T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

RF^2 FORMUNDA ÇİFTLENİMLİ HOLOGRAFİK SÜPERİLETKENLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EMRE TANER

DENİZLİ, EKİM-2015

T.C.

PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

RF^2 FORMUNDA ÇİFTLENİMLİ HOLOGRAFİK SÜPERİLETKENLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EMRE TANER

DENİZLİ, EKİM-2015

KABUL VE ONAY SAYFASI

EMRE TANERtarafından hazırlanan **"RF^2 FORMUNDA ÇİFTLENİMLİ HOLOGRAFİK SÜPERİLETKENLER"** adlı tez çalışmasının savunma sınavı 27/10/2015. tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Bilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Doç.Dr. Özcan SERT	....
Üye Prof.Dr. Muzaffer ADAK Pamukkale Üniversitesi	....
Üye Yrd.Doç.Dr. Tolga BİRKANDAN İstanbul Teknik Üniversitesi	....

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 18/11/2015 tarih ve 43/19 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....

Prof. Dr. Orhan KARABULUT

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

Emre Taner

EMRE TANER

ÖZET

RF^2 FORMUNDA ÇİFTLENİMLİ HOLOGRAFİK SÜPERİLETKENLER
YÜKSEK LİSANS TEZİ
EMRE TANER
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. ÖZCAN SERT
DENİZLİ, EKİM-2015

Bu tez çalışmasında diferansiyel formların dış cebirini kullanarak gravitasyon teorilerini inceliyoruz. Öncelikle gerekli olan temel kavramları verdikten sonra Einstein Gravitasyon teorisini differansiyel formaları kullanarak ifade ediyoruz. Eistein teorisine Maxwell teoriyi de ekleyip, Einstein-Maxwell teorisi olarak bilinen minimal bağlanma durumunu inceledikten sonra beş boyutta gravitasyonun ve elektromanyetik alanların minimal olmayan RF^2-tipi bağlanmalarını inceliyoruz.

$(3+1)$-boyutlu holografik süperiletkenler hakkında bilgi almak amacıyla, bu teoriye dual olan bu üç parametreli RF^2-tipi invaryantların keyfi bir lineer birleşiminin varlığında $(4+1)$-boyutlu bir AdS gravitasyon teorisini düşünüyoruz. Genel bir üç parametreli RF^2-tipi çift pariteli terimler içeren bir Lagrange tarafından tanımlanan minimal olmayan bu modelin varyasyonlarını alarak alan denklemlerini elde ediyoruz. Elektromanyetik alan ve skaler alanın uzay-zaman geometrisi üzerine geri etki göstermediği bir limitte çalışarak yaklaşıklıklı analitik bir yöntemi kullanıyoruz.

Sonuç olarak bu minimal olmayan bağlanmaların varlığında kritik sıcaklık ve yoğuşma için analitik bir ifade elde ediyoruz. Böylece buradaki minimal olmayan bağlanma parametrelerinin kritik sıcaklık ve yoğuşma miktarını önemli bir şekilde etkilediğini görüyoruz.

ANAHTAR KELİMELER: Gravitasyon, Holografik Süperiletkenler, Minimal olmayan çiftlenimler

ABSTRACT

HOLOGRPHIC SUPERCONDUCTORS WITH RF^2 TYPE COUPLİNGS
MSC THESIS
EMRE TANER
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: DOÇ. DR. ÖZCAN SERT)
DENİZLİ, OCTOBER-2015

In this thesis, we investigate the gravitation theories using the algebra of exterior differential forms. After giving the fundamental concepts we need, we write Einstein's theory of gravitation using the differential forms. After we add Maxwell theory to this Einstein's theory and obtain the minimal coupling case which is known as Einstein-Maxwell theory, we investigate non-minimally RF^2-type couplings of gravitational and electromagnetic fields in five dimensions.

In order to obtain more information about $(3+1)$-dimensional holographic superconductors, we consider $(4+1)$-dimensional AdS gravitation theory in the presence of a linear combination of the RF^2-type invariants with three parameters. We obtain field equations of this model which is described by the Lagrangian which involves the general three parameters RF^2-type terms with even parity, using the method of variation. We study in the probe limit, that is; the scalar and electromagnetic fields have not any back reaction on the metric, and we consider an approximate analytic method.

Consequently, we find analytic relations for the critical temperature and the scalar condensate in the presence of the non-minimal RF^2-type couplings on the $(1+\ 3)$ dimensional boundary. We see that these non-minimal coupling parameters have important effects on these quantities.

KEYWORDS: Gravitation, Holographic superconductors, non-minimal couplings

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

ψ	:	Spinor field
ϕ	:	Scalar field
M	:	Manifold
g	:	Metric
∇	:	Connection
$\{x^\mu\}$	:	Coordinate Function
$\imath$	:	Inner Product
$T(M)$	:	Tangent space
$T^\star(M)$	:	Cotangent space
η_{ab}	:	Minkowski metric
$\{e^a\}$	:	Orthonormal base 1-forms
$\{X_b\}$	:	Orthonormal Reference Frame
$\wedge$	:	Exterior Product
$\Lambda^p(M)$	:	p-forms space
d	:	Exterior Derivative Operator
${\Lambda^a}_b$	:	Connection 1-forms
D	:	Covariant Exterior Derivative Operator
Q_{ab}	:	Nonmetricity 1-forms
${\Omega^a}_b$	:	Metric Compatible Connection 1-forms
T^a	:	Torsion 2-forms
${\omega^a}_b$	:	Levi-Civita Connection 1-forms
${K^a}_b$	:	Contortion 1-forms
${q^a}_b$	:	Anti-Symmetric Connection 1-forms
${R^a}_b$	:	Curvature 2-forms
L	:	Lagrange Density 4-form
$\mathcal{L}$	:	Lagrange Function
κ	:	Universal Gravitation cuopling Constant
$*$	:	Hodge Star Operator
δ	:	Infinitesimal Variation

ÖNSÖZ

Bu yüksek lisans tezimde RF^2 formundaki çiftlenimlerin varlığında $(3+1)$-boyutta holografik süperiletkenleri inceledim. Yüksek lisans çalışmam boyunca özverilerini, yardımlarını, iyi niyetini, bilgilerini ve anlayışını benden esirgemeyen danışman hocam Doç.Dr.Özcan SERT'e, manevi desteğini her zaman hissettiğim Doç.Dr.Mustafa AŞÇI'ya ve aileme çok teşşekür ediyorum.

1. GİRİŞ

Uzay-zaman ile ilgili kullanacağımız bazı kavramları vererek başlayalım. Bu kavramlar Dereli (1984), Flanders (1963), Thring (1997), Dereli ve diğ. (1995), Dereli ve diğ (1996), Adak ve Sert (2005), Adak ve diğ (2006), Trautman (1972), Cartan (1923), ve Sert (2005) çalışmalarından derlenmiştir. Herhangi bir topolojik uzay üzerinde, her $m \in M$ noktası etrafındaki U açık alt kümesini R^n uzayının açık alt kümesine bire bir ve sürekli bir gönderim ile ilişkilendiren M topolojik uzayına manifold denir. Bu çalışmada M olarak difaransiyellenebilir ve yönlenebilir 5-boyutlu bir manifoldu düşüneceğiz. Bu manifold üzerinde (0,2)-tipi dejenere olmayan bir tensör olan ve noktalar arası sonsuz küçük uzaklığı belirleyen metrik tensörünü g ile göstereceğiz.

En genelde spinörlerin ve tensörlerin paralel taşınmasında kullanılan bağlantıyı ise ω ile göstereceğiz. Bu (M, g, ω) üçlüsü uzay-zamanı belirler.

M manifoldu üzerindeki herhangi bir p noktası için bu uzay-zaman da kurulan koordinat sistemini $\{x^{\mu(p)}\}$, $\mu = 0, 1, 2, 3, 4$ koordinat fonksiyonları ile gösterirsek bu koordinat sistemi $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}(p)\}$ veya ∂_μ ile gösterilen bir koordinat referans çerçevesi oluşturur.

M manifolduna bir a noktasında teget olan vektörlerin olusturduğu uzaya, bu manifoldun a noktasındaki teget uzayı denir. Bu teğet uzayı $T_a(M)$ ile gösterilir. $T_a(M)$ teğet uzayı için yukarıdaki referans çerçevesi a noktasında bir baz vektör kümesi oluşturur.

Aynı şekilde bu vektörlere dual olan ve bir b noktasında $\{x^{\mu(p)}\}$ koordinat fonksiyonlarının diferansiyeli alınarak bulunanan $\{dx^\mu(p)\}$ koordinat referans koçerçeveleri de, $T_b^*(M)$ ko-teğet uzayında bir baz ko-vektör kümesi oluşturur.

Bu M manifoldu üzerinde p-tane teğet uzayının elemanlarının ve q-tane koteğet uzayının elemanlarının simetrik ve antisimetrik olabilen çarpımını tanımlamak mümkündür. Bu çarpıma bir reel sayı karşılık getiren bir gönderime ise (p,q)-tipi tensör denir.

$$\underbrace{T^*(M) \times T^*(M) ... \times T^*(M)}_{p\ kez} \underbrace{T(M) \times T(M) ... \times T(M)}_{q\ kez} \rightarrow \mathbb{R} \tag{1.1}$$

Böylece M manifoldu üzerindeki bir vektör uzayı olan $T(M)$ teget uzayının elemanları, yani vektörler (1,0) tipi (kontravaryant) tensörler olarak isimlendirilir. Bunlara dual olarak tanımlanan $T^*(M)$ ko-teğet uzayının elemanları olan kovektörler ise (0,1) tipi (kovaryant) tensörler olarak isimlendirilir. M manifoldu üzerindeki fonksiyonlar ise (0,0) tipi tensörlerdir. Teğet uzayının baz vektörleri ile koteğet uzayının baz kovektörlerinin iç çarpımı Kroenecker delta sembolü ile belirlenir.

$$dx^\mu(\frac{\partial}{\partial x^v}) \equiv \iota_{\frac{\partial}{\partial x^v}} dx^\mu = \delta^\mu_v \tag{1.2}$$

$T_p(M)$ teğet uzayında lineer bağımsız vektörler kümesi ortanormal yapılabilir. Bu kümeyi $\{X_a\},\ a = 0, 1, 2, 3, 4$ olarak gösterelim. Bunuda ortanormal referans çerçevesi olarak isimlendirelim. Böylece $g(x_a, x_b) = \eta_{ab}$ bağıntısını M manifoldu üzerindeki metrik sağlar. Burada η_{ab} Minkowski metriği olarak adlandırılır. Minkowski metrği köşegen elemanları {-1,1,1,1,1} ve diğer terimleri sıfır olan 5x5 tipinde bir kare matristir. Ortanormal referans çerçevesinin dualinden oluşturduğumuz bazı $\{e_a\}$ ile göstereceğiz. $\{X_a\}$ ortanormal referans çerçevesi ile bunun dual çerçevesi olan $\{e^a\}$

$$e^a(X_b) \equiv \iota_{X_b}(e^a) = \delta^a_b \tag{1.3}$$

eşitliğini sağlar.

Bu tezin devamında kullanacağımız notasyonlar şu şekildedir:
Çerçeve indisleri için Latin alfabesinin ilk yarısı olan $a, b, ... = 0, 1, 2, 3, 4$

uzay-zaman indisleri ve ikinci yarısı olan $i, j, ... = 1, 2, 3, 4$ ise uzay indislerini temsil edecektir. Ortonormal $X_a(p)$ koordinat çerçevesi, $\partial_\alpha(p)$ cinsinden ve vierbein (tedrad) $h^\alpha{}_a(p)$ yardımıyla aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$X_a(p) = h^\alpha{}_a(p)\partial_\alpha(p) \tag{1.4}$$

Burada X_a ortanormal referans çerçevesinin anholonomik bir baz olabilmesi için, $\det h^\alpha{}_a(p) \neq 0$ olmalıdır. yani $h^\alpha{}_a(p)$'nin dejenere olmaması gerekir. Buna benzer şekilde aşağıdaki eşitlik sağlanır;

$$e^a(p) = h^\alpha{}_a(p)dx^\alpha(p) \tag{1.5}$$

ve vierbeinler aşağıdaki eşitliği de sağlar;

$$\iota_a e^b = h^\alpha{}_a(p)h^b{}_\alpha(p) = \delta^b_a. \tag{1.6}$$

1.1 Dış Cebir Uzayı

Bu tezde dış cebir kullanılacaktır. Dış cebire göre $T^*(M)$ koteğet uzayların bir demeti olmak üzere bunların bazları birer 1-form olarak isimlendirilirler. Vektör çarpım uzayı üzerine $T^*(M) \times T^*(M) ... \times T^*(M)$ olacak şekilde tümüyle anti simetrik tensör çarpımı koyarsak, elde edilen çarpım uzayına M manifoldu üzerinde tanımlı p-formları uzayı denir. Bu uzay $\Lambda^p(M)$ ile gösterilir. $\Lambda^p(M)$, M manifoldu üzerinde tanımlı p formları uzayı olmak üzere, $\bigoplus_{p=0}^5 \Lambda^p(M)$ toplamı dış cebir uzayını oluşturur. Herhangi bir p form, $A \in \Lambda^p(M)$ olmak üzere dx^μ koordinat koçerçeveleri cinsinden;

$$A = \frac{1}{p!} A_{\mu_1\mu_2...\mu_p} dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_p} \tag{1.7}$$

şeklinde yazılabilir. Dış cebir uzayında tanımlı bir p-form $A_1 \in \Lambda^p(M)$, q-form $A_2 \in \Lambda^q(M)$, r-form $A_3 \in \Lambda^r(M)$ ve α sabit olmak üzere aşağıdaki bağıntılar vardır:

1. $(\alpha A_1) \wedge A_2 = A_1 \wedge (\alpha A_2) = \alpha(A_1 \wedge A_2)$

2. $(A_1 + A_2) \wedge A_3 = A_1 \wedge A_3 + A_2 \wedge A_3$

3. $A_1 \wedge (A_2 \wedge A_3) = (A_1 \wedge A_2) \wedge A_3$

4. $A_1 \wedge A_2 = (-1)^{p.q} A_2 \wedge A_1$

1.2 Dış Türev Operatörü

Dış türev operatörü olan d, herhangi bir p-formu (p+1) forma gönderen tam türev öperatörüdür;

$$d : \Lambda^p(M) \to \Lambda^{p+1}(M)$$

ve $A_1 \in \Lambda^p(M),\ A_2 \in \Lambda^q(M)$ olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır;

1. $d(A_1 + A_2) = dA_1 + dA_2$

2. $dA = \frac{1}{p!}\frac{\partial A_{\mu_1 \wedge \mu_2 \wedge ... \wedge \mu_p}}{\partial x^\mu} dx^\mu \wedge dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_p}$

3. $d(A_1 \wedge A_2) = dA_1 \wedge A_2 + (-1)^p A_1 \wedge dA_2$

4. $d(dA) = 0.$

1.3 İç Çarpım Operatörü

İç çarpım operatörü olan ι, herhangi bir p-formu (p-1) forma gönderen bir anti-türev operatörüdür;

$$\iota : \Lambda^p(M) \to \Lambda^{p-1}(M)$$

ve $A \in \Lambda^p(M)$ olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $\iota_a f = 0$

2. $\iota_{fa} A = f \iota_a A$

3. $e_a \wedge \iota_a A = pA$

4. $\iota_a \iota_b A = -\iota_b \iota_a A$

5. $\iota_a(A_1 \wedge A_2) = \iota_a A_1 \wedge A_2 + (-1)^p A_1 \wedge \iota_a A_2$

1.4 Hodge Star Operatörü

$(*)$ ile gösterilen Hodge star operatörü,

$$* : \Lambda^p(M) \to \Lambda^{5-p}(M)$$

p-formu (5-p)-forma gönderen lineer bir operatördür. Yönlendirilmiş hacim 5-formu

$$*1 = e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4 = \frac{1}{5!}\varepsilon_{abcdf} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \wedge e^f \qquad (1.8)$$

olarak tanımlanır. Bu tezde antisimetrik Levi-Civita tensörü $\varepsilon_{01234} = +1$ olarak tanımlanmıştır. Hodge star operatörünün $A, B \in \Lambda^p(M)$ p-formları üzerine uygulanışı aşağıda gibidir.

1. $A \wedge *B = B \wedge *A$ ve $*B \wedge A = *A \wedge B$

2. $*(A \wedge e_a) = \iota_a * A$

3. $* * A = \pm A$

1.5 Lorentz Dönüşümü

M manifoldu üzerinde bulunan her gözlemci kendi referans çerçevesine göre ölçüm yapar. Bir $p \in M$ noktasında birinci gözlemci $\{X_a\}$ referans çerçevesini kursun. İkinci gözlemci ise yine aynı şekilde kendi referans çerçevesine göre $p \in M$ naktasında $\{X'_a\}$ referans çerçevesini kursun. ${L^{-1}}^b{}_a$ yerel Lorentz dönüşüm matrisi ile bu iki gözlemcinin ortonormal referans vektörleri

$$X'_a(p) = X_b(p){L^{-1}}^b{}_a(p) \qquad (1.9)$$

şeklinde birbirine dönüştürebilir. Eğer bu Lorentz dönüşümü koordinatlardan bağımsız ise bu dönüşüm genel(veya sabit) bir dönüşümdür. Ortonormal referans koçerçevesinin dönüşümü ise;

$$e^{a\prime}(p) = L^a{}_b(p)e^b(p) \qquad (1.10)$$

ile verilir. Ayrıca,

$$X'_a(e^a)' = X_c L^{-1c}{}_a(L^a{}_d e^d) = X_c \delta^c_d e_d = X_c e^c = X_a e^a \tag{1.11}$$

çarpımı için Lorentz invaryantlığın sağlandığı görülür.

1.6 Bağlantı

Bir e^a kovaryant bazının dış türevinin Lorentz dönüşümünü düşünelim.

$$de^{a\prime} = d(e^b L^a{}_b) = dL^a{}_b e^b + L^a{}_b de^b \tag{1.12}$$

Bu dönüşümde fazladan gelen $dL^a{}_b e^b$ terimi nedeniyle de^a nın dönüşümü için invaryantlık sağlanmaz. Bu fazla terimden kurtulmak için 1- form olan bir bağlantı tanımlayalım. Bu bağlantının yerel Lorentz dönüşümü

$$\omega^{a\prime}_{\ b} = L^a{}_c \omega^c{}_f L^{-1f}{}_b + L^a{}_c dL^{-1c}{}_b \tag{1.13}$$

şeklinde olsun. Bu eşitliğin sağ tarafındaki ikinci terim 1-form olan tam bağlantıların tensör nicelikler olmadığını gösteririr. Bu kavramlar sonraki kesimlerde daha fazla aydınlatılacaktır.

1.7 Kovaryant Dış Türev Operatörü

A, bir tensör olmak üzere, kovaryant dış türev operatörü 1- form bağlantılar yardımıyla aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$DA := (d \mp \omega)A \tag{1.14}$$

Yukarda $de^{a\prime} \neq L^a{}_b(de^b)$ olduğunu göstermiştik. Şimdi ise e^a kovaryant bazının kovaryant dış türevinin

$$De^a = de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b \tag{1.15}$$

dönüşümünü düşünelim ve $e^{a\prime}(p) = L^a{}_b(p)e^b(p)$, $\omega^{a\prime}_b = L^a{}_c\omega^c{}_f L^{-1f}{}_b + L^a{}_c dL^{-1c}{}_b$ eşitliklerini kullanalım.

$$
\begin{aligned}
De^{a\prime} &= de^{a\prime} + \omega^a{}_b \wedge e^{a\prime} \\
&= d(L^a{}_b e^b) + (L^a{}_c\omega^c{}_f L^{-1f}{}_b + L^a{}_c dL^{-1c}{}_b) \wedge L^b{}_k e^k \\
&= dL^a{}_b \wedge e^b + L^a{}_b de^b + L^a{}_c\omega^c{}_f L^{-1f}{}_b L^b{}_k \wedge e^k + L^a{}_c dL^{-1c}{}_b L^b{}_k \wedge e^k \\
&= dL^a{}_b \wedge e^b + L^a{}_b \wedge de^b + L^a{}_c\omega^c{}_k \wedge e^k - dL^a{}_k \wedge e^k \\
&= L^a{}_b(de^b + \omega^c{}_k \wedge e^k) \\
&= L^a{}_b De^b \qquad (1.16)
\end{aligned}
$$

(1.15) eşitliği ile sedace (0,1)-tipi bir tensörün kovaryant dış türevi tanımlanmıştır. En genel olarak bir (p,q)-tipi tensörün kovaryant dış türevi ise şöyle tanımlanmaktadır.

$$
\begin{aligned}
DR_{a_1\cdots a_p}{}^{b_1\cdots b_q} &= dR_{a_1\cdots a_p}{}^{b_1\cdots b_q} + \omega^{b_1}{}_c R_{a_1\cdots a_p}{}^{cb_2\cdots b_q} + \omega^{b_q}{}_c R_{a_1\cdots a_p}{}^{b_1\cdots c} \\
&\quad -\omega^c{}_{a_1} R_{ca_2\cdots a_p}{}^{cb_2\cdots b_q} - \cdots - \omega^c{}_{a_p} R_{a_1\cdots c}{}^{cb_2\cdots b_q} \qquad (1.17)
\end{aligned}
$$

Bu tanımla birlikte η_{ab} metriğinin, e^a ortonormal baz 1-formunun ve $\omega^a{}_b$ bağlantı 1-formunun kovaryant dış türevi tanımlanabilir. Bu ifadelere sonraki kesimlerde göreceğimiz gibi Cartan yapı denklemleri denir.

1.8 Metrik Gradyant Tensörü

$$
Q_{ab} = -\frac{1}{2}D\eta_{ab} = -\frac{1}{2}(\omega_{ab} + \omega_{ba}) \qquad (1.18)
$$

Bu ifade, $\omega^a{}_b$ bağıntısına göre metriğin gradyantını yani 1. Cartan yapı denklemini, η_{ab} metriğinin kovaryant dış türevi olarak tanımlamaktadır (Cartan, 1923). Burada Q_{ab} simetrik bağlantı 1-formları (1,2)-tipi tensördür. Bu tensör metrik gradyant tensörü olarak isimlendirilir. Q_{ab} aynı zamanda $\omega^a{}_b$ tam bağlantısının simetrik kısmını oluşturur.

$Q_{ab} = 0$ olan bağlantıya metrik uyumlu bağlantı denir. Bu çalışmada biz sadece metrik uyumlu $Q_{ab} = 0$ yani metrik gradyant tensörünün sıfıra eşit olduğunu kabul edeceğiz.

1.9 Burulma Tensörü

$$T^a := De^a = de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b \tag{1.19}$$

T^a burulma tensörünü yani 2. Cartan yapı denklemini,1 form e^a ortonormal bazlarının kovaryant dış türevi alınarak elde edilir(Cartan, 1986).
T^a 2-formları (1,2)-tipi burulma tensörü olarak tanımlanır. En genelde herhangi bir 2-form, genel bir 1-formdan türetilebilir. Burada burulma tensörü 1-form bağlantısından aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$K^a{}_b \wedge e^b = T^a \tag{1.20}$$

Bağlantı kavramı bu bilgilerle birlikte daha iyi anlaşılacaktır. Genel olarak 1-form tam bağlantıları aşağıdaki gibi bileşenlere ayrılır (Hehl 1995, Dereli 1996, Dereli 1995).

$$\omega_{ab} = \hat{\omega}_{ab} + K_{ab} + q_{ab} + Q_{ab} \tag{1.21}$$

Antisimetrik kısım:

$$\omega_{[ab]} = \hat{\omega}_{ab} + K_{ab} + q_{ab} \tag{1.22}$$

Simetrik kısım:

$$\omega_{(ab)} = Q_{ab} \tag{1.23}$$

(1.21) denklemindeki antisimetrik tensör 1-form bağlantısı q_{ab} ile simetrik tensör $Q^a{}_b$ arasında şöyle bir ilişki vardır.

$$q^a{}_b = -\iota^a Q_{bc} \wedge e^c + \iota_b Q^a{}_c \wedge e^c \tag{1.24}$$

Eğer $Q_{ab} = 0$ ise bağlantı metrik uyumludur. Bununla birlikte $T^a = 0$ olursa bağlantı Levi-Civita 1-form bağlantısına dönüşür.

$$\omega^a{}_b \to \hat{\omega}^a{}_b \tag{1.25}$$

(1.21) denkleminde simetrik bağlantı olan $Q_{ab} = 0$ durumlarıyla ilgileneceğimizi daha önce söylemiştik. Bu durumda q_{ab} de sıfır olur. Kalan ayrışımının tutarlılığı aşağıdaki gibi gösterilebilir. Bunun için (1.21) denklemini e^b ile sağdan çarpalım.

$$\omega_{ab} \wedge e^b = \hat{\omega}_{ab} \wedge e^b + K_{ab} \wedge e^b \tag{1.26}$$

Burada daha önceki (1.19) ve (1.20) denklemlerini kullanırsak,

$$-de^a \;\; = \;\; \hat{\omega}_{ab} \wedge e^b \tag{1.27}$$

olur. Buradan metrik uyumlu ve burulmasız bağlantı olan Levi-Civita bağlantı 1-formlarının metriğin verilmesiyle bulunabileceği anlamına gelir. Ayrıca $\hat{\omega}_{ab}$ aşağıdaki bağlantıyı sağlar.

$$\hat{\omega}_{ab} = -\frac{1}{2}\iota_a(de_b) + \frac{1}{2}\iota_b(de_b) + \frac{1}{2}\iota_a\iota_b(de_c)e^c \tag{1.28}$$

Bu bağlantıyı ispatlamak için (1.27) denklemini ι_b ile çarpalım.

$$\iota_b de_a \;\; = \;\; -\iota_b\hat{\omega}_{ac}e^c + \hat{\omega}_{ac}\iota_b e^c \tag{1.29}$$

ve düzenleyelim.

$$\iota_b de_a + \iota_b\hat{\omega}_{ac}e^c = \hat{\omega}_{ab} \tag{1.30}$$

Burada $a \leftrightarrow b$ dönüşümü yapıp düzenleyelim.

$$-\iota_a de_b - \iota_a\hat{\omega}_{bc}e^c = \hat{\omega}_{ab} \tag{1.31}$$

Bu iki denklemi toplayalım.

$$2\hat{\omega}_{ab} = -\iota_a de_b + \iota_b de_a + (\iota_a\hat{\omega}_{cb} - \iota_b\hat{\omega}_{ca})e^c \tag{1.32}$$

(1.30) denklemini ι_k ile çarpalım.

$$\iota_k \iota_b de_a = \iota_a \hat{\omega}_{cb} - \iota_b \hat{\omega}_{ca} \tag{1.33}$$

düzenleyelim

$$\iota_a \iota_b de_c = \iota_a \hat{\omega}_{cb} - \iota_b \hat{\omega}_{ca} \tag{1.34}$$

bunu (1.32) e yerleştirelim.

$$2\hat{\omega}_{ab} = -\iota_a de_b + \iota_b de_a + (\iota_a \iota_b de_c) e^c \tag{1.35}$$

sonucu bulunur. Burada ω_{ab} 1-formuna benzer olarak $K^a{}_b$ ko-burulma 1formu şöyle bir bağlantıyı sağlar:

$$2K_{ab} = \iota_a T_b - \iota_b T_a - (\iota_a \iota_b T_c) e^c \tag{1.36}$$

Ayrıca $\omega^a{}_b$ bağlantısı boyutsuzdur. Buna göre $T^a = [L]^1$ boyutunda olmalıdır.

1.10 Eğrilik Tensörü

$$R^a{}_b(\omega) := D\omega^a{}_b := d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \tag{1.37}$$

$R^a{}_b(\omega)$ eğrilik tensörünü, yani 3. Cartan yapı denklemini,yukarıdaki gibi bağlantının kovaryant dış türevi alınarak bulunur (Cartan, 1923). $R^a{}_b(\omega)$ eğrilik 2-formları (1,3)-tipi Riemann eğrilik tensörüdür. $R^a{}_b(\omega)$ nin bir tensör olduğu yani;

$$R^a{}_b(\omega) = L^a{}_b R^c{}_d L^{-1}{}^d{}_b \tag{1.38}$$

biçiminde dönüştüğü aşağıda gösterilmiştir:

$$\begin{aligned} R^a{}_b &= d(L^a{}_c \omega^c{}_f L^{-1}{}^f{}_b + L^a{}_c dL^{-1}{}^c{}_b) \\ &+ (L^a{}_e \omega^e{}_f L^{-1}{}^f{}_c + L^a{}_e dL^{-1}{}^e{}_c) \wedge (L^c{}_g \omega^g{}_h L^{-1}{}^h{}_b + L^c{}_g dL^{-1}{}^g{}_b) \end{aligned} \tag{1.39}$$

Burada parantezler açılır ve $(dL^{-1c}{}_b)L^b{}_g = -L^{-1c}{}_b(dL^b{}_g)$ özelliği kullanılırsa

$$R^a{}_b = L^a{}_c(d\omega^c{}_d + \omega^c{}_e \wedge \omega^e{}_d)L^{-1d}{}_b \tag{1.40}$$

elde edilir ki buda esasında (1.38) ifadesidir. $\omega^a{}_b$ bağlantısı boyutsuz olduğundan $R^a{}_b$ ifadesi boyutsuzdur.

1.11 Bianchi Özdeşlikleri

Bianchi özdeşlikleri burulma, eğrilik ve metrik gradyant terimlerinin kovaryant dış türevi alınarak elde edilir.

• Burulmanın dış türevini alarak birinci Bianchi Özdeşliğini bulalım.

$$dT^a = d(de^a) + d(\omega^a{}_b \wedge e^b) \tag{1.41}$$

Burada (1.19) ve (1.37) denklemleri kullanılırsa;

$$dT^a + \omega^a{}_b \wedge T^b = R^a{}_b \wedge e^b \tag{1.42}$$

$$DT^a = R^a{}_b \wedge e^b \tag{1.43}$$

sonucu elde edilir bu da Birinci Bianchi Özdeşliğidir.

• Eğriliğin dış türevini alarak bunuda (1.37) da yerine koyarak ikinci Bianchi Özdeşliğini bulalım.

$$dR^a{}_b = R^a{}_c \wedge \omega^c{}_b - \omega^a{}_c \wedge R^c{}_b \tag{1.44}$$

$$DR^a{}_b = 0 \tag{1.45}$$

bu ise İkinci Bianchi Özdeşliğidir.

• $D\eta_{ab} = -\omega^c{}_a\eta_{cb} - \omega^c{}_b\eta_{ac}$ denkleminin dış türevini alarak üçüncü Bianchi Özdeşliğini bulalım. Bu çalışma boyunca $Q_{ab} = -\frac{1}{2}D\eta_{ab} = 0$ alacağımız için,

$$0 = (d\omega^c{}_a)\eta_{cb} + (d\omega^c{}_b)\eta_{ac} \tag{1.46}$$

olur. Burada (1.37) denklemi kullanılırsa

$$R_{ab} + R_{ba} = 0 \tag{1.47}$$

olur. Bu ise Üçüncü Bianchi Özdeşliğidir.

2. EINSTEIN'IN KÜTLE ÇEKİM TEORİSİ

Bu tezde gravitasyon alan denklemleri aşağıdaki gibi bir eylemin varyasyonundan elde edilecektir.

$$I[e^a, \omega^a{}_b] = \int_M L \tag{2.1}$$

Burada I eylem, e^a ve $\omega^a{}_b$ temel gravitasyon alan değişkenleri, Bu kısımdaki hesaplarda (3+1)-boyutta çalışacağız. Elde edilen alan denklemleri genel bir (d+1)-boyut için de geçerlidir. Einstein'ın Gravitasyon teorisinde L Lagrangian 4-form olarak aşağıdaki Einstein-Hilbert Lagrangianı alınır. Bu Lagrangianın varyasyonunda alan denklemleri elde edilir. Daha sonra, bu eyleme yeni terimler ekleyerek tekrar varyasyon alarak ilgili modelin gravitasyon alan denklemleri elde edilir.

$$L = -\frac{1}{2\kappa^2} R^a{}_b(\omega) \wedge *(e_a \wedge e^b) \tag{2.2}$$

Burada κ etkileşme sabiti olup uzunluk boyutundadır. Bu Lagrange yoğunluğunun varyasyonu kütle çekim alan denklemlerini verir. Bundan sonra $e^a \wedge e^b \cdots = e^{ab\cdots}$ olarak gösterilecektir. Şimdi L Lagrange yoğunluğunun varyasyonunu hesaplayalım.

$$\delta L \;=\; -\frac{1}{2\kappa^2}\delta R^a{}_b(\omega) \wedge *e_a{}^b - \frac{1}{2\kappa^2} R^a{}_b(\omega) \wedge \delta * e_a{}^b \tag{2.3}$$

burada,

$$R^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \tag{2.4}$$

olduğunu biliyoruz. Bunu yukardaki eşitlikte yerine yazalım.

$$\begin{aligned}\delta L \;=\; & -\frac{1}{2\kappa^2}\delta(d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b) \wedge *e_a{}^b \\ & -\frac{1}{2\kappa^2}(d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b) \wedge \delta * e_a{}^b\end{aligned} \tag{2.5}$$

Burada aşağıdaki düzenlemeleri yapalım. Öncelikle $\delta d = d\delta$ olacak şekilde dış türev ile varyasyon yer değiştirebileceğini görelim ve kullanalım.

$$d(\delta\omega^a{}_b \wedge *e_a{}^b) = d(\delta\omega^a{}_b) \wedge *e_a{}^b - \delta\omega^a{}_b \wedge d * e_a{}^b \tag{2.6}$$

$$d(\delta\omega^a{}_b) \wedge *e_a{}^b = \delta\omega^a{}_b \wedge d * e_a{}^b + Mod(d) \tag{2.7}$$

Burada Mod(d) terimi tam türevli bir terimdir ve varyasyonel alan denklemlerine katkıda bulunmaz.

$$\begin{aligned} \delta * e_a{}^b &= \delta \frac{1}{(4-2)!}\varepsilon_a{}^b{}_{cd} e^{cd} = \frac{1}{2}\varepsilon_a{}^b{}_{cd}\delta(e^c \wedge e^d) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_a{}^b{}_{cd}\delta e^c \wedge e^d + \frac{1}{2}\varepsilon_a{}^b{}_{cd} e^c \wedge \delta e^d \end{aligned} \tag{2.8}$$

yukardaki son eşitlikteki ikinci terime $c \leftrightarrow d$ dönüşümü yapılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\delta * e_a{}^b = \frac{1}{2}\varepsilon_a{}^b{}_{cd}\delta e^c \wedge e^d + \frac{1}{2}\varepsilon_a{}^b{}_{dc} e^d \wedge \delta e^c \tag{2.9}$$

olur.

$\varepsilon_a{}^b{}_{cd}$ tanımından ve dış çarpımın $\omega \wedge s = -s \wedge \omega$ özelliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned} \delta * e_a{}^b &= \frac{1}{2}\varepsilon_a{}^b{}_{cd}\delta e^c \wedge e^d + \frac{1}{2}\varepsilon_a{}^b{}_{cd} e^c \wedge \delta e^d \\ &= \varepsilon_a{}^b{}_{cd}\delta e^c \wedge e^d \\ &= \delta e^c \wedge \varepsilon_a{}^b{}_{cd} \wedge e^d \\ &= \delta e^c \wedge *e_a{}^b{}_c \end{aligned} \tag{2.10}$$

olur. Şimdi bunları yerine yazalım.

$$\begin{aligned} \delta L = &-\frac{1}{2\kappa^2}(\delta d\omega^a{}_b \wedge *e_a{}^b + \delta\omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \wedge *e_a{}^b + \omega^a{}_c \wedge \delta\omega^c{}_b \wedge *e_a{}^b) \\ &-\frac{1}{2\kappa^2}(d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b) \wedge \delta * e_a{}^b \end{aligned} \tag{2.11}$$

şimdi birinci terimin parantez içindeki ifadesini ele alalım. $d(\delta\omega^a{}_b \wedge *e_a{}^b) = \delta d\omega^a{}_b \wedge *e_a{}^b - \omega^a{}_b \wedge d * e_a{}^b$ ifadesini kullanarak

$$\delta\omega^a{}_b \wedge d * e_a{}^b + \delta\omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \wedge *e_a{}^b - \delta\omega^c{}_b \wedge \omega^a{}_c \wedge *e_a{}^b \tag{2.12}$$

yazabiliriz. Şimdi bu ifadenin üçüncü terimine $c \leftrightarrow a$ dönüşümü yapılırsa,

$$\delta\omega^a{}_b \wedge d * e_a{}^b + \delta\omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \wedge *e_a{}^b - \delta\omega^a{}_b \wedge \omega^c{}_a \wedge *e_c{}^b \tag{2.13}$$

yine üçüncü terime $b \leftrightarrow c$ dönüşümü yapılırsa,

$$\delta\omega^a{}_b \wedge d * e_a{}^b + \delta\omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \wedge *e_a{}^b - \delta\omega^a{}_c \wedge \omega^b{}_a \wedge *e_b{}^c \tag{2.14}$$

bunu $\delta\omega^a{}_c$ parantezine alırsak;

$$\delta\omega^a{}_b \wedge d * e_a{}^b + \delta\omega^a{}_c \wedge (\omega^c{}_b \wedge *e_a{}^b - \omega^b{}_a \wedge *e_b{}^c) \tag{2.15}$$

ikinci terimede $c \leftrightarrow b$ dönüşümü yapalım,

$$\delta\omega^a{}_b \wedge d * e_a{}^b + \delta\omega^a{}_b \wedge (\omega^b{}_c \wedge *e_a{}^c - \omega^c{}_a \wedge *e_c{}^b) \tag{2.16}$$

bunu $\delta\omega^a{}_b$ parantezine alalım;

$$\delta\omega^a{}_b \wedge (d * e_a{}^b + \omega^b{}_c \wedge *e_a{}^c - \omega^c{}_a \wedge *e_c{}^b) \tag{2.17}$$

olur. Şimdi daha önceden bildiğimiz;

$$D * e_a{}^b = d * e_a{}^b + \omega^b{}_c \wedge *e_a{}^c - \omega^c{}_a \wedge *e_c{}^b \tag{2.18}$$

ifedesini yerine yazalım. O halde,

$$\delta\omega^a{}_b \wedge D * e_a{}^b \tag{2.19}$$

olur.

$$\begin{aligned}
\delta * e_a{}^b &= \delta(\frac{1}{(4-2)!}\varepsilon_a{}^b{}_{cd}e^{cd}) \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_a{}^b{}_{cd}\delta e^c \wedge e^d + \frac{1}{2}\varepsilon_a{}^b{}_{cd}e^c \wedge \delta e^d \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_a{}^b{}_{cd}\delta e^c \wedge e^d + \frac{1}{2}\varepsilon_a{}^b{}_{cd}\delta e^c \wedge e^d \\
&= \varepsilon_a{}^b{}_{cd}\delta e^c \wedge e^d = \delta e^c \wedge (\varepsilon_a{}^b{}_{cd}e^d) \\
&= \delta e^c \wedge *e_a{}^b{}_c \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

şimdi bunu (2.11) ikinci kısmında yerine yazalım. Bu kısım

$$(d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b) \wedge \delta e^c \wedge *e_a{}^b{}_c \tag{2.21}$$

δe^c yi parantez içerisine dağıtırsak;

$$(d\omega^a{}_b \wedge \delta e^c + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \wedge \delta e^c) \wedge *e_a{}^b \tag{2.22}$$

olur. Şimdi parantez içindeki ifadeye $c \leftrightarrow a$ dönüşümü yapılırsa,

$$(d\omega^c{}_b \wedge \delta e^a + \omega^c{}_a \wedge \omega^a{}_b \wedge \delta e^a) \wedge *e_a{}^b \tag{2.23}$$

yine parantez içine $c \leftrightarrow b$ dönüşümü yapılırsa,

$$(d\omega^b{}_c \wedge \delta e^a + \omega^b{}_a \wedge \omega^a{}_c \wedge \delta e^a) \wedge *e_a{}^b \tag{2.24}$$

o halde

$$(d\omega^b{}_c + \omega^b{}_a \wedge \omega^a{}_c) \wedge \delta e^a \wedge *e_a{}^b{}_c \tag{2.25}$$

tüm bunlar ilk denklemde yerine yazılırsa,

$$\delta L = -\frac{1}{2\kappa^2}\delta\omega^a{}_b \wedge D * e_a{}^b - \frac{1}{2\kappa^2}\delta e^a \wedge R^b{}_c \wedge *e_a{}^b{}_c \tag{2.26}$$

elde edilir. (2.26) denklemindeki birinci terimi burulma cinsinden yazalım.

$$D * e_a{}^b = D * [e_{ac}\eta^{bc}] = D * e_{ac}\eta^{bc} + *e_{ac} \wedge D\eta^{bc}$$

Bu çalışmada metriğin gradyantı olan non-metricity tensörünü sıfır kabul edecektik, $D\eta^{bc} = 0 = Q_{ab}$. Böylece birinci terimdeki dış kovaryant türevi hesaplayarak sonuca ulaşırız.

$$\begin{aligned} D * e_{ab} &= D[\frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}e^{cd}] \\ &= \frac{1}{2}[D\varepsilon_{abcd}e^{cd} + \varepsilon_{abcd}De^c \wedge e^d - \varepsilon_{abcd}e^c \wedge De^d] \\ &= \frac{1}{2}[D\varepsilon_{abcd}] + 2\varepsilon_{abcd}De^c \wedge e^d \\ &= \frac{1}{2}[d\varepsilon_{abcd}e^{cd} - \omega^k{}_a\varepsilon_{kbcd}e^{cd} - \omega^k{}_b\varepsilon_{akcd}e^{cd} - \omega^k{}_c\varepsilon_{abkd}e^{cd} - \omega^k{}_d\varepsilon_{abck}e^{cd}] \\ &\quad +T^c \wedge *e_{abc} \end{aligned} \tag{2.27}$$

Burada parantez içindeki birinci terim sabitin türevi olduğu için sıfırdır, ikinci terimde $a \leftrightarrow b$ dönüşümü yapılırsa üçüncü terimin negatif işaretlisi olduğu görülür, dördüncü terimde $c \leftrightarrow d$ dönüşümü yapılırsa beşinci terim elde edilir.

$$\begin{aligned} D * e_a{}^b &= -\omega^k{}_d \varepsilon_{abck} e^{cd} + T^c \wedge *e_{abc} \\ &= \omega^k{}_d \varepsilon_{abkc} \wedge e^c \wedge e^d + T^c \wedge *e_{abc} \\ &= \omega^k{}_d * e_{abk} \wedge e^d + T^c \wedge *e_{abc} \end{aligned} \tag{2.28}$$

burada $D * e_a{}^b$ terimini daha sade biçimde yazabilmek için $*e_{abk} \wedge e^d$ terimine $*(e_{ab} \wedge e_k) = \iota_k * e_{ab}$ özelliği uygulayalım ve işlemlerde kolaylık açısından

$$X = *(e_{abk}) \wedge e^d = \iota_k * e_{ab} \wedge e^d \tag{2.29}$$

değişkenini atayalım.
Burada ι_k iç çarpımını aşağıdaki gibi $*e_{ab} \wedge e^d$ 3-form üzerine uygulayalım ve bunada A değişkenini atayalım.Yani;

$$A = \iota_k(*e_{ab} \wedge e^d) \tag{2.30}$$

diyelim.

$$A = \iota_k * e_{ab} \wedge e^d + *e_{ab} \iota_k e^d \tag{2.31}$$

Son eşitlikteki sağ tarafındaki ilk terime yukarıda X demiştik.Bunu yerine yazalım.

$$A = X + *e_{ab} \delta_k^d \tag{2.32}$$

Bu eşitlikte X'i yalnız bırakalım.

$$X = A - *e_{ab} \delta_k^d \tag{2.33}$$

Şimdi A eşiliğinin parentez içindeki ifadeye de $*(e_{ab} \wedge e_k) = \iota_k * e_{ab}$ özelliğini uygulayalım.

$$A = \iota_k(\iota_b * e_a \wedge e^d) \tag{2.34}$$

parantez içindeki ifadeye Y değişkenini atayalım.Yani;

$$\iota_b * e_a \wedge e^d = Y \tag{2.35}$$

diyelim. ι_b yi $(*e_a) \wedge e^d$ 5-formu üzerine uygulayalım.

$$\iota_b[(*e_a) \wedge e^d] = \iota_b * e_a \wedge e^d - *e_a \delta_b^d \tag{2.36}$$

$\iota_b * e_a \wedge e^d = Y$ adlandırmasını yerine yazalım.

$$\iota_b[(*e_a) \wedge e^d] = Y - *e_a \delta_b^d \tag{2.37}$$

Bu eşitlikteki parantez içindeki ifadeye Z değişkenini atayalım.Yani;

$$Z = *e_a \wedge e^d = \iota_a * 1 \wedge e^d \tag{2.38}$$

terimini daha sade halde yazabiliriz. ι_a iç çarpım işlemini aşağıdaki şekilde bir 6-form üzerine uygularsak

$$\iota_a(*1 \wedge e^d) = \iota_a * 1 \wedge e^d + *1\delta_a^d \tag{2.39}$$

4-boyutlu bir manifold üzerinde 5-form sıfıra eşit olacağı için denklemin sağ tarafını sıfıra eşitleriz.

$$0 = \iota_a * 1 \wedge e^d + *1\delta_a^d \tag{2.40}$$

$\iota_a * 1 \wedge e^d = Z$ adlandırmasını yerine yazalım ve Z'yi yalnız bırakalım.

$$Z = - * 1\delta_a^d \tag{2.41}$$

bulduğumuz bu sonucu $*(e_{ab} \wedge e_k) = \iota_k * e_{ab}$ özelliğini kullanarak (2.36) denleminde yerine yazalım.

$$\iota_b(Z) = \iota_b * 1\delta_a^d = *e_b \delta_a^d \tag{2.42}$$

$$Y = *e_a \delta_b^d - {\delta_a}^d * e_b \tag{2.43}$$

bunuda yine $*(e_{ab} \wedge e_k) = \iota_k * e_{ab}$ özelliğini kullanarak (2.31) denleminde yerine yazalım.

$$A = \iota_k(*e_a \delta_b^d - \delta_a{}^d * e_b) = \delta_b^d * e_{ak} - \delta_a^d * e_{bk}$$

bulduğumuz bu sonucu da (2.29) denkleminde yerine yazalım.

$$X = \delta_b^d * e_{ak} - \delta_a^d * e_{bk} - \delta_d^k * e_{ab} \tag{2.44}$$

dolayısıyla;

$$*(e_{abk}) \wedge e^d = \delta_b^d * e_{ak} - \delta_a^d * e_{bk} - \delta_d^k * e_{ab} \tag{2.45}$$

olarak bulunmuş olur. Şimdi bunu (2.28) denkleminde yerine yazalım.

$$\begin{aligned} D * e_{ab} &= \omega^k{}_d \wedge (\delta_b^d * e_{ak} - \delta_a^d * e_{bk} - \delta_d^k * e_{ab}) + T^c \wedge *e_{abc} \\ &= \omega^k{}_d \wedge \delta_b^d * e_{ak} - \omega^k{}_d \wedge \delta_a^d * e_{bk} - \omega^k{}_d \wedge \delta_d^k * e_{ab} + T^c \wedge *e_{abc} \\ &= \omega^k{}_b \wedge *e_{ak} - \omega^k{}_a \wedge *e_{bk} - \omega^k{}_k \wedge *e_{ab} + T^c \wedge *e_{abc} \end{aligned} \tag{2.46}$$

Non-metricity tensörünün sıfır olmasıyla buradaki bağlantı tamamen antisimetrik hale gelir ve simetrik bileşenleri sıfır olur, yani $\omega^k{}_k = 0$. Birinci terimde $b \leftrightarrow a$ dönüşümü yapılırsa,

$$D * e_{ab} = T^k \wedge *e_{abk} \tag{2.47}$$

olur. O halde,

$$\begin{aligned} D * e_a{}^b &= (-\omega^k{}_k \wedge *e_{ab} + T^k \wedge *e_{abk})\eta^{bc} \\ D * e_a{}^b &= T^c \wedge *e_a{}^b{}_c \end{aligned} \tag{2.48}$$

Bunu varyasyon denkleminde yerine yazacak olursa;

$$\delta L = -\frac{1}{2\kappa^2}\delta\omega^a{}_b \wedge [T^c \wedge *e_a{}^b{}_c] - \frac{1}{2\kappa^2}\delta e^a \wedge R^b{}_c(\omega) \wedge *e_{ab}{}^c \tag{2.49}$$

Böylece Einstein-Hilbert eyleminin eğriliğe ve burulmaya sahip uzay-zamanda varyasyonu elde edilmiştir.

Burada Einstein-Hilbert eylemi (pseudo)-Rieman-sal uzay-zaman geometrilerinde yazılmıştır. (Pseudo)-Rieman uzay-zaman geometrilerinde $Q^a{}_b = 0,\ T^a = 0,\ R^a{}_b \neq 0$ alınır. Bu durumda bağlantı, Levi-Civita antisimetrik 1-formu $\omega^a{}_b$ ye indirgenir. Buna göre (2.49) denklemi;

$$\delta L = -\frac{1}{2}\delta e^a \wedge R^b{}_c(\omega) \wedge *e_{ab}{}^c \tag{2.50}$$

olur. Varyasyon ilkesine göre $\delta L = 0$ olmalıdır. Buradan

$$-\frac{1}{2}R^{bc}(\omega) \wedge *e_{abc} = 0 \tag{2.51}$$

boşlukta Einstein alan denklemleri elde edilir. Burada Einstein tensörü

$$G_a = -\frac{1}{2}R^{bc}(\omega) \wedge *e_{abc} \tag{2.52}$$

şeklinde tanımlanır. Dış cebir işlemlerini kullanarak Einstein tensörünü değişik şekillerde yazalım. İlk olarak bazı özellikleri kullanarak aşağıdaki bağıntıları elde edelim.

$$\begin{aligned}
e^f \wedge *e_{abc} &= \delta_a{}^f * e_{bc} - \delta_b{}^f * e_{ac} - \delta_c{}^f * e_{ab} \\
e^g \wedge e^f \wedge *e_{abc} &= \delta_a{}^f e^g \wedge *e_{bc} - \delta_b{}^f e^g \wedge *e_{ac} - \delta_c{}^f e^g \wedge *e_{ab} \\
&= -\delta_a{}^f \delta_b{}^g * e_c + \delta_a{}^f \delta_c{}^g * e_b + \delta_b{}^f \delta_a{}^g * e_c \\
&= -\delta_b{}^f \delta_c{}^g * e_a - \delta_c{}^f \delta_a{}^g * e_b + \delta_c{}^f \delta_b{}^g * e_a
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Bu ifadeleri ilk denklemde yerine yazacak olursak;

$$\begin{aligned}
G_a &= -\frac{1}{4}[R_{ba,}{}^{bc} * e_c - R_{ca,}{}^{bc} * e_b - R_{ab,}{}^{bc} * e_c + R_{cb,}{}^{bc} * e_a \\
&\quad + R_{ac,}{}^{bc} * e_b - R_{bc,}{}^{bc} * e_a]
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Einstein tensör 3-formunu, 1-formun starı şeklinde aşağıdaki gibi yazarız.

$$G_a = R_{ac,}{}^{bc} * e_b - \frac{1}{2}R_{bc,}{}^{bc} * e_a \tag{2.55}$$

$**e^a = e^a$ olduğundan Einstein tensörünün starı;

$$*G_a = R_{ac,}{}^{bc} e_b - \frac{1}{2} R_{bc,}{}^{bc} e_a \tag{2.56}$$

şeklinde yazılır. Burada aşağıdaki tanımları kullanarak:

- **Ricci eğrilik 1-formu**

$$R_a = \iota_b R^b{}_a = \frac{1}{2} R^b_{gl,a} \iota_b e^{gl} = R_{ac,}{}^{bc} e_b \tag{2.57}$$

- **Eğrilik skaları**

$$R = \iota_a (Ric)^a = \iota_a (\iota^b R^a{}_b) = \iota_a (R^a{}_{c,}{}^{bc} e_b) = R_{bc,}{}^{bc} \tag{2.58}$$

Eintein tensörünün starını aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$*G_a = R_a - \frac{1}{2} R e_a \tag{2.59}$$

3. EINSTEIN-MAXWELL TEORİSİ

Genel Relativitenin sonuçlarının büyük bir kısmını uzak yıldız ve galaksilerden gelen fotonlar yardımıyla test edebiliriz. Bu yüzden, herhangi bir Gravitasyon teorisini tam olarak doğrulamak için, bu teori elektromanyetik alanlara bağlanmalıdır. Gravitasyonun elektromanyetik alanlara minimal olarak bağlanması veya çiftlenmesi Einstein-Maxwell teori olarak bilinir ve aşağıdaki eylem tarfından tariflenir:

$$S = \int \{ \frac{1}{2\kappa^2} R_{ab} \wedge *(e^a \wedge e^b) - \frac{1}{2} F \wedge *F \} \tag{3.1}$$

Burada q elektromanyetik bağlanma sabiti, F elektromanyetik alan tensörü içinde gizlidir.

Bu minimal teoride uzay-zaman geometrisi elektromanyetik alanların varlığı nedeniyle değişir. Fakat, Maxwell denklemlerinin seçilen koordinattan bağımsız olması nedeniyle bu denklemler Minkowski uzayındaki gibi aynı kalır.

Bu teorinin statik, küresel simetrik çözümü Reissner-Nordström çözümü olarak bilinir. Bu teorinin diğer çözümleri Ehlers ve Kunt (1962), Aichelburg (1971) ve Stephani ve diğ. (2005) kaynaklarında bulunabilir.

Bu teoriyi minimal olmayan bağlanma veya çiftlenim terimleri içerecek şekilde genişletmenin bir yolu; eğrilik tensörü ve Maxwell tensörünün tensörel çarpımından oluşan terimleri teoriye eklemektir. Bu tür bağlanma terimleri ilk olarak Prasanna tarafından düşünüldü (Prasanna 1971). Daha sonra Horndeski tarafından elektrik yük korunumu ve eğrilik tensörü arasındaki ilişki hakkında daha fazla öngörüler elde edebilmek için incelendi (Horndeski 1976). Bu bağlanma terimlerinin eğri uzay-zaman arka planında QED deki etkin foton eyleminin 1-loop vakum-polarizasyonundan elde edilebileceğinin gösterilmesi bu terimleri önemli kılmaktadır (Drummond ve Hathrell 1980).

Bu minimal olmayan terimlerin bazı özel kombinasyonları 5-boyutlu gravitasyonel modellerden dört boyuta indirgeme sonucu ortaya çıktığı görülmüştür (Dereli ve Üçoluk 1990, Müller-Hoissen 1988, Buchdahl 1979).

Son zamanlarda yine bu terimlerin minimal olmayacak şekilde bağlanmış belirli bir kombinasyonu için küresel simetrik statik, kozmolojik ve pp-wave çözümleri incelenmiştir (Balakin 2005, Balakin ve Zimdahl 2005, Balakin ve Zayats 2008, Balakin ve diğ. 2008, Balakin ve diğ. 2009, Balakin ve Ni 2010).

4. RF^2 FORMUNDA ÇİFTLENİMLİ TERİMLER İÇEREN GRAVİTASYON TEORİSİ

Minimal olmayacak şekilde (non-minimal) bağlanmış Lagrangian yoğunluğu $L_{NM} = L_{NM}(A, e, \omega)$ eğrilik ve Maxwell tensörünün $Y(R)F^m$ formunda herhangi bir invaryant dereceden bağlanmalarını içerebilir (n,m=1,2,.. , tensörün kuvvetini temsil eder). Bu çalışmada biz sadece RF^2-tipi bağlanmış terimler içerecek tarzda minimal olmayan terimlerin varlığını düşüneceğiz.

Bu çalışmada birinci mertebeden varyasyon formalizmi kullanacğız. F elektromagnetik 2-formları olarak homojen alanları; yani, μ Lagrange çarpanı 2-formu varyasyonu yardımıyla türetilen $dF = 0$ denklemini sağlayan elektromanyetik alanları düşüneceğiz. Aşağıdaki sırasıyla Einstein-Hilbert, Maxwell, minimal olmayacak şekilde bağlanmış Lagrangian yoğunlukları ve sınırlandırma terimlerini içeren aşağıdaki eylem fonksiyonelini düşünelim:

$$I = \int_M \left\{ \frac{1}{2\kappa^2} R^{ab} \wedge *e_{ab} + \lambda * 1 - \frac{1}{2} F \wedge *F + L_{NM} + T^a \wedge \lambda_a + \mu \wedge dF \right\} \quad (4.1)$$

Burada λ kozmolojik sabit, κ gravitasyonel sabit, λ_a ve μ ise Lagrange çarpanı 2-formlarıdır.

4.1 Genel Bir Lagrangiandan Alan Denklemlerinin Türetilmesi

M, n boyutlu bir manifold ve $A, B \in \Lambda^p(M)$ olsun. Burada $\Lambda^p(M)$ M üzerinde bir p-form dur. Şimdi aşağıdaki Lagrange'ın varyasyonunu hesaplayalım.

$$L[A, B, e^a] = A \wedge *B \quad (4.2)$$

A, B ve e^a bağımlı değişkenlerine bağlı varyasyon alırsak

$$\delta L = \delta A \wedge *B + A \wedge \delta * B \quad (4.3)$$

olur. Bu son eşitlikte sağ taraftaki terimlerin ikincisindeki $*B$ 'yı hodge star operatörünü kullanarak yerine yazalım ve varyasyonu üzerine uygulayalım.

$$\begin{aligned} A \wedge \delta * B &= A \wedge \delta(\frac{1}{p!}B_{i_1 \cdots i_p} * e^{i_1 \cdots i_p}) \\ &= A \wedge \frac{1}{p!}(\delta B_{i_1 \cdots i_p}) * e^{i_1 \cdots i_p} + A \wedge \frac{1}{p!}B_{i_1 \cdots i_p}\delta * e^{i_1 \cdots i_p} \end{aligned} \tag{4.4}$$

hodge star operatörünün aşağıdaki özelliğini düşünelim ve yukarıdaki son eşitlikteki birinci terime uygulayalım.

$$\theta \wedge *\vartheta = \vartheta \wedge *\theta \tag{4.5}$$

Burada θ , $\vartheta \in \Lambda^p(M)$ dir.

$$A \wedge \delta * B = \frac{1}{p!}(\delta B_{i_1 \cdots i_p})e^{i_1 \cdots i_p} \wedge *A + A \wedge \frac{1}{p!}B_{i_1 \cdots i_p}\delta * e^{i_1 \cdots i_p} \ . \tag{4.6}$$

şimdi yukardaki eşitliğin sağ tarafının ilk terimi için $B \in \Lambda^p(M)$ koçerçeveler cinsinden yazılımını ve varyasyonunu düşünelim.

$$\begin{aligned} \delta B &= \delta(\frac{1}{p!}B_{i_1 \cdots i_p}e^{i_1 \cdots i_p}) \\ &= \frac{1}{p!}(\delta B_{i_1 \cdots i_p})e^{i_1 \cdots i_p} + (\delta e^{i_1}) \wedge \frac{1}{(p-1)!}B_{i_1 \cdots i_p}e^{i_2 \cdots i_p} \end{aligned} \tag{4.7}$$

burada ikinci terim için iç çarpım özelliğini kullanırsak,

$$\delta B = \frac{1}{p!}(\delta B_{i_1 \cdots i_p})e^{i_1 \cdots i_p} + (\delta e^{i_1}) \wedge (\imath_{i_1} B) \tag{4.8}$$

$$\frac{1}{p!}(\delta B_{i_1 \cdots i_p})e^{i_1 \cdots i_p} = \delta B - (\delta e^a) \wedge (\imath_a B) \tag{4.9}$$

şimdide (4.6) eşitliğinin sağ tarafının ikinci terimi için hodge star açılımını yerine yazalım.

$$\frac{1}{p!}B_{i_1 \cdots i_p}\delta * e^{i_1 \cdots i_p} = \frac{1}{p!}B_{i_1 \cdots i_p}\delta\left[\frac{1}{(n-p)!}\epsilon^{i_1 \cdots i_p}{}_{i_{p+1} \cdots i_n}e^{i_{p+1} \cdots i_n}\right] \tag{4.10}$$

iç çarpım özelliğini kullanalım.

$$= (\delta e^{i_{p+1}}) \wedge \frac{1}{p!(n-p-1)!}\epsilon^{i_1 \cdots i_p}{}_{i_{p+1} \cdots i_n}B_{i_1 \cdots i_p}e^{i_{p+2} \cdots i_n} \tag{4.11}$$

$$= (\delta e^a) \wedge (\imath_a * B) \tag{4.12}$$

şimdi bu bulduklarımızı (4.3) de yerine yazalım.

$$\begin{aligned} \delta L &= \delta(A \wedge *B) \\ &= \delta A \wedge *B + \delta B \wedge *A - \delta e^a \wedge [(\imath_a B) \wedge *A - (-1)^p A \wedge (\imath_a * B)] \end{aligned} \tag{4.13}$$

burada A , $B \in \Lambda^p(M)$ dır.

Şimdi bu genel varyasyon ifadesini kullanarak (4.1) eyleminin $\{e^a\}$, $\{\omega^a{}_b\}$ ve diğer temel alan değişkenlerine göre sonsuz küçük varyasyonlarını aşağıdaki gibi yazabiliriz (kapalı bir form yoğunluğuna kadar):

$$\begin{aligned} \delta L &= \delta e^a \wedge \left(\frac{1}{2\kappa^2} R^{bc} \wedge *e_{abc} + \lambda * e_a + \tau_a + D\lambda_a\right) + \delta\omega^{ab} \wedge \left(e_{[a} \wedge \lambda_{b]} + \Sigma_{ab}\right) \\ &\quad + \delta A \wedge (-d * F + \frac{\partial L_{NM}}{\partial A}) + \delta\lambda_a \wedge T^a + \delta\mu \wedge dF \end{aligned} \tag{4.14}$$

Burada $[ab]$ sembolü a, b indislerinin antisimetrik olduğu anlamına gelir. Levi-Civita bağlantısıyla ilişkili τ_a gerilme-enerji 3-formlarını yukarıdaki varyasyondan yazabiliriz

$$\tau_a = {}^{Max}\tau_a + {}^{NM}\tau_a \tag{4.15}$$

burada Maxwell gerilme-enerji tensorü ve minimal olmayacak şekilde bağlanmış gerilme-enerji tensorünü

$${}^{Max}\tau_a = \frac{1}{2}(\iota_a F \wedge *F - F \wedge \iota_a * F) \tag{4.16}$$

$${}^{NM}\tau_a = \frac{\partial L_{NM}}{\partial e^a}. \tag{4.17}$$

olarak ifade edebiliriz.

Açısal momentum 4-formları yine yukarıdaki (4.14) varyasyonundan

$$\Sigma_{ab} = \frac{\partial L_{NM}}{\partial \omega^{ab}} = S_{ab,c} * e^c \tag{4.18}$$

olarak yazılır.

Yukarıdaki bağlantı alan denkleminden λ_a çözülerek, Einstein alan denklemleri ve Maxwell denklemleri

$$-\frac{1}{2\kappa^2}R^{bc}\wedge *e_{abc} - \lambda * e_a = -\tau_a - 2D\imath^b\Sigma_{ba} - \frac{1}{2}e_a \wedge D\imath_{bc}\Sigma^{cb}. \tag{4.19}$$

$$dF = 0, \qquad -d * F + \frac{\partial L_{NM}}{\partial A} = 0 \tag{4.20}$$

$T^a = 0$ olduğu hatırda tutularak bulunabilir. Bu çalışmada minimal olmayacak şekilde bağlanmış Lagrangianı aşağıdaki gibi düşüneceğiz.

$$L_{NM} = \; = \; 2a_1 R_{ab}F^{ab}\wedge *F + 2a_2\imath^a F \wedge R_a \wedge *F + 2a_3 RF \wedge *F \tag{4.21}$$

burada a_i ler uygun seçilebilecek bağlanma sabitleridir. Ayrıca, burada kozmolojik sabitin sıfır olduğunu kabul ediyoruz. Bu çalışma boyunca $F = \frac{1}{2}F_{ab}e^{ab}$ elektromanyetik tensörünün ve $R_{ab} = \frac{1}{2}R_{ab,cd}e^{cd}$ eğrilik tensörünün e^a ko-çerçevesi ile iç çarpımlarını aşağıdaki gibi göstereceğiz.

$$\iota_a F = F_{ab}e^b = F_a \qquad 1-form \tag{4.22}$$

$$\iota_{ba}F = F_{ab} \qquad 0-form \tag{4.23}$$

$$\iota_a R^{ab} = R^{ab}{}_{,ad}e^d = R^b \qquad Ricci\ 1-form \tag{4.24}$$

$$\iota_{ba}R^{ab} = R^{ab}{}_{,ab} = R \qquad curvature\ scalar\ and\ 0-form \tag{4.25}$$

Burada (4.21) deki ilk terim ilk olarak Prasanna (1971) tarafından düşünüldü. Bu 3 minimal olmayacak şekilde bağlanmış terim için sırasıyla ${}^i\tau^c$ gerilme-enerji tensörü:

$$\begin{aligned} {}^1\tau^c &= -a_1(4F^{ac}\imath^b F \wedge *R_{ab} + \imath^c F \wedge *R_{ab}F^{ab} - R_{ab}F^{ab}\wedge \imath^c * F \\ &\quad + \imath^c R_{ab}F^{ab}\wedge *F - F \wedge \imath^c * R_{ab}F^{ab}) \end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned} {}^2\tau^c &= a_2[2RF^c \wedge *F - 2F^c \wedge R_a \wedge \imath^a * F + 2F_{ab}\imath^c R^{ab}\wedge *F \\ &\quad + 2\imath^c R^{ba}\wedge F_a \wedge \imath_b * F + F^{ac}R_a \wedge *F - \imath^c R_a \imath^a F \wedge *F \\ &\quad - F^c \wedge *(F^a \wedge R_a) + F^a \wedge R_a \wedge \imath^c * F + F \wedge \imath^c * (F^a \wedge R_a)] \end{aligned} \tag{4.27}$$

$$ {}^3\tau^c = -2a_3[2\imath^c R^b \imath_b F \wedge *F + 2\imath^c R^b F \wedge \imath_b * F + \imath^c F \wedge *RF \tag{4.28}$$

ve bu her bir enerji-momentum tensörünü toplayarak ${}^{NM}\tau_a ={}^1 \tau_a +{}^2 \tau_a +{}^3 \tau_a$ non-minimal kısmın enerji momentumu bulunur. Minimal kısım ile toplanarak toplam τ_a enerji-momentum tensörü bulunur.

(4.19) denkleminde açısal momentum tensörü Σ^{ab}:

$$\begin{aligned} \Sigma^{ab} &= (2a_1 - 2a_2 + 2a_3)D(F^{ab} * F) + (2a_3 - a_2)D(F^b \wedge \imath^a * F - F^a \wedge \imath^b * F) \\ &\quad -2a_3 D(F \wedge \imath^{ab} * F) \end{aligned} \tag{4.29}$$

ve Maxwell alan denklemleri:

$$dF = 0, \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned} & d\{- * F + 4a_1 F^{ab} * R_{ab} + 2a_2[R_a \wedge \imath^a * F - R * F + *(F^a \wedge R_a)] \\ & +4a_3 R * F\} = 0 \end{aligned} \tag{4.31}$$

olarak bulunur.

5. RF^2 FORMUNDA ÇİFTLENİMLİ TERİMLER İÇEREN HOLOGRAFİK SÜPERİLETKENLER

Son zamanlarda büyük ilgi gören Anti-de Sitter/Konformal Alan Teori (AdS/CFT) dualitesi (d+1) boyutlu AdS iç kısım uzay-zamanı ve bunun sınırındaki kuantum alan teorisi arasında güçlü bir bağıntıyı göstermektedir (Maldacena 1998). Bu sınır üzerinde d-boyutlu bir süperiletkenin kritik sıcaklık, faz geçişi gibi temel özellikleri bu (d+1)-boyutlu holografik dual modelle tekrar ortaya koyulabilir (Hartnoll ve diğ. 2008).

Bu model yüklü bir skalar alan ve bir elektromanyetik alanın AdS arka planında minimal olarak bağlanmasıyla elde edilir. Bu minimal holografik modeli Weyl tensörü ve Maxwell alanının aynı Lagrangianda minimal olmayacak ve $W_{ab}F^{ab} * F$ bağlanmaları bulunacak şekilde genişletmek oldukça ilginçtir (Wu ve diğ. 2011, Zhao ve diğ. 2013).

Bu konformal değişmez olan Weyl tensörlü model yukarıdaki genel RF^2-tipi Lagrangianda $a_3 = \gamma/3$, $a_1 = a_2 = \gamma$, alınarak elde edilebilir. Dahası bu üç a_1, a_2, a_3 sabitli terimlerin özel bir kombinasyonunu içeren model, genelleştirilmiş gravitasyon teorilerinin Kaluza-Klein indirgemesinden elde edilebilir (Dereli ve Üçoluk 1990).

Bu minimal olmayan (non-minimal) terimlerin başka bir kombinasyonu da, yine, beş boyutlu bir Gauss-Bonnet gravitasyon modelinin 4-boyuta indirgenmesiyle elde edilebilir (R.C. Myers ve diğ. 2011). Bu ikinci konbinasyonlu modelin holografik özellikleri Schwarzschild-AdS arkaplanında Z. Zhao ve diğ. (2013) makalesinde ve yüklü kara delik arkaplanında ise R.G. Cai and D.W. Pang (2011) makalesinde incelenmiştir.

Diğer yandan bu genel RF^2-tipi minimal olmayan, skalar alansız ve kozmolojik sabitsiz modeller; karanlık madde, karanlık enerji, gravitasyonel dalgalar ve evrendeki ilksel manyetik alan gibi önemli problemleri çözmek için kullanıldı (Drummond ve Hathrell 1980, Dereli ve Sert 2011, Sert 2012, Sert ve Adak 2012, Sert 2013, Sert ve Adak 2013).

Bu çalışmanın bu bölümünde ise biz bu genel keyfi ve pertürbatif olarak küçük alınan sabitler içeren, minimal olmayan holografik süperiletken modeline yarı analitik çözümleri inceleyeceğiz. Bu model için kritik sıcaklığı ve skalar alan yoğuşma miktarını elde edeceğiz.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{\kappa^2}\left[R_{ab}\wedge *e^{ab} + \lambda * 1 + (de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b)\wedge \lambda_a\right] \\ &\quad -\frac{1}{2}F\wedge *F - D\psi^\dagger \wedge *D\psi - m^2\psi^\dagger\psi * 1 \\ &\quad +2a_1 F^{ab}R_{ab}\wedge *F + 2a_2 F^a \wedge R_a \wedge *F + 2a_3 RF\wedge *F \end{aligned} \tag{5.1}$$

Bu Lagrangianın varyasyonundan elde edilecek alan denklemlerine ulaşmak için hesaplarda sık kullanacağımız aşağıdaki bağıntının nasıl çıkarıldığını önceki alt bölümde (4.13) ile göstermiştik.

$$\delta(A\wedge *B) = \delta A\wedge *B + \delta B \wedge *A - \delta e^a \wedge [\iota_a B\wedge *A + A\wedge \iota_a * B] \tag{5.2}$$

Şimdi tekrar (5.1) Lagrangianına dönelim ve her bir terimin varyasyonunu ayrı ayrı hesaplayalım:

1. Terim için varyosyon hesabı:

$$\delta(R_{ab}\wedge *e^{ab}) = \delta R_{ab}\wedge *e^{ab} + R_{ab}\wedge \delta * e^{ab} \tag{5.3}$$

$R_{ab} = D\omega_{ab}$ eğrilik tensörünü ve hodge star operatörünün açılımını kullanalım.

$$\delta(R_{ab}\wedge *e^{ab}) = \delta D\omega_{ab}\wedge *e^{ab} + R_{ab}\wedge \delta\frac{1}{2}\varepsilon^{ab}{}_{cd}e^d \tag{5.4}$$

Burada ilk terim için, aşağıdaki kovaryant türevin uygulanışını düşünürsek

$$D(\delta\omega_{ab}\wedge *e^{ab}) = D\delta\omega_{ab}\wedge *e^{ab} - \delta\omega_{ab}\wedge D * e^{ab} \tag{5.5}$$

bu çalışmada $T^c = 0 = D * e^{ab}$ olduğundan, son terim ortadan kalkar ve $D\delta\omega_{ab} \wedge *e^{ab} = 0$.

$$\begin{aligned} \delta(R_{ab} \wedge *e^{ab}) &= R_{ab} \wedge \delta e^c \frac{1}{2}\varepsilon^{ab}{}_{cd} e^d \\ &= \delta e^a \wedge R_{ab} \wedge *e_a{}^{bc} \end{aligned} \tag{5.6}$$

2. Terim için varyosyon hesabı:

Bu varyasyonu hesaplamak için hodge star operatörünün açılımını yazalım ve varyasyon alalım.

$$\begin{aligned} \delta(*1) &= \delta(\frac{1}{4!}\varepsilon_{abcd} e^{abcd}) \\ &= \frac{1}{5!}\varepsilon_{abcdf}(\delta e^a \wedge e^{bcdf} + e^a \wedge \delta e^b \wedge e^{cdf} + e^{ab} \wedge \delta e^c \wedge e^{df} \\ &\quad + e^{abc} \wedge \delta e^d \wedge e^f + e^{abcd} \wedge \delta e^f) \\ &= \delta e^a \wedge \frac{5}{5!}\varepsilon_{abcd} e^{bcd} \\ &= \delta e^a \wedge \frac{1}{(5-1)!}\varepsilon_{abcd} e^{bcd} \\ &= \delta e^a \wedge *e_a \end{aligned} \tag{5.7}$$

3. Terim için varyosyon hesabı:

$De^a = de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b$ eşitliğini aşağıda yerine yazalım.

$$\begin{aligned} \delta[(de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b) \wedge \lambda_a] &= \delta(De^a \wedge \lambda_a) \\ &= \delta e^a \wedge D\lambda_a + \delta\lambda_a \wedge T^a \end{aligned} \tag{5.8}$$

4. Terim için varyosyon hesabı:

Bu terimin varyasyonunu alabilmek için yukardaki bölümde nasıl çıkarıldığını hesapladığımız (5.2) formülasyonunu kullanalım.

$$\delta(F \wedge *F) \;=\; 2\delta(F \wedge *F) - \delta e^a \wedge [\iota_a F \wedge *F - F \wedge_a *F] \tag{5.9}$$

$F = dA$ olduğunu yerine yazalım.

$$= \;\delta A \wedge 2d * F - \delta e^a \wedge [\iota_a F \wedge *F - F \wedge \iota_a * F] \tag{5.10}$$

5. Terim için varyosyon hesabı:

Yine bu terimin varyasyonunu alabilmek için (5.2) formülasyonunu kullanalım.

$$\delta(D\psi^\dagger \wedge *D\psi) = \delta D\psi^\dagger \wedge *D\psi + \delta D\psi \wedge *D\psi^\dagger - \delta e^a \wedge [\iota_a D\psi \wedge *D\psi^\dagger + D\psi \wedge_a *D\psi^\dagger] \quad (5.11)$$

şimdi dış türevin dış çarpımın diğer tarafına nasıl geçtiğini göstermek için $\delta\psi^\dagger \wedge *D\psi$ ifadesinin kovaryant dış türevini alalım. Burada alacağımız bu kovaryant dış türev 6-form olduğundan 5-boyutlu manifold üzerinde sıfıra eşittir. Böylece aşağıdaki eşitliği bulmuş oluruz.

$$D(\delta\psi^\dagger \wedge *D\psi) = D\delta\psi^\dagger \wedge *D\psi + \delta\psi^\dagger \wedge D * D\psi = 0 \quad (5.12)$$

$$D\delta\psi^\dagger \wedge *D\psi = -\delta\psi^\dagger \wedge D * D\psi \quad (5.13)$$

Bu sonucu D kovaryant türevini aşağıdaki gibi açarak da bulabiliriz. $D\psi^\dagger = d\psi^\dagger - iA\psi^\dagger$ olduğunu kullanalım ve varyasyonunu alalım.

$$\delta(d\psi^\dagger - iA\psi^\dagger) \wedge *D\psi = (d\delta\psi^\dagger - iA\delta\psi^\dagger) \wedge *D\psi \quad (5.14)$$

sağ taraftan $*D\psi$ dağıtalım.

$$\delta(d\psi^\dagger - iA\psi^\dagger) \wedge *D\psi = d\delta\psi^\dagger \wedge *D\psi - iA\delta\psi^\dagger \wedge *D\psi \quad (5.15)$$

birinci terimde $d\delta\psi^\dagger \wedge *D\psi = -\delta\psi^\dagger \wedge d * D\psi$ olduğunu kullanalım.

$$\delta(d\psi^\dagger - iA\psi^\dagger) \wedge *D\psi = -\delta\psi^\dagger \wedge d * D\psi - \delta\psi^\dagger iA \wedge *D\psi \quad (5.16)$$

$-\delta\psi^\dagger$ parantezine alalım.

$$\delta(d\psi^\dagger - iA\psi^\dagger) \wedge *D\psi = -\delta\psi^\dagger \wedge [d * D\psi + iA \wedge *D\psi] \quad (5.17)$$

yukarıdaki parantez içindeki ifade $*D\psi^\dagger = d*\psi^\dagger - iA*\psi^\dagger$ dış türevi olduğunu görülür. Dolayısıyla,

$$\delta(d\psi^\dagger - iA\psi^\dagger)\wedge *D\psi \;=\; -\delta\psi^\dagger \wedge D*D\psi \tag{5.18}$$

olur.

6. Terim için varyosyon hesabı:

$$\delta(m^2\psi^\dagger\psi*1) \;=\; \delta\psi^\dagger m^2\psi*1 \tag{5.19}$$

bu $\psi^\dagger$ ye göre varyasyondur. Şimdi e^a ya göre varyasyona bakalım.

$$\begin{aligned}\delta(m^2\psi^\dagger\psi\frac{1}{5!}\varepsilon_{abcdf}e^{abcdf}) &= m^2\psi^\dagger\psi\frac{1}{5!}\varepsilon_{abcdf}(\delta e^a\wedge e^{bcdf} + e^a\wedge\delta e^b\wedge e^{cdf}....\\ &\quad +e^d + e^{abcd}\wedge\delta e^f)\\ &= \delta e^a\wedge\frac{5}{5!}\varepsilon_{abcdf}e^{bcdf}\\ &= \delta e^a\wedge\frac{1}{(5-1)!}\varepsilon_{abcdf}e^{bcdf}\\ &= \delta e^a\wedge m^2\psi^\dagger\psi*e_a \end{aligned}\tag{5.20}$$

7. Terim için varyosyon hesabı:

Bu varyasyon hesabını yapabilmek için (5.2) formülasyonunu kullanalım.

$$\begin{aligned}\delta(F^{ab}R_{ab}\wedge *F) &= \delta(F^{ab}R_{ab})\wedge *F + \delta F\wedge *F^{ab}R_{ab}\\ &\quad -\delta e^c\wedge[\iota_c F\wedge *F^{ab}R_{ab} - F^{ab}R_{ab}\wedge\iota_c*F]\end{aligned}\tag{5.21}$$

$F = dA$ olduğunu yerine yazarak A ya göre varyasyon alırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\delta F\wedge *F^{ab}R_{ab} \;=\; \delta dA\wedge *F^{ab}R_{ab} = \delta A\wedge d*F^{ab}R_{ab} \tag{5.22}$$

şimdi (5.21) denkleminin sağ tarafının ilk ifedesini ele alalım ve varyasyonu üzerine uygulayalım.

$$\delta(F_{ab}R_{ab})\wedge *F = \delta F^{ab}R_{ab}\wedge *F + F^{ab}\delta R_{ab}\wedge *F \tag{5.23}$$

$R_{ab} = D\omega_{ab}$ ve $F^{ab} = \iota^{ab} F$ olduğunu kullanalım.

$$\delta(F^{ab}R_{ab}) \wedge *F = \delta(\iota^{ab}F)R_{ab} \wedge *F + \delta\omega_{ab} \wedge D(F^{ab} \wedge *F) \tag{5.24}$$

yukarıdaki ifadenin ikinci terimi ω_{ab} ye göre varyasyonudur. Şimdi birinci terim için

$$\delta(F^{ab}R_{ab}) \wedge *F \;=\; 2\delta\iota^{b}(\iota^{a}F)R_{ab} \wedge *F + \delta\omega_{ab} \wedge D(F^{ab} \wedge *F) \tag{5.25}$$

$$\delta(F^{ab}R_{ab}) \wedge *F \;=\; 2\delta\iota^{b}(F^{a}{}_{c}e^{c})R_{ab} \wedge *F + \delta\omega_{ab} \wedge D(F^{ab} \wedge *F) \tag{5.26}$$

burada $\delta(\iota^{b}e^{c}) = 0 = (\delta\iota^{b})e^{c} + \iota^{b}\delta e^{c}$ olduğundan

$$\delta(F^{ab}R_{ab}) \wedge *F \;=\; -2\iota^{b}\delta e^{c}F^{a}{}_{c}R_{ab} \wedge *F + \delta\omega_{ab} \wedge D(F^{ab} \wedge *F) \tag{5.27}$$

$$\delta(F^{ab}R_{ab}) \wedge *F \;=\; \iota^{b}[\delta e^{c} \wedge F^{a}{}_{c}R_{ab} \wedge *F] = \delta e^{c} \wedge F^{a}{}_{c}\iota^{b}(R_{ab} \wedge *F) \tag{5.28}$$

olur.

8. Terimin varyasyonu da benzer şekilde hesaplanır.

9. Terimin Varyasyonu:

$$\delta(RF \wedge *F) = \delta(RF) \wedge *F + \delta F \wedge *RF - \delta e^{c} \wedge [\iota_{c}RF \wedge *F - RF\iota_{c} * F] \tag{5.29}$$

Burada sağ taraftaki ilk terimi

$$\begin{aligned} \delta(RF) * F \;&=\; \delta(\iota^{ba}R_{ab}F) \wedge *F + \delta F \wedge *RF \\ &=\; [2\delta\iota^{b}(\iota^{a}R_{ab})F + \iota^{ba}\delta R_{ab}F + R\delta F] * F + \delta F \wedge *RF \end{aligned} \tag{5.30}$$

olarak yazabiliriz. Yine son eşitliğin sağ tarafındaki ikinci terimi aşağıdaki gibi bir iç çarpımdan elde edebiliriz.

$$\iota^{b}(\iota^{a}R_{ab}F \wedge *F) = 0 = \iota^{ba}\delta R_{ab}F - \iota^{a}\delta R_{ab} \wedge \iota^{b}(F \wedge *F) \tag{5.31}$$

Buradan

$$\begin{aligned}
\iota^{ba}\delta R_{ab}F &= \iota^{a}\delta R_{ab}\iota^{b}(F\wedge *F) \\
&= -\delta\omega_{ab}D(\iota^{ab}(F\wedge *F)) \qquad (5.32)
\end{aligned}$$

Son kısımdaki elektromanyetik alan varyasyonu ise

$$\delta F\wedge *RF = \delta A\wedge d(*RF) \qquad (5.33)$$

olarak elde edilir.

Burada her bir terimin ko-çerçeve varyasyonundan gelecek katkıları toplayarak elde ettiğimiz gravitasyon alan denklemini, oldukça uzun olduğu için burada yazmaya gerek duymadık. Çünkü Gravitasyonel alan denklemlerinin efektif olarak Maxwell ve skalar alan denklemleriyle çiftlenimsiz hale geldiği, madde alanlarının metrik üzerinde bir etkisinin olmadığı durumla ilgileneceğiz. Bu durumda problem çiftlenimli Maxwell ve skalar alan denklemlerine çözüm aramaya indirgenecektir.

Böylece her bir elektromanyetik ve skalar alan varyasyonları için bu terimlerden gelen katkıları ayrı ayrı toplarsak sırasıyla aşağıdaki elektromanyetik ve skalar alan denklemlerine ulaşırız.

$$\begin{aligned}
d\Big\{4a_1 * F^{ab}R_{ab} + 2a_2\big[R_a\wedge \imath^a * F - R * F + *(F^a\wedge R_a)\big] \\
+4a_3 R * F - *F\Big\} - 2|\psi|^2 * A = 0, \qquad (5.34)
\end{aligned}$$

$$D * D\psi - m^2\psi * 1 \;=\; 0\,. \qquad (5.35)$$

5.1 Yaklaşıklıklı Analitik Çözümler

Eğer elektromanyetik potansiyeli ve skalar alanı $A\rightarrow A/q$ ve $\psi\rightarrow\psi/q$ olarak yeniden ölçeklendirirsek, gravitasyonel alan denkleminde madde yani geometriksel olmayan terimlerin önündeki ölçeklendirme katsayısı $1/q^2$ olur. Bu yüzden q parametresinin büyük olduğu durumlarda madde alanlarının metrik veya geometri üzerine etkisi ihmal edilebilir. Bu $q \to \infty$ veya $\kappa \to 0$ limiti, probe limit dediğimiz madde alanlarının metrik üzerine geri tepkisinin olmadığı limite karşılık gelir. Bu limitte problem kısmen basitleşir. Yani gravitasyonel alan denklemleri efektif olarak Maxwell ve skalar alan denklemleriyle çiftlenimsiz hale gelir. Böylece problem çiftlenimli Maxwell ve skalar alan denklemlerine çözüm aramaya indirgenir. Bu limitte gravitasyenel alan denklemlerinin çözümü olarak aşağıdaki düzlemsel AdS-Schwarzschild kara delik çözümü alınabilir.

$$g = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + \frac{r^2}{L^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{5.36}$$

Burada,

$$f(r) = \frac{r^2}{L^2}(1 - \frac{h^4}{r^4})\,. \tag{5.37}$$

Burada $r = h$ karadeliğin olay ufku yarıçapı iken, $r \to \infty$ ise bulk denilen iç kısmın gravitasyonel etkilerinin olmadığı sınırına karşılık gelir.

Ortanormal baz 1-formlarını da

$$e^0 = fdt, \quad e^1 = \frac{dr}{f}, \quad e^2 = \frac{r}{L}dx, \quad e^3 = \frac{r}{L}dy, \quad e^4 = \frac{r}{L}dz \tag{5.38}$$

olarak tanımlayalım. Bu ortanormal baz 1-formların dış türevini alalım.

$$\begin{aligned} de^0 &= d(fdt) \\ &= f'dr \wedge dt \end{aligned}$$

dr ve dt yi yukardaki eşitliklerde yalnız bırakıp yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} &= f'fe^1 \wedge \frac{e^0}{f} \\ de^0 &= f'e^{01} \end{aligned} \tag{5.39}$$

olarak elde edilir.

$$\begin{aligned} de^1 &= d(\frac{dr}{f}) \\ &= -\frac{f'}{f^2}dr \wedge dr \end{aligned}$$

$dr \wedge dr = 0$ oduğundan,

$$de^1 = 0 \tag{5.40}$$

olur.

$$\begin{aligned} de^2 &= d(\frac{r}{l}dx) \\ &= \frac{1}{L}dr \wedge dx \end{aligned}$$

dr ve dx yi (5.38) eşitliğinde yalnız bırakıp yerine yazarsak,

$$= \frac{1}{L}fe^1 \wedge \frac{L}{r}e^2$$

gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$de^2 = \frac{f}{r}e^{12} \tag{5.41}$$

olur.

$$\begin{aligned} de^3 &= d(\frac{r}{l}dy) \\ &= \frac{1}{L}dr \wedge dy \end{aligned}$$

dr ve dy yi (5.38) eşitliğinde yalnız bırakıp yerine yazarsak,

$$= \frac{1}{L}fe^1 \wedge \frac{L}{r}e^3$$

gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$de^3 = \frac{f}{r}e^{13} \tag{5.42}$$

olur.

$$\begin{aligned} de^4 &= d(\frac{r}{l}dz) \\ &= \frac{1}{L}dr \wedge dz \end{aligned}$$

dr ve dz yi (5.38) eşitliğinde yalnız bırakıp yerine yazarsak,

$$= \frac{1}{L} f e^1 \wedge \frac{L}{r} e^4$$

gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$de^4 = \frac{f}{r} e^{14} \tag{5.43}$$

olur. Şimdi Eintein ve Maxwell denklemlerini yukarıdaki AdS-Schwarzchild mertiği ve Elektromanyetik alanı kullanarak hesaplamak için bağlantı 1-formlarını aşağıdaki formülle bulabiliriz:

$$2\omega_{ab} = -\iota_a(de_b) + \iota_b(de_a) + \iota_a\iota_b(de_c)e^c \tag{5.44}$$

ω_{01} i yukardaki formülü kulanarak bulalım,

$$\begin{aligned} 2\omega_{01} &= -\iota_0(de_1) + \iota_1(de_0) + \iota_0\iota_1(de_0)e^0 + \iota_0\iota_1(de_1)e^1 + \iota_0\iota_1(de_2)e^2 \\ &\quad +\iota_0\iota_1(de_3)e^3 + \iota_0\iota_1(de_4)e^4 \end{aligned} \tag{5.45}$$

(5.39), (5.40), (5.41), (5.42), (5.43) eşitliklerini yukarıdaki denklemde yerine yazalım;

$$\begin{aligned} 2\omega_{01} &= -\iota_0(0) + \iota_1(f' e^{10}) + \iota_0\iota_1(f' e^{10})e^0 + \iota_0\iota_1(0)e^1 + \iota_0\iota_1(\frac{f}{r}e^{12})e^2 \\ &\quad +\iota_0\iota_1(\frac{f}{r}e^{13})e^3 + \iota_0\iota_1(\frac{f}{r}e^{14})e^4 \end{aligned} \tag{5.46}$$

buradaki iç çarpımları aldığımızda,

$$\begin{aligned} 2\omega_{01} &= -f' e^0 - f' e^0 \\ \omega_{01} &= -f' e^0 \end{aligned} \tag{5.47}$$

olarak bulunur. Şimdi buna benzer olarak diğer bağlantıları hesaplayalım.
ω_{02} i bulmak için (5.44) formülünü kullanırsak,

$$\begin{aligned} 2\omega_{02} &= -\iota_0(de_2) + \iota_2(de_0) + \iota_0\iota_2(de_0)e^0 + \iota_0\iota_2(de_1)e^1 + \iota_0\iota_2(de_2)e^2 \\ &\quad +\iota_0\iota_2(de_3)e^3 + \iota_0\iota_2(de_4)e^4 \end{aligned}$$

yukarıdakine benzer işlemlerele

$$\omega_{02} = 0 \tag{5.48}$$

olarak bulunur. ω_{03} i bulmak için (5.44) formülünü kullanalım,

$$\begin{aligned} 2\omega_{03} &= -\iota_0(de_3) + \iota_3(de_0) + \iota_0\iota_3(de_0)e^0 + \iota_0\iota_3(de_1)e^1 + \iota_0\iota_3(de_2)e^2 \\ &\quad +\iota_0\iota_3(de_3)e^3 + \iota_0\iota_3(de_4)e^4 \end{aligned}$$

Aynı şekilde,

$$\omega_{03} = 0 \tag{5.49}$$

olarak bulunur. ω_{04} i bulmak için (5.44) formülünü kullanalım,

$$\begin{aligned} 2\omega_{04} &= -\iota_0(de_4) + \iota_4(de_0) + \iota_0\iota_4(de_0)e^0 + \iota_0\iota_4(de_1)e^1 + \iota_0\iota_4(de_2)e^2 \\ &\quad +\iota_0\iota_4(de_3)e^3 + \iota_0\iota_4(de_4)e^4 \end{aligned}$$

Aynı şekilde,

$$\omega_{04} = 0 \tag{5.50}$$

olarak bulunur.

ω_{12} i bulmak için (5.44) formülünü kullanalım,

$$\begin{aligned} 2\omega_{12} &= -\iota_1(de_2) + \iota_2(de_1) + \iota_1\iota_2(de_0)e^0 + \iota_1\iota_2(de_1)e^1 + \iota_1\iota_2(de_2)e^2 \\ &\quad +\iota_1\iota_2(de_3)e^3 + \iota_1\iota_2(de_4)e^4 \end{aligned}$$

Aynı şekilde,

$$\omega_{12} = -\frac{f}{r}e^2 \tag{5.51}$$

olarak bulunur.

ω_{13} i bulmak için (5.44) formülünü kullanalım,

$$\begin{aligned} 2\omega_{13} &= -\iota_1(de_3) + \iota_3(de_1) + \iota_1\iota_3(de_0)e^0 + \iota_1\iota_3(de_1)e^1 + \iota_1\iota_3(de_2)e^2 \\ &\quad +\iota_1\iota_3(de_3)e^3 + \iota_1\iota_3(de_4)e^4 \end{aligned}$$

Aynı şekilde,

$$\omega_{13} = -\frac{f}{r}e^3 \tag{5.52}$$

olarak bulunur.

ω_{14} i bulmak için (5.44) formülünü kullanalım,

$$\begin{aligned} 2\omega_{14} &= -\iota_1(de_4) + \iota_4(de_1) + \iota_1\iota_4(de_0)e^0 + \iota_1\iota_4(de_1)e^1 + \iota_1\iota_4(de_2)e^2 \\ &\quad +\iota_1\iota_4(de_3)e^3 + \iota_1\iota_4(de_4)e^4 \end{aligned}$$

Aynı şekilde,

$$\omega_{14} = -\frac{f}{r}e^4 \tag{5.53}$$

olarak bulunur.

ω_{23} i bulmak için (5.44) formülünü kullanalım,

$$\begin{aligned} 2\omega_{23} &= -\iota_2(de_3) + \iota_3(de_2) + \iota_2\iota_3(de_0)e^0 + \iota_2\iota_3(de_1)e^1 + \iota_2\iota_3(de_2)e^2 \\ &\quad +\iota_2\iota_3(de_3)e^3 + \iota_2\iota_3(de_4)e^4 \end{aligned}$$

Aynı şekilde,

$$\omega_{23} = 0 \tag{5.54}$$

olarak bulunur.

ω_{24} i bulmak için (5.44) formülünü kullanalım,

$$\begin{aligned} 2\omega_{24} &= -\iota_2(de_4) + \iota_4(de_2) + \iota_2\iota_4(de_0)e^0 + \iota_2\iota_4(de_1)e^1 + \iota_2\iota_4(de_2)e^2 \\ &\quad +\iota_2\iota_4(de_3)e^3 + \iota_2\iota_4(de_4)e^4 \end{aligned}$$

Aynı şekilde,

$$\omega_{24} = 0 \tag{5.55}$$

olarak bulunur.

ω_{34} i bulmak için (5.44) formülünü kullanalım,

$$\begin{aligned}2\omega_{34} &= -\iota_3(de_4) + \iota_4(de_3) + \iota_3\iota_4(de_0)e^0 + \iota_3\iota_4(de_1)e^1 + \iota_3\iota_4(de_2)e^2 \\ &\quad +\iota_3\iota_4(de_3)e^3 + \iota_3\iota_4(de_4)e^4\end{aligned}$$

Aynı şekilde,

$$\omega_{34} = 0 \tag{5.56}$$

olarak bulunur.

Şimdi R_{ab} eğrilik tensörü 2-formlarını bulmak için (1.37) eşitliğini kullanalım. Yani;

$$R^a{}_b(\omega) := D\omega^a{}_b := d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \tag{5.57}$$

olduğunu kullanalım. O halde R_{01} aşağıdaki gibi hesaplarız.

$$R_{01} = d\omega_{01} + \omega_{00} \wedge \omega^0{}_1 + \omega_{01} \wedge \omega^1{}_1 + \omega_{02} \wedge \omega^2{}_1 + \omega_{03} \wedge \omega^3{}_1 + \omega_{04} \wedge \omega^4{}_1$$

yukarıda bulduğumuz bağlantıları burada yerine koyacak olursak,

$$R_{01} = -(ff')'e^{10} \tag{5.58}$$

olarak hesaplanır. Benzer olarak diğer bileşenler de aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} R_{02} &= \frac{f'f}{r}e^{02} \qquad R_{03} = \frac{f'f}{r}e^{03} \qquad R_{04} = \frac{f'f}{r}e^{04} \\ R_{12} &= -\frac{f'f}{r}e^{12} \qquad R_{13} = -\frac{f'f}{r}e^{13} \qquad R_{14} = -\frac{f'f}{r}e^{14} \\ R_{23} &= -\frac{f^2}{r^2}e^{23} \qquad R_{24} = -\frac{f^2}{r^2}e^{24} \qquad R_{34} = -\frac{f^2}{r^2}e^{34} \end{aligned} \tag{5.59}$$

olarak hesaplanır.

R_a Ricci eğrilik 1-formlarını hesaplamak için;

$$R_a = \iota^b R_{ba}$$

iç çarpımını kullanalım.

$$R_0 = \iota^1 R_{10} + \iota^2 R_{20} + \iota^3 R_{30} + \iota^4 R_{40}$$

burada R_{ab} leri yerine yazarsak ve iç çarpımlarını hesaplarsak,

$$R_0 = [\frac{(f^2)''}{2} + \frac{3}{2r}(f^2)']e^0 \tag{5.60}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} R_1 &= -[\frac{(f^2)''}{2} + \frac{3}{2r}(f^2)']e^1 &(5.61)\\ R_2 &= -[\frac{(f^2)'}{r} + \frac{2f^2}{r^2}]e^2 &(5.62)\\ R_3 &= -[\frac{(f^2)'}{r} + \frac{2f^2}{r^2}]e^3 &(5.63)\\ R_4 &= -[\frac{(f^2)'}{r} + \frac{2f^2}{r^2}]e^4 &(5.64) \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Şimdi R eğrilik skalarını hesaplayabilmek için iç çarpımdan faydalanarak aşağıdaki eşitliği yazalım.

$$R = \iota^a R_a \tag{5.65}$$

bu son eşitlikte indisleri yerine yazarsak

$$R = \iota^0 R_0 + \iota^1 R_1 + \iota^2 R_2 + \iota^3 R_3 + \iota^4 R_4 \tag{5.66}$$

olur. Gerekli işlemler yapıldığında;

$$R = -(f^2)'' - \frac{6(f^2)'}{r} - \frac{6f^2}{r^2} \tag{5.67}$$

olarak bulunur. Burada holografik süperiletkenlerin elektriksel olarak yüklü olduğu varsayımını kullanmak için aşağıdaki sadece radyal bileşene sahip elektromanyetik potansiyel 1-formlarını ele alalım

$$A = \phi(r)dt \tag{5.68}$$

Bu potansiyelin dış türevini alarak aşağıdaki sadece elektrik bileşene sahip elektromanyetik tensöre ulaşırız.

$$\begin{aligned} F &= dA \\ &= \phi' dr \wedge dt \end{aligned} \tag{5.69}$$

burada dr ve dt yi (5.38) den yeine yazalım.

$$\begin{aligned} F &= \phi' e^1 f \wedge \frac{e^0}{f} \\ F &= \phi' e^{10} \end{aligned} \tag{5.70}$$

olarak bulunur. Şimdi bunun hadge starını bulalım.

$$\begin{aligned} *F &= \phi' * e^{10} \\ &= \phi' \varepsilon^{10}{}_{234} \\ &= \phi' e^{234} \end{aligned} \tag{5.71}$$

Hesaplarda kullanacağımız diğer terimler aşağıdaki gibidir:

$$F^a = \iota^a F \qquad F^1 = \phi' e^0 \qquad F^0 = \phi' e^1 \tag{5.72}$$

$$\begin{aligned} \iota^0 * F = \iota^1 * F = 0 \\ \iota^2 * F = \phi' e^{34} \\ \iota^3 * F = \phi' e^{24} \\ \iota^4 * F = \phi' e^{23} \end{aligned} \tag{5.73}$$

Bu ifadeleri (5.34) Maxwell alan denklemindeki her bir terimde aşağıdaki gibi kullanarak bu terimleri hesaplarız.

$$\begin{aligned} R_a \wedge \iota^a * F &= R_2 \wedge \phi' e^{34} - R_3 \wedge \phi' e^{24} + R_4 \wedge \phi' e^{23} \\ &= -[\frac{(f^2)'}{r} + \frac{2f^2}{r^2}]\phi' e^{234} + [\frac{(f^2)'}{r} + \frac{2f^2}{r^2}]\phi' e^{324} \\ &\quad -[\frac{(f^2)'}{r} + \frac{2f^2}{r^2}]\phi' e^{423} \\ &= -3[\frac{(f^2)'}{r} + \frac{2f^2}{r^2}]\phi' e^{234} \end{aligned} \tag{5.74}$$

(5.34) denklemindeki aşağıdaki diğer terimi hesaplayalım:

$$\begin{aligned} F^a \wedge R_a &= F^0 \wedge R_0 + F^1 \wedge R_1 \\ &= -[\frac{(f^2)''}{2} + \frac{3}{2r}(f^2)']\phi' e^{01} \end{aligned} \quad (5.75)$$

son eşitliğin hodge starı şöyledir

$$*(F^a \wedge R_a) = [\frac{(f^2)''}{2} + \frac{3}{2r}(f^2)']\phi' e^{234}. \quad (5.76)$$

(5.34) denklemindeki bir diğer terim ise $*F^{ab}R_{ab}$ aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} F^{ab}R_{ab} &= 2F^{01}R_{01} \\ &= 2\phi' \frac{(f^2)''}{2} e^{01} \\ &= \phi'(f^2)'' e^{01} \end{aligned} \quad (5.77)$$

son eşitliğin hodge starı şöyledir

$$*F^{ab}R_{ab} = -\phi'(f^2)'' e^{234}. \quad (5.78)$$

diğer hesaplamamızı yapalım.

$$\begin{aligned} *A &= \frac{\phi}{f} * e^0 = \frac{\phi}{f}\varepsilon^0{}_{1234} e^{1234} \\ &= -\frac{\phi}{f} e^{1234} \end{aligned} \quad (5.79)$$

Bu probe limitte, bu minimal olmayan modelin eyleminin elektromayetik potansiyel A ve skalar alanın hermitik eşleniğine $\psi^\dagger$ a göre varyasyonlarından sırasıyla aşağıdaki elektromanyetik ve skalar alan denklemlerini elde etmiştik.

$$\begin{aligned} d\Big\{4a_1 * F^{ab}R_{ab} + 2a_2\big[R_a \wedge \imath^a * F - R * F + *(F^a \wedge R_a)\big] \\ +4a_3 R * F - *F\Big\} - 2|\psi|^2 * A = 0, \end{aligned} \quad (5.80)$$

yukarıda bulduğumuz eşitlikleri burada yerine yazarsak;

$$\begin{aligned} & d\{2a_2[-3(\frac{(f^2)'}{r} + \frac{2f^2}{r^2})\phi' e^{234} + ((f^2)'' + \frac{6(f^2)'}{r} + \frac{6f^2}{r^2})\phi' e^{234} \\ & +((f^2)'' + \frac{3(f^2)'}{r})\phi' e^{234}] - 4a_1(f^2)''\phi' e^{234} - \phi' e^{234} \\ & -4a_3((f^2)'' + \frac{6(f^2)'}{r} + \frac{6f^2}{r^2})\phi' e^{234}\} + 2|\psi|^2 \frac{\phi}{f} e^{234} = 0 \end{aligned} \quad (5.81)$$

olur. Burada dış türev alınır gerekli işlemler yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
-\phi'' e^{1234} - \phi'\frac{3f}{r}e^{1234} + 2a_2[(-12\phi'' f e^{1234} - 12\phi'\frac{3f}{r}e^{1234}) + \\
(20\phi'' f e^{1234} + 20\phi'\frac{3f}{r}e^{1234}) + (8\phi'' f e^{1234} + 8\phi'\frac{3f}{r}e^{1234})] \\
-4a_1[(24r^{-5}\phi' + (2-6r^{-4})\phi'')fe^{1234} + (2-6r^{-4})\phi'\frac{3f}{r}e^{1234}] \\
-4a_3[20\phi'' f e^{1234} + 20\phi'\frac{3f}{r}e^{1234}] + 2|\psi|^2\frac{\phi}{f}e^{1234} = 0
\end{aligned} \tag{5.82}
$$

ve sadeleştirilirse;

$$
(\beta - \frac{24h^4a_1}{L^2r^4})\phi'' + (\frac{3\beta}{r} + \frac{24h^4a_1}{L^2r^5})\phi' - \frac{2L^2r^2\psi^2\phi}{r^4-h^4} = 0 \tag{5.83}
$$

Burada $\beta = 1 + 8\frac{a_1}{L^2} - 32\frac{a_2}{L^2} + 80\frac{a_3}{L^2}$ dır. Şimdi (5.35) denkleminin ifade ettiği skalar alan denklemini yazabilmek için aşağıdaki hesaplamaları yapalım.

Burada

$$
D\psi = d\psi + iA\psi, \qquad \psi = \psi(r) \tag{5.84}
$$

dir.

$$
A = \phi dt = \phi\frac{e^0}{f} \tag{5.85}
$$

elektromanyetik alan 1-formu dur.

$$
D\psi = \psi' f e^1 + i\frac{\phi}{f}\psi e^0 \tag{5.86}
$$

Şimdi bunun starını hesaplayalım.

$$
\begin{aligned}
*D\psi &= \psi' f * e^1 + i\frac{\phi}{f}\psi * e^0 && (5.87)\\
&= -\psi' f e^{0234} - i\frac{\phi}{f}\psi e^{1234} && (5.88)
\end{aligned}
$$

olur. Şimdi bununda kovaryant dış türevini alalım.

$$
\begin{aligned}
D * D\psi &= d[-\psi' f e^{0234} - i\frac{\phi}{f}\psi e^{1234}] + i\frac{\phi}{f}e^{0}[-\psi' f e^{0234} - i\frac{\phi}{f}\psi e^{1234}] \\
&= d[-\psi' f^2 r^3 dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz - i\frac{\phi}{f^2}\psi r^3 dr \wedge dx \wedge dy \wedge dz] \\
&\quad + \frac{\phi^2}{f^2}\psi e^{01234} \\
&= [(-\psi' f^2 r^3)' dr \wedge dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz] + \frac{\phi^2}{f^2}\psi e^{01234} \qquad (5.89)
\end{aligned}
$$

yani,

$$
D * D\psi = \frac{(\psi' f^2 r^3)'}{r^3} e^{01234} + \frac{\phi^2}{f^2}\psi e^{01234} \qquad (5.90)
$$

olur. Bu bulduğumuz eşitlikleri skalar alan denkleminde yerine yazalım.

$$
\frac{(\psi' f^2 r^3)'}{r^3} e^{01234} + \frac{\phi^2}{f^2}\psi e^{01234} - m^2\psi e^{01234} = 0 \qquad (5.91)
$$

yani;

$$
\frac{(\psi' f^2 r^3)'}{r^3} + \frac{\phi^2}{f^2}\psi - m^2\psi = 0 \qquad (5.92)
$$

olur. Burada gerekli işlemler yapılırsa,

$$
\frac{r^4 - h^4}{r^2 L^2}\psi'' + \frac{5r^4 - h^4}{r^3 L^2}\psi' + \frac{L^2 r^2 \phi^2 \psi}{r^4 - h^4} - m^2\psi = 0 \qquad (5.93)
$$

skalar alan denklemi elde edilir.

Yukarıdaki AdS-Schwarzchild metriği, sadece radyal uzaklığa bağlı skalar fonksiyonu $\psi = \psi(r)$ ve sadece radyal elektrik alan bileşenini veren $A = \phi(r)dt$ elektromanyetik potansiyel 1-formu için bu elektromanyetik ve skalar alan denklemlerini hesaplıyoruz ve aşağıdaki non-lineer ve çiftlenimli diferansiyel denklem sistemine ulaşıyoruz.

$$
(\beta - \frac{24h^4 a_1}{L^2 r^4})\phi'' + (\frac{3\beta}{r} + \frac{24h^4 a_1}{L^2 r^5})\phi' - \frac{2L^2 r^2 \psi^2 \phi}{r^4 - h^4} = 0 \qquad (5.94)
$$

$$\frac{r^4-h^4}{r^2L^2}\psi''+\frac{5r^4-h^4}{r^3L^2}\psi'+\frac{L^2r^2\phi^2\psi}{r^4-h^4}-m^2\psi=0 \tag{5.95}$$

Buradaki ilk ψ denkleminde en kilit terim $\frac{L^2r^2\phi^2\psi}{r^4-h^4}$ terimidir. $r > h$, yani ilgilendiğimiz radyal uzaklık olay ufkundan büyük olacağından bu terimin işareti pozitiftir ve düşk sıcaklıklarda skalar alan oluşumuna izin verecek önemli bir terimdir. Bu terim nedeniyle $m^2 = -\frac{3}{L^2}$ olarak alabiliriz. Böylece skalar alanın kütlesi takyonik hale gelir. Bu oldukça tuhaf görünsede böyle kütle terimleri gauge/gravity dualitesine göre olasıdır. $d-$boyutta Alan teorisine göre takyonik kütle ışık hızından hızlı giden parçacıkları değil skalar alandaki kararsızlığı tarifler. $\psi = 0$ değeri kararsızdır ve bu alan böyle bir potansiyelde kalamaz. Diğer yandan, Breitenlohner ve Freedman'ın, Breitenlohner ve Freedman (1982) makalesinde gösterdiği gibi $d+1$-boyutta AdS-uzay zamanı kararlıdır ve skalar alanlar

$$m^2_{BF} = -\frac{d^2}{4L^2} \tag{5.96}$$

gibi bir değere eşit veya daha büyük olacak şekilde karesi negatif olan kütleli durumlara sahip olabilir, yani 5-boyutta bulk için $m^2 \geq -\frac{4}{L^2}$ aralığında değerler seçilebilir. Bu nedenle $m^2 = -\frac{3}{L^2}$ seçebiliriz.

Burada hesapların daha kolay olması amacıyla $z = h/r$ bağıtısını kullanarak r bağımsız değişkeninden yeni z bağımsız değişkenine geçerek bu denklemleri tekrar yazıyoruz. Bu dönüşüm altında kara deliğin dış bölgesi r cinsinden $h \leq r \leq \infty$ olarak ifade edilirken, z cinsinden $0 \leq z \leq 1$ olarak ifade edilir.

$$(\beta-\frac{24a_1z^4}{L^2})\phi_{zz}-(\frac{\beta}{z}+\frac{72a_1z^3}{L^2})\phi_z-\frac{2\psi^2L^2}{z^2(1-z^4)}\phi = 0 \tag{5.97}$$

$$z^2(1-z^4)\psi_{zz}-z(z^4+3)\psi_z+\frac{L^4z^2\phi^2}{h^2(1-z^4)}\psi+3\psi = 0, \tag{5.98}$$

Bu diferansiyel denklemler için fiziksel sınır koşullarına gelelim. Olay ufkunda ($r = h$ veya $z = 1$ de), ϕ yok olmalı. Çünkü bulk içinde Maxwell denklemleri için bu kaynak gauge invaryant olmalı. ψ nin reel olduğu bir ayar seçiminde akım terimi $A\psi^2$ ye eşittir. Bu akımın olay ufkunda sabit olması nedeniyle A olay ufkunda sabit olmalı ve bu nedenle olay ufkunda $\phi(1) = 0$ olmalı. Bunula birlikte, (5.95) ψ denklemi için $r = h$ de

$$h\frac{d\psi}{dr}(h) = -\frac{3}{4}\psi(h) \tag{5.99}$$

veya $z = \frac{h}{r}$ dönüşümüyle elde edilen (5.97) denkleminde

$$\frac{d\psi}{dz}(1) = \frac{3}{4}\psi(1) \tag{5.100}$$

$z = 1$ deki sınır koşullarına ulaşırız.

Diğer yandan $r \to \infty$ veya $z \to 0$ limitinde sınır koşulu asimptotik olarak

$$\phi(z) = \mu - qz^2\,, \tag{5.101}$$

$$\psi(z) = \psi_1 z + \psi_2 z^3\,. \tag{5.102}$$

şeklinde olmalıdır.

Burada μ sınırda kimyasal potansiyeli ve q yük yoğunluğunu temsil eder. Normalizasyon için ψ nin en büyük teriminin katsayısı sıfır olmalı. Fakat kütleyi BF alt limitine yakın seçersek bu başat terim bile normalize edilebilir. Bu durumda bu katsayılardan herhangi birini sıfır yapmak gibi bir serbestliğe sahibiz. Yani $\psi_1 = 0$ veya $\psi_2 = 0$ lı durumları ayrı ayrı düşünebiliriz. Bu sınır koşulunu da koyduktan sonra nümerik olarak ve yaklaşıklıklı analitik olarak tek parametreli çözümlere sahip oluruz.

(5.94) denkleminden görüleceği gibi $\phi(r)$ monotonik bir fonksiyon olacaktır. $\phi(r)$ sıfırdan başlar ve olay ufku dışında artmaya başladığında asimptotik olarak sabit bir μ değerine ulaşana kadar artar. Fakat $\psi(r)$ monotonik olmak zoruda değildir. Bu asimptotik koşulları sağlayan sonsuz sayıda ayrık çözüm ailesi bulunabilir. Bu çözümler $\psi(r)$ nin kaç kere sıfır olacağına göre isimlendirilebilir. Sadece en düşük sıfıra sahip durumdaki $\psi(r)$ çözümünün monotonik olarak $\psi(1)$ den sıfıra azalacağı ve bunun kararlı çözüm olacağı düşünülür.

AdS/CFT dualitesine göre bu modelin özellikleri hakkında bilgi edinebiliriz. Bu (4 + 1)-boyutlu AdS teorisine dual olarak (3 + 1)-boyutlu Konformal Alan Teorisinin (CFT) karşılık gelir. Konformal alan teorisindeki Hawking sıcaklığı ile tanımlanan sıcaklık kavramı bu AdS metriğinden hesaplanabilir.

$$T_H = \frac{\sqrt{f'(h)^2}}{4\pi} = \frac{h}{\pi L^2} \tag{5.103}$$

Bununla birlikte AdS Bulk içindeki lokal gauge simetrisi, Konformal alan teorisindeki global $U(1)$ simetrisine karşılık gelir. Bu bulk çözümünün asimptotik davranışı dual olan Konformal alan teorisinde μ kimyasal potansiyel ve q yük yoğunluğu gibi özellikleri belirler. Bildiğimiz süperiletkenler elektriksel olarak nötr olmasına rağmen burada holografik süperiletkenler elektrik yüklü olarak karşımıza çıkar. Aslında burada kuralan benzerlik holografik süperiletkenleri sadece elektron denizi olarak düşünmektir. Yani toplam yükü nötr yapan ve sabit olan çekirdekteki pozitif yükler bu benzerlik kurulurken hesaba katılmaz.

Eğer bu modele yük veya kimyasal potansiyel koymazsak teori kararlı olmaz ve skalar alan ortaya çıkmasına izin vermez. Dual teori ölçek invaryant olur ve faz geçişi gözlenmez. Sınırdaki Konformal invaryant dual model bir de ψ skalar alanına dual olan yüklü bir operatöre sahiptir. Biz bu skalar alanın kütlesini Breitenlohner ve Freedman alt kütle sınırına yakın seçtiğimiz için ψ ye iki farklı olası operatör karşılık getirilebilir Bu operatörler ψ_1 ve ψ_2 ile ilişkilendirilir. Eğer ψ_1 kaynak terim olarak alınırsa ψ_2 bu yoğuşma operatörünün beklenen değeri ile ilişkilendirilir $\psi_2 =< \mathcal{O}_2 >$. Yoğuşma kaynağını istemediğimiz için onu sıfır seçebiliriz. Diğer yandan bu operatörleri değiştirerek tam tersi bir dual modelde düşünebiliriz. Yani $\psi_2 = 0$ ve yoğuşma operatörünün beklenen değeri olarak $\psi_1 =< \mathcal{O}_1 >$ alabiliriz.

Şimdi bu (5.97) ve (5.98) diferansiyel denklem sistemine yaklaşıklıklı analitik çözümler bulmak için bu $\psi(z)$ ve $\phi(z)$ fonksiyonlarını olay ufkuna karşılık gelen $z = 1$ etrafında Taylor serisine açıyoruz. Bu hesapları bu model için yaparken çoğunlukla minimal model için yapılmış olan Gregory (2009) çalışmasındaki yöntemi takip edeceğiz. Daha sonra bu yöntem bu model için 4-boyutta Sert ve Adak (2013) makalesinde kullanılmıştır. Burada bu modeli 5-boyutta inceliyoruz.

$$\phi(z) = \phi(1) - \phi_z(1)(1-z) + \frac{1}{2}\phi_{zz}(1)(1-z)^2 + \cdots\,, \tag{5.104}$$

$$\psi(z) = \psi(1) - \psi_z(1)(1-z) + \frac{1}{2}\psi_{zz}(1)(1-z)^2 + \cdots\,. \tag{5.105}$$

Buradaki $\phi_{zz}(1)$ ve $\psi_{zz}(1)$ yerine (5.97) ve (5.98) den bulduğumuz

$$\phi_{zz}(1) = \frac{\beta L^2 + 72a_1}{\beta L^2 - 24a_1}\phi_z(1) - \frac{\psi(1)^2 L^4}{2(\beta L^2 - 24a_1)}\phi_z(1)\,, \tag{5.106}$$

$$\psi_{zz}(1) = -\frac{5}{8}\psi_z(1) - \frac{L^4}{32h^2}\phi_z(1)^2\psi(1)\,. \tag{5.107}$$

ifadelerini yerleştirirsek aşağıdaki ifadeye ulaşırız.

$$\psi(z) = \frac{1}{4}\psi(1) + \frac{3}{4}\psi(1)z - \frac{1}{64}\left[15 + \frac{L^4\phi_z(1)^2}{h^2}\right]\psi(1)(1-z)^2 + \cdots \tag{5.108}$$

$$\phi(z) = -\phi_z(1)(1-z) + \left[\frac{\beta L^2 + 72a_1}{2(\beta L^2 - 24a_1)} - \frac{\psi(1)^2 L^4}{4(\beta L^2 - 24a_1)}\right]\phi_z(1)(1-z)^2 + \cdots \tag{5.109}$$

Diğer yandan $r \to \infty$ veya $z = 0$ sınırında (5.101) ve (5.102) asimptotik davranış göstereceğini biliyoruz. Bu iki uçtaki fonksiyonları $0 < z_m < 1$ aralığında bir noktada eşitleyerek sürekli bir geçişe ulaşabiliriz. Bu z_m noktasını $z_m = \frac{1}{2}$ olarak alabiliriz. Farklı bir ara noktayı düşünmek holografik süperiletkenin ortaya çıkmasını belirleyip belirleyememe açısından önemli farklılıklara yol açmaz.

(5.101) ve (5.102) denklemerini ve türevlerini (5.109) ve (5.108) denklemlerine ve türevlerine $z_m = \frac{1}{2}$ noktasında eşleme sonucu sırasıyla aşağıdaki koşullara ulaşırız.

$$\mu - \frac{q}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta L^2 + 72a_1}{8(\beta L^2 - 24a_1)}\right) b + \frac{ba^2L^4}{16(\beta L^2 - 24a_1)}\,, \tag{5.110}$$

$$-q = \left(\frac{\beta L^2 + 72a_1}{2(\beta L^2 - 24a_1)} - 1\right) b - \frac{ba^2L^4}{4(\beta L^2 - 24a_1)}\,, \tag{5.111}$$

$$\frac{\psi_2}{8} = \frac{5}{8}a - \frac{1}{64}(15 + b^2)a\,, \tag{5.112}$$

$$\frac{3}{4}\psi_2 = \frac{3}{4}a - \frac{1}{64}(15 + b^2)a\,, \tag{5.113}$$

burada aşağıdaki yeniden isimlendirmeleri kullandık:

$$\psi(1) = a, \qquad -\phi_z(1) = b \tag{5.114}$$

$a, b > 0$. Böylece yukarıdaki denklemler

$$a^2 = \frac{4q(\beta L^2 - 24a_1)}{bL^4}\left(1 - \frac{\beta L^2 - 120a_1}{\beta L^2 - 24a_1}\frac{b}{2q}\right) \tag{5.115}$$

$$\psi_2 = \frac{13}{5}a \tag{5.116}$$

$$b = \frac{\sqrt{309}\,h}{\sqrt{5}\,L^2}\,, \tag{5.117}$$

sonucunu verir.

Burada yük yoğunluğunu olay ufku ve yük cinsiden $\rho = qh^2$ olarak yazıp, Hawking sıcaklığını $T = T_H = \frac{h}{\pi L^2}$ olduğunu kullanacağız. Ayrıca dual alan teorisindeki skalar alanın yoğuşma operatörünün beklenen değeri $< \mathcal{O}_2 >$ niceliğini bu bulk içindeki AdS teoriden elde ettiğimiz ψ_2 katsayısını kullanarak

$$< \mathcal{O}_2 >= \frac{h^3}{L^5}\psi_2 \tag{5.118}$$

ile ifade edebiliriz. Bu bağıntı AdS/CFT dualitesinden ortaya çıkar. Böylece bu beklenen değeri aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$< \mathcal{O}_2 >= \frac{13}{5}\pi^3 T^3 \sqrt{2(\beta - 120\frac{a_1}{L^2})}\sqrt{\frac{T_c^3}{T^3}}\sqrt{1 - \frac{T^3}{T_c^3}} \tag{5.119}$$

Burada kritik sıcaklığı aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$T_c = (\frac{\beta L^2 - 24a_1}{\beta L^2 - 120a_1})^{\frac{1}{3}}(\frac{5}{309})^{\frac{1}{6}}(\frac{2\rho}{\pi^3 L^4})^{\frac{1}{3}} \tag{5.120}$$

Burada a_1, a_2, a_3 sabitleri pertürbatif olarak küçük seçilmelidir. Çünkü büyük bağlanma sabitleri bu problemde ghost alanları gibi hayali alanlara, yani istenmeyen etkilere yol açar.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında diferansiyel formların dış cebirini kullanarak yazılan gravitasyon teorilerini inceledik. Öncelikle gerekli olan temel kavramları verdikten sonra Einstein Gravitasyon teorisini inceledik. Einstein-Maxwell teorisi olarak bilinen minimal bağlanma durumunu inceledikten sonra beş boyutta gravitasyonun ve elektromanyetik alanların minimal olmayan RF^2-tipi bağlanmalarını çalıştık.

Genel bir üç parametreli RF^2-tipi çift pariteli terimler içeren bir Lagrange tarafından tanımlanan minimal olmayan modelin varyasyonlarını alarak alan denklemlerini elde ettik. $3+1$ boyutlu holografik süperiletkenler hakkında bilgi almak amacıyla, bu teoriye dual olan bu üç parametreli RF^2 tipi invaryantların keyfi bir lineer birleşiminin varlığında $4+1$ boyutlu bir AdS gravitasyon teorisinin alan denklemleri elde ettik. Elektromanyetik alan ve skaler alanın uzay-zaman geometrisi üzerine geri tepki göstermediği bir limitte, yani probe limitte çalışarak ve yaklaşıklıklı analitik bir yöntemi kullanarak bu hesapları yaptık.

Sonuç olarak bu minimal olmayan bağlanmaların varlığında kritik sıcaklık ve yoğuşma için analitik bir ifade elde ettik. Böylece kritik sıcaklık ve yoğuşma miktarının buradaki minimal olmayan bağlanma parametrelerinden önemli bir şekilde etkilendiğini gördük.

7. KAYNAKLAR

Adak, M., Sert, Ö., "A solution to symmetric teleparallel gravity", *Turk. J. Phys.*, 29, 1-7, (2005).

Adak, M., Kalay, M., Sert, Ö., "Lagrange formulation of the symmetric teleparallel gravity", *Int. J. Mod. Phys. D*, 15, 619, (2006).

Aichelburg, P. C., " Remark On The Superposition Principle For Gravitational Waves", *Acta Phys. Austr.*, 34, 279, (1971).

Balakin, A. B., "Non-minimal coupling for the gravitational and electromagnetic fields: a general system of equations", *Class. Q. Grav.*, 22, 1867, (2005).

Balakin, A. B., Zimdahl, W., "Anisotropic cosmological models with nonminimally coupled magnetic field", *Phys. Rev. D* 71, 124014, (2005).

Balakin, A.B., Bochkarev, V.V., Lemos, J.P.S., " Nonminimal coupling for the gravitational and electromagnetic fields: Black hole solutions and solitons", *Phys. Rev. D*, 77, 084013, (2008).

Balakin, A. B., Zayats, A.E., "Ray optics in the field of a nonminimal Dirac monopole", *Grav. Cosm.* 14 86-94, arXiv:0710.0606, (2008).

Balakin, A. B., Dehnen, H., Zayats, A.E., "Non-minimal monopoles of the Dirac type as realization of the censorship conjecture, *Phys. Rev. D*", 79, 024007, (2009).

Balakin, A.B., Ni, W.T., "Non-minimal coupling of photons and axion", *Grav. Cosm.* 27, 055003, p.23, (2010).

Bamba, K., Nojiri, S., Odintsov, S. D., *JCAP* **10** 045 [arXiv:0807.2575], (2008).

Buchdahl, H. A., "On a Lagrangian for non-minimally coupled gravitational and electromagnetic fields", *J. Phys. A*, 12, 1037,(1979).

Breitenlohner, P., Freedman, D. Z., "Stability In Gauged Extended Supergravity", Annals of Phys. 144, 249, (1982).

Cai, R.G., Pang, D.W., "Holography of Charged Black Holes with RF^2 Corrections", Phys. Rev. D 84, 066004, (2011).

Cartan, E., "On manifolds with an affine connection and the theory of general relativity", edited 1986, Bibliopolis, Italy, (1923).

Dereli, T., "Differential Forms and Maxwell Equations, Lectures Notes", TÜBİTAK Graduate Summer School, 18-28 Sep, (1984).

Dereli, T., Önder, M., Schray, J., Tucker, R. W., Wang, C., "Non-Riemannian Gravity and the Einstein-Proca system", *Class. Quant. Grav.*, 13, L103, (1996).

Dereli, T., Üçoluk, G., "Kaluza-Klein reduction of generalized theories of gravity and nonminimal gauge couplings", *Class. Q. Grav.*, 7, 1109, (1990).

Dereli, T., Önder, M., Tucker, R.W., "Solutions for neutral axi-dilaton gravity in four dimensions", *Class. Quant. Grav.*, 12, L25, (1995).

Dereli, T., Sert, Ö.," Non-minimally Coupled Gravitational and Electromagnetic Fields: pp-Wave Solutions", *Phys. Rev. D* 83, 065005, arXiv:1101.1177, (2011).

Dereli, T., Sert, Ö., "Non-minimal $R^? F^2$-Coupled Electromagnetic Fields to Gravity and Static, Spherically Symmetric Solutions", *Mod. Phys. Lett. A* **26** 1487 [arXiv:1105.4579], (2011).

Dereli, T., Sert, Ö., "Non-minimal $\ln(R)F^2$ Couplings of Electromagnetic Fields to Gravity: Static, Spherically Symmetric Solutions", *Eur. Phys. J. C* 71, 3, 1589, (2011).

Drummond, I. T., Hathrell, S. J., "QED vacuum polarization in a background gravitational field and its effect on the velocity of photons", *Phys. Rev. D* 22, 343, (1980).

Ehlers, J., Kundt, W., "Gravitation: An Introduction to Current Research", edited by L. Witten, Wiley, New York, (1962).

Flanders, H.,"Differential Forms with Applications to the Physical Sciences", ISBN 0122596501, Academic Press, New York, USA, (1963).

Hartnoll, S. A., Herzog, C.P., Horowitz, G. T., *JHEP* **12** 015 [arXiv:0810.1563], (2008).

Hartnoll, S. A., Herzog C. P., Horowitz, G. T., "Building an AdS/CFT superconductor", Phys. Rev. Lett. 101 031601 [arXiv:0803.3295], (2008).

Horndeski, G. W.,"Conservation of charge and Einstein-Maxwell field equations", *J. Math. Phys.* 17 1980, (1976).

Gregory R., Kanno S. and Soda J., "Holographic Superconductors with Higher Curvature Corrections", *JHEP* **10** 010 [arXiv:0907.3203], (2009).

Maldacena, J., "The Large N limit of superconformal field theories and supergravity", Adv. Theor. Math. Phys. 2, 231 [Int. J. Theor. Phys. 38, 1113 (1999)], (1998).

Wu, J. P., Cao, Y., Kuang, X. M., and Li, W. J., "The 3+13+1 holographic superconductor with Weyl corrections", Phys. Lett. B 697, 153, (2011).

Müller-Hoissen, F., "Non-minimal coupling from dimensional reduction of the Gauss-Bonet action", *Class. Q. Grav.*, 5, L35, (1988).

Myers, R.C., Sachdev, S., Singh, A., "Holographic quantum critical transport without self-duality", Phys. Rev. D 83, 066017, (2011).

Prasanna, A. R., "A new invariant for electromagnetic fields in curved space-time", *Phys. Lett.*, A37, 331, (1971).

Roychowdhury, D.,"Effect of external magnetic field on holographic superconductors in presence of nonlinear corrections", Phys. Rev. D 86, 106009, (2012).

Sert, Ö., "Genel rölativitenin simetrik teleparalel e?de?eri ve Dirac denklemi", Yüksek Lisans Tezi Pamukkale Üniversitesi, *FenBilimleri Enstitüsü*, (2005).

Sert, Ö., "Gravity and Electromagnetism with $Y(R)F^2$-type Coupling and Magnetic Monopole Solutions", The European Physical Journal Plus 127:152, 1-7 pp., DOI: 10.1140/epjp/i2012-12152-5, arXiv:1203.0898, (2012).

Sert, Ö. ve Adak, M., "An anisotropic cosmological solution to the Maxwell-$Y(R)$ gravity", arXiv:1203.1531 [gr-qc], (2012).

Sert, Ö., "Electromagnetic duality and new solutions of the non-minimally coupled Y(R)-Maxwell Gravity", Modern Physics Letters A, 28:12 1350049, 1-8 pp., DOI: 10.1142/S0217732313500491, arXiv:1303.2436, (2013).

Sert, Ö., Adak, M., "Non-minimal RF^2-type corrections to holographic superconductor", Modern Physics Letters A, Vol. 28, No. 40 1350190, 1-7 pp, (2013).

Stephani, H., Kramer, D., Maccallum, M., Hoenselaers, C., and Herlt, E., *Exact Solutions to Einstein's Field Equations*, Second ed., Chambridge University Press, UK, (2005).

Thring, W. "Classical Mathematical Physics: Dynamical Systems and Field Theories", (3^{rd} Edition), ISBN 0-397-94843-0, 539p., Springer-Verlag, (1997).

Trautman, A., 1972a, b, c, 1973a., "On the Einstein-Cartan equations", I-IV, *Bull. Acad. Polon. Scie.*, 20, 185, 503, 895, ibid.21 345.

Zhao, Z., Pan, Q., Jing, J., "Holographic insulator/superconductor phase transition with Weyl corrections", Phys. Lett. B 719, 440, (2013).

Zhao, Z., Pan, Q., Chen, S., Jing, J., "Holographic superconductor models with RF2 corrections", Chinese Phys. Lett. 30, 121101, (2013).

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Emre TANER
Doğum Yeri ve Tarihi	: ADANA 17.12.1983
Lisans Üniversite	: PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
Elektronik posta	: eemret@hotmail.com
İletişim Adresi	: Hacıkaplanlar mah. 735 sok no:13
	k:2 d:7 Pamukkale/ DENİZLİ