_n(s,t) & F_{n-1}(s,t) \end{bmatrix}.$$

Teorem 1.1.10.2: $m,n\geq 0$ tam sayıları için

$$\mathcal{F}_{m+n}=\mathcal{F}_m\mathcal{F}_n.$$

Teorem 1.1.10.3: $n\geq 0$ tamsayısı için,

$$\mathcal{L}_n(s,t)=\begin{bmatrix} L_{n+1}(s,t) & L_n(s,t) \\ L_n(s,t) & L_{n-1}(s,t) \end{bmatrix}.$$

Teorem 1.1.10.4: $n\geq 0$ tam sayıları için

$$\mathcal{L}_{n+1}(s,t)=\mathcal{L}_1(s,t)\mathcal{F}_n(s,t).$$

1.1.11 (s,t) Pell ve (s,t) Pell-Lucas Sayıları

Bu bölümde (s,t) Pell ve (s,t) Pell-Lucas sayıları tanımlanmıştır.

Tanım 1.1.11.1: $s > 0$, $t \neq 0$ ve $s^2 + t > 0$ olacak şekilde s ve t reel sayıları için $P_0(s,t) = 0,\ \ P_1(s,t) = 1$ ve

$$P_{n+1}(s,t) = 2sP_n(s,t) + tP_{n-1}(s,t),\ n \geq 1$$

rekürans bağıntısıyla tanımlanan $\{P_n(s,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ reel sayı dizisine $(s,t) - Pell\ sayı\ dizisi$ veya

Genellestirilmis Pell sayı dizisi denir ve dizinin elemanlarına *Genellestirilmis Pell sayıları* denir.(Horadam 1988)

Tanım 1.1.11.2: $s > 0$, $t \neq 0$ ve $s^2 + t > 0$ olacak şekilde s ve t reel sayıları için $Q_0(s,t) = 2,\ \ Q_1(s,t) = 2s$ ve

$$Q_{n+1}(s,t) = 2sQ_n(s,t) + tQ_{n-1}(s,t),\ n \geq 1$$

rekürans bağıntısıyla tanımlanan $\{Q_n(s,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ reel sayı dizisine $(s,t) - Pell - Lucas\ sayı\ dizisi$ veya

$Genellestirilmis\ Pell - Lucas\ sayı\ dizisi$ denir ve dizinin elemanlarına

$Genellestirilmis\ Pell - Lucas\ sayıları$ denir.(Horadam 1988)

1.1.12 (s,t) Pell ve (s,t) Pell-Lucas Matris Dizileri

Tanım 1.1.12.1: $s^2 + t > 0$ olacak şekildeki $s > 0$ ve $t \neq 0$ tamsayıları için $I_2, 2x2$ tipinde birim matris olmak üzere

$$\mathcal{P}_0(s,t) = I_2, \mathcal{P}_1(s,t) = \begin{bmatrix} 2s & 1 \\ t & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$\mathcal{P}_{n+1}(s,t) = 2s\mathcal{P}_n(s,t) + t\mathcal{P}_{n-1}(s,t), \quad n \geq 1$$

ile tanımlanan $\{\mathcal{P}_n(s,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ matris dizisine $(s,t) - Pell\ matris\ dizisi$ denir (Benjamin ve diğerleri 2008)

Tanım 1.1.12.2:$s^2 + t > 0$ olacak şekildeki $s > 0$ ve $t \neq 0$ tamsayıları için;

$$Q_0(s,t) = \begin{bmatrix} 2s & 2 \\ 2t & -2s \end{bmatrix}, Q_1(s,t) = \begin{bmatrix} 4s^2+2t & 2s \\ 2st & 2t \end{bmatrix}$$

ve

$$(s,t) = 2sQ_n(s,t) + tQ_{n-1}(s,t), \quad n \geq 1$$

ile tanımlanan $\{Q_n(s,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ matris dizisine $(s,t) - Pell - Lucas\ matris\ dizisi$ denir

1.1.13 (s,t) Pell ve (s,t) Pell-Lucas Matris Dizileri Özellikleri

Teorem 1.1.13.1: $n \geq 0$ için

$$\mathcal{P}_n(s,t) = \begin{bmatrix} P_{n+1}(s,t) & P_n(s,t) \\ tP_n(s,t) & tP_{n-1}(s,t) \end{bmatrix}$$

ve

$$Q_n(s,t) = \begin{bmatrix} Q_{n+1}(s,t) & Q_n(s,t) \\ tQ_n(s,t) & tQ_{n-1}(s,t) \end{bmatrix}$$

1.1.14 (s,t) Pell ve (s,t) Pell-Lucas Matris Dizileri Özellikleri

Aşağıda (s,t) Pell ve (s,t) Pell-Lucas Matris Dizileri Özellikler verilmiştir.(Bicknell 1975)

Özellik 1.1.14.1: $\mathcal{P}_m(s,t)\mathcal{P}_n(s,t) = \mathcal{P}_n(s,t)\mathcal{P}_m(s,t) = \mathcal{P}_{m+n}(s,t)$.

Özellik 1.1.14.2: $Q_m(s,t)Q_n(s,t) = Q_n(s,t)Q_m(s,t)$.

Özellik 1.1.14.3: $Q_1(s,t)\mathcal{P}_n(s,t) = \mathcal{P}_n(s,t)Q_1(s,t) = Q_{n+1}(s,t)$.

Özellik 1.1.14.4: $Q_1(s,t)\mathcal{P}_n(s,t) = \mathcal{P}_1(s,t)Q_n(s,t) = Q_{n+1}(s,t)$.

Özellik 1.1.14.5: $\mathcal{P}_n(s,t)Q_{n+1}(s,t) = Q_{2n+1}(s,t)$.

2 (s,t) GAUSS FIBONACCI VE (s,t) GAUSS LUCAS SAYILARI

2.1 (s,t) Gauss Fibonacci Sayıları

Tanım 2.1.1: (s,t) Gauss Fibonacci Sayıları $s^2+4t > 0$ $s,t \in \mathcal{R}$ ve $GF_0(s,t) = i$, $GF_1(s,t) = 1$ olmak üzere $n \geq 2$ için

$$GF_n(s,t) = sGF_{n-1}(s,t) + tGF_{n-2}(s,t)$$

indirgeme bağıntısıyla tanımlıdır.

$$\begin{aligned}
GF_2(s,t) &= s + it \\
GF_3(s,t) &= s^2 + t + its \\
GF_4(s,t) &= s^3 + 2st + it(s^2 + t) \\
GF_5(s,t) &= s^4 + 3s^2t + t^2 + it(s^3 + 2st) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

olarak devam eder.

Tanım 2.1.2:

$$GF_n(s,t) = F_n(s,t) + itF_{n-1}(s,t).$$

Teorem 2.1.3:

$$GF_{n+1}(s,t) + tGF_{n-1}(s,t) = GL_n(s,t).$$

İspat:
$n = 1$ için $GF_2 + tGF_0 = s + it + it = s + 2it = GL_1$

$1 \leq n \leq k$ için doğru olsun $GF_{k+1} + tGF_{k-1} = GL_k$
$n = k + 1$ için

$$\begin{aligned}
GF_{k+2} + tGF_k &= (sGF_{k+1} + tGF_k) + t(sGF_{k-1} + tGF_{k-2}) \\
&= s(GF_{k+1} + tGF_{k-1}) + t(GF_k + tGF_{k-2}) \\
&= sGL_k + tGL_{k-1} \\
&= GL_{k+1}
\end{aligned}$$

2.1.1 (s, t) Gauss Fibonacci Sayıları Binet Formülü

Teorem 2.1.1.1: $GF_{n+1}(s,t) = sGF_n(s,t) + tGF_{n-1}(s,t)$ sayılarının Binet formülü

$$GF_n(s,t) = \left(\frac{i}{2} + \frac{2 - is}{2\sqrt{s^2+4t}}\right)\left(\frac{s+\sqrt{s^2+4t}}{2}\right)^n + \left(\frac{i}{2} - \frac{2 - is}{2\sqrt{s^2+4t}}\right)\left(\frac{s-\sqrt{s^2+4t}}{2}\right)^n.$$

İspat: x^n bu ifadenin bir çözümü olsun. o halde;

$$\begin{aligned}
x^{n+1} &= sx^n + tx^{n-1} \\
x^2 &= sx + t \\
x^2 - sx - t &= 0.
\end{aligned}$$

Bu denklemin kökleri

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{s+\sqrt{s^2+4t}}{2} \\
\beta &= \frac{s-\sqrt{s^2+4t}}{2}.
\end{aligned}$$

O halde genel çözümü

$$GF_n(s,t) = c\alpha^n + d\beta^n.$$

$$\begin{aligned} GF_0(s,t) &= i = c + d \\ GF_1(s,t) &= 1 = c\alpha + d\beta \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} c &= \frac{i}{2} + \frac{2 - is}{2\sqrt{s^2 + 4t}} \\ d &= \frac{i}{2} - \frac{2 - is}{2\sqrt{s^2 + 4t}} \end{aligned}$$

elde edilir.c, d, α, β Genel çözümde yerine konduğunda yukarıdaki eşitlik elde edilmiş olur.

2.1.2 (s,t) Gauss Fibonacci Sayıları Üreteç Fonksiyonu

Teorem 2.1.2.1: (s,t) Gauss Fibonacci üreteç fonksiyonu

$$f(x) = \frac{x + i(1 - sx)}{1 - sx - tx^2}$$

şeklindedir.

İspat:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} GF_n(s,t)x^n$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= GF_0 + GF_1 x + GF_2 x^2 + GF_3 x^3 + ... \\
-sxf(x) &= -sGF_0 x - sGF_1 x^2 - sGF_2 x^3 - sGF_3 x^4 - ... \\
-tx^2 f(x) &= -tGF_0 x^2 - tGF_1 x^3 - tGF_2 x^4 - tGF_3 x^5 - ... \\
& + \rule{8cm}{0.4pt} \\
f(x)(1 - sx - tx^2) &= GF_0 + GF_1 x - sGF_0 x
\end{aligned}
$$

$$
f(x) = \frac{i + x - isx}{1 - sx - tx^2} = \frac{x + i(1 - sx)}{1 - sx - tx^2}
$$

2.1.3 (s,t) Gauss Fibonacci Sayıları Cassini Özdeşliği

Teorem 2.1.3.1:

$$
GF_{n-1}(s,t)GF_{n+1}(s,t) - GF_n^2(s,t) = (-t)^{n-1}(is - t - 1).
$$

İspat : $n = 1$ için

$$
GF_0(s,t)GF_2(s,t) - GF_1^2(s,t) = (i(s + it)) - 1 = (is - t - 1)
$$

$1 \leq n \leq k$ için doğru olsun

$$
GF_{k-1}GF_{k+1} - GF_k^2 = (-t)^{k-1}(is - t - 1)
$$

$n = k + 1$ için doğruluğunu görelim

$$
\begin{aligned}
GF_kGF_{k+2} - GF_{k+1}^2 &= GF_k(sGF_{k+1} + tGF_k) - (sGF_k + tGF_{k-1})^2 \\
&= sGF_kGF_{k+1} + tGF_k^2 - s^2GF_k^2 - 2stGF_kGF_{k-1} - t^2GF_{k-1}^2 \\
&= sGF_k(GF_{k+1} - sGF_k) + tGF_k^2 - 2stGF_kGF_{k-1} - t^2GF_{k-1}^2 \\
&= sGF_ktGF_{k-1} + tGF_k^2 - 2stGF_kGF_{k-1} \\
&= t(GF_k^2 - sGF_kGF_{k-1} - tGF_{k-1}^2) \\
&= t(GF_k^2 - GF_{k-1}(sGF_k + tGF_{k-1})) \\
&= t(GF_k^2 - GF_{k-1}GF_{k+1}) \\
&= (-t)^k(is - t - 1).
\end{aligned}
$$

2.1.4 (s,t) Gauss Fibonacci Sayıları Toplam Formülleri

Teorem 2.1.4.1:

$$\sum_{i=0}^{n} GF_i(s,t) = \frac{GF_{n+1}(s,t) + tGF_n(s,t) - GF_0(s,t) - tGF_{-1}(s,t)}{s+t-1}$$

İspat :

$n = 0$ için

$$
\begin{aligned}
GF_0(s,t) &= \frac{GF_1(s,t) + tGF_0(s,t) - GF_0(s,t) - tGF_{-1}(s,t)}{s+t-1} \\
&= \frac{1 + it - i - t(\frac{1-si}{t})}{s+t-1} \\
&= \frac{i(s+t-1)}{s+t-1} = i
\end{aligned}
$$

$0 \leq n \leq k$ için doğru olsun

$$\sum_{n=0}^{k} GF_n(s,t) = \frac{GF_{k+1}(s,t) + tGF_k(s,t) - GF_0(s,t) - tGF_{-1}(s,t)}{s+t-1}$$

$n = k+1$ için doğruluğunu görelim

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{k+1} GF_n(s,t) &= \sum_{n=0}^{k} GF_n(s,t) + GF_{k+1}(s,t) \\
&= \frac{GF_{k+1}(s,t) + tGF_k(s,t) - GF_0(s,t) - tGF_{-1}(s,t)}{s+t-1} + GF_{k+1}(s,t) \\
&= \frac{GF_{k+1}(s,t) + tGF_k(s,t) - GF_0(s,t) - tGF_{-1}(s,t)}{s+t-1} \\
&\quad + \frac{sGF_{k+1}(s,t) + tGF_{k+1}(s,t) - GF_{k+1}(s,t)}{s+t-1} \\
&= \frac{GF_{k+2}(s,t) + tGF_{k+1}(s,t) - GF_0(s,t) - tGF_{-1}(s,t)}{s+t-1}
\end{aligned}$$

Teorem 2.1.4.2: T tek indisli (s,t) Gauss Fibonacci sayıları ve C çift indisli (s,t) Gauss Fibonacci sayıları olmak üzere;

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{i=0}^{n} GF_{2n+1}(s,t) = \frac{GF_{2n+3}(s,t) - t^2GF_{2n+1}(s,t) - GF_1(s,t) + t^2GF_{-1}(s,t)}{s^2-(1-t)^2}. \\
C &= \sum_{i=0}^{n} GF_{2n}(s,t) = \frac{GF_{2n+2}(s,t) - t^2GF_{2n}(s,t) - (1-t)GF_0(s,t) - stGF_{-1}(s,t)}{s^2-(1-t)^2}.
\end{aligned}$$

İspat : Tek indisli terimleri alt alta yazarsak

$$\begin{aligned}
sGF_1(s,t) &= GF_2(s,t) - tGF_0(s,t) \\
sGF_3(s,t) &= GF_4(s,t) - tGF_2(s,t) \\
sGF_5(s,t) &= GF_6(s,t) - tGF_4(s,t) \\
&\vdots \\
sGF_{2n+1}(s,t) &= GF_{2n+2}(s,t) - tGF_{2n}(s,t)
\end{aligned}$$

bu eşitlikleri taraf tarafa toplarsak

$$sT = C + GF_{2n+2}(s,t) - GF_0(s,t) - t(C) \tag{*}$$

Benzer şekilde çift indisli terimleri taraf tarafa yazarsak

$$\begin{aligned}
sGF_0(s,t) &= GF_1(s,t) - tGF_{-1}(s,t) \\
sGF_2(s,t) &= GF_3(s,t) - tGF_1(s,t) \\
sGF_4(s,t) &= GF_5(s,t) - tGF_3(s,t) \\
&\vdots \\
sGF_{2n}(s,t) &= GF_{2n+1}(s,t) - tGF_{2n-1}(s,t)
\end{aligned}$$

bu eşitlikleri taraf tarafa topladığımızda

$$sC = T - t(T - GF_{2n+1}(s,t) + GF_{-1}(s,t)) \tag{**}$$

$*$ ve $**$ denklemlerini ortak incelediğimizde

$$T = \frac{GF_{2n+3}(s,t) - t^2 GF_{2n+1}(s,t) - GF_1(s,t) + t^2 GF_{-1}(s,t)}{s^2 - (1-t)^2}$$

$$C = \frac{GF_{2n+2}(s,t) - t^2 GF_{2n}(s,t) - (1-t)GF_0(s,t) - stGF_{-1}(s,t)}{s^2 - (1-t)^2}$$

elde edilmiş olur.

2.1.5 n. (s,t) Gauss Fibonacci Sayısını Veren Matris

Teorem 2.1.5.1: n.(s,t) Gauss Fibonacci sayısını veren matris $A_n(s,t)$ nxn boyutlu aşağıdaki gibi bir matris olsun

$$A_n(s,t) = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -t & s & t & 0 & & \vdots \\ 0 & -1 & s & t & & \\ 0 & 0 & -1 & s & & \\ \vdots & & & & \ddots & t \\ 0 & \cdots & & & -1 & s \end{bmatrix}.$$

o zaman

$$\det A_n(s,t) = GF_n(s,t)$$

İspat:

$n = 1$ için

$$\det A_1(s,t) = 1 = GF_n(s,t)$$

$1 \leq n \leq k$ için doğru olsun

$$\det A_k(s,t) = GF_k(s,t)$$

$n = k+1$ için doğruluğunu gösterelim.

$$\begin{vmatrix} & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & A_k(s,t) & & \\ & & & & \\ & & & & t \\ 0 & \cdots & & -1 & s \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{k+k+1}t \begin{vmatrix} 1 & i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -t & s & t & & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & s & & & \\ & & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & & & s & t \\ 0 & \cdots & & & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&\quad +(-1)^{k+1+k+1}s\left|A_k(s,t)\right| \\
&= (-1)t\left[(-1)^{k+k}(-1)\left|A_{k-1}(s,t)\right|\right] + (-1)^{2k+2}s\left|A_k(s,t)\right| \\
&= tGF_{k-1}(s,t) + sGF_k(s,t) \\
&= GF_{k+1}(s,t).
\end{aligned}
$$

2.2 (s,t) Gauss Lucas Sayıları

Tanım 2.2.1: (s,t) Gauss Lucas Sayıları $GL_0(s,t) = 2 - is,\ \ GL_1(s,t) = s + 2it$ olmak üzere $n \geq 2i$çin

$$GL_n(s,t) = sGL_{n-1}(s,t) + tGL_{n-2}(s,t)$$

indirgeme bağıntısıyla tanımlıdır.

$$
\begin{aligned}
GL_2 &= s^2 + 2t + its \\
GL_3 &= s^3 + 3st + it(s^2 + 2t) \\
GL_4 &= s^4 + 4s^2t + 2t^2 + it(s^3 + 3st) \\
GL_5 &= s^5 + 5s^3t + 5st^2 + it(s^4 + 4s^2t + 2t^2) \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}
$$

olarak devam eder.

Tanım 2.2.2:

$$GL_n(s,t) = L_n(s,t) + itL_{n-1}(s,t).$$

Teorem 2.2.3:

$$GL_{n+1}(s,t) + tGL_{n-1}(s,t) = (s^2+4t)GF_n(s,t).$$

İspat:

$n = 1$ için

$$GL_2(s,t) + tGL_0(s,t) = s^2 + 2t + its + 2t - its = (s^2+4t)$$

$1 \leq n \leq k$ için doğru olsun

$$GL_{k+1}(s,t) + tGL_{k-1}(s,t) = (s^2+4t)GF_k(s,t)$$

$n = k+1$ için

$$\begin{aligned}
& GL_{k+2}(s,t) + tGL_k(s,t) \\
= \;& (sGL_{k+1}(s,t) + tGL_k(s,t)) + t(sGL_{k-1}(s,t) + tGL_{k-2}(s,t)) \\
= \;& s(GL_{k+1}(s,t) + tGL_{k-1}(s,t)) + t(GL_k(s,t) + tGL_{k-2}(s,t)) \\
= \;& s((s^2+4t)GF_k(s,t)) + t((s^2+4t)GF_{k-1}(s,t)) \\
= \;& (s^2+4t)GF_{k+1}(s,t)
\end{aligned}$$

2.2.1 (s,t) Gauss Lucas Sayıları Binet Formülü

Teorem 2.2.1.1: $GL_{n+1}(s,t) = sGL_n(s,t) + tGL_{n-1}(s,t)$ sayılarının Binet formülü

$$\begin{aligned}
GL_n(s,t) \;=\; & \left(\frac{2-is}{2} + \frac{i\sqrt{s^2+4t}}{2}\right)\left(\frac{s+\sqrt{s^2+4t}}{2}\right)^n \\
& + \left(\frac{2-is}{2} - \frac{i\sqrt{s^2+4t}}{2}\right)\left(\frac{s-\sqrt{s^2+4t}}{2}\right)^n.
\end{aligned}$$

İspat: x^n bu ifadenin bir çözümü olsun o halde bu çözümden elde edilen denklemin kökleri α ve β olmak üzere;

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{s+\sqrt{s^2+4t}}{2} \\ \beta &= \frac{s-\sqrt{s^2+4t}}{2}\end{aligned}$$

dir. Genel çözüm

$$GL_n(s,t) = c\alpha^n + d\beta^n$$

ve

$$\begin{aligned}GL_0(s,t) &= 2-is = c+d \\ GL_1(s,t) &= s+2it = c\alpha + d\beta\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}c &= \frac{2-is}{2} + \frac{i\sqrt{s^2+4t}}{2} \\ d &= \frac{2-is}{2} - \frac{i\sqrt{s^2+4t}}{2}\end{aligned}$$

dir. c, d, α, β genel çözümde yerine konduğunda yukarıdaki eşitlik elde edilmiş olur.

2.2.2 (s,t) Gauss Lucas Sayıları Üreteç Fonksiyonu

Teorem 2.2.2.1:

$$g(x) = \frac{x(s+2it)+(1-s)(2-is)}{1-sx-tx^2}$$

İspat

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} GL_n(s,t)x^n$$

$$
\begin{aligned}
g(x) &= GL_0(s,t)+GL_1(s,t)x+GL_2(s,t)x^2+GL_3(s,t)x^3+... \\
-sxg(x) &= -sGL_0(s,t)x-sGL_1(s,t)x^2-sGL_2(s,t)x^3-sGL_3(s,t)x^4-... \\
-tx^2g(x) &= -tGL_0(s,t)x^2-tGL_1(s,t)x^3-tGL_2(s,t)x^4-tGL_3(s,t)x^5-... \\
+\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\
g(x)(1-sx-tx^2) &= GL_0(s,t)+GL_1(s,t)x-sGL_0(s,t)x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \frac{2-is+x(s+2it)-s(2-is)x}{1-sx-tx^2} \\
&= \frac{2-sx+i(xs^2+2xt-s)}{1-sx-tx^2}.
\end{aligned}
$$

2.2.3 (s,t) Gauss Lucas Sayıları Cassini Özdeşliği

Teorem 2.2.3.1:

$$GL_{n-1}(s,t)GL_{n+1}(s,t)-GL_n^2(s,t)=(-t)^{n-1}(s^2+4t)(1+t-is)$$

İspat:

$n=1$ için

$$GL_0(s,t)GL_2(s,t)-GL_1^2(s,t)=(2-is)(s^2+2t+its)-(s+2it)^2=(s^2+4t)(1+t-is)$$

$1\leq n\leq k$ için doğru olsun

$$GL_{k-1}(s,t)GL_{k+1}(s,t)-GL_k^2(s,t)=(-t)^{k-1}(s^2+4t)(1+t-is)$$

$n=k+1$ için doğruluğunu görelim

$$
\begin{aligned}
& GL_k(s,t)GL_{k+2}(s,t) - GL_{k+1}^2(s,t) \\
= \; & GL_k(s,t)(sGL_{k+1}(s,t) + tGL_k(s,t)) \\
& -(sGL_k(s,t) + tGL_{k-1}(s,t))^2 \\
\\
= \; & sGL_k(s,t)GL_{k+1}(s,t) + tGL_k^2(s,t) \\
& -s^2GL_k^2(s,t) - 2stGL_k(s,t)GL_{k-1}(s,t) - t^2GL_{k-1}^2(s,t) \\
\\
= \; & sGL_k(s,t)(GL_{k+1}(s,t) - sGL_k(s,t)) + tGL_k^2(s,t) \\
& -2stGL_k(s,t)GL_{k-1}(s,t) - t^2GL_{k-1}^2(s,t) \\
\\
= \; & t(GL_k^2(s,t) - sGL_k(s,t)GL_{k-1}(s,t) - tGL_{k-1}^2(s,t)) \\
\\
= \; & t(GL_k^2(s,t) - GL_{k-1}(s,t)(sGL_k(s,t) + tGL_{k-1}(s,t))) \\
\\
= \; & (-t)((-t)^{k-1}(s^2+4t)(1+t-is)) \\
\\
= \; & (-t)^k(s^2+4t)(1+t-is)
\end{aligned}
$$

2.2.4 (s,t) Gauss Lucas Sayıları Toplam Formülleri

Teorem 2.2.4.1:

$$\sum_{i=0}^{n} GL_i(s,t) = \frac{GL_{n+1}(s,t) + tGL_n - GL_0 - tGL_{-1}}{s+t-1}.$$

İspat:

$n = 0$ için

$$\begin{aligned}
GL_0(s,t) &= \frac{GL_1(s,t) + tGL_0(s,t) - GL_0(s,t) - tGL_{-1}(s,t)}{s+t-1} \\
&= \frac{s + 2it + t(2 - is) - 2 + is - 2it + s - is^2}{s+t-1} \\
&= \frac{2s + 2it + 2t - its - 2 + is - 2it - is^2}{s+t-1} \\
&= \frac{2(s+t-1) - is(s+t-1)}{s+t-1} \\
&= 2 - is
\end{aligned}$$

$0 \leq n \leq k$ için doğru olsun

$$\sum_{i=0}^{k} GL_i(s,t) = \frac{GL_{k+1}(s,t) + tGL_k(s,t) - GL_0(s,t) - tGL_{-1}(s,t)}{s+t-1}$$

$n = k+1$ için doğruluğunu görelim

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} GL_i(s,t) &= \sum_{i=0}^{k} GL_i(s,t) + GL_{k+1}(s,t) \\
&= \frac{GL_{k+1}(s,t) + tGL_k(s,t)}{s+t-1} \\
&\quad - \frac{GL_0(s,t) - tGL_{-1}(s,t)}{s+t-1} + GL_{k+1}(s,t) \\
&= \frac{GL_{k+1}(s,t) + tGL_k(s,t) - GL_0(s,t) -}{s+t-1} \\
&\quad - \frac{tGL_{-1}(s,t) + sGL_{k+1}(s,t) + tGL_{k+1}(s,t) - GL_{k+1}(s,t)}{s+t-1} \\
&= \frac{GL_{k+2}(s,t) + tGL_{k+1}(s,t) - GL_0(s,t) - tGL_{-1}(s,t)}{s+t-1}.
\end{aligned}$$

Teorem 2.2.4.2: O tek indisli (s,t) Gauss Lucas sayıları ve E çift indisli (s,t) Gauss Lucas sayıları olmak üzere;

$$O=\sum_{i=0}^{n} GL_{2i+1}(s,t)=\frac{GL_{2n+3}(s,t)-t^2GL_{2n+1}(s,t)-GL_1(s,t)+t^2GL_{-1}(s,t)}{s^2-(1-t)^2}$$

$$E=\sum_{i=0}^{n} GL_{2i}(s,t)=\frac{GL_{2n+2}(s,t)-t^2GL_{2n}(s,t)-(1-t)GL_0(s,t)+tsGL_{-1}(s,t)}{s^2-(1-t)^2}$$

İspat: Tek indisli terimleri alt alta yazarsak

$$\begin{aligned}
sGL_1(s,t) &= GL_2(s,t)-tGL_0(s,t)\\
sGL_3(s,t) &= GL_4(s,t)-tGL_2(s,t)\\
sGL_5(s,t) &= GL_6(s,t)-tGL_4(s,t)\\
&\vdots\\
sGL_{2n+1}(s,t) &= GL_{2n+2}(s,t)-tGL_{2n}(s,t)
\end{aligned}$$

Bu eşitlikleri taraf tarafa toplarsak

$$sO=E+GL_{2n+2}-GL_0-tE \qquad (*)$$

Benzer şekilde çift indisli terimleri alt alta yazarsak

$$\begin{aligned}
sGL_0(s,t) &= GL_1(s,t)-tGL_{-1}(s,t)\\
sGL_2(s,t) &= GL_3(s,t)-tGL_1(s,t)\\
sGL_4(s,t) &= GL_5(s,t)-tGL_3(s,t)\\
&\vdots\\
sGL_{2n}(s,t) &= GL_{2n+1}(s,t)-tGL_{2n-1}(s,t)
\end{aligned}$$

Bu eşitlikleride taraf tarafa toplarsak

$$sE = O - t(O - GL_{2n+1}(s,t) + GL_{-1}(s,t)) \qquad (**)$$

Buradaki $*$ ve $**$ eşitlikleri beraber incelendiğinde

$$\begin{aligned} O &= \frac{GL_{2n+3}(s,t) - t^2 GL_{2n+1}(s,t) - GL_1(s,t) + t^2 GL_{-1}(s,t)}{s^2 - (1-t)^2} \\ E &= \frac{GL_{2n+2}(s,t) - t^2 GL_{2n}(s,t) - (1-t)GL_0(s,t) + tsGL_{-1}(s,t)}{s^2 - (1-t)^2} \end{aligned}$$

bulunmuş olur.

2.2.5 n. (s,t) Gauss Lucas Sayısını Veren Matris

Teorem 2.2.5.1:$B_n(s,t)$ nxn boyutlu aşağıdaki gibi bir matris olsun

$$B_n(s,t) = \begin{bmatrix} s+2it & 2-is & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -t & s & t & 0 & & \vdots \\ 0 & -1 & s & t & & \\ 0 & 0 & -1 & s & & \\ \vdots & & & & \ddots & t \\ 0 & \cdots & & & -1 & s \end{bmatrix}.$$

O zaman

$$\det B_n(s,t) = GL_n(s,t).$$

İspat:

$n = 1$ için

$$\det B_1(s,t) = s + 2it = GL_n(s,t)$$

$1 \leq n \leq k$ için doğru olsun

$$\det B_k(s,t) = GL_k(s,t)$$

$n = k + 1$ için doğruluğunu gösterelim.

$$\begin{vmatrix} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & B_k(s,t) & & \\ & & & \\ & & & t \\ 0 & \cdots & -1 & s \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (-1)^{k+k+1} t \begin{vmatrix} s+2it & 2-is & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -t & s & t & & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & s & & & \\ & & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & & & s & t \\ 0 & \cdots & & & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{k+1+k+1} s \left| B_k(s,t) \right| \\ &= (-1)t \left[(-1)^{k+k}(-1) \left| B_{k-1}(s,t) \right| \right] + (-1)^{2k+2} s \left| B_k(s,t) \right| \\ &= tGL_{k-1}(s,t) + sGL_k(s,t) \\ &= GL_{k+1}(s,t) \end{aligned}$$

2.3 Farklı İndisli (s, t) Gauss Fibonacci Sayılarının Çarpımı

Lemma 2.3.1:

$$F_m F_n = \frac{1}{5}(L_{m+n} - (-1)^n L_{m-n})$$

Lemma2.3.2:

$$GF_m GF_n = \frac{GL_1}{5}(L_{m+n-1} + i(-1)^n L_{m-n}).$$

İspat:

$$\begin{aligned}
GF_mGF_n &= (F_m + iF_{m-1})(F_n + iF_{n-1}) \\
&= F_mF_n + iF_mF_{n-1} + iF_{m-1}F_n + i^2F_{m-1}F_{n-1} \\
&= \frac{1}{5}(L_{m+n} - (-1)^n L_{m-n}) + i\frac{1}{5}(L_{m+n-1} - (-1)^{n-1}L_{m-n+1}) \\
&\quad +i\frac{1}{5}(L_{m+n-1} - (-1)^n L_{m-n-1}) + i^2\frac{1}{5}(L_{m+n-2} - (-1)^{n-1}L_{m-n}) \\
&= \frac{1}{5}(L_{m+n} - (-1)^n L_{m-n} + iL_{m+n-1} - i(-1)^{n-1}L_{m-n+1} \\
&\quad +iL_{m+n-1} - i(-1)^n L_{m-n-1} - L_{m+n-2} + (-1)^{n-1}L_{m-n}) \\
&= \frac{1}{5}(L_{m+n} + 2iL_{m+n-1} + i(-1)^n L_{m-n+1} - i(-1)^n L_{m-n-1} \\
&\quad -L_{m+n-2} - 2(-1)^n L_{m-n}) \\
&= \frac{1}{5}(L_{m+n-1} + 2iL_{m+n-1} + i(-1)^n L_{m-n} + 2i^2(-1)^n L_{m-n}) \\
&= \frac{1}{5}((1+2i)L_{m+n-1} + (-1)^n(1+2i)L_{m-n}) \\
&= \frac{GL_1}{5}(L_{m+n-1} + i(-1)^n L_{m-n})
\end{aligned}$$

Lemma 2.3.3:

$$F_m(s,t)F_n(s,t) = \frac{1}{s^2+4t}(L_{m+n} - (-t)^n L_{m-n}).$$

Lemma 2.4.4:

$$GF_m(s,t)GF_n(s,t) = \frac{1}{s^2+4t}\begin{bmatrix} GL_{m+n}(s,t) - (-t)^n GL_{m-n}(s,t) \\ +\frac{1}{s^2+4t}(it)GL_{m+n-1}(s,t) \\ -(-t)^{n-1}GL_{m-n+1}(s,t) \end{bmatrix}.$$

ispat:

$$
\begin{aligned}
GF_m(s,t)GF_n(s,t) &= (F_m(s,t)+itF_{m-1}(s,t))(F_n(s,t)+itF_{n-1}(s,t)) \\
&= F_m(s,t)F_n(s,t)+itF_m(s,t)F_{n-1}(s,t) \\
&\quad +itF_{m-1}(s,t)F_n(s,t)+i^2t^2F_{m-1}(s,t)F_{n-1}(s,t) \\
&= \frac{1}{s^2+4t}\left[\begin{array}{c} (L_{m+n}(s,t)-(-t)^nL_{m-n}(s,t)) \\ +it(L_{m+n-1}(s,t)-(-t)^{n-1}L_{m-n+1}(s,t)) \\ +it(L_{m+n-1}(s,t)-(-t)^nL_{m-n-1}(s,t)) \\ +i^2t^2(L_{m+n-2}(s,t)-(-t)^{n-1}L_{m-n}(s,t)) \end{array}\right] \\
&= \frac{1}{s^2+4t}\left[\begin{array}{c} GL_{m+n}(s,t)+itGL_{m+n-1}(s,t) \\ -(-t)^nGL_{m-n}(s,t)-(-t)^{n-1}itGL_{m-n+1}(s,t) \end{array}\right] \\
&= \frac{1}{s^2+4t}\left[\begin{array}{c} GL_{m+n}(s,t)-(-t)^nGL_{m-n}(s,t) \\ +\frac{1}{s^2+4t}(it)GL_{m+n-1}(s,t) \\ -(-t)^{n-1}GL_{m-n+1}(s,t) \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

3 (s,t) GAUSS FIBONACCI VE (s,t) GAUSS LUCAS MATRİS DİZİLERİ

Bu kısımda Fibonacci matrisleri ve Lucas matrisleri, (s,t) Fibonacci matrisleri ve (s,t) Lucas matrisleri, Gauss Fibonacci matrisleri ve Gauss Lucas matrislerinden yola çıkılarak (s,t) Gauss Fibonacci matrsleri ve (s,t) Gauss Lucas matrisleri elde edilecektir.

3.1 (s,t) Gauss Fibonacci Matris Dizisi

Tanım 3.1.1: $s^2+4t>0$ olacak şekilde $s>0$ ve $t\neq 0$ tam sayıları için

$$\mathcal{GF}_0(s,t)=\begin{bmatrix}1 & i\\ it & 1-is\end{bmatrix},\mathcal{GF}_1(s,t)=\begin{bmatrix}s+it & 1\\ t & it\end{bmatrix}$$

ve $n\geq 1$ için

$$\mathcal{GF}_{n+1}(s,t)=s\mathcal{GF}_n(s,t)+t\mathcal{GF}_{n-1}(s,t)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan$\{\mathcal{GF}_n(s,t)\}_{n\in N}$ matris dizisine (s,t) Gauss Fibonacci matris dizisi denir.

Teorem 3.1.2: $n\geq 0$ tam sayısı için

$$\mathcal{GF}_n(s,t)=\begin{bmatrix}GF_{n+1}(s,t) & GF_n(s,t)\\ tGF_n(s,t) & tGF_{n-1}(s,t)\end{bmatrix}.$$

İspat: $n=0$ için doğrudur.

$$\mathcal{GF}_0(s,t)=\begin{bmatrix}GF_1(s,t) & GF_0(s,t)\\ tGF_0(s,t) & tGF_{-1}(s,t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & i\\ it & 1-is\end{bmatrix}$$

$0\leq n\leq k$ için doğru olsun yan

$$\mathcal{GF}_k(s,t)=\begin{bmatrix}GF_{k+1}(s,t) & GF_k(s,t)\\ tGF_k(s,t) & tGF_{k-1}(s,t)\end{bmatrix}.$$

$n = k+1$ için doğruluğunu görelim

$$\begin{aligned}
\mathcal{GF}_{k+1}(s,t) &= s\mathcal{GF}_k(s,t) + t\mathcal{GF}_{k-1}(s,t) \\
&= s\begin{bmatrix} GF_{k+1}(s,t) & GF_k(s,t) \\ tGF_k(s,t) & tGF_{k-1}(s,t) \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} GF_k(s,t) & G\not F_{k-1}(s,t) \\ tGF_{k-1}(s,t) & tGF_{k-2}(s,t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} sGF_{k+1}(s,t) + tGF_k(s,t) & sGF_k(s,t) + tGF_{k-1}(s,t) \\ stGF_k(s,t) + t^2GF_{k-1}(s,t) & stGF_{k-1}(s,t) + t^2GF_{k-2}(s,t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} GF_{k+2}(s,t) & GF_{k+1}(s,t) \\ tGF_{k+1}(s,t) & tGF_k(s,t) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Teorem 3.1.3:

$$\mathcal{GF}_n(s,t) = \mathcal{F}_n(s,t) + it\mathcal{F}_{n-1}(s,t).$$

İspat:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_n(s,t) + it\mathcal{F}_{n-1}(s,t) &= \begin{bmatrix} F_{n+1}(s,t) & F_n(s,t) \\ tF_n(s,t) & tF_{n-1}(s,t) \end{bmatrix} + it\begin{bmatrix} F_n(s,t) & F_{n-1}(s,t) \\ tF_{n-1}(s,t) & tF_{n-2}(s,t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} F_{n+1}(s,t) + itF_n(s,t) & F_n(s,t) + itF_{n-1}(s,t) \\ tF_n(s,t) + it^2F_{n-1}(s,t) & tF_{n-1}(s,t) + it^2F_{n-2}(s,t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} GF_{n+1}(s,t) & GF_n(s,t) \\ tGF_n(s,t) & tGF_{n-1}(s,t) \end{bmatrix} \\
&= \mathcal{GF}_n(s,t).
\end{aligned}$$

3.1.1 (s,t) Gauss Fibonacci Matris Dizisi Binet Formülü

Teorem 3.1.1.1:

$$\mathcal{GF}_n(s,t)=\begin{bmatrix} c\alpha^{n+1}+d\beta^{n+1} & c\alpha^n+d\beta^n \\ t\left(c\alpha^n+d\beta^n\right) & t\left(c\alpha^{n-1}+d\beta^{n-1}\right) \end{bmatrix}$$

İspat: $GF_n(s,t)$ sayılarının Binet formülü

$$c=\frac{i}{2}+\frac{2-is}{2\sqrt{s^2+4t}},\, d=\frac{i}{2}-\frac{2-is}{2\sqrt{s^2+4t}},\, \alpha=\frac{s+\sqrt{s^2+4t}}{2},\, \beta=\frac{s-\sqrt{s^2+4t}}{2}$$

olmak üzere

$$GF_n(s,t)=c\alpha^n+d\beta^n$$

şeklindedir. O halde;

$$\begin{aligned}\mathcal{GF}_n(s,t) &= \begin{bmatrix} GF_{n+1}(s,t) & GF_n(s,t) \\ tGF_n(s,t) & tGF_{n-1}(s,t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\alpha^{n+1}+d\beta^{n+1} & c\alpha^n+d\beta^n \\ t\left(c\alpha^n+d\beta^n\right) & t\left(c\alpha^{n-1}+d\beta^{n-1}\right) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

3.2 (s,t) Gauss Lucas Matris Dizileri

Tanım 3.2.1: $s^2+4t>0$ olacak şekilde $s>0$, $t\neq 0$ ve $n\geq 1$ tam sayıları için

$$\mathcal{GL}_0(s,t)=\begin{bmatrix} s+2it & 2-is \\ 2t-its & 2it+is^2-s \end{bmatrix},GL_1(s,t)=\begin{bmatrix} s^2+2t+its & s+2it \\ st+2it^2 & 2t-its \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{GL}_{n+1}(s,t)=s\mathcal{GL}_n(s,t)+t\mathcal{GL}_{n-1}(s,t)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan $\{\mathcal{GL}_n(s,t)\}_{n\in N}$ matris dizisine (s,t) Gauss Lucas matris disizi denir.

Teorem 3.2.2: $n \geq 0$ tamsayısı için

$$GL_n(s,t) = \begin{bmatrix} GL_{n+1}(s,t) & GL_n(s,t) \\ tGL_n(s,t) & tGL_{n-1}(s,t) \end{bmatrix}.$$

İspat: $n = 0$ için

$$\mathcal{GL}_0(s,t) = \begin{bmatrix} GL_1(s,t) & GL_0(s,t) \\ tGL_0(s,t) & tGL_{-1}(s,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ it & 1-is \end{bmatrix}$$

$0 \leq n \leq k$ için doğru olsun

$$\mathcal{GL}_k(s,t) = \begin{bmatrix} GL_{k+1}(s,t) & GL_k(s,t) \\ tGL_k(s,t) & tGL_{k-1}(s,t) \end{bmatrix}$$

$n = k+1$ için doğruluğunu görelim

$$\begin{aligned} \mathcal{GL}_{k+1}(s,t) &= s\mathcal{GL}_k(s,t) + t\mathcal{GL}_{k-1}(s,t) \\ &= s\begin{bmatrix} GL_{k+1}(s,t) & GL_k(s,t) \\ tGL_k(s,t) & tGL_{k-1}(s,t) \end{bmatrix} \\ &\quad +t\begin{bmatrix} GL_k(s,t) & GL_{k-1}(s,t) \\ tGL_{k-1}(s,t) & tGL_{k-2}(s,t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} sGL_{k+1}(s,t) + tGL_k(s,t) & sGL_k(s,t) + tGL_{k-1}(s,t) \\ stGL_k(s,t) + t^2GL_{k-1}(s,t) & stGL_{k-1}(s,t) + t^2GL_{k-2}(s,t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} GL_{k+2}(s,t) & GL_{k+1}(s,t) \\ tGL_{k+1}(s,t) & tGL_k(s,t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Teorem 3.2.3:

$$\mathcal{GL}_n(s,t) = \mathcal{L}_n(s,t) + it\mathcal{L}_{n-1}(s,t).$$

İspat:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_n(s,t)+it\mathcal{L}_{n-1}(s,t) &= \begin{bmatrix} L_{n+1}(s,t) & L_n(s,t) \\ tL_n(s,t) & tL_{n-1}(s,t) \end{bmatrix} \\
&\quad +it\begin{bmatrix} L_n(s,t) & L_{n-1}(s,t) \\ tL_{n-1}(s,t) & tL_{n-2}(s,t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} L_{n+1}(s,t)+itL_n(s,t) & L_n(s,t)+itL_{n-1}(s,t) \\ tL_n(s,t)+it^2L_{n-1}(s,t) & tL_{n-1}(s,t)+it^2L_{n-2}(s,t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} GL_{n+1}(s,t) & GL_n(s,t) \\ tGL_n(s,t) & tGL_{n-1}(s,t) \end{bmatrix} \\
&= \mathcal{GL}_n(s,t).
\end{aligned}$$

3.2.1 (s,t) Gauss Lucas Matris Diziler İçin Binet Formülü

Teorem 3.2.1.1:

$$\mathcal{GL}_n(s,t)=\begin{bmatrix} c\alpha^{n+1}+d\beta^{n+1} & c\alpha^n+d\beta^n \\ t\left(c\alpha^n+d\beta^n\right) & t\left(c\alpha^{n-1}+d\beta^{n-1}\right) \end{bmatrix}.$$

İspat: $GL_n(s,t)$ sayılarının binet formülü

$$\begin{aligned}
c &= \frac{2-is}{2}+\frac{i\sqrt{s^2+4t}}{2}, d=\frac{2-is}{2}-\frac{i\sqrt{s^2+4t}}{2} \\
\alpha &= \frac{s+\sqrt{s^2+4t}}{2}, \beta=\frac{s-\sqrt{s^2+4t}}{2}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$GL_n(s,t)=c\alpha^n+d\beta^n$$

şeklindedir. O halde;

$$\begin{aligned}\mathcal{GL}_n(s,t) &= \begin{bmatrix} GL_{n+1}(s,t) & GL_n(s,t) \\ tGL_n(s,t) & tGL_{n-1}(s,t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\alpha^{n+1}+d\beta^{n+1} & c\alpha^n+d\beta^n \\ t\left(c\alpha^n+d\beta^n\right) & t\left(c\alpha^{n-1}+d\beta^{n-1}\right) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

3.3 Özel Teoremler

Teorem 3.3.1:

$$\mathcal{GF}_m(s,t)\mathcal{GF}_n(s,t) = \mathcal{GF}_{m+n}(s,t) + it\mathcal{GF}_{m+n-1}(s,t).$$

İspat

$$\begin{aligned}\mathcal{GF}_m(s,t)\mathcal{GF}_n(s,t) &= (\mathcal{F}_m(s,t)+it\mathcal{F}_{m-1}(s,t))(\mathcal{F}_n(s,t)+it\mathcal{F}_{n-1}(s,t)) \\ &= \mathcal{F}_m(s,t)\mathcal{F}_n(s,t)+it\mathcal{F}_m(s,t)\mathcal{F}_{n-1}(s,t) \\ &\quad +it\mathcal{F}_{m-1}(s,t)\mathcal{F}_n(s,t)+i^2t^2\mathcal{F}_{m-1}(s,t)\mathcal{F}_{n-1}(s,t) \\ &= \mathcal{F}_{m+n}(s,t)+it\mathcal{F}_{m+n-1}(s,t)+it(\mathcal{F}_{m+n-1}(s,t) \\ &\quad +it\mathcal{F}_{m+n-2}(s,t)) \\ &= \mathcal{GF}_{m+n}(s,t)+it\mathcal{GF}_{m+n-1}(s,t).\end{aligned}$$

Teorem 3.3.2:

$$\mathcal{GL}_1(s,t)\mathcal{GF}_n(s,t) = \mathcal{GL}_{n+1}(s,t) + it\mathcal{GL}_n(s,t).$$

İspat:

$$\begin{bmatrix} s^2+2t+its & s+2it \\ st+2it^2 & 2t-its \end{bmatrix} \begin{bmatrix} GF_{n+1}(s,t) & GF_n(s,t) \\ tGF_n(s,t) & tGF_{n-1}(s,t) \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c} GF_{n+1}(s,t)(s^2+2t+its)+tGF_n(s,t)(s+2it) \\ GF_{n+1}(s,t)(st+2it^2)+tGF_n(s,t)(2t-its) \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{c} GF_n(s,t)(s^2+2t+its)+tGF_{n-1}(s,t)(s+2it) \\ GF_n(s,t)(st+2it^2)+tGF_{n-1}(s,t)(2t-its) \end{array} \right]$$

Burada a_{11} konumundaki elemanı incelersek

$$\begin{aligned} a_{11} &= s^2GF_{n+1}(s,t)+itsGF_{n+1}(s,t)+tGF_{n+1}(s,t) \\ &\quad +tGF_{n+1}(s,t)+tsGF_n(s,t)+it^2GF_n(s,t)+it^2GF_n(s,t) \\ &= s(sGF_{n+1}(s,t)+tGF_n(s,t))+tGF_{n+1}(s,t) \\ &\quad +it(sGF_{n+1}(s,t)+tGF_n(s,t))+t(GF_{n+1}(s,t)+itGF_n(s,t)) \\ &= sGF_{n+2}(s,t)+tGF_{n+1}(s,t)+it(GF_{n+2}(s,t))+t(GF_n(s,t)+itGF_n(s,t)) \\ &= GF_{n+3}(s,t)+tGF_n(s,t)+it(GF_{n+2}(s,t)+tGF_n(s,t)) \\ &= GL_{n+2}(s,t)+itGL_{n+1}(s,t) \end{aligned}$$

Benzer şekilde a_{12} , a_{21} ve a_{22} elemanlarınıda incelersek.

$$\begin{aligned} a_{12} &= GL_{n+1}(s,t)+itGL_n(s,t) \\ a_{21} &= tGL_{n+1}(s,t)+it^2GL_n(s,t) \\ a_{22} &= tGL_n(s,t)+it^2GL_{n-1}(s,t) \end{aligned}$$

Bütün elemanları matrise yerine koyup düzenlersek.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} GL_{n+2}(s,t) & GL_{n+1}(s,t) \\ tGL_{n+1}(s,t) & tGL_n(s,t) \end{bmatrix} + it \begin{bmatrix} GL_{n+1}(s,t) & GL_n(s,t) \\ tGL_n(s,t) & tGL_{n-1}(s,t) \end{bmatrix} \\ = \; & GL_{n+1}(s,t) + itGL_n(s,t). \end{aligned}$$

Sonuç 3.3.3:

$$\mathcal{GL}_1(s,t)\mathcal{GF}_n(s,t) = \mathcal{GF}_n(s,t)\mathcal{GL}_1(s,t) = \mathcal{GL}_{n+1}(s,t) + it\mathcal{GL}_n(s,t).$$

Sonuç 3.3.4:

$$GL_2(s,t)GF_{n+1}(s,t) + tGL_1(s,t)GF_n(s,t) = GL_{n+2}(s,t) + itGL_{n+1}(s,t).$$

Sonuç 3.3.5:

$$GL_2(s,t)GF_n(s,t) + tGL_1(s,t)GF_{n-1}(s,t) = GL_{n+1}(s,t) + itGL_n(s,t).$$

Sonuç 3.3.6:

$$GL_2(s,t)GF_n(s,t) + tGL_1(s,t)GF_{n-1}(s,t) = GL_{n+1}(s,t) + itGL_n(s,t).$$

Sonuç 3.3.7:

$$tGL_1(s,t)GF_{n+1}(s,t) + t^2GL_0(s,t)GF_n(s,t) = tGL_{n+1}(s,t) + it^2GL_n(s,t).$$

Sonuç 3.3.8:

$$tGL_1(s,t)GF_n(s,t) + t^2GL_0(s,t)GF_{n-1}(s,t) = tGL_n(s,t) + it^2GL_{n-1}(s,t)$$

Teorem 3.3.9: Teorem 3.3.2 yi genellersek

$$\begin{aligned}\mathcal{GF}_m(s,t)\mathcal{GL}_n(s,t) &= \mathcal{GL}_n(s,t)\mathcal{GF}_m(s,t)\\ &= \mathcal{GL}_{m+n}(s,t) + it\mathcal{GL}_{m+n-1}(s,t).\end{aligned}$$

İspat:

$$\begin{aligned}\mathcal{GF}_m(s,t)\mathcal{GL}_n(s,t) &= \mathcal{GF}_m(s,t)(\mathcal{GF}_{n+1}(s,t) + t\mathcal{GF}_{n-1}(s,t))\\ &= \mathcal{GF}_m(s,t)\mathcal{GF}_{n+1}(s,t) + t\mathcal{GF}_m(s,t)\mathcal{GF}_{n-1}(s,t)\\ &= \mathcal{GF}_{m+n+1}(s,t) + it\mathcal{GF}_{m+n}(s,t)\\ &\quad + t\mathcal{GF}_{m+n-1}(s,t) + it^2\mathcal{GF}_{m+n-2}(s,t)\\ &= \mathcal{GL}_{m+n}(s,t) + it\mathcal{GL}_{m+n-1}(s,t).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{GL}_n(s,t)\mathcal{GF}_m(s,t) &= (\mathcal{GF}_{n+1}(s,t) + t\mathcal{GF}_{n-1}(s,t))\mathcal{GF}_m(s,t)\\ &= \mathcal{GF}_{n+1}(s,t)\mathcal{GF}_m(s,t) + t\mathcal{GF}_{n-1}(s,t)\mathcal{GF}_m(s,t)\\ &= \mathcal{GF}_{m+n+1}(s,t) + it\mathcal{GF}_{m+n}(s,t)\\ &\quad + t\mathcal{GF}_{m+n-1}(s,t) + it^2\mathcal{GF}_{m+n-2}(s,t)\\ &= \mathcal{GL}_{m+n}(s,t) + it\mathcal{GL}_{m+n-1}(s,t)\end{aligned}$$

sağ taraflar eşit olduğundan sol taraflar da eşittir.

Sonuç 3.3.10:

$$\begin{aligned} & \mathcal{GL}_m(s,t)\mathcal{GF}_{n+1}(s,t)+\mathcal{GF}_n(s,t)\mathcal{GL}_{m-1}(s,t) \\ = \; & \mathcal{GF}_n(s,t)\mathcal{GL}_{m+1}(s,t)+t\mathcal{GL}_m(s,t)\mathcal{GF}_{n-1}(s,t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & t^2\mathcal{GL}_m(s,t)\mathcal{GF}_{n-1}(s,t)+t\mathcal{GL}_{m+1}(s,t)\mathcal{GF}_n(s,t) \\ = \; & t^2\mathcal{GF}_n(s,t)\mathcal{GL}_{m-1}(s,t)+t\mathcal{GF}_{n+1}(s,t)\mathcal{GL}_m(s,t). \end{aligned}$$

İspat:

$$\mathcal{GF}_m(s,t)\mathcal{GL}_n(s,t)=\mathcal{GL}_n(s,t)\mathcal{GF}_m(s,t)$$

idi o halde bu iki matrisin elemenlar çarpımını gösterirsek

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} GF_{m+1}(s,t) & GF_m(s,t) \\ tGF_m(s,t) & tGF_{m-1}(s,t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} GL_{n+1}(s,t) & GL_n(s,t) \\ tGL_n(s,t) & tGL_{n-1}(s,t) \end{bmatrix} \\ = \; & \begin{bmatrix} GL_{n+1}(s,t) & GL_n(s,t) \\ tGL_n(s,t) & tGL_{n-1}(s,t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} GF_{m+1}(s,t) & GF_m(s,t) \\ tGF_m(s,t) & tGF_{m-1}(s,t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} GF_{m+1}(s,t)GL_{n+1}(s,t)+GF_m(s,t)GL_n(s,t) & GF_{m+1}(s,t)GL_n(s,t)+tGF_m(s,t)GL_{n-1}(s,t) \\ tGF_m(s,t)GL_{n+1}(s,t)+t^2GF_{m-1}(s,t)GL_n(s,t) & tGF_m(s,t)GL_n(s,t)+t^2GF_{m-1}(s,t)GL_{n-1}(s,t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} GL_{n+1}(s,t)GF_{m+1}(s,t)+GL_n(s,t)GF_m(s,t) & GL_{n+1}(s,t)GF_m(s,t)+tGL_n(s,t)GF_{m-1}(s,t) \\ tGL_n(s,t)GF_{m+1}(s,t)+t^2GL_{n-1}(s,t)GF_m(s,t) & tGL_n(s,t)GF_m(s,t)+t^2GL_{n-1}(s,t)GF_{m-1}(s,t) \end{bmatrix}$$

matrislerin aynı konumlu elemanları eşit olacağından eşitlikler gösterilmiş olur.

Teorem 3.3.11:

$$\mathcal{GL}_m^2(s,t)=(s^2+4t)(\mathcal{GF}_{2m}(s,t)+it\mathcal{GF}_{2m-1}(s,t)).$$

İspat:

$$\mathcal{GL}_m^2(s,t) = \begin{bmatrix} GL_{m+1}(s,t) & GL_m(s,t) \\ tGL_m(s,t) & tGL_{m-1}(s,t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} GL_{m+1}(s,t) & GL_m(s,t) \\ tGL_m(s,t) & tGL_{m-1}(s,t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} GL_{m+1}^2(s,t) + tGL_m^2(s,t) & GL_{m+1}(s,t)GL_m(s,t) + tGL_m(s,t)GL_{m-1}(s,t) \\ tGL_{m+1}(s,t)GL_m(s,t) + t^2GL_m(s,t)GL_{m-1}(s,t) & tGL_m^2(s,t) + t^2GL_{m-1}^2(s,t) \end{bmatrix}$$

a_{11} konumundaki elemanı incelersek. (a_{22} benzer şekilde)

$$\begin{aligned} GL_{m+1}^2(s,t) + tGL_m^2(s,t) &= (GF_{m+2}(s,t) + tGF_m(s,t))^2 \\ &\quad + t(GF_{m+1}(s,t) + tGF_{m-1}(s,t))^2 \\ &= GF_{m+2}^2(s,t) + t^2GF_m^2(s,t) \\ &\quad + 2tGF_{m+2}(s,t)GF_m(s,t) \\ &\quad + tGF_{m+1}^2(s,t) + t^3GF_{m-1}^2(s,t) \\ &\quad + 2t^2GF_{m+1}(s,t)GF_{m-1}(s,t) \end{aligned}$$

$$
= \frac{1}{s^2+4t}\left[\begin{array}{l}
(GL_{2m+4}(s,t)-(-t)^{m+2}GL_0(s,t))\\
+it(GL_{2m+3}(s,t)-(-t)^{m+1}GL_1(s,t))\\
\\
+t^2(GL_{2m+4}(s,t)-(-t)^{m}GL_0(s,t))\\
+it^3(GL_{2m-1}(s,t)-(-t)^{m-1}GL_1(s,t))\\
\\
+2t(GL_{2m+2}(s,t)-(-t)^{m}GL_2(s,t))\\
+2it^2(GL_{2m+1}(s,t)-(-t)^{m-1}GL_3(s,t))\\
\\
+t(GL_{2m+2}(s,t)-(-t)^{m+1}GL_0(s,t))\\
+it^2(GL_{2m+1}(s,t)-(-t)^{m}GL_1(s,t))\\
\\
+t^3(GL_{2m-2}(s,t)-(-t)^{m-1}GL_0(s,t))\\
+it^4(GL_{2m-3}(s,t)-(-t)^{m-2}GL_1(s,t))\\
\\
+2t^2(GL_{2m}(s,t)-(-t)^{m-1}GL_2(s,t))\\
+2it^3(GL_{2m-1}(s,t)-(-t)^{m-2}GL_3(s,t))
\end{array}\right]
$$

$$
= \frac{1}{s^2+4t}\left[\begin{array}{l}
(GL_{2m+4}(s,t)+itGL_{2m+3}(s,t))\\
+t^2(GL_{2m}(s,t)+itGL_{2m-1}(s,t))\\
\\
+2t(GL_{2m+2}(s,t)+itGL_{2m+1}(s,t))\\
+t(GL_{2m+2}(s,t)+GL_{2m+1}(s,t))\\
\\
+2t^2(GL_{2m}(s,t)+itGL_{2m-1}(s,t))\\
+t^3(GL_{2m-2}(s,t)+GL_{2m-3}(s,t))\\
\\
-2(-t)^{m+2}GL_0(s,t)+2i(-t)^{m+2}GL_1(s,t)\\
+2(-t)^{m+1}GL_2(s,t)\\
\\
-2(-t)^{m+1}GL_2(s,t)-2i(-t)^{m+1}GL_3(s,t)\\
+(-t)^{m+2}GL_0(s,t)\\
\\
-i(-t)^{m+2}GL_1(s,t)+(-t)^{m+2}GL_0(s,t)\\
-i(-t)^{m+2}GL_1(s,t)\\
+2i(-t)^{m+1}GL_3(s,t)
\end{array}\right]
$$

$$= \frac{1}{s^2+4t}\left[\begin{array}{c} (s^2+4t)(GF_{2m+3}(s,t)) + it(s^2+4t)(GF_{2m+2}(s,t)) \\ +t^2(s^2+4t)(GF_{2m-1}(s,t)) \\ \\ +it^3((s^2+4t)(GF_{2m-2}(s,t)) + 2t(s^2+4t)(GF_{2m+1}(s,t)) \\ +2it^2(s^2+4t)(GF_{2m}(s,t)) \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} &= GF_{2m+3}(s,t) + itGF_{2m+2}(s,t) + t^2GF_{2m-1}(s,t) \\ &\quad +it^3GF_{2m-2}(s,t) + 2tGF_{2m+1}(s,t) + 2it^2GF_{2m}(s,t) \\ \\ &= GL_{2m+2}(s,t) + tGL_{2m}(s,t) + itGL_{2m+1}(s,t) + it^2GL_{2m-1}(s,t) \\ \\ &= (s^2+4t)(GF_{2m+1}(s,t) + itGF_{2m}(s,t)). \end{aligned}$$

Benzer şekilde a_{12} ve a_{21} konumundaki elemanlarda incelendiğinde

$$\begin{aligned} a_{12} &= (s^2+4t)(GF_{2m}(s,t) + itGF_{2m-1}(s,t)) \\ \\ a_{21} &= t(s^2+4t)(GF_{2m}(s,t) + itGF_{2m-1}(s,t)) \\ \\ a_{22} &= t(s^2+4t)(GF_{2m-1}(s,t) + itGF_{2m-2}(s,t)). \end{aligned}$$

Buradan da tüm elemanları yerleştirip düzenlersek

$$\mathcal{GL}_m^2(s,t) = (s^2+4t)(\mathcal{GF}_{2m}(s,t) + it\mathcal{GF}_{2m-1}(s,t))$$

bulunmuş olur.

Teorem 3.3.12:

$$\mathcal{GF}_n^2(s,t) = (\mathcal{GF}_{2n}(s,t) + it\mathcal{GF}_{2n-1}(s,t)).$$

İspat:

$$\mathcal{GF}_n^2(s,t) = \begin{bmatrix} GF_{n+1}(s,t) & GF_n(s,t) \\ tGF_n(s,t) & tGF_{n-1}(s,t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} GF_{n+1}(s,t) & GF_n(s,t) \\ tGF_n(s,t) & tGF_{n-1}(s,t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} GF_{n+1}^2(s,t) + tGF_n^2(s,t) & GF_{n+1}(s,t)GF_n(s,t) + tGF_n(s,t)GF_{n-1}(s,t) \\ tGF_n(s,t)GF_{n+1}(s,t) + t^2GF_{n-1}(s,t)GF_n(s,t) & tGF_n^2(s,t) + t^2GF_{n-1}^2(s,t) \end{bmatrix}$$

a_{11} konumundaki elemanı incelersek

$$\begin{aligned} GF_{n+1}^2(s,t) + tGF_n^2(s,t) &= \frac{1}{s^2+4t}(GL_{2n+2}(s,t) - (-t)^{n+1}GL_0(s,t)) \\ &\quad + \frac{it}{s^2+4t}(GL_{2n+1}(s,t) - (-t)^{n}GL_1(s,t)) \\ &\quad + \frac{t}{s^2+4t}(GL_{2n}(s,t) - (-t)^{n}GL_0(s,t)) \\ &\quad + \frac{it^2}{s^2+4t}(GL_{2n-1}(s,t) - (-t)^{n+1}GL_1(s,t)) \\ &= \frac{1}{s^2+4t}((s^2+4t)GF_{2n+1}(s,t) + it(s^2+4t)GF_{2n}(s,t)) \\ &= GF_{2n+1}(s,t) + itGF_{2n}(s,t) \end{aligned}$$

a_{12} , a_{21} ve a_{22} konumundaki elemanlarıda incelediğimizde

$$\begin{aligned} a_{12} &= GF_{2n}(s,t) + itGF_{2n-1}(s,t) \\ a_{21} &= tGF_{2n}(s,t) + it^2GF_{2n-1}(s,t) \\ a_{22} &= tGF_{2n-1}(s,t) + it^2GF_{2n-2}(s,t) \end{aligned}$$

bulunur. Bu elemanlar matriste yerine konulduğunda

$$\mathcal{GF}_n^2(s,t) = (\mathcal{GF}_{2n}(s,t) + it\mathcal{GF}_{2n-1}(s,t))$$

bulunmuş olur.

4 SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde daha önceki çalışmalardan yararlanarak Fibonacci, Lucas, (s,t) Fibonacci, (s,t) Lucas ve Gauss Fibonacci Gauss Lucas sayıları yardımıyla (s,t) Gauss Fibonacci ve (s,t) Gauss Lucas sayıları tanımlanarak bu sayılara ait kombinatorial özellikler elde edildi. Bu sayıları içeren matrisler tanımlanarak bazı özdeşlikler elde edildi. Öneri olarak bu tezde tanımlanan sayı ve matrisler Pell, Pell Lucas sayıları yardımıyla (s,t) Gauss Pell ve (s,t) Gauss Pell Lucas sayıları tanımlanıp özellikleri incelenebilir. Tribonacci sayıları da düşünüldüğünde (s,t) Tribonacci sayıları tanımlanıp özellikleri incelenebilir. Böylece yeni bir araştırma alanı ortaya çıkacaktır.