T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

EINSTEIN MANİFOLDLARI ÜZERİNDEKİ MEKANİK SİSTEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HATEM ÇOBAN

DENİZLİ, HAZİRAN - 2015

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

EINSTEIN MANİFOLDLARI ÜZERİNDEKİ MEKANİK SİSTEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HATEM ÇOBAN

DENİZLİ, HAZİRAN - 2015

KABUL VE ONAY SAYFASI

Hatem ÇOBAN tarafından hazırlanan **"EINSTEIN MANİFOLDLARI ÜZERİNDEKİ MEKANİK SİSTEMLER "** adlı tez çalışmasının savunma sınavı 15.06.2015 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim DalıYüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Doç.Dr.Şevket CİVELEK Pamukkale Üniversitesi	....
Üye Yrd.Doç.Dr.Cansel YORMAZ Pamukkale Üniversitesi	....
Üye Yrd.Doç.Dr. Sibel PAŞALI ATMACA Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi	....

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 01.07.2015 tarih ve 24/24 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....

Prof. Dr. Orhan KARABULUT

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

HATEM ÇOBAN

ÖZET

EINSTEIN MANİFOLDLARI ÜZERİNDEKİ MEKANİK SİSTEMLER
YÜKSEK LİSANS TEZİ
HATEM ÇOBAN
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI:DOÇ. DR. ŞEVKET CİVELEK)

DENİZLİ, HAZİRAN - 2015

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde, bu çalışmanın konusunun kısa bir tarihçesi sunulmuştur. Öncelikle Einstein'ın hayatı, çalışmaları ve bu çalışmaların genel özellikleri bahsedilmiştir. Ayrıca Einstein manifoldunun tanımı, çeşitli özellikleri ve Relativity ile Einstein manifoldu arasındaki bazı ilişkilerden bahsedilmiştir. Daha sonra Einstein manifoldu için bazı temel geometrik özellikler sunuldu ve birkaç Einstein manifold örnekleri verilmiştir.

İkinci bölümde, Lagrange ve Hamilton Sistemleri anlatılmıştır. Bu mekanik kavramların anlaşılabilmesi için gerekli olan tüm mekanik ve geometrik özelliklere ayrı ayrı bakılmıştır.

Üçüncü bölümde, ikinci bölümde sözü edilen Lagrange ve Hamilton mekanik sistemleri baz alınarak; Einstein manifoldu üzerinde bu sistemler teorik olarak kurulmuştur. Kurulan bu teorik yapının daha iyi anlaşılması için bir örnek verilmiştir. Ayrıca bilgisayar programlarıyla bu örnek üzerinde modelleme yapılarak; grafikler çizdirilmiş ve fiziksel yorumlamalara yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde çalışmadan elde edilen sonuçlar sunulmuştur.

ANAHTAR KELİMELER: Einstein Manifodları, Mekanik Sistemler, Dinamik Sistemler.

ABSTRACT

THE MECHANIC SYSTEMS ON EINSTEIN MANIFOLDS

MSC THESIS
HATEM ÇOBAN
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR:ASSOC. PROF. DR. ŞEVKET CİVELEK)

DENİZLİ, JUNE 2015

This study consist of four sections.

In the first section, the short history of the subject of the this study is presented. Firstly, Einstein's life, his studies and general properties of his studies have been mentioned. In addition to, definition of Einstein manifolds and various features have been described and some relationships between Relativity and Einstein manifolds have been explained. Afterwards, some basic geometrical properties for Einstein manifolds have been offered. Besides, several Einstein manifold samples have been given.

In the second section, Lagrangian and Hamiltonian mechanical systems have been explained. All mechanical and geometric features that are necessary for an understanding of these mechanical subjects were analyzed separately.

In the third section, mentioned in the second part of the Lagrangian and Hamiltonian mechanics based systems, these systems were established on Einstein manifolds theoretically. An example has been given for this established work performed better understanding. In addition, computer software modeling has been made on this example and some drawn graphics have obtained. Some physical interpretations are devoted for this mechanical modelling.

In the fourth section, the results obtained from this study is presented.

KEYWORDS: Einstein Manifolds, Mechanic Systems. Dynamic Systems

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\boldsymbol{M_e}$	:	Einstein Manifoldu
$\boldsymbol{TM_e}$	:	Einstein Manifoldunun Tanjant Demeti
$\boldsymbol{T^*M_e}$	:	Einstein Manifoldunun Kotanjant Demeti
$\boldsymbol{L_e}$	:	Einstein Manifoldunun Lagrange Enerji Fonksiyonu
$\boldsymbol{H_e}$	:	Einstein Manifoldunun Hamilton Enerji Fonksiyonu
$\boldsymbol{X_{H_e}}$	:	Einstein Manifoldunun Hamilton Vektör Alanı
$\boldsymbol{g}$	:	Metrik Tensör
$\boldsymbol{Ric}$	:	Ricci Eğrilik Tensörü
$\boldsymbol{R}$	:	Riemann Eğrilik Tensörü
$\boldsymbol{J}$	:	Yaklaşık Tanjant Yapı

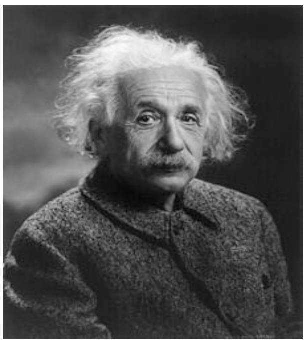
ÖNSÖZ

Bu çalışma sırasında çok değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, çalışmam sırasında görüşleriyle bana yol gösteren, ilgi ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen sayın hocam Doç. Dr. Şevket CİVELEK' e, her türlü sorularıma özenle cevap veren ve katkıları olan sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Cansel YORMAZ' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, maddi ve manevi destekleriyle yanımda olan arkadaşlarıma ve benim bugünlere gelmemde emeği olan sevgili aileme teşekkürü bir borç bilirim.

1. GİRİŞ

1.1 Albert EINSTEIN



Şekil 1.1: Albert EINSTEIN

Almanya'nın Ulm kentinde dünyaya gelen Albert Einstein(1879-1955), yaşamının ilk yıllarını Münih'te geçirdi. Lise eğitimini ve yüksek eğitimini İsviçre'de tamamladı; fakat bir üniversitede iş bulmada yaşadığı zorluklar nedeniyle bir patent ofisinde müfettiş olarak çalışmaya başladı. 1905 yılı Einstein için bir mucize yıl oldu ve o dönemde kuramları hemen benimsenmemiş olsa da ileride fizikte devrim niteliğinde olan dört makale yayınladı.

Albert Einstein, özel görecelik ve genel görecelik kuramları ile iki yüzyıldır Newton mekaniğinin hakim olduğu uzay anlayışında bir devrim yaratmıştır. Sadece matematik hesaplamalar ve denklemler ile oluşturduğu kuramları sonradan deneysel olarak defalarca doğrulanmıştır.

$E = mc^2$ denklemi ile formüle ettiği kütle enerji eşdeğerliliği yıldızların nasıl enerji oluşturduğuna açıklama getirmiş ve nükleer teknolojinin önünü açmıştır.

1.2 Tarihçe

İnsanlar tarih boyunca içinde yaşadıkları evreni anlama ve açıklamaya çalışmışlardır. Bunun için matematik ve fizik bilimleri bu uğurda iki önemli rol üstlenmiş ve insanlığın en büyük yardımcıları olmuşlardır. Matematiğin rolü, evreni denklemler aracılığıyla modellemek, fiziğin rolü ise evrenin genel anlamda analizini yapmaktır. Bu amaç için binlerce bilim insanı katkıda bulunmuştur. Evrenin geometrisini anlamak için çok farklı çalışmalar geliştirilmiş, bu çalışmalar yardımıyla $\mathbb{R}^3$ içindeki yüzeylerin teorisine Gauss klasik formda birçok çalışma ile katkıda bulunmuştur.1827 yılında $\mathbb{R}^3$ içindeki bir S yüzeyinin asıl (intrinsic) geometrisini (kabaca, S içinde yaşayanlar tarafından algılanan geometri) gösterdi (O'Neill 1983).

Daha sonrası 1854 yılına gelindiğinde Riemann keyfi n-boyutlu bir manifold üzerinde genelleme için neyin gerekli olduğunu gösterdi ki bu; her bir tanjant uzay üzerinde verilen bir iç çarpım olmalıydı. Bu düşünce de özellikle sonsuz bir mesafenin ölçülmesini desteklemekteydi. Kabaca p ve $p + dp$ yan yana iki nokta olsunlar. Bunlar arasındaki mesafe dp "tanjant vektörün" normudur. O'Neill (1983), Bernhard Riemann daha sonraları yayınladığı "On the Hypotheses which lie at the Bases of Geometry" adlı eseri ile $\mathbb{R}^3$ içindeki yüzeylerin diferansiyel geometrisine önemli katkılar sağladı. Oluşturduğu teknikler ve bu teknikleri yüksek boyutlu diferansiyellenebilir manifoldlara uygulamasıyla Einstein'ın genel görelilik teorisinin temellerini attı.

Bilinmektedir ki nesneler uzay içinde ilerlerler, ama aynı anda zaman içinde de ilerlerler. Hiçbir biçimde hareket edilmese bile, içinde bulunulan ortamdaki nesneler ile birlikte, zaman içinde hareket halindesinizdir. Uzay içinde hareket edilmeyebilir fakat daima zaman içinde hareket etmek zorunda kalınır. O halde zaman bir kenara atılamayan değerdir. 1905 yılında Hermann Minkowski, Maxwell'in Elektrodinamiği ile Einstein'ın Özel Rölativite teorilerinden esinlenerek, evrenin bilinen üç boyuta ek olarak dördüncü bir boyut ile tasvir edilebileceğini belirtmiştir. Öyle ki; 1915 yılına gelindiğinde Einstein, Genel Rölativite Kuramı ile evreni 4-boyutlu (3-uzay+1-zaman) biçiminde ifade etmiştir.

Bir topun üstünde yürüyen bir karıncayı düşünülürse, karınca kendine göre mesafeleri mümkün olan en kısa biçimde yani bir doğru üstünde giderek almaktadır. Nitekim karıncanın bulunduğu bölgedeki topun kısmını keselim yani toptan küçücük bir parça alalım. Bu küçük top parçasını masaya yatırdığımızda yaklaşık olarak parçanın bir düzleme tekabül ettiğini görebiliriz. Bu küçük parçadan, bakıldığı zaman gerçekten karınca bir doğru, üstünde hareket etmektedir. Karıncanın bulunacağı başka bir bölgeden gene ufak bir parça alsaydık da sonuç değişmeyecekti. Yani karınca sadece yakın çevresiyle düşünüldüğünde bir düzlem üstünde hareket etmektedir ve rotası da bir doğrudur. Fakat küçük parçalar ya da karıncanın aldığı küçük doğru parçaları birleştirildiğinde, geniş alandaki hareketin bir eğri üstünde olduğunun farkına varılacaktı. Uzaktan bakan gözlemci için karınca topun üstünde yani bir eğri üstünde hareket etmektedir.

İşte bu da Einstein'ın bahsettiği şeydir. Dünyadan atılan bir uzay gemisi yerçekiminden kurtulduktan sonra uzay boşluğunda hareket etmeye başlar. Boşlukta gemi bir doğru üstünde gitmektedir, bu durumda iken gemi Mars'a yaklaşır ise Marsın kütlesi nedeniyle Mars, etrafındaki uzay-zamanı eğriltir ve artık gemi kendine göre hâlâ en kısa yoldan gitse de uzay gemisi bir eğri üstünde yol almaktadır. Bir şey haricinde astronotlar bir doğru yerine eğri üstünde gittiklerini anlayamazlar. Uzay gemisinin penceresinden bakıldığında gemi hâlâ bir doğru üstünde gidiyor demektir, ama şimdi bir fark vardır. Tam olarak uzay boşluğunda (yani dünya, Mars veya güneşin çekim gücünün çok azaldığı veya birbirini tam dengelediği) bir noktada astronot gemi içinde asılı kalabilmektedir ve kendini herhangi bir yöne çeken bir şey yoktur. Ama Mars'a, yaklaşıldığında astronot bir yana doğru çekilmeğe başlar. Yani ivme hissetmeye başlar. Mars kendi etrafındaki uzay-zamanı kütlesiyle eğer, bu eğme astronota bir ivme veya çekim gücü olarak yansır. Yerçekimi ve ivme kökeninde aynı şeylerdir ve bu ivmeyi (ya da yerçekimini) yaratan şey bir kütle etrafında uzay-zamanın eğrilmeye başlamasıdır.

Bugün Genel Rölativite olarak bilinen bu kuram yerçekimi kavramını doğrudan doğruya geometriye indirgemektedir. Evren düz değildir. Güneş gibi büyük kütlelerin olduğu noktalarda eğridir. Newton maddenin çekim gücünden yani kütlelerin birbirini çekmesinde bahseder, modern teoride ise çekim gücü anlamlı bir kavram değildir. Çekim, gücü büyük kitlelerin evreni eğmeleri demektir. Bu anlamda evren, onun içindeki büyük kitleler; bunların birbiri üstünde oluşturduğu çekim güçleri tek bir şeye yani eğrisel yapıda bir dört boyutlu uzay-zaman sürekliliğine indirgenir. Bu durumu başka bir biçimde ifade edersek evren geometridir.

Einstein manifoldları her zaman fizik için çok önemli olmuştur. Bu manifoldların kökleri 1915 yılında Einstein tarafından oluşturulan Einstein denklemlerine dayanmaktadır. Eğer bir manifold için;

$$Ric_{ab} = \lambda g_{ab}\,, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

durumu varsa bu manifolda Einstein manifoldu adı verilir. "Einstein manifold" ismi A. Einstein'ın ölümünden sonra verilmiştir. Burada g metrik tensör, Ric_{ab} Ricci eğrilik tensörüdür. Genel Rölativite de Λ kozmolojik sabiti ile beraber Einstein (alan) denklemleri;

$$Ric_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} s + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab}$$

biçimindedir. Burada s skalar eğirilik olup T_{ab} kütle için uzay zamanda basınç ve kayma tensörünü temsil eder. Ayrıca G yerçekimsel sabit ve c ışık hızı 1 olarak alınmıştır. Einstein'ın denklemlerini $T_{ab} = 0$ durumu için Einstein manifoldunun basit şartına denk olarak yazıldığında denklem;

$$Ric_{ab} = \frac{2\Lambda}{n-2} g_{ab}$$

haline dönüşür. Kütlesiz bu özel durumda yani enerji-momentum tensörünün sıfır olması (madde yok ise) sonuçlar boşluktur. $Ric_{ab} = 0$ (Besse 1987).

Albert Einstein bu koşulu Euler-Lagrange denklemlerinin varyasyonel bir problemi olarak türetti.

Einstein manifoldları sadece fizik için değil aynı zamanda matematikte Riemann geometrisinin çoğu önemli konusu içinde ilişkilisi bulunmaktadır. Örneğin; Riemann submersiyonları, homojen Riemann uzayları, Riemann fonksiyonları ve onların kritik noktaları, Yang-Mils teorisi, 4 boyut için self-dualler holonomi grupları… vb.

1915 yılından sonra Einstein manifoldları üzerinde çalışmalar artan bir ivme ile devam etti. 1954'de Calabi E. bir konjuktör üretti ve Ricci eğriliğinin olmadığı kompakt Einstein manifoldlarının geniş bir sınıfını gösterdi (Besse 1987).

1955 de Calabi herhangi bir Kaehler sınıfından bir metriğin tekliğini gösterdi, varlığının kanıtı için 1976 yılına kadar bekledi. Yau ST. , Monge-Amperé tipli non-lineer kısmi diferansiyel denklem varlığını gösterdi. Calabi kendi konjuktörünü bu duruma uyarladı ve negatif tanımlı, -1 işaretli Einstein manifolduna genişletti. Bu konjuktör daha sonra 1976 yılında Yau ST. ve Aubin T. tarafından bağımsız bir biçimde kanıtlandı (Besse 1987).

1960'da Shigeo Sasaki bugün Sasaki geometrisi olarak bilinen yaklaşık kontak yapı ile ilişkili geometrik bir yapı tanıttı. Bu yapı basitçe kontak ve simplektik manifold arasındaki ilişkiye bakmaktaydı. Bu durumda Calabi ve Yau tarafından hem Einstein hem de Sasaki olan, Sasaki-Einstein manifoldları oluşturuldu ki bunlar; pozitif eğriliğe sahip tek boyutlu manifoldlardır (Kobayashi ve Nomizu 1996).

Bu gelişmelerin yanı sıra Einstein manifoldunun birkaç yeni kompakt örneğini sağladığı görüldü. Bu çerçevede ilk sınıflama Kobayashi S. tarafından geldi; +1 işaretli kompakt Kaehler Einstein manifoldunu tanıttı (Besse 1987).

1979 yılına varıldığında Don Page irtibatlı kompleks projektif iki düzlemin toplamı üzerinde tam bir Einstein metriğinin yeni bir örneğini buldu. Fakat günümüzde bu metrikle birkaç Einstein manifoldu üretilmektedir (Besse 1987).

Diferansiyel geometriyle mekanik iç içedir. Bu birliktelik sadece matematiğin düzenli formülasyonu değil, aynı zamanda fiziksel yorumu daha iyi anlamaya yarayan bir araçtır. Literatürde simplektik yapıların mekanik sisteminde takip edilen sonuçlarını, Lagrange ve Hamilton sistemlerini kullanarak elde edilmiştir. Bu formülasyonlar ile verilen bir diferensiyellenebilir manifoldun, tanjant ve kotanjant demetlerine ilişkin olarak, kanonik geometrik yapılar tarafından karakterize edilir (De Leon ve Rodrigues 1985). Ayrıca 1970'lerde Yano K. ve Ishihara S. ise tanjant ve kotanjant demetlerle ilgili olarak önemli çalışmalarda bulunmuşlardır.(Sardanashvilly 1998).

Bu bilgiler ışığında Civelek (1996), yılında Lagrange liftleri ve vektör demetlerinde Hamilton denklemleri çalışması oldukça dikkat çekicidir. Aycan (2003), jet demet yapıları üzerinde Lagrangian ve Hamiltonian sistemlerini doktora tezi olarak incelemiştir. Dağlı (2012), ise Minkowski-4 uzayında mekanik sistemleri yüksek lisans tezi olarak incelemiştir.

1.3 Temel Kavramlar

Bu bölümde, bu çalışmaya temel teşkil edecek olan bazı geometrik kavramlardan ve teoremlerden söz edilecektir.

1.3.1 Bilineer Formlar

1.3.1.1 Tanım: V sonlu boyutlu bir reel vektör uzayı olsun Bu durumda

$$g: V \times V \to \mathbb{R}$$

bilineer fonksiyonu;

$\forall v, w \in V$ için $g(v,w) = g(w,v)$ özelliğini sağlayan g'ye V üzerinde **simetrik bilineer form** denir.

V, vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form olmak üzere;

$i)$ $\forall \vec{v} \in V$, $\vec{v} \neq 0$ için $g(\vec{v},\vec{v}) > 0$ ise g bilineer formu ***pozitif tanımlıdır***.

$ii)$ $\forall \vec{v} \in V$, $\vec{v} \neq 0$ için $g(\vec{v},\vec{v}) < 0$ ise g bilineer formu ***negatif tanımlıdır***.

$iii)$ $\forall \vec{v} \in V$, $\vec{v} \neq 0$ için $g(\vec{v},\vec{v}) \geq 0$ ise g bilineer formu ***yarı-pozitif tanımlıdır.***

$iv)$ $\forall \vec{v} \in V$, $\vec{v} \neq 0$ için $g(\vec{v},\vec{v}) \leq 0$ ise g bilineer formu **yarı-negatif tanımlıdır**.

$v)$ $\forall \vec{u} \in V$ için $g(\vec{u},\vec{v}) = 0$ için $\vec{v} = 0$ oluyorsa g bilineer formu **non-dejenere** aksi halde **dejeneredir** denir (Beem 1981).

Literatürde g simetrik, bilineer formu $\langle\ ,\ \rangle$ biçiminde de gösterilmektedir.

1.3.1.2 Tanım: g , V üzerinde simetrik bilineer form ve W da V'nin bir alt uzayı olsun. g'nin W üzerine kısıtlanışı g_W olmak üzere,

$$g_W: W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna g simetrik bilineer formunun ***indeksi*** denir. Eğer g'nin indeksi v ise ,

$$0 \leq v \leq boyV$$

dir (Tozak 2010).

1.3.2 Metrik Tensör

1.3.2.1 Tanım: M, C^{∞}-sınıfından (türevlenebilir) bir manifold ve

$$g: \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow C^{\infty}(M, \mathbb{R})$$
$$(\vec{X}, \vec{Y}) \longrightarrow g(\vec{X}, \vec{Y})$$

biçiminde tanımlanan simetrik, bilineer ve non-dejenere metrik fonksiyonuna M üzerinde bir ***metrik tensör*** denir. Bu metrik tensörün indeksi M manifoldunun indeksi olarak ifade edilir.

M, C^{∞}-sınıfından bir manifold ve , $\chi(M)$ de tanımlı bir g iç çarpım fonksiyonu, M nin her bir tanjant uzayına bir iç çarpım indirger, öyle ki;

$\forall\ \vec{X}, \vec{Y} \in \chi(M)$ ve $p \in M$ için $\vec{X}_p, \vec{Y}_p \in T_pM$'dir. Böylece

$$g_p: T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$

simetrik, bilineer ve non-dejenere dönüşümü tanımlayan g_p fonksiyonuna T_pM üzerinde bir ***metrik tensör*** denir (Tozak 2010).

1.3.3 Lif ve Lifli Manifold

1.3.3.1 Tanım: E ve M, C^{∞}-manifoldlar, $\pi: E \longrightarrow M$ bir C^{∞}-dönüşüm olsun. Eğer π bir örten submersion ise, (E, π, M) üçlüsüne bir ***lifli manifold*** denir. Bir (E, π, M) lifli manifoldunda, E' ye total uzay, M' ye taban uzay, π' ye projeksiyon ve her bir $p \in M$ noktası için E' nin $\pi^{-1}(p)$ alt cümlesine de p üzerindeki ***lif*** denir (Civelek 1993).

1.3.3.2 Tanım: (E, π, M) lifli bir manifold ve $p \in M$ olsun. F_p bir C^{∞}-manifold, p noktasının bir komşuluğu W_p ve

$$t_p: \pi^{-1}(W_p) \longrightarrow W_p \times F_p$$

dönüşümü $pr_1 \circ t_p = \pi|_{\pi^{-1}(W_p)}$ şartını sağlayan bir diffeomorfizm ise o zaman (W_p, t_p, F_p) üçlüsüne p'nin komşuluğunda π'nin bir lokal trivializasyonu ve taban uzayın her bir noktası civarında en az bir lokal trivializasyona sahip bir (E, π, M) lifli manifolduna da ***lokal trivial lifli manifold*** veya ***demet*** denir (Civelek 1993).

1.3.3.3 Tanım: N ve M, C^{∞}-manifoldlar, $\varphi: M \longrightarrow N$ bir C^{∞}-dönüşüm $p \in M$ ve bir $V_p \in T_pM$ tanjant vektörüne p noktasında teğet olan bir eğri

$$\alpha: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$$

olsun. Bu durumda,

$$\varphi_*|_p(V_p) = W_{\varphi(p)} \in T_{\varphi(p)}N$$

tanjant vektörü, $\varphi \circ \alpha: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow N$ eğrisine $\varphi(p)$ noktasında teğet olan bir tanjant vektör olmak üzere;

$$\varphi_*|_p : T_pM \longrightarrow T_{\varphi(p)}N$$

ile tanımlanan dönüşüme φ' nin $p \in M$ noktasındaki ***türev dönüşümü*** denir (Aycan 2003).

Bu durumda, $\pi_* : TE \longrightarrow TM$, π'nin türev dönüşümü olmak üzere,

$$\pi_* = (TE, \pi_*, TM)$$

üçlüsü bir demet olup; π_*' ye π'nin ***tanjant demeti*** denir. (Aycan 2003).

1.4 Yaklaşık Tanjant Yapılar

1.4.1 Tanım: $2m$-boyutlu bir M manifoldu ve M'nin tanjant demeti TM üzerinde $J^2 = 0$ eşitliğini sağlayan $rankJ = m$ ile verilen (1,1) tipinden J tensör alanına ***yaklaşık tanjant yapı*** denir.

M manifoldu üzerinde lokal koordinatlar $\{x_i\}$ $1 \leq i \leq 2m$ ve TM üzerindeki lokal koordinatlar $\{x_i, \dot{x}_i\}$ olmak üzere TM üzerindeki yaklaşık tanjant yapısı;

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \quad , \quad J\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0$$

olarak tanımlanır (De Leon ve Rodrigues 1989).

1.4.2 Tanım: M m boyutlu bir manifold ve TM ise M'nin tanjant demeti olsun. TM üzerinde bir vektör alanına M üzerinde ***semispray*** denir. Bu durumda ε semispray lokal olarak;

$$\varepsilon = \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}$$

ile verilir. Burada ε_i fonksiyonları $\varepsilon_i = \varepsilon_i(x_i, \dot{x}_i)$ olarak tanımlıdır.

Bu durumda, M manifoldu üzerinde verilen bir σeğrisi eğer ε'nin bir integral eğrisi oluyorsa, bu eğriye ε'nin bir çözümü denir (Aycan 2003).

1.4.3 Tanım: J, m boyutlu bir M manifoldunun tanjant demeti üzerinde bir yaklaşık tanjant yapı olsun. Bu durumda TM üzerindeki lokal koordinatlar $\{x_i, \dot{x}_i\}$, $1 \leq i \leq m$ ve

$$\varepsilon = \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}$$

vektör alanı M üzerinde semispray olmak üzere,

$$C = J\varepsilon = \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}$$

ile verilen C vektör alanına ***Liouville vektör alanı*** denir (Aycan 2003).

Buna göre, TM üzerinde tanımlı ε vektör alanının semispray olması için gerek ve yeter koşul $J\varepsilon = C$ olmasıdır

1.4.5 Tanım: M manifoldunu tanjant demeti TM üzerindeki p-formların cümlesi $\Lambda^p(TM)$ ve TM üzerindeki vektör alanlarının cümlesi $\chi(TM)$ olsun.

$$i_J f = 0\,, \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

ve

$$i_J\omega\big(X_1, \dots, X_p\big) = \sum_{i=1}^{p} \omega\big(X_1, \dots, JX_i, \dots, X_p\big)\ , \omega \in \Lambda^p(TM), X_1 \dots, X_p \in \chi(TM)$$

olarak tanımlı i_J fonksiyonuna ***düşey türev*** denir (De Leon ve Rodrigues 1989).

Burada;

$$i_J\big(dx^i\big) = 0 \qquad , \qquad i_J(d\dot{x}_i) = dx^i$$

biçimindedir. Bununla birlikte $\omega \in \Lambda^p(TM)$ $p-$formu,

$$\omega \ = \sum_{i_1<\cdots<i_p} \omega_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

biçiminde tanımlıdır. ω $p-$formunun diferansiyeli ise;

$$d\omega \ = \sum_{i_1<\cdots<i_p} d\omega_{i_1 \dots i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

olarak ifade edilen $p+1-$form haline gelir (De Leon ve Rodrigues 1989).

$p+1$ formların cümlesini de $\Lambda^{p+1}(TM)$ ile gösterilirse;

$$d_j : \ \Lambda^p(TM) \longrightarrow \Lambda^{p+1}(TM)$$

olacak şekilde

$$d_j = \big[i_j d, d\big] = i_j d - d i_j$$

ile tanımlı d_j operatörüne ***düşey diferansiyel*** denir (Aycan 2003).

1.4.1 Teorem: Bir M manifoldu üzerindeki $\forall X \in \chi(M)$ vektör alanı ve ω , $p-$ formunun $i_X\omega$ iç çarpımı aşağıdaki şartları sağlayan $(p-1)$ −formdur.

i) $i_X\omega = 0$'dır. Eğer p=0 ise,

ii) $i_X\omega = \omega(X)$'dir. Eğer p=1 ise,

iii) $i_X\omega(Y_1, \dots, Y_{p-1}) = \omega(X, Y_1, \dots, Y_{p-1})$'dir. Eğer $Y_1, \dots, Y_{p-1} \in \chi(M)$ ise.

Bu durumda $i_X\omega \in \Lambda^{p-1}(M)$ olur (De Leon ve Rodrigues 1989).

1.4.6 Tanım: M, C^∞-sınıfından bir manifold olsun. M üzerinde vektör alanların uzayı $\chi(M)$ olmak üzere;

$$D : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$
$$(X, Y) \longrightarrow D_X Y$$

fonksiyonu ve $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

i)$D_{fX+gY}Z = fD_XZ + gD_YZ$

ii) $D_X(fY) = fD_XY + X(f)Y$

şartlarını sağlıyor ise, D'ye M manifoldu üzerinde afin konneksiyon ve D_X'e de X vektör alanına göre ***kovaryant türev*** operatörü denir (Hacısalihoğlu 1993).

1.5 Riemann Metriği ve Riemann Manifoldu

1.5.1 Tanım: M n-boyutlu diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğer M üzerinde simetrik, pozitif tanımlı, bilineer $(0,2)$ tipinde bir g tensör alanı var ise bu durumda g ye M üzerinde bir ***Riemann metrik*** ve (M, g) ikilisine de bir ***Riemann manifoldu*** denir.

Burada;

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

biçiminde olup ve $g_{ij}: M \longrightarrow \mathbb{R}$, C^{∞}-fonksiyonlardır. (M, g) bir Riemann manifold, M nin bir p noktasında lokal koordinat sistemi $(x^1, \dots, x^n)$ olsun.

$$X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \, , Y = \sum Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

$p \in M$ noktasında iki tanjant vektör olmak üzere g metriği;

$$g(X, Y) = \sum_{i,j=1} X^i Y^j \, g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

$$= \sum g_{ij} dx^i(X) dx^j(Y)$$

olarak yazılır. Burada $dx^i(X) = X\left(x^i\right)$, $dx^i(Y) = Y\left(x^j\right)$ ‘ dir. Ayrıca,

$$g^{ij} = g(dx^i, dx^j) \; , g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

olmak üzere

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$$

dır.

Eğer g Riemann metriğinde pozitif tanımlılık yerine non-dejenere aksiyomu alınırsa (M, g) ikilisine ***yarı-Riemann manifoldu*** denir (O’Neill 1983).

1.5.2 Tanım: M bir yarı-Riemann manifoldu ve M üzerindeki D konneksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa D’ye M üzerinde ***Levi-Civita konneksiyonu*** denir.

Böylece $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

i) $[X, Y] = D_X Y - D_Y X$

ii) $X g(Y, Z) = g(D_X Y \, , Z) + g(Y, D_X Z)$ (De Andres ve diğ. 1991).

Başka bir deyişle D’ye M üzerinde Riemann konneksiyonu ve D_X’e de X’e göre ***Riemann anlamında kovaryant türev operatörü*** denir (Hacısalihoğlu 1993).

1.6 Eğrilikler ve Eğrilik Tensörleri

1.6.1 Tanım: M , D Levi-Civita konneksiyonlu yarı-Riemann manifoldu olsun. Bu durumda; $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$R: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y, Z) \longrightarrow R(X, Y)Z$$

şeklinde ve

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= [D_X, D_Y]Z - D_{[X,Y]}Z \\ &= D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]}Z \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı M üzerinde (1,3) tipindeki R fonksiyonuna M'nin ***Riemann eğrilik tensörü*** denir (O'Neill 1983).

1.6.1 Teorem: M yarı-Riemann manifoldu ve R de M'nin eğrilik tensörü olsun. O zaman;

$\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için,

i) $g(R(X,Y)Z, W) = -g(R(Y,X)Z, W)$

ii) $g(R(X,Y)Z, W) = -g(R(X,Y)W, Z)$

iii) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$

iv) $g(R(X,Y)Z, W) = g(R(Z,W)X, Y)$'dir (O'Neill 1983).

1.6.2 Teorem: E^n nin eğriliği her noktada sıfırdır (Hacısalihoğlu 1993).

1.6.2 Tanım: (M, g) bir yarı-Riemann manifoldu olsun. R, M'nin Riemann eğrilik tensörü olarak verilsin. $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ T_pM'nin ortanormal bir bazı olmak üzere;

$$Ric: T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(X_p, Y_p) \longrightarrow Ric(X_p, Y_p) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g\big(R(e_i, X_p)Y_p, e_i\big)$$

şeklinde tanımlı Ric tensörüne M'nin ***Ricci eğrilik tensörü*** denir.

Ric tensörü simetriktir. Yani $\forall X_p, Y_p \in T_pM$ için;

$$Ric(X_p, Y_p) = Ric(Y_p, X_p)$$

dir. Ayrıca

$$Ric(X_p, Y_p) \longrightarrow iz(trace)\{Z_p \longrightarrow R(Z_p, Y_p)X_p\}$$

biçiminde de tanımlanmaktadır (O'Neill 1983).

1.6.3 Tanım: M bir yarı-Riemann manifold ve $p \in M$ noktasındaki X_p, Y_p tanjant vektörlerinin gerdiği T_pM tanjant uzayının 2 boyutlu bir non-dejenere alt uzayı P olsun.

$$K(P) = \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}$$

şeklinde tanımlanan $K(P)$ reel sayısına P'nin ***kesit eğriliği*** denir (O'Neill 1983).

Eğer T_pM tanjant uzayında, her P düzlemi ve M manifoldunun her p noktası için, $K(P)$ bir sabit ise; bu durumda M manifolduna ***sabit eğrilikli uzay*** denir.

1.6.4 Tanım: Bir sabit eğrilikli Riemann manifolduna da bir ***uzay form*** adı verilir ve sabit eğrilikli uzaylar $M^n(c)$ ile gösterilir. M, $n-$ boyutlu bir uzay form olsun. Eğer;

$c = 0$ ise $M^n(c) \cong E^n$ Öklid uzayı,

$c = \frac{1}{r^2}$ ise $M^n(c) \cong S^n(r)$ küresi,

$c = -\frac{1}{r^2}$ ise $M^n(c) \cong H^n(r)$ Hiperbolik uzay,

olur (Yano ve Kon 1984), (Kobayashi ve Nomizu 1996).

1.6.3 Teorem: Eğer M sabit c eğrilikli bir uzay form ise, $\forall\, X, Y, Z \in \chi(M)$ vektör alanları için,

$$R(X,Y)Z = c[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y]$$

dir (Yano and Kon 1984).

1.6.5 Tanım: M bir yarı Riemann manifoldu ve R, M'nin Riemann eğrilik tensörü olsun. $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ T_pM'nin orta normal bir bazı olmak üzere

$$s = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i Ric(e_i, e_i)$$

değerine M'nin ***skaler eğriliği*** denir (O'Neill 1983).

1.7 Einstein Manifoldları

1.7.1 Tanım: (M, g) bir yarı-Riemann manifoldu olsun. $\forall p \in M$ ve $\forall X, Y \in T_pM$ için

$$Ric(X,Y) = \lambda g(X,Y)\ ,\ \lambda \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

koşulunu sağlayan M manifolduna ***Einstein manifoldu*** denir (Besse 1987).

(M, g) , n −boyutlu yarı Riemann manifoldu olsun ve (1.1) koşulu sağlansın.

Bu gösterim $n \geq 4$ için çok uygundur, fakat n için başka durumlarda ne gibi sonuçlar ortaya çıkmaktadır? Şimdi bu durumlara kısaca bakılırsa;

Eğer $n = 1$ ise $Ric = 0$'dır.

Eğer $n = 2$ ise $\forall p \in M$ için

$$Ric(X,Y) = \frac{1}{2} s g(X,Y), \quad s = \sum_{i=1}^{n} Ric(e_i, e_i)$$

dir.

Eğer $n = 3$ alınırsa (M, g) yarı-Riemann manifoldunun Einstein olabilmesi için gerek ve yeter koşul (M, g)'nin ***sabit (kesitsel) eğriliğe*** sahip olmasıdır.

Eğer g yerine t sabiti için pozitif $t^2 g$ aldığımız takdirde (1.1) deki λ sabiti λt^{-2} olacağından Einstein manifoldu için Ric değişmez (Besse 1987).

Bu sonuçlar yardımıyla aşağıdaki teoremler verilebilir.

1.7.1 Teorem: 2- boyutlu bir yarı-Riemann manifoldunun Einstein olabilmesi için gerek ve yeter koşul bu manifoldun sabit (kesitsel veya skaler) eğriliğe sahip olmasıdır (Besse 1987).

1.7.2 Teorem: Farz edelim ki $n \geq 3$ olsun. Bu durumda (M, g) n-boyutlu yarı-Riemann manifoldunun Einstein olması için gerek ve yeter koşul $\forall p \in M$ için öyle bir λ_p sabiti vardır ki;

$$Ric_p = \lambda_p g_p$$

dir (Besse 1987).

Önerme: Einstein yapısına sahip aynı λ sabitli iki yarı-Riemann manifoldunun çarpımı da bir Einstein manifoldu 'dur (Besse 1987).

Uyarı: Farklı sabitlerle verilen iki Einstein manifoldunun çarpımı Einstein değildir (Besse 1987).

Şimdi birkaç önemli Einstein manifoldu örneği verelim.

1.7.1 Örnek ($\mathbb{R}^n$ Einstein Manifoldu): $\mathbb{R}^n$ Flat (düzlemsel) Model uzayını (Öklid uzayı) göz önüne alalım $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ için $\mathbb{R}^n$ de simetrik, bilineer, non-dejenere formu aşağıdaki gibidir (Besse 1987).

$$g_0 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + \cdots + (dx_n)^2$$

$\mathbb{R}^n$ vektör uzayının tanjant uzayını kanonik olarak $T\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ alınabilir.

Bu durumda; $X_p \in T\mathbb{R}^n$ tanjant vektörü;

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p$$

şeklinde olup bileşenleri,

$$(p, X) = (p_i, X^i) = (p_1, p_2, \dots, p_n, X^1, \dots, X^n) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

dir.

Şimdi $\mathbb{R}^n$ üzerinde g_0 metriği ile birleşmiş yarı-Riemann metriğini tanımlayalım. Öyle ki; $\forall\, p \in \mathbb{R}^n$ için $g_o|_p = g_p$ olur. Böylece g_p , g_0 ile özdeşleşmiş olup $T_p\mathbb{R}^n$ de tanımlıdır. O halde tanımlana bu g_p ile $(\mathbb{R}^n, g_p)$ yarı-Riemann manifoldu bir Einstein manifoldu olur. Çünkü (1.1) ifadesini bu örnek için açık halde yazıldığında,

$\forall p \in T_p\mathbb{R}^n$ ve $\forall X_p, Y_p \in T_p\mathbb{R}^n$ için

$$Ric(X_p, Y_p) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(R(e_i, X_p)Y_p, e_i)$$

ve "Teorem 1.6.2" nedeniyle eşitliğin sağ tarafı sıfır olur. Böylece (1.1) eşitliğindeki λ sabiti sıfır olur.

1.7.2 Örnek (S^n ve H^n Einstein Manifoldları): M ve N C^∞ manifoldlar olsunlar.$i: N \longrightarrow M$ bir immersiyon (daldırma) dönüşümü verilsin. g M üzerinde bir yarı-Riemann metriği olmak üzere $\forall x \in N$ için

$i_x^*(T_xN)$, $T_{i(x)}M$'nin non-izotropik bir alt uzayı olur. Yani i^*g non-dejenerdir.

Böylece i^*g, N üzerinde bir yarı-Riemann metriği olur. Eğer g bir Riemann metriği ise o zaman i^*g daima non-izotropik olup g, N üzerinde bir Riemann metriği haline gelir (Besse 1987).

Şimdi $\mathbb{R}^{n+1}$ üzerinde p indeksli veya $(p, n+1-p)$ işaretli olan g_p kanonik bilineer formu,

$$g_p = dx_1^2 + \cdots + dx_p^2 - dx_{p+1}^2 - \cdots - dx_{n+1}^2$$

olarak tanımlansın.

$$S_p^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1}: g_{p+1}(x,x) = +1\right\}$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1}: x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 = 1\right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

kümesi $\mathbb{R}^{n+1}$ imbedded (1: 1 gömülmüş) bir alt manifold olur. Bu durumda

$i : S_p^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 1:1 imbedding dönüşümü yardımıyla $\left(S_p^n, i^* g_p\right)$ ikilisi bir yarı-Riemann manifoldu olur ve bu manifoldunun işareti $(p, n-p)$ dir.

Özellikle $p = n$ durumunda S_n^n Riemann manifoldu ve $x_{n+1} > 0$ durumunda

$$S_n^n = S^n$$

bilinen $\boldsymbol{n}$ **−küreye** eşit olur. Tanımlanan bu metrik ile S^n bir Einstein manifoldu olur. Benzer şekilde;

$$H_p^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1}: g_p(x,x) = -1\right\}$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1}: x_1^2 + x_2^2 + \cdots - x_p^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = -1\right\}$$

$\left(H_p^n, i^* g_{p+1}\right)$ ikilisi bir yarı-Riemann manifoldu olup, işareti $(p, n-p)$ dir. Özelikle $p = n$ durumunda H_n^n Riemann manifoldu $(0,0,\ldots,1)$ irtibatlı bileşeni ile birlikte ($x_{n+1} < 0 \;\; durumu$)

$$H_n^n = H^n$$

kanonik hiperbolik uzaya eşit olur. Bu biçimde tanımlanmış metrik ile H^n bir Einstein manifoldu olur (Besse 1987).

2. LAGRANGE VE HAMİLTON MEKANİK SİSTEMLERİ

2.1 Lagrange Sistemleri

Bu bölümde; J yaklaşık tanjant yapısı kullanılarak; klasik mekanikte yüksek öneme sahip olan Lagrange Formülasyonu ile ilgili kayda değer bilgiler sunulacaktır.

2.1.1 Tanım: Kabul edelim ki; M bir m-boyutlu manifold ve

$$\tau_M: TM \to M$$

kanonik projeksiyonu ile birlikte TM, M'nin tanjant demeti olsun. TM, M konfigürasyon manifoldunun konum-hız uzayı ve $L: TM \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyonu ***Lagrange fonksiyonu*** olarak adlandırılır. TM üzerinde;

$$\omega_L = -dd_J L \tag{2.1}$$

ile tanımlı kapalı 2-formunu göz önüne alalım. Bu durumda,

$$E_L = CL - L \ \ (veya\ E_L = L_C L - L)$$

TM üzerinde L ile birleşmiş enerji fonksiyonu olarak adlandırılır (De Leon ve Rodrigues 1989).

2.1.1 Teorem: $i_J \omega_L = 0$'dır.

İspat: Gerçekten tanım gereği;

$$
\begin{aligned}
i_J\omega_L &= -i_J dd_L = i_J d_J d_L && (dd_J = -d_J d)\\
&= d_J i_J d_L && (i_J d_J = d_J i_J)\\
&= d^2{}_J L\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$i_X \omega_L = dE_L \tag{2.2}$$

eşitliğini göz önüne alındığında, o zaman (2.2) eşitliği X üzerinde belli bir koşul altında ***Euler-Lagrange hareket denklemlerini*** oluşturan bir denklem olduğu görülmektedir (De Leon ve Rodrigues 1989) , (De Andres ve diğ. 1991).

2.1.2 Teorem: TM üzerinde verilen herhangi bir $\{q^i, v^i\}$ koordinat sistemi için ω_L formu, TM üzerinde bir simplektik formdur ancak ve ancak

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}\right)$$

Hessian matrisi maksimal ranka sahiptir (De Leon ve Rodrigues 1989).

İspat:

$$\omega_L = \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v^i} dq^i \wedge dq^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} dq^i \wedge dv^j$$

formunun m defa dış çarpımı;

$$\omega_L^m = \omega_L \wedge \dots \wedge \omega_L = c \, det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}\right) dq^1 \wedge \dots \wedge dq^m \wedge dv^1 \wedge \dots dv^m$$

olup, burada c sıfır olmayan sabit bir fonksiyondur. Böylece; ω_L simplektik ise ancak ve ancak ω_L^m bir hacim elementidir, yani;

$$det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}\right) \neq 0$$

dır.

Eğer ω_L simplektik ise, bu durumda $L: TM \to \mathbb{R}$ Lagrange fonksiyonu regüler veya dejenere olmayan; aksi halinde, L'nin tekil, irregüler veya dejenere olduğu söylenebilir.

L'nin regüler olduğunu varsayılırsa, o zaman (2.2) denkleminin tek bir ξ çözümü vardır. Yani, ω_L simplektik olduğundan

$$i_\xi \omega_L = dE_L$$

dir.

2.1.3 Teorem: $i_{\xi}\omega_L = dE_L$ ile verilen ξ vektör alanı bir yarı sprey (yani ikinci mertebeden diferansiyel denklem)' dir (De Leon ve Rodrigues 1989).

İspat: Teoremin ispatı için $J\xi = C$ olduğunu göstermek yeterdir. Bunun için;

$$i_C\omega_L = -i_C ddL = i_C d_J dL \qquad (dd_J = -d_J d)$$

$$= i_J dL - d_J i_C dL \qquad \left(i_C d_J + d_J i_C = i_J\right)$$

$$= d_J L - d_J(CL)$$

$$= -d_J(CL - L) = -d_J E_L$$

olup, diğer yandan;

$$i_J i_{\xi}\omega_L = i_{\xi} i_J \omega_L - i_{J\xi}\omega_L \qquad (i_{\xi} i_J - i_J i_{\xi} = i_{J\xi})$$

$$= i_{J\xi}\omega_L$$

ve

$$i_J dE = d_J E$$

dir. Böylece;

$$i_J i_{\xi}\omega_L = i_C\omega_L \qquad \text{ve} \qquad J\xi = C$$

olup, ω_L simplektiktir.

Eğer ξ, (2.2) ile verilen bir yarı-sprey(semi-spray) ise, o zaman lokal olarak;

eşitliğini yazılabilir. Ayrıca bu eşitlik yardımıyla,

$$\xi = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \xi^i \frac{\partial}{\partial v^i}$$

$$i_{\xi}\omega_L = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v^j} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v^i} v^j - \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} \xi^j\right) dq^i + \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} v^j dv^i \qquad (2.3)$$

ve

$$E_L = v^j \frac{\partial L}{\partial v^j} - L$$

olup,

$$dE_L = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v^j} v^j - \frac{\partial L}{\partial q^i}\right) dq^i + \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} v^j dv^i \tag{2.4}$$

denklemi elde edilir ve $i_\xi \omega_L = dE_L$ eşitliğinden de;

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v^i} v^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} \xi^i - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \qquad 1 \le i \le m \tag{2.5}$$

eşitliğine ulaşılır.

$\sigma: \mathbb{R} \to TM$, ξ vektör alanın izi, yani $\dot{\sigma}: \mathbb{R} \to TM$, ξ' nin bir integral eğrisi olsun.

Eğer $\sigma(t) = \left(q^i(t)\right)$ ise,

$$\dot{\sigma}(t) = \left(q^i(t), \frac{dq^i(t)}{dt}\right)$$

olup, σ eğrisi;

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial q^i} \dot{q}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \ddot{q}^j - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \ , \qquad 1 \le i \le m$$

eşitliğini gerçekler. Türevlerin zincir kuralı gereğince;

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \ , \quad 1 \le i \le m \tag{2.6}$$

eşitliğine ulaşılır. (2.6) eşitliği ile verilen denklemler ***Euler -Lagrange Denklemleri*** olarak bilinir (De Leon ve Rodrigues 1989).

2.1.4 Teorem: Euler-Lagrange denklemlerinin çözümleri, ξ'nin integral eğrileridir (De Leon ve Rodrigues 1989).

2.1.2 Tanım: $L: TM \to \mathbb{R}$ bir regüler Lagranjyen olmak üzere;

$$i_\xi \omega_L = dE_L$$

eşitliğini gerçekleyen bir tek ξ yarı-sprey'i vardır ve bu ***Euler-Lagrange vektör alanı*** olarak adlandırılır. Genellikle ξ_L ile gösterilir (De Leon ve Rodrigues 1985).

2.1.5 Teorem (Enerji Korunumu Yasası): $L_{\xi_L} E_L = \xi_L E_L = 0$ olduğundan, E_L, ξ_L'nin integral eğrileri boyunca sabittir (De Leon ve Rodrigues 1989).

2.1.1 Örnek: $L: T\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Lagrange fonksiyonu;

$$L(x, y, u, v) = \frac{1}{2}[(u^2 - v^2) - x^2 - y^2]$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda;

$$d_J L = udx - vdy$$

ve,

$$\omega_L = -dd_J L = dx \wedge du - dy \wedge dv$$

olup, L'nin Hessian matrisi,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

dir. Böylece, L regüler ve ω_L, $T\mathbb{R}^2$ üzerinde bir simplektik formdur. L için Euler-Lagrange vektör alanı da;

$$\xi_L = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial u} + y\frac{\partial}{\partial v}$$

biçiminde olup,

$$J\xi_L = u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v} = C$$

eşitliğini gerçeklemektedir. Ayrıca; tanımlanan bu L Lagrange fonksiyonu için, Euler-Lagrange denklemleri;

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x(t) \quad , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = y(t)$$

şeklinde ifade edilir.

2.2 Mekanik Sistem

2.2.1 Tanım: M n-boyutlu bir manifold ve F, TM üzerinde bir diferansiyellenebilir fonksiyon ve kuvvet alanı olarak adlandırılan ρ, TM üzerinde bir yarı basit form ise bu durumda $M = (M, F, \rho)$ üçlüsüne bir ***mekanik sistem*** denir (De Leon ve Rodrigues 1989).

2.2.1 Teorem: $M = (M, F, \rho)$ bir mekanik sistem ve $\omega_F = -dd_J F$ 2-form simplektik olsun. Bu durumda F'nin enerji fonksiyonu $E_F = CF - F$ olmak üzere;

$$i_\xi \omega_F = dE_F + \rho \tag{2.7}$$

denklemini gerçekleyen bir tek ξ yarı spreyinin integral eğrileri, $\rho = \rho_i dq^i$ **o**lmak üzere;

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial F}{\partial q^i} = -\rho_i \,, \qquad 1 \leq i \leq m$$

denklem sisteminin çözümleridir (De Leon ve Rodrigues 1989).

İspat: $J\xi = C$ sonucu ve (2.7)'den;

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q^j \partial v^i} v^j + \frac{\partial^2 F}{\partial v^i \partial v^j} \xi^i - \frac{\partial F}{\partial q^i} = \rho_i \,, \qquad 1 \leq i \leq m \tag{2.8}$$

olup, eğer,$\sigma(t) = \left(q^i(t)\right)$ ρ'nun bir izi ise, (2.8)'den;

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial F}{\partial q^i} = -\rho_i \,, \; 1 \leq i \leq m \tag{2.9}$$

eşitliği elde edilir.

2.2.2 Tanım: Eğer ρ kuvvet alanı bir kapalı yarı temel form ise; bu durumda $M = (M, F, \rho)$ mekanik sistemine ***korumalı sistem*** denir (De Leon ve Rodrigues 1989).

Eğer, $M = (M, F, \rho)$ korumalı bir mekanik sistem ise, bu takdirde;

$$L_{\xi}\omega_F = di_{\xi}\omega_F = d(dE_F + \rho) = 0$$

denkleminden ρ kapalı ve aynı zamanda $\rho = dV$ için;

$$L_{\xi}(E_F + V) = 0$$

olup, enerjinin de korunduğu sonucuna ulaşılır (De Leon ve Rodrigues 1989).

2.2.3 Tanım: $M = (M, F, \rho)$ korumalı bir mekanik sistem ise

$$\rho = \tau^{*}{}_{M}(dU) = d(U \circ \tau_M)$$

ile tanımlı diferensiyellenebilir bir $U: M \to \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa; bu mekanik sisteme ***Lagrange Mekanik Sistemi*** denir.

Eğer $L = F + U \circ \tau_M$ şeklinde alınırsa; o zaman (2.7) ve (2.9) denklemlerinden,

$$i_{\xi}\omega_L = dE_L\,,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0\,, \qquad 1 \le i \le m$$

eşitlikleri yazılabilir (De Leon ve Rodrigues 1989).

2.2.1 Sonuç: Korumalı mekanik sistemler Lagranjyen sistemlerdir. ρ kuvvet alanı kapalı olmayan yarı-basit(temel) form ise, bu durumda mekanik sistem korumasız bir mekanik sistemdir.

2.2.4 Tanım: Eğer bir $L: TM \to \mathbb{R}$ Lagranjyen fonksiyonu 2. Dereceden homojen, yani $CL = 2L$ ise o zaman L'ye ***homojen Lagranjyen*** denir. Sonuç olarak;

L bir homojen Lagranjyen ise,

$$v^i \frac{\partial L}{\partial v^i} = 2L(q, v)$$

olup, enerji fonksiyonu $E_L = L$ şekline dönüşür (De Leon ve Rodrigues 1989), (De Andres ve diğ. 1991).

2.2.2 Teorem: L bir homojen Lagranjyen olsun. O zaman;

a) ω_L , 1. Dereceden homojendir.

b) Euler-Lagranjyen vektör alanı ξ_L bir spraydir (De Leon ve Rodrigues 1989).

İspat:

a) Eğer, L homojen ise, o zaman $\omega_L = -dd_J L$'dir. Bu durumda aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$L_C \omega_L = \omega_L$$

Yani, ω_L, 1. Dereceden homojendir.

b) $i_\xi \omega_L = dE_L$ ve ω_L simplektik olduğu için;

$$\begin{aligned} i_{[C,\xi_L]}\omega_L &= L_C i_\xi \omega_L - i_\xi L_C \omega_L \\ &= L_C dE_L - i_{\xi_L}\omega_L \\ &= L_C dL - dE_L \\ &= d(L_C L) - dL \\ &= d(CL - L) = dE_L \end{aligned}$$

ve

$$[C, \xi_L] = \xi_L$$

olup, Euler-Lagrange vektör alanı ξ_L bir spraydır.

2.2.3 Teorem: F ve ρ k. dereceden homojen olmak üzere; $M = (M, F, \rho)$ bir mekanik sistem olsun. O zaman $i_\xi \omega_F = dE_F + \rho$ denklemini gerçekleyen ξ bir yarı-spreydir (De Leon and Rodrigues 1989).

İspat:

$$i_{[C,\xi]}\omega_F = L_C i_\xi \omega_F - i_\xi L_C \omega_F$$

$$E_F = CF - F = kF - F = (k-1)F$$

$$L_C(i_\xi \omega_F) = L_C(dE_F + \rho) = d(L_C E_F) + L_C \rho$$

$$= k(k-1)dF + k\rho$$

$$L_C \omega_F = (k-1)\omega_F$$

$$i_\xi L_C \omega_F = (k-1) i_\xi \omega_F = (k-1)dE_F + (k-1)\rho (k-1)^2 dF + (k-1)\rho$$

olup böylece, $$i_{[C,\xi]}\omega_F = k(k-1)dF + k\rho - (k-1)^2 dF - (k-1)\rho$$

$$= (k-1)dF + \rho$$

$$= dE_F + \rho$$

$$= i_\xi \omega_F$$

olduğundan $\omega_F$simplektiktir. Yani, $[C, \xi] = \xi$ 'dir (De Leon ve Rodrigues 1989).

2.3 Hamilton Sistemleri

Bir M manifoldunun kotanjant demeti T^*M ve $H: T^*M \to \mathbb{R}$, T^*M üzerinde bir fonksiyon olsun. Eğer ω_M, T^*M üzerinde kanonik simplektik yapı ise bu durumda T^*M üzerinde tek bir X_H vektör alanı vardır ki $i_{X_H}\omega_M = dH$ ‘dır. Burada X_H ‘ a H enerji fonksiyonunun ***Hamilton Vektör Alanı*** denir

2.3.1 Tanım: (S, ω) bir simplektik manifold ve $H: S \to \mathbb{R}$ S üzerinde bir fonksiyon olsun. $S_\omega: \chi(S) \to \Lambda^1 S$ bir izomorfizm olsun. S üzerinde tek bir X_H vektör alanı vardır öyle ki;

$$i_{X_H}\omega = dH$$

olur. Buradaki X_H, H enerjili (yada Hamilton enerjili) bir ***Hamilton vektör alanı*** diye adlandırılır (De Leon ve Rodrigues 1989).

2.3.1 Teorem: Aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

i) X bir simplektik vektör alanıdır;

ii) Lie türevi $L_X\omega = 0$;

iii) $i_X\omega = df$ (lokal olarak) bazı f fonksiyonları için $d(i_X\omega) = 0$ ‘dır (De Leon ve Rodrigues 1989).

“Teorem 2.3.1” den anlamaktayız ki (S, ω) üzerinde bir Hamilton vektör alanı simplektiktir. Aksi halde (S, ω) üzerinde bir X vektör alanı lokal Hamilton olarak ifade edilir. Tabi ki burada, $\forall x \in S$ için X ‘in bir U komşuluğu varsa ve U üzerinde bir H fonksiyonu vardır öyle ki U üzerinde $X = X_H$ ‘dır.

Yine aynı “Teorem 2.3.1” ışığında görülmektedir ki S üzerinde bir X vektör alanı lokal Hamilton’dur ancak ve ancak X bir simplektik vektör alanıdır.

2.3.1 Örnek: Lokal Hamilton (Hamilton olmayan) klasik bir örneği 2-Tor ($T^2 = S^1 \times S^1$) ‘ u göz önüne alalım. Lokal koordinatları (x, y) olsun. Bu durumda

$$\omega = dx \wedge dy$$

$T^2 = S^1 \times S^1$ üzerinde iyi tanımlı 1- formdur.

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$$

biçiminde alacak olursak bu takdir de;

$$i_X\omega = dy - dx$$

olur. T^2 toru içinde kapalıdır. (fakat tam değildir) O zaman X lokal Hamilton ‘dur.X Hamilton olamaz çünkü T^2 üzerinde tanımlanmış bazı H fonksiyonları için $X = X_H$

olursa o zaman T^2 kompakt olduğu için H kritik noktaya sahiptir ve bu nokta dH 'ın yok olduğu noktadır.(sıfırdır). Böylece X sıfıra karşı gelir.[9]

$2n$-boyutlu bir (S, ω) simplektik manifoldunu göz önüne alalım. X_H, H enerjili Hamilton vektör alanı olsun. S' nin kanonik koordinatları (q^i, p_i) olsun. Farz edelim ki;

$$\sigma: I = (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$$

X_H'ın bir integral eğrisi olsun.

$$X_H(\sigma(t)) = \dot{\sigma}(t) \quad , \ t \in I \tag{2.10}$$

Lokal koordinatlar içinde

$$\sigma(t) = \{q^i(t), p_i(t)\},$$

ile belirtilir ve bu durumda;

$$\dot{\sigma}(t) = \frac{dq^i}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{dp_i}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial p_i}$$

olur. Aşağıdaki izomorfizmi göz önüne alarak,

$$S_\omega: X \in \chi(S) \to S_\omega(X) = i_X \omega \in \Lambda^1 S$$

basit bir derleme ile

$$S_\omega\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right) = dp_i \quad , \ S_\omega\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right) = -dq^i \tag{2.11}$$

olur ve böylelikle,

$$S_\omega^{-1}(dq^i) = -\frac{\partial}{\partial p_i} \quad , \ S_\omega^{-1}(dp_i) = \frac{\partial}{\partial q^i} \tag{2.12}$$

(2.11) ve (2.12) ifadelerinden S üzerindeki X vektör alanını lokal olarak gösterecek olursak;

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \bar{X}^i \frac{\partial}{\partial p_i}$$

o zaman S_ω uygulanırsa,

$$S_\omega(X) = -\bar{X}^i dq^i + X^i dp_i$$

olacaktır. Aynı zamanda α, S üzerinde 1- form olsun. Lokal olarak;

$$\alpha = \alpha_i dq^i + \bar{\alpha}_i dp_i$$

ve

$$S_\omega(\alpha) = \bar{\alpha}_i \frac{\partial}{\partial q^i} - \alpha_i \frac{\partial}{\partial p_i}$$

yukarıdaki bilgiler ışığında,

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i$$

eşitliği elde edilir. Buradan hareketle,

$$X_H = S_\omega^{-1}(dH) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\frac{\partial}{\partial q^i} - \left(\frac{\partial H}{\partial q^i}\right)\frac{\partial}{\partial p_i} \tag{2.13}$$

(2.10) ve (2.13) eşitliklerinden

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \quad , \quad 1 \leq i \leq n \tag{2.14}$$

Bulunulan bu denklemlere ***Hamilton Denklemleri*** denir.

$$i_{X_H}\omega = dH$$

Denklemine de Hamilton denklemlerinin ***simplektik*** ya da ***esas formu*** denir (De Leon ve Rodrigues 1989).

2.3.2 Örnek: Klasik mekanikte momentumun faz uzayı, M konfigürasyon manifoldunun kotanjant demetidir.T^*M üzerinde,

$$H(\alpha_x) = \frac{1}{2} g_x(\alpha_x, \alpha_x) + U \circ \pi_M \quad , \quad \forall \alpha_x \in T_x^* M$$

şeklinde verilen bir H fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada g , T^*M içindeki bir metriktir ve $U: M \to \mathbb{R}$ M üzerinde C^∞ fonksiyon olsun. O halde lokal $\{q^i, p_i\}$ koordinatları için

$$H(q^i, p_i) = \frac{1}{2} g^{ij} p_i p_j + U(q^i)$$

$g^{ij} = g(dp_i, dp_i)$ ‘dir.

Şimdi $M = \mathbb{R}^3$ aldığımız takdirde $T^*\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ olduğu için $T^*\mathbb{R}^3$ içindeki g metriği;

$$g\left((q^i, p_i), (q^i, \bar{p}_i)\right) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{3} p_i \bar{p}_i$$

olmakta ve $m > 0$ ‘dır. Böylece H Hamiltonyeni;

$$H(q^1, q^2, q^3, p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{3} (p_i)^2 + U(q^1, q^2, q^3)$$

ve şeklinde olup;

$$i_{X_H} \omega = dH$$

ve lokal $\{q^i, p_i\}$ koordinatları için bir yukarıda yaptığımız tanımlar gereği $\sigma(t) = \{q^i(t), p_i(t)\}$ ve aynı zamanda X_H ‘nin bir integral eğrisi olduğundan,

$$X_H(\sigma(t)) = \dot{\sigma}(t)$$

lokal koordinatlara göre yazılırsa;

$$\dot{\sigma}(t) = \frac{dq^i}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{dp_i}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial p_i}$$

olmakta ve

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i$$

$$X_H = S_\omega^{-1}(dH) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\frac{\partial}{\partial q^i} - \left(\frac{\partial H}{\partial q^i}\right)\frac{\partial}{\partial p_i}$$

şeklinde idi. Bu eşitlikler düşünüldüğünde;

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{3}(p_i)^2\right) + \frac{\partial}{\partial p_i}\left(U(q^1, q^2, q^3)\right)$$

$$= \frac{1}{2m}\left(2\sum_{i=1}^{3} p_i\right) + \frac{\partial U(q^1, q^2, q^3)}{\partial p_i}$$

$$= \frac{(p_i)}{m} + 0$$

$$= \frac{p_i}{m} \tag{2.15}$$

ve benzer biçimde;

$$-\frac{\partial H}{\partial q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{3}(p_i)^2\right) + \frac{\partial}{\partial q^i}\left(U(q^1, q^2, q^3)\right)$$

$$= \frac{\partial\left[\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{3}(p_i)^2\right]}{\partial q^i} + \frac{\partial U(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^1} + \frac{\partial U(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^2} + \frac{\partial U(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^3}$$

$$= 0 + \frac{\partial U(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^1} + \frac{\partial U(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^2} + \frac{\partial U(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^3}$$

$$= \frac{\partial H}{\partial q^i} = -\frac{\partial U(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^i} \tag{2.16}$$

olur. Böylelikle (2.15) ve (2.16) eşitliklerinden Hamilton denklemleri;

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{p_i}{m} \quad , \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial q^i} \quad , \qquad 1 \le i \le 3$$

olur. Buradan

$$m\ddot{q}^i = m\frac{d^2q^i}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial q^i} \quad , \qquad 1 \leq i \leq 3$$

elde edilir. Bu son denklem $\mathbb{R}^3$ içinde hareketli bir m kütleli parçacığın $U(q^1, q^2, q^3)$ potansiyeli için Newton'un 2. Yasasını gerçeklediğini gösterir.

2.3.1 Zamana Bağlı Hamilton Denklemleri

Bu bölümde zamana bağlı Hamilton denklemleri üzerinde durulacaktır.

$H: \mathbb{R} \times S \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times S$ üzerinde bir fonksiyon olsun. $\forall t \in \mathbb{R}$ için $H_t: S \to \mathbb{R}$

$$H_t(x) = H(t, x)$$

şeklinde tanımlansın. S üzerinde H_t enerjisi ile Hamilton vektör alanını düşünelim.

$$i_{X_{H_t}}\omega = dH_t$$

Burada basitçe $X_t = X_{H_t}$ olarak tanımlanırsa ve bir X dönüşümü aşağıdaki şekilde ifade edildiğinde,

$$X: \mathbb{R} \times S \to TS$$

$$X(t, x) = X_t(x) \in T_xS \ \ , t \in \mathbb{R}, x \in S$$

$\mathbb{R} \times S$ üzrindeki X_H vektör alanı;

$$X_H(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} + X_t(x)$$

olur. Eğer $\{q^i, p_i\}$, S içindeki kanonik koordinatlarsa o halde ω formu aşağıdaki gibidir.

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dq^i \wedge dp_i$$

$\sigma: I = (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R} \times S$ tanımlı X_H 'nin bir integral eğrisi olsun $\varepsilon > 0$ ile birlikte

$$\sigma(t) = \left(a(t), q^i(t), p_i(t)\right)$$

biçimindedir. σ , X_H ‘ın bir integral eğrisi olduğu için $\dot{\sigma}(t) = X_t(\sigma(t))$ ‘dır.

$$\frac{dq}{dt} = 1, \cdots, a(t) = t$$

ve

$$\sigma(t) = \left(t, q^i(t), p_i(t)\right)$$

$$\dot{\sigma}(t) = X_H\left(t, q^i(t), p_i(t)\right) = \frac{\partial}{\partial t} + X_t\left(q^i(t), p_i(t)\right)$$

aynı zamanda $i_{X_t}\omega = dH_t$ olduğundan

$$X_t = \frac{\partial H_t}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H_t}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial}{\partial p_i}$$

$$= \frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial}{\partial p_i}$$

Böylece σ, X_H ‘nin bir integral eğrisi olduğu için;

$$i_{X_{H_t}}\omega = dH_t$$

simplektik formunu kullanarak

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \; , \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \; , \; 1 \leq i \leq m \qquad (2.17)$$

denklemleri elde edilir. Elde edilen bu (2.17) denklemlerine ***zamana bağlı Hamilton denklemleri*** adı verilir (De Leon ve Rodrigues 1989).

2.3.2 Sürtünmeli (Zorlamalı) Hamilton Sistemleri

Bu bölümde kısıtlı (sürtünmeli, zorlamalı) Hamilton sistemleri anlatılacaktır.

2.3.2.1 Tanım : (S, ω) $2n$-boyutlu bir simplektik manifold olsun. S üzerinde sıfır olmayan (non-zero) bir α 1-formuna S üzerinde bir ***kısıt (sürtünme)*** denir.

$C = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$, S üzerinde r-lineer bağımsız 1-formların bir kümesi olsun. Bu durumda C kümesine S üzerinde ***kısıtlar sistemi*** biçimde ifade edilir. S üzerinde bir σ eğrisi eğer

$$\alpha_a(\dot{\sigma}(t)) = 0 \quad , \ 1 \leq a \leq r$$

biçiminde ise kısıt şartını sağlamış olur (De Leon ve Rodrigues 1989).

Şimdi S üzerinde bir C kıstlar sistemi ile birlikte (S, ω, H) Hamilton sistemini göz önüne alalım. O halde (S, ω, H, C) dörtlüsü de ***kısıtlı Hamilton sistemi*** denir.

H fonksiyonu için Hamilton denklemlerini sağlayan bir σ eğrisi, genel durumda kısıt şartını sağlamayacaktır. Bir σ eğrisinin kısıt şartını sağlaması için bazı ek kuvvetlere (kanonik kısıt kuvvetleri(=forces)) ihtiyaç duyar. Ayrıca bu “force” dH ‘ ın yanında yer alır. O halde bilinen hareket denklemi;

$$i_X \omega = dH + \alpha \tag{2.18}$$

halini alır. Öyle ki burada α, kanonik kısıt kuvvetinin bir sonucu olarak meydana gelen S üzerinde 1-formdur.

Eğer tüm a’lar için $1 \leq a \leq k$, $\alpha_a(X) = 0$ ise bu durumda $\alpha(X) = 0$’ dır.

Fakat bu koşul $\alpha = \Lambda^a \alpha_a$ ile mümkündür. (2.18) denklemi bu şartlar göz önüne alındığı zaman

$$i_X \omega = dH + \Lambda^a \alpha_a \ \ , \ \ \alpha_a(X) = 0 \tag{2.19}$$

olur. Buradaki Λ^a’ lar Lagrange çarpanlarıdır (De Leon ve Rodrigues 1985).

Eğer S üzerindeki vektör alanlarını X_a ile gösterilecek olursa;

$$i_{X_a} \omega = \alpha_a \, , \ \ 1 \leq a \leq r$$

ve H enerjili Hamilton vektör alanını X_H ile gösterelim, bilindiği üzere

$$i_X \omega = dH$$

olur. Bu bakış açısıyla birlikte (2.19) eşitliğinden bir X vektör alanı,

$$X = X_H + \Lambda^a X_a$$

olduğu görülmektedir. (S, ω) üzerinde ki lokal koordinatlar $\{q^i, p_i\}$ olmak üzere α_a' lokal olarak yazılırsa;

$$\alpha_a = (A_a)_i dq^i + (B_a)_i dp_i$$

şeklindedir.

S içinde lokal $\{q^i, p_i\}$ koordinatları ile verilen $\sigma(t) = \left(q^i(t), p_i(t)\right)$ eğrisini göz önüne alınırsa, o halde aşağıdaki

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \Lambda^a (B_a)_i$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} - \Lambda^a (A_a)_i$$

$$(A_a)_i \frac{dq^i}{dt} + (B_a)_i \frac{dp_i}{dt} = 0$$

$$1 \leq i \leq n \ , \ 1 \leq a \leq r \tag{2.20}$$

denklemlerini sağlaması halinde σ , X vektör alanının bir integral eğrisidir (De Leon ve Rodrigues 1985).

Şimdi kısıtların geometrik olarak ne anlama geldiği ifade edilebilir.

C, S üzerinde kısıtlar sistemi olsun. Bu durumda S üzerinde aşağıdaki şekilde verilen bir D dağılımı (distribution) tanımlanır (De Leon ve Rodrigues 1989).

$\forall x \in S$, için $D(x)$;

$$D(x) = \{X \in T_x S | \alpha_a(x) = 0, 1 \leq a \leq r \}$$

biçimindedir. Böylelikle D, S üzerinde $(2n - 1)$ boyutlu bir dağılım olur.

2.3.2.2 Tanım: D integrallenebilir ise C kısıtlar sistemine ***holonomik,*** aksi halde; C'ye ***holonomik olmayan*** denir (De Leon ve Rodrigues 1989).

2.3.2.1 Sonuç: (2.20) eşitliğindeki bir $\sigma(t)$ çözümü için H enerjisi korunmuştur. Çünkü (2.19) eşitliği nedeni ile

$$i_X\omega(X) = dH(X) = X(H) = 0$$

olmaktadır (De Leon ve Rodrigues 1989).

3. EINSTEIN MANİFOLDLARI ÜZERİNDEKİ MEKANİK SİSTEMLER

3.1 Einstein Manifoldları Üzerindeki Lagrange Sistemleri

Bu bölümde; J yaklaşık tanjant yapısı yardımıyla Einstein manifoldu için Lagrange Formülasyonu ile ilgili bir takım bilgiler anlatılacaktır.

3.1.1 Tanım: Kabul edelim ki; M_e , (1.1) koşulunu sağlayan m-boyutlu bir Einstein manifoldu olsun.

$$\tau_{M_e}: TM_e \to M_e$$

kanonik projeksiyonu ile birlikte TM_e, M_e'nin tanjant demeti olsun. TM_e, M_e konfigürasyon manifoldunun konum-hız uzayı,

$$L_e: TM_e \to \mathbb{R}$$

diferensiyellenebilir fonksiyonu da ***Lagrange fonksiyonu*** olarak isimlendirilir. TM üzerinde;

$$\omega_{L_e} = -dd_J L_e \tag{3.1}$$

ile tanımlı kapalı 2-formunu göz önüne alalım. Bu durumda,

$$E_{L_e} = CL_e - L_e \ \ (veya\ E_{L_e} = L_{eC}L_e - L_e)$$

TM_e üzerinde L ile birleşmiş enerji fonksiyonu adı verilir ve $i_J\omega_L = 0$'dır.

$$i_X\omega_{L_e} = dE_{L_e} \tag{3.2}$$

eşitliği dikkate alınırsa, o halde (3.2) eşitliği X üzerinde belli bir koşul altında ***Einstein manifoldu üzerinde Euler-Lagrange hareket denklemlerini*** oluşturan bir denklem olduğu görülmektedir.

3.1.1 Teorem: TM_e üzerinde verilen herhangi bir $\{q^i, v^i\}$, $v^i = \dot{q}^i$ koordinat sistemi için ω_L formu, TM_e üzerinde bir simplektik formdur ancak ve ancak

$$\left(\frac{\partial^2 L_e}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right)$$

Hessian matrisi maksimal ranka sahiptir

İspat:

$$\omega_L = \frac{\partial^2 L_e}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} dq^i \wedge dq^j + \frac{\partial^2 L_e}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} dq^i \wedge d\dot{q}^j$$

formunun m defa dış çarpımı;

$$\omega_L^m = \omega_L \wedge \dots \wedge \omega_L = a \, det\left(\frac{\partial^2 L_e}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right) dq^1 \wedge \dots \wedge dq^m \wedge d\dot{q}^{i^1} \wedge \dots d\dot{q}^{i^m}$$

olup, burada a sıfır olmayan sabit bir fonksiyondur. Böylece; ω_L simplektik ise ancak ve ancak ω_L^m bir hacim elementidir, yani;

$$det\left(\frac{\partial^2 L_e}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right) \neq 0$$

dır.

Eğer ω_L simplektik ise, bu durumda $L_e : TM_e \to \mathbb{R}$ Lagrange fonksiyonu regüler veya dejenere olmayan; aksi halinde, L'nin tekil, irregüler veya dejenere olduğu söylenebilir.

L_e'nin regüler olduğunu varsayılırsa, o zaman (3.2) denkleminin tek bir ξ çözümü vardır. Yani, ω_L simplektik olduğundan,

$$i_\xi \omega_{L_e} = dE_{L_e}$$

dir.

3.1.2 Teorem: $i_\xi \omega_{L_e} = dE_{L_e}$ ile verilen ξ vektör alanı bir yarı spray (yani ikinci mertebeden diferansiyel denklem)' dir.

İspat: Teoremin ispatı için $J\xi = C$ (Liouville vektör alanı) olduğunu göstermek yeterdir. Bunun için;

$$
\begin{aligned}
i_C\omega_{L_e} &= -i_C ddL_e = i_C d_J dL_e && (dd_J = -d_J d) \\
&= i_J dL_e - d_J i_C dL_e && \left(i_C d_J + d_J i_C = i_J\right) \\
&= d_J L_e - d_J(CL_e) \\
&= -d_J(CL_e - L_e) = -d_J E_{L_e}
\end{aligned}
$$

olup, diğer yandan;

$$
\begin{aligned}
i_J i_\xi \omega_{L_e} &= i_\xi i_J \omega_{L_e} - i_{J\xi}\omega_{L_e} && (i_\xi i_J - i_J i_\xi = i_{J\xi}) \\
&= i_{J\xi}\omega_{L_e}
\end{aligned}
$$

ve

$$i_J dE_{L_e} = d_J E_{L_e}$$

dir. Böylece;

$$i_J i_\xi \omega_{L_e} = i_C \omega_{L_e} \quad \text{ve} \quad J\xi = C$$

olup, ω_{L_e}simplektiktir.

Eğer ξ, (3.2) ile verilen bir yarı spray ise, o zaman lokal olarak;

eşitliğini yazılabilir. Ayrıca bu eşitlik yardımıyla,

$$\xi = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \xi^i \frac{\partial}{\partial v^i}, \qquad v^i = \dot{q}^i, \qquad \dot{v}^i = \xi^i$$

$$i_\xi \omega_{L_e} = \left(\frac{\partial^2 L_e}{\partial q^i \partial v^j} - \frac{\partial^2 L_e}{\partial q^j \partial v^i} v^j - \frac{\partial^2 L_e}{\partial v^i \partial v^j}\xi^j\right) dq^i + \frac{\partial^2 L_e}{\partial v^i \partial v^j} v^j dv^i \tag{3.3}$$

ve

$$E_{L_e} = v^j \frac{\partial L_e}{\partial v^j} - L_e$$

olup,

$$dE_{L_e} = \left(\frac{\partial^2 L_e}{\partial q^i \partial v^j} v^j - \frac{\partial L_e}{\partial q^i}\right) dq^i + \frac{\partial^2 L_e}{\partial v^i \partial v^j} v^j dv^i \tag{3.4}$$

denklemi elde edilir ve $i_\xi \omega_{L_e} = dE_{L_e}$ eşitliğinden de;

$$\frac{\partial^2 L_e}{\partial q^j \partial v^i} v^j + \frac{\partial^2 L_e}{\partial v^i \partial v^j} \xi^i - \frac{\partial L_e}{\partial q^i} = 0, \qquad 1 \leq i \leq m \tag{3.5}$$

eşitliğine ulaşılır.

$\sigma: \mathbb{R} \to TM_e$, ξ vektör alanın izi, yani $\dot{\sigma}: \mathbb{R} \to TM_e$, ξ'nin bir integral eğrisi olsun.

Eğer $\sigma(t) = \left(q^i(t)\right)$ ise,

$$\dot{\sigma}(t) = \left(q^i(t), \frac{dq^i(t)}{dt}\right)$$

olup, σ eğrisi;

$$\frac{\partial^2 L_e}{\partial q^j \partial q^i} \dot{q}^j + \frac{\partial^2 L_e}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \ddot{q}^j - \frac{\partial L_e}{\partial q^i} = 0 \ , \qquad 1 \leq i \leq m$$

eşitliğini gerçekler. Türevlerin zincir kuralı gereğince;

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_e}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L_e}{\partial q^i} = 0 \ , \quad 1 \leq i \leq m \tag{3.6}$$

eşitliğine ulaşılır. (3.6) eşitliği ile verilen denklemlere ***Einstein manifoldu*** **üzerinde** ***Euler -Lagrange Denklemleri*** olduğu söylenebilir.

3.1.3 Teorem: Einstein manifoldu üzerindeki Euler-Lagrange denklemlerinin çözümleri, ξ'nin integral eğrileridir.

3.1.2 Tanım: Einstein manifoldu üzerinde Euler-Lagrange vektör alanı

"Tanım 2.1.2" nedeniyle $L_e: TM_e \to \mathbb{R}$ bir regüler Lagranjyen olmak üzere;

$$i_\xi \omega_{L_e} = dE_{L_e}$$

eşitliğini gerçekleyen bir tek ξ yarı spray'i vardır ve bu ***Einstein manifoldu üzerindeki Euler-Lagrange vektör alanı*** olarak adlandırılabilir. Notasyon olarak " Tanım 2.1.2 " deki gibi ξ_{L_e} ile gösterilecektir.

3.1.4 Teorem (Enerji Korunumu Yasası): $L_{\xi_{L_e}} E_{L_e} = \xi_{L_e} E_{L_e} = 0$ olduğundan, E_{L_e}, ξ_{L_e}'nin integral eğrileri boyunca sabittir.

3.2.3 Tanım: M_e, bir Einstein manifoldu olsun. Eğer bir $L_e: TM_e \to \mathbb{R}$ Lagranjyen fonksiyonu 2. Dereceden homojen, yani $CL_e = 2L_e$ ise o zaman L_e'ye ***homojen Lagranjyen*** denir. Sonuç olarak;

L_e bir homojen Lagranjyen ise,

$$v^i \frac{\partial L_e}{\partial v^i} = 2L_e(q^i, v^i)$$

olup, enerji fonksiyonu $E_{L_e} = L_e$ şekline dönüşecektir.

L_e bir homojen Lagranjyen olsun. O zaman; L homojen Lagranjyeni Einstein manifoldu için "Teorem 2.2.2" şartlarını gerçeklemektedir.

3.1.5 Teorem: F ve ρ k. dereceden homojen olmak üzere; $M_e = (M_e, F, \rho)$ bir mekanik sistem olsun. O zaman $i_\xi \omega_F = dE_F + \rho$ denklemini gerçekleyen ξ bir yarı spraydir.

İspat:

$$i_{[C,\xi]} \omega_F = L_C i_\xi \omega_F - i_\xi L_C \omega_F$$

$$E_F = CF - F = kF - F = (k-1)F$$

$$L_C(i_\xi \omega_F) = L_C(dE_F + \rho) = d(L_C E_F) + L_C \rho$$

$$= k(k-1)dF + k\rho$$

$$L_C\omega_F = (k-1)\omega_F$$

$$\begin{aligned} i_\xi L_C\omega_F &= (k-1)i_\xi\omega_F = (k-1)dE_F + (k-1)\rho \\ &= (k-1)^2 dF + (k-1)\rho \end{aligned}$$

olur ve böylece,

$$\begin{aligned} i_{[C,\xi]}\omega_F &= k(k-1)dF + k\rho - (k-1)^2 dF - (k-1)\rho \\ &= (k-1)dF + \rho \\ &= dE_F + \rho \\ &= i_\xi\omega_F \end{aligned}$$

olduğundan ω_F simplektiktir. Yani, $[C,\xi] = \xi$ 'dir.

3.2 Einstein Manifoldları Üzerindeki Hamilton Sistemleri

Çalışmanın ikinci bölümünde bir M manifoldu için Hamilton sistemleri anlatılmıştı. Bu bölümde bir M_e Einstein manifoldu için Hamilton sistemleri çalışılacaktır.

M_e bir Einstein manifoldu olsun. M_e Einstein manifoldunun kotanjant demeti T^*M_e ve

$$H_e : T^*M_e \to \mathbb{R}$$

T^*M_e üzerinde bir fonksiyon olsun. Eğer ω_{M_e}, T^*M_e üzerinde kanonik simplektik yapı ise bu durumda T^*M_e üzerinde tek bir X_{H_e} vektör alanı vardır öyle ki;

$$i_{X_{H_e}}\omega_{M_e} = dH_e$$

'dır. Burada X_{H_e} ' a H_e enerji fonksiyonunun ***Einstein manifoldu üzerinde Hamilton vektör alanı*** şeklinde isimlendirilecektir.

3.2.1 Tanım: (T^*M_e, ω) bir simplektik manifold ve $H_e: T^*M_e \to \mathbb{R}$, T^*M_e üzerinde bir fonksiyon olsun.

$$(T^*M_e)_\omega: \chi(T^*M_e) \longrightarrow \Lambda^1\, T^*M_e$$

bir izomorfizm olsun. T^*M_e üzerinde tek bir X_{H_e} vektör alanı vardır öyle ki;

$$i_{X_{H_e}}\omega = dH_e$$

olur. Buradaki X_{H_e}, H_e enerjili (Hamilton enerjili) bir ***Einstein manifoldu üzerinde Hamilton vektör alanı*** diye adlandırılır.

Şimdi ise Einstein manifoldu üzerindeki Hamilton denklemlerini oluşturalım.

$2n$-boyutlu bir (T^*M_e, ω) simplektik manifoldunu göz önüne alalım. X_{H_e}, H_e enerjili Einstein manifoldu için Hamilton vektör alanı olsun. T^*M_e' nin kanonik koordinatları $\{q^i, p_i\}$ olsun.

Farz edelim ki;

$$\sigma: I = (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow T^*M_e$$

X_{H_e}'ın bir integral eğrisi olsun.

$$X_{H_e}(\sigma(t)) = \dot{\sigma}(t) \quad , \; t \in I \tag{3.10}$$

Lokal koordinatlar içinde σ eğrisi yazılırsa;

$$\sigma(t) = \{q^i(t), p_i(t)\}$$

olur ve böylece $\dot{\sigma}(t)$ lokal olarak verilen $\{q^i, p_i\}$ için,

$$\dot{\sigma}(t) = \frac{dq^i}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{dp_i}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial p_i}$$

biçiminde olup aşağıdaki satırda belirtilen izomorfizm göz önüne alınırsa;

$$(T^*M_e)_\omega: X \in \chi(T^*M_e) \longrightarrow (T^*M_e)_\omega(X) = i_X\omega \in \Lambda^1\, T^*M_e$$

olmakta ve (2.11) eşitliklerinde belirtildiği gibi,

$$(T^*M_e)_\omega\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right) = dp_i \quad , \quad (T^*M_e)_\omega\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right) = -dq^i \tag{3.11}$$

olur ve aynı zamanda izomorfizm nedeniyle,

$$(T^*M_e)_\omega^{-1}\left(dq^i\right) = -\frac{\partial}{\partial p_i} \quad , \quad (T^*M_e)_\omega^{-1}(dp_i) = \frac{\partial}{\partial q^i} \tag{3.12}$$

(3.11) ve (3.12) ifadelerinden T^*M_e üzerindeki X vektör alanını lokal olarak gösterilirse;

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \bar{X}^i \frac{\partial}{\partial p_i}$$

olup $(T^*M_e)_\omega$ uygulanırsa,

$$(T^*M_e)_\omega(X) = (T^*M_e)_\omega\left(X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \bar{X}^i \frac{\partial}{\partial p_i}\right)$$

$$(T^*M_e)_\omega(X) = -\bar{X}^i dq^i + X^i dp_i$$

olacaktır. Aynı zamanda β, T^*M_e üzerinde 1- form olsun. Lokal olarak;

$$\beta = \beta_i dq^i + \bar{\beta}_i dp_i$$

ve benzer biçimde;

$$(T^*M_e)_\omega(\beta) = \bar{\beta}_i \frac{\partial}{\partial q^i} - \beta_i \frac{\partial}{\partial p_i}$$

olur. Bu bilgiler kullanılarak dH;

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i$$

eşitliğine varılır. Buradan hareketle,

$$X_{H_e} = T^*M_{e_\omega}^{-1}(dH_e) = \left(\frac{\partial H_e}{\partial p_i}\right)\frac{\partial}{\partial q^i} - \left(\frac{\partial H_e}{\partial q^i}\right)\frac{\partial}{\partial p_i} \tag{3.13}$$

(3.10) ve (3.13) eşitlikleri beraberce göz önüne alınırsa;

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H_e}{\partial p_i} \quad , \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H_e}{\partial q^i} \quad , \quad 1 \le i \le n \tag{3.14}$$

Bulunan bu (3.14) denklemleri Einstein manifoldu üzerindeki Hamilton Denklemleri olacaktır.

$$i_{X_{H_e}}\omega = dH_e$$

Denklemi ise Einstein manifoldu için Hamilton denklemlerinin ***simplektik*** ya da ***esas formu*** olacaktır.

3.2.1 Einstein Manifoldları Üzerindeki Zamana Bağlı Hamilton Denklemleri

Bu bölümde Einstein manifoldu için zamana bağlı Hamilton denklemleri üzerinde durulacaktır. Bu kısımdaki H fonksiyonu H_e'yi temsil edecektir.

$H: \mathbb{R} \times T^*M_e \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times T^*M_e$ üzerinde bir fonksiyon olsun.$\forall t \in \mathbb{R}$ için

$$H_t: T^*M_e \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$H_t(x) = H(t, x)$$

şeklinde tanımlansın. T^*M_e üzerinde H_t enerjisi ile Hamilton vektör alanını düşünelim.

$$i_{X_{H_t}}\omega = dH_t$$

Burada basitçe $X_t = X_{H_t}$ olarak tanımlanırsa ve bir X dönüşümü aşağıdaki şekilde ifade edildiğinde,

$$X: \mathbb{R} \times S \to T(T^*M_e)$$

$$X(t, x) = X_t(x) \in T_x(T^*M_e) \ \ , t \in \mathbb{R}, x \in (T^*M_e)$$

$\mathbb{R} \times T^*M_e$ üzrindeki X_H vektör alanı;

$$X_H(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} + X_t(x)$$

olur. Eğer $\{q^i, p_i\}$, T^*M_e içindeki kanonik koordinatlarsa o halde ω formu aşağıdaki gibidir.

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dq^i \wedge dp_i$$

$$\sigma: I = (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R} \times T^*M_e$$

tanımlı X_H 'nin bir integral eğrisi olsun $\varepsilon > 0$ ile birlikte,

$$\sigma(t) = \left(a(t), q^i(t), p_i(t)\right)$$

biçimindedir. σ , X_H 'ın bir integral eğrisi olduğu için $\dot{\sigma}(t) = X_t(\sigma(t))$ 'dır.

$$\frac{dq}{dt} = 1, \cdots, a(t) = t$$

ve lokal olarak,

$$\sigma(t) = \left(t, q^i(t), p_i(t)\right)$$

$$\dot{\sigma}(t) = X_H\left(t, q^i(t), p_i(t)\right) = \frac{\partial}{\partial t} + X_t\left(q^i(t), p_i(t)\right)$$

aynı zamanda $i_{X_t}\omega = dH_t$ olduğundan

$$X_t = \frac{\partial H_t}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H_t}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial}{\partial p_i}$$

$$= \frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial}{\partial p_i}$$

Böylece σ, X_H 'nin bir integral eğrisi olduğu için;

$$i_{X_{H_t}}\omega = dH_t$$

simplektik formunu kullanarak

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H_e}{\partial p_i} \ , \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H_e}{\partial q^i} \ , \ 1 \leq i \leq m \tag{3.15}$$

denklemleri elde edilir. Elde edilen bu (3.15) denklemleri ***Einstein manifoldu üzerindeki zamana bağlı Hamilton denklemleri*** olacaktır.

3.3 Einstein Manifoldları Üzerindeki Mekanik Sistem

3.3.1 Tanım: M_e n-boyutlu bir Einstein manifold ve F , TM_e üzerinde bir diferensiyellenebilir fonksiyon ve kuvvet alanı olarak adlandırılan ρ, TM_e üzerinde bir yarı basit form ise bu durumda $M_e = (M_e, F, \rho)$ üçlüsüne bir ***Einstein manifoldu üzerindeki mekanik sistem*** denir.

3.3.1 Teorem: $M_e = (M_e, F, \rho)$ bir mekanik sistem ve $\omega_F = -dd_J F$ 2-form simplektik olsun.

Bu durumda F'nin enerji fonksiyonu $E_F = CF - F$ olmak üzere;

$$i_\xi \omega_F = dE_F + \rho \tag{3.7}$$

denklemini gerçekleyen bir tek ξ yarı spreyinin integral eğrileri, $\rho = \rho_i dq^i$ **o**lmak üzere;

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial F}{\partial q^i} = -\rho_i\,, \qquad 1 \le i \le m$$

denklem sisteminin çözümleridir.

İspat: $J\xi = C$ olduğundan ve (3.7) eşitliğini kullanarak;

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q^j \partial v^i} v^j + \frac{\partial^2 F}{\partial v^i \partial v^j} \xi^i - \frac{\partial F}{\partial q^i} = \rho_i\,, \qquad 1 \le i \le m \tag{3.8}$$

olur. Eğer,$\sigma(t) = \left(q^i(t)\right)$ ρ'nun bir izi ise, (3.8)'den;

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial F}{\partial q^i} = -\rho_i\,, \; 1 \le i \le m \tag{3.9}$$

eşitliği elde edilir.

3.3.2 Tanım: ρ kuvvet alanı bir kapalı yarı temel form ise; bu durumda $M_e = (M_e, F, \rho)$ mekanik sistemine ***korumalı sistem*** denir.

Eğer, $M_e = (M_e, F, \rho)$ korumalı bir mekanik sistem ise, bu durumda;

$$L_\xi \omega_F = d i_\xi \omega_F = d(dE_F + \rho) = 0$$

denkleminden ρ kapalı ve aynı zamanda $\rho = dV$ için;

$$L_\xi (E_F + V) = 0$$

olup, enerjinin de korunduğu sonucuna varılır.

3.3.3 Tanım: M_e, bir Einstein manifoldu olsun. $M_e = (M_e, F, \rho)$ korumalı bir mekanik sistem ise,

$$\rho = \tau^*{}_{M_e}(dU) = d\left(U \circ \tau_{M_e}\right)$$

ile tanımlı diferensiyellenebilir bir $U: M_e \to \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa; bu mekanik sistem ***Lagrange Mekanik Sistemi*** olacaktır. Bu sistemde,

Eğer $L_e = F + U \circ \tau_{M_e}$ şeklinde alınırsa; o zaman (3.7) ve (3.9) denklemlerinden,

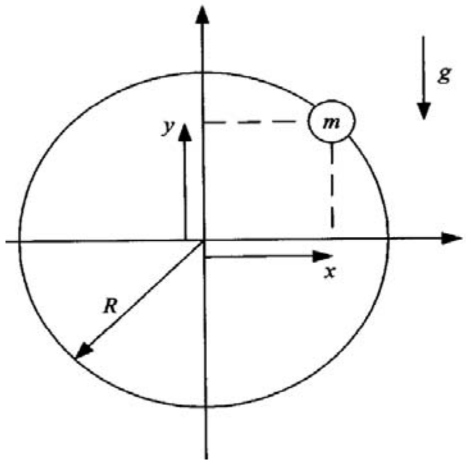
$$i_\xi \omega_{L_e} = dE_{L_e} \,,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_e}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L_e}{\partial q^i} = 0 \,, \qquad 1 \le i \le m$$

eşitlikleri yazılabilir.

3.3.1 Sonuç: Korumalı mekanik sistemler Lagranjyen sistemlerdir. ρ kuvvet alanı kapalı olmayan Einstein manifoldu için yarı-basit(temel) form ise, bu durumda mekanik sistem korumasız bir mekanik sistemdir.

3.3.1 Çember Üzerinde Hareket Eden Sıkıştırılmış Cisim Örneği



Şekil 3.1: Çember Üzerinde Hareket Eden m Kütleli Cisim

$S^1 \subset E^2$ çemberi $G = (dx)^2 + (dy)^2$ veya kutupsal olarak $G = a^2(d\theta)^2$, $[0,2\pi)$ metriğiyle birlikte bir Riemann manifoldudur. Ayrıca S^n bir Einstein manifoldu olduğundan S^1 çemberi de bir Einstein manifoldudur.

Şimdi, yerçekimi etkisinde R yarıçaplı dairesel halkasındaki dikey düzlemde ve çember üzerinde hareket eden sıkıştırılmış bir kütlenin sürtünmesiz bir ortamda Lagrange hareket denklemlerini elde edelim.

Kinetik ve potansiyel enerjisi,

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$V = mgy \quad \text{((0,0) noktasına göre)}$$

denklemleri ile verilir.

Burada, $x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$ kutupsal koordinatları kullanarak kinetik enerji;

$$T = \frac{1}{2}m\left(\left(\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\dot{\theta}\right)^2 + \left(\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\dot{\theta}\right)^2\right)$$

$$V = mgr\sin\theta$$

şeklinde bulunur ve gereken sadeleştirmeler yapıldığında kinetik enerji;

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

olup potansiyel enerjisi;

$$V = mgr\sin\theta$$

biçiminde ifade edilir ve buradan Lagrange denklemi;

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - mgr\sin\theta$$

şeklinde yazılır.

Böylece (3.6) denklemleri göz önüne alındığında hareket denklemleri:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0\,, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m2\dot{r}\right) - \left(\frac{1}{2}m2r\dot{\theta}^2 - mg\sin\theta\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0\,, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m2r^2\dot{\theta}\right) - (-mgr\cos\theta) = 0$$

şeklinde olup gerekli işlemler yapıldıktan sonra;

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg\sin\theta = 0$$

$$mr^2\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} + mgr\cos\theta = 0$$

denklemleri elde edilir. Burada $r = a$ (sabit) olduğundan $\dot{r} = 0$ ve $\ddot{r} = 0$ olur. O halde denklemler yeniden düzenlenirse Lagrange hareket denklemi;

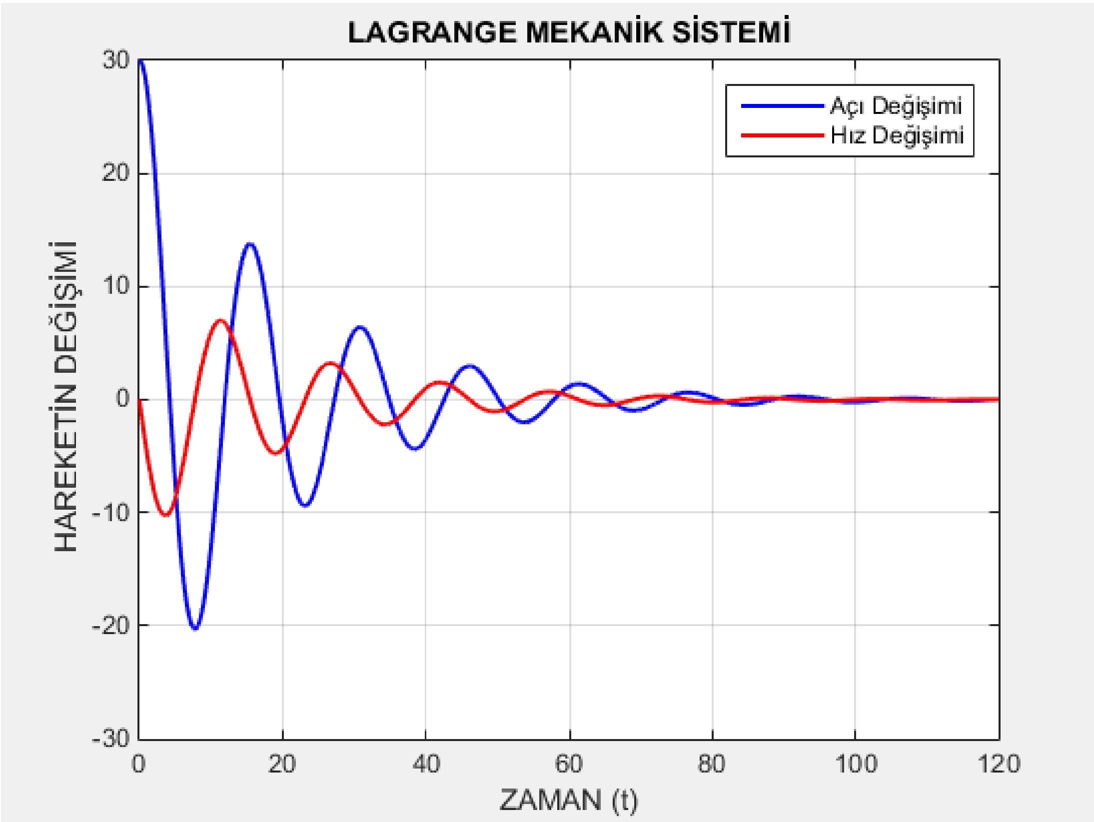
$$ma^2\ddot{\theta} + mga\cos\theta = 0$$

şeklini alır. Ayrıca Newton'un ikinci yasası gereğince $m\vec{a} = \vec{F}$'dır. Bu cisim çember üzerindeyken düzgün dairesel hareket yapmayacaktır. Yani hızı değişkendir.

"Şekil 3.1" de referans noktasını çemberin yere değdiği nokta olarak kabul edelim ve pozitif yönde bir θ açısıyla birlikte cismin hareket denklemin son hali;

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{c}{m}\right)\frac{d\theta}{dt} + \left(\frac{g}{r}\right)\sin\theta = 0$$

olacaktır. Burada c bir sabittir ve örneğimizde $c = 1$ alınacaktır. Şimdi bu Einstein manifoldunda bazı θ, r, ϑ ve m değerleri için bilgisayar programları yardımıyla hareketi inceleyelim.

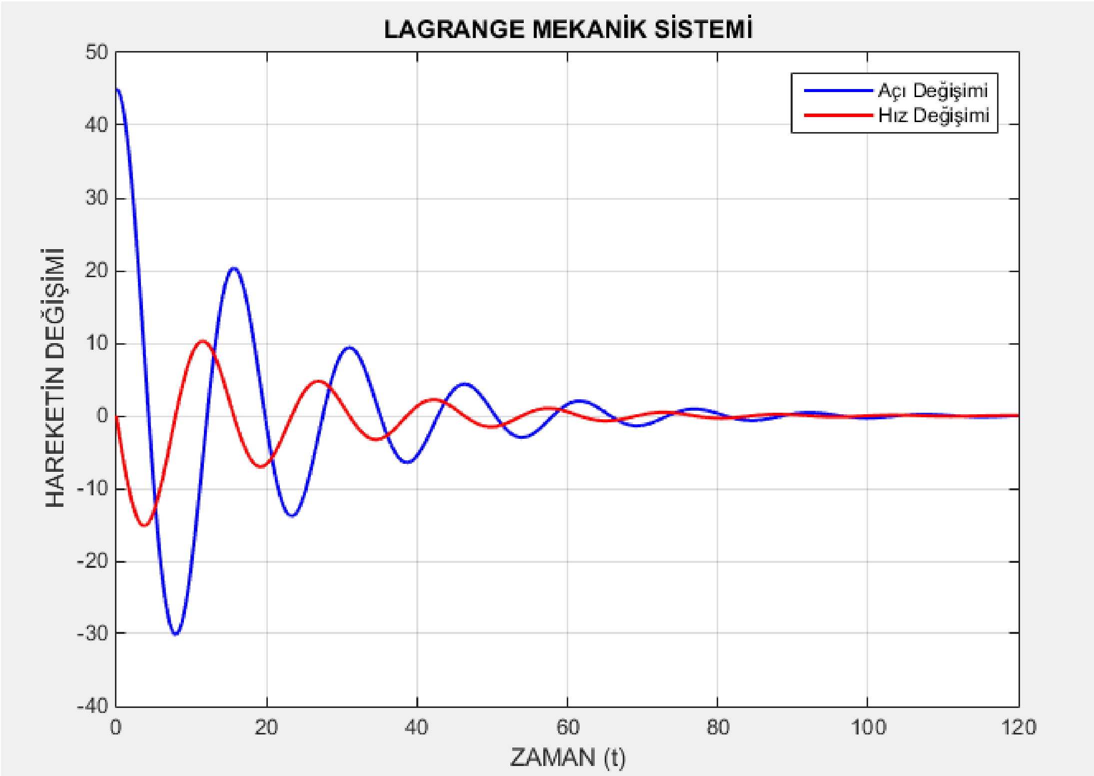


Şekil 3.2: $g = 9.81\,m/s^2, r = 1m,\ m = 10gr,\ \theta = 30°,\ \vartheta = 0$

"Şekil 3.2" de yerçekimi ivmesi $g = 9.81\,m/s^2$, $r = 1\,m$, $m = 10gram$ $\theta = 30^{\circ}$ alınmış $\vartheta = 0$ olup 120 saniyelik hareket gözlemlenmiştir. Dikkat edilecek olursa $\theta = 30^{\circ}$ ile bırakılan cisimde, cisme etkiyen kuvvetler nedeni ile açı küçülürken hız artmış ve referans noktasında maksimum olmuştur. Bu noktadan sonra cismin hızı nedeni ile de θ açısı negatif yönde artmış ve cismin hızı yavaşlamaya başlamıştır. Hız sıfır oluncaya kadar θ artmaya devam etmiş ve $\theta = 20^{\circ}$ olmuştur.

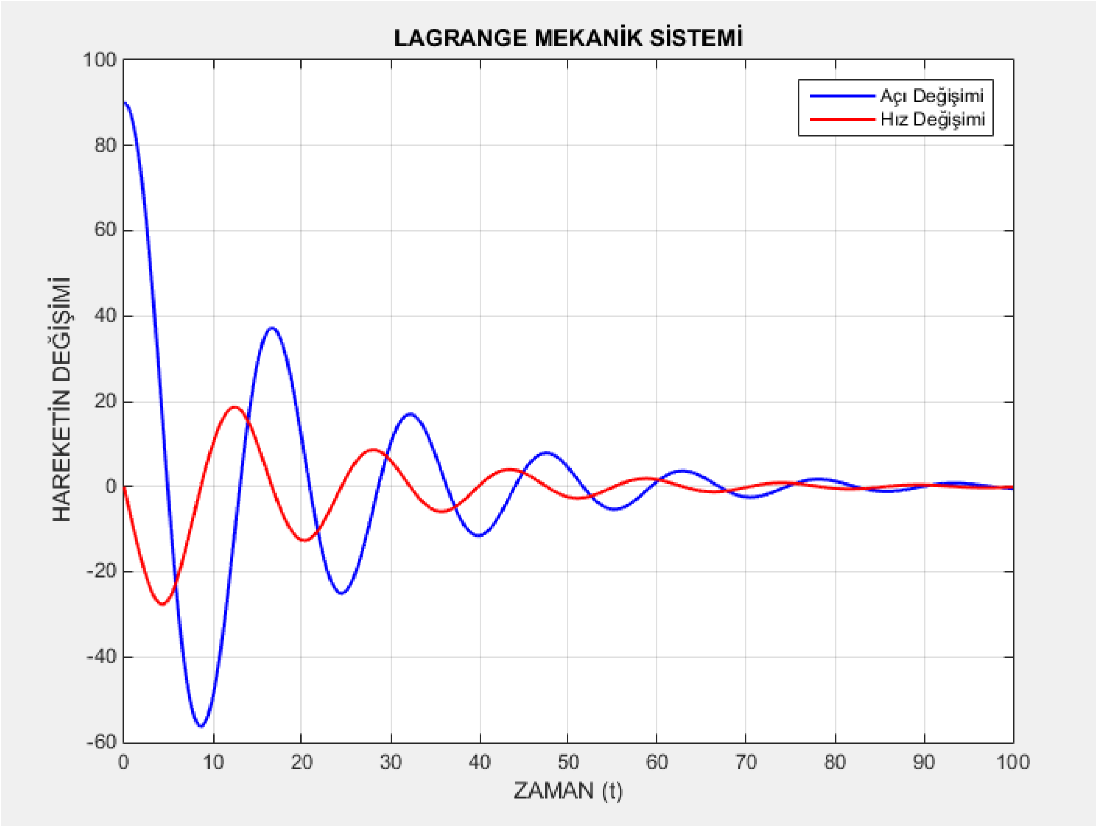
$\theta = 20^{\circ}$iken hız tekrardan sıfırlanmıştır. Bu noktada m kütleli cisim üzerindeki kuvvetler sebebi ile tekrardan hızlanmaya başlamış ve θ açımız pozitif yönde artış göstermiştir.

Yukarıda bahsedilen durum sürekli devam etmiş θ açısı ve hız sıfır oluncaya kadar sürmüş $t = 120$ saniye sonunda bu iki değer sıfırlanmıştır.



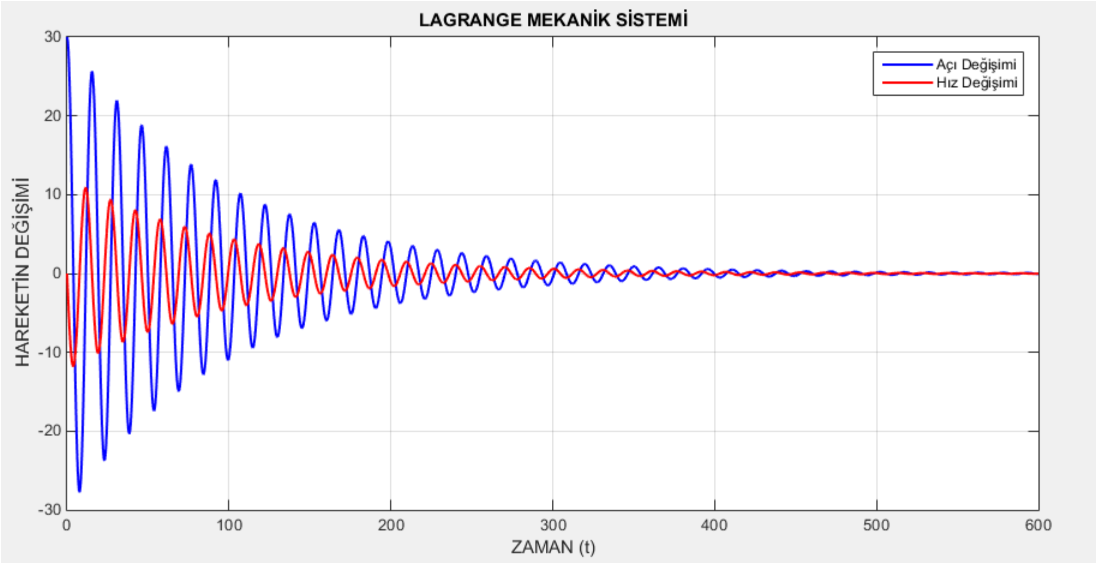
Şekil 3.3: $g = 9.81\, m/s^2$, $r = 1m$, $m = 10gr$, $\theta = 45°$, $\vartheta = 0$

Şekil 3.3 de "Şekil 3.2" deki sabit veriler kullanılmıştır ancak referans noktasından itibaren $\theta = 45^{\circ}$ ile m kütlesi serbest bırakılmıştır. Bu durumda cisim sönümleme hareketini yine sürdürmüştür. Fakat henüz $t = 120$sn dolmadan cisim referans noktasına gelmiş ve yaklaşık olarak $t = 110$sn de hareket sonlanmıştır. Hareket $\theta = 30^{\circ}$ durumdan daha çabuk bitmiştir



Şekil 3.4: $g = 9.81\, m/s^2, r = 1m\,,\ m = 10gr,\ \theta = 90°,\ \vartheta = 0$

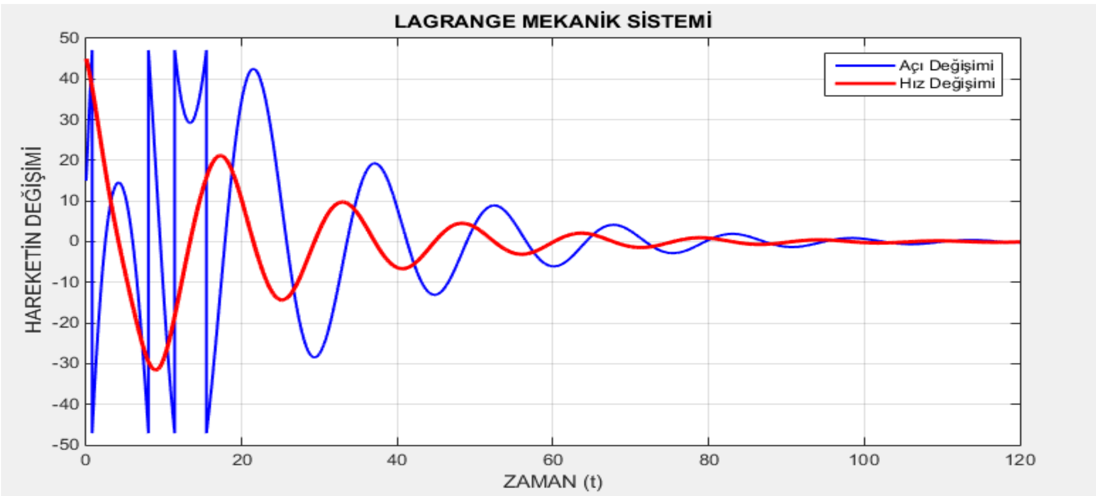
Şekil 3.4 de "Şekil 3.2" deki sabit veriler kullanılmıştır ancak referans noktasından itibaren $\theta = 90^{\circ}$ ile m kütlesi serbest bırakılmıştır. Öyle ki; burada cismin potansiyel enerjisi $mgsin(\theta) = mg$ kadardır. Bu durumda "Şekil 3.4" deki açı ve hız değişim grafikleri incelendiğinde sistem daha hızlı bir hareket gerçekleştirecek , $\theta = 30^{\circ}$ ve $\theta = 45^{\circ}$ açılarına göre daha az zamanda sistem referans noktasına gelecektir ve yaklaşık olarak $t = 95$sn de bu gerçekleşmiştir.



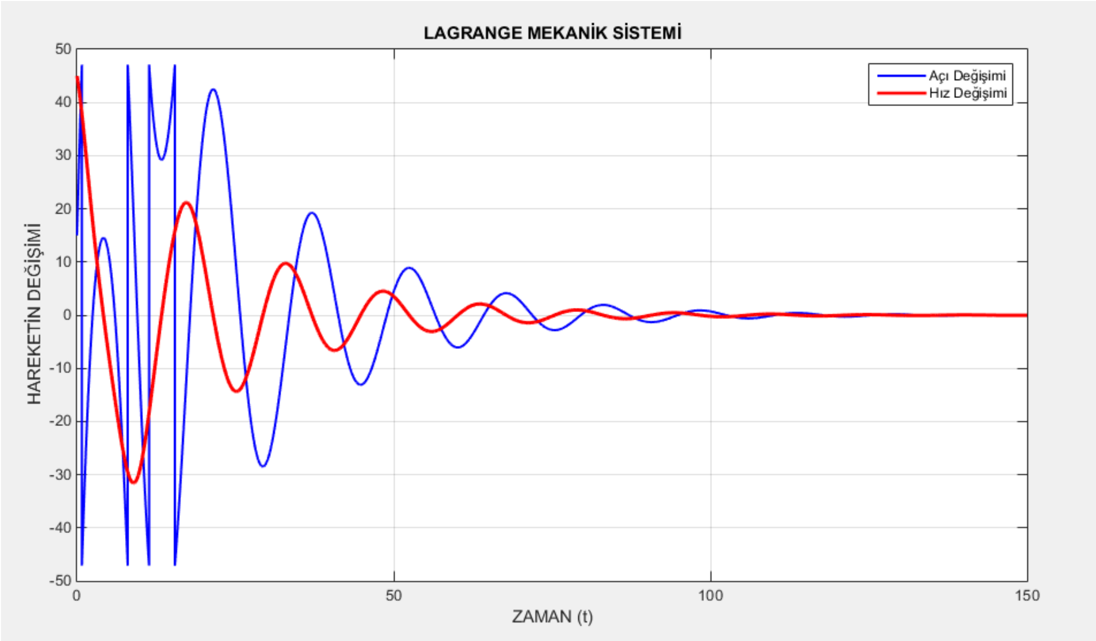
Şekil 3.5: $g = 9.81\,m/s^2\,, r = 1m\,,\ m = 50gr,\ \theta = 30°,\ \vartheta = 0$

Şekil 3.5 de $m = 50$ gram ve $\theta = 30^{\circ}$ ile serbest bırakılan cisim gözlenmektedir. Bilinmektedir ki; Cismin $t = 0$ anından hemen sonra gelen t_i anında kütle sisteme dahil olmaktadır. Dolayısıyla açı ve hız değişimlerinin birbirlerini takibi sonucunda daha uzun sürede sönümlenen bir hareket ortaya çıkmaktadır. Nitekim bu değerler ile $t = 600$sn sonunda cisim dengeye ulaşmıştır. Daha büyük kütlelerde bu süre oldukça uzundur. Ayrıca açı değerinin de bu süreyi değiştireceği açıkça anlaşılmaktadır.

Sistemde şuana kadar belli bir hız değeri verilmeden oluşan hareket ve durumlar incelendi. Sisteme bir ilk hız verildiğinde oluşan durumlara bakalım.

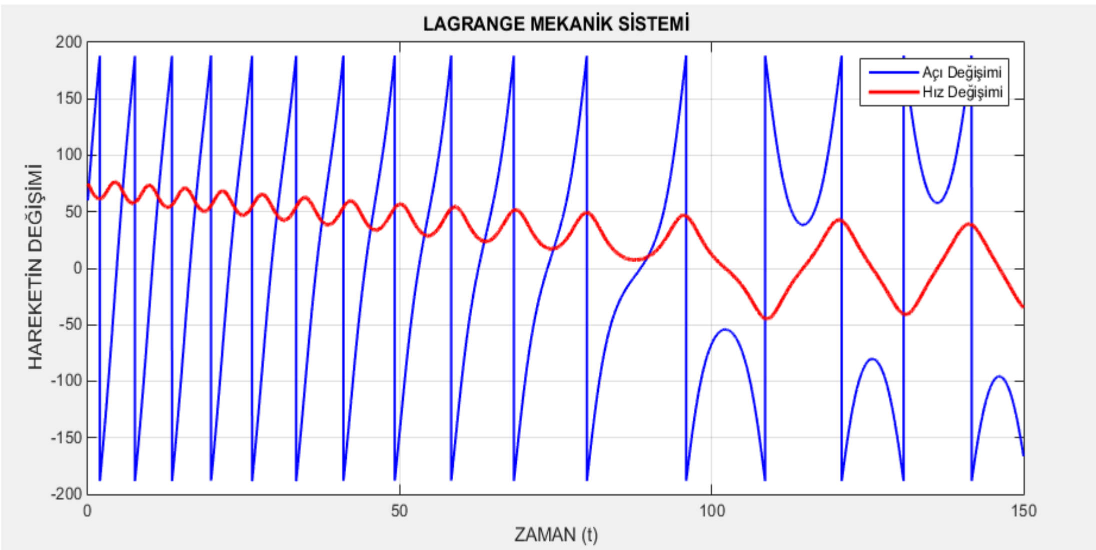


Şekil 3.6: $g = 9.81\,m/s^2, r = 1m\,,\ m = 10gr,\ \theta = 15°,\ \vartheta = 45$



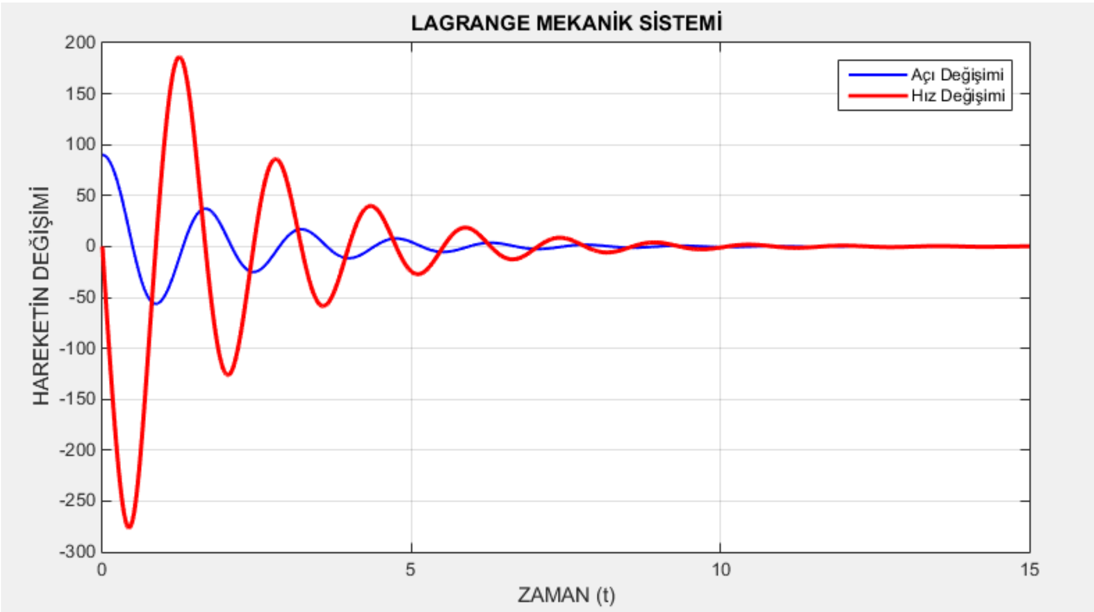
Şekil 3.7: $g = 9.81\, m/s^2, r = 1m,\ m = 10gr,\ \theta = 15°,\ \vartheta = 45,\ t = 150$

"Şekil 3.6" ve da yerçekimi ivmesi $g = 9.81\ m/s^2, r = 1\ m, m = 10gram$ $\theta = 15^{\circ}$ ve $\vartheta = \frac{d\theta}{dt} = 45\ D^{\circ}/sn$'lik bir hız verilmiştir. "Şekilde 3.6"da t=0 ile t=20. saniyeleri arasında cisim oldukça hızlı hareket etmiş sıçrama gerçekleştirmiştir. Yani çemberi birkaç kez turlamıştır. t=20.saniyeden sonra açı pozitif yönde artarken hız ise bulunduğu değerden azalmaya başlamıştır. Öyle ki; bu sonuca sebep olan cismin başlangıç hızının olmasıdır. Kütle ile birlikte hızın sisteme yaptığı etki ise sönümlemenin daha geç olmasıdır. Buda "Şekil 3.7" de görülmektedir.



Şekil 3.8: $g = 9.81\ m/s^2, r = 1m,\ m = 100gr,\ \theta = 60°,\ \vartheta = 60$

Bu cisime daha büyük kütle, açı ve hız verildiğinde örneğin; $m = 100gr$, $\theta = 60^{\circ}$ ve $\vartheta = \frac{d\theta}{dt} = 75\ D^{\circ}/sn$ için sonuç "Şekil 3.8" deki gibidir. Bu durumda m kütleli cisim verilen ilk hızın büyüklüğü ve açının daha büyük olmasıyla çemberde bir süre boyunca sürekli dolanacaktır. Grafikte görülen açı değişimleri bunu göstermektedir. Buna mukabil hız da belli bir zaman sonunda azalma gösterecektir, yeterince büyük bir t zamanında sönümleme gerçekleşecektir.



Şekil 3.9: $g = 9.81\,m/s^2$, $r = 0.01m$, $m = 1gr$, $\theta = 90°, \vartheta = 0$

"Şekil 3.9" bakıldığı takdirde $r = 0.01$ olmasının $g = 9.81\,m/s^2$, $m = 1\ gram$, $\theta = 90^{\circ}$ ve $\vartheta = 0$ değerleri ile sisteme etkisi incelenmiştir. Açı pozitif ve negatif yönde seyrine devam ederken buna karşılık, hız daha büyük değerler alarak harekete devam etmiştir ve çok daha kısa zamanda $t = 15sn$ de hareket sönümlenmiştir.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Yapılan bu çalışmada öncelikle Einstein manifoldunun tarihçesi kullanım alanı ve buna ilaveten evreni açıklamada ne kadar yüksek bir öneme sahip olduğu anlaşıldı. Ayrıca, bu manifoldunun tanımı, yapısı ve üzerindeki bazı geometrik özellikler incelendi.

Çalışmanın ikinci bölümünde fiziğe ve matematiğe kayda değer katkıları olan Joseph Louis Lagrange ve William Rowan Hamilton tarafından oluşturulan, Euler-Lagrange ve Hamilton mekanik sistemleri ilgili tüm teorem ve sonuçlarıyla analiz edildi.

Çalışmaya ismini veren üçüncü kısımda ise, ikinci bölümde anlatılan Lagrange ve Hamilton mekanik sistemleri temel alınarak Einstein manifoldları üzerinde bu mekanik sistemler oluşturuldu. Einstein manifoldu üzerindeki mekanik sistemler ile ilgili tanımlamalar verildi, geometrik özellikler ve sonuçları sentez edildi ve bazı teoremler ispatlandı. Çalışma "Örnek 3.3.1" de kurulan bir örnek ile pekiştirildi. Öyle ki; ele alınan bu örnekte S^1 çemberinin (1.1) eşitliği ile verilen $\lambda = 0$ sabitli bir Einstein manifoldu olduğu anlaşıldı. Bununla beraber Lagrange mekanik sisteminin denklemleri oluşturuldu.

Kurulan bu denklemler non-lineer diferansiyel denklemler olduğu için bazı koşullar ile birlikte bilgisayar programı oluşturularak; bu denklemler çözüldü ve sistemde, harekete teşkil eden açı ve hız değişimleri gözlemlendi. Yapılan gözlemlerin hepsinde yer çekimi sabit tutulup r, m, θ, ϑ değerleri değiştirilerek; sistemde oluşan durumlar grafikler ile görselleştirildi. Elde edilen bu grafiklerin hemen ardından fiziksel ve matematiksel değerlendirmeler yapıldı. Öyle ki; yapılan gözlemlerin bir sonucu olarak cismin yaptığı hareketin kararlı olduğu da söylenebilmektedir.

Yapılan bu çalışmanın, ileride bu konu hakkında araştırma yapacak olan araştırmacılara bir kaynak ve yeni geliştirilebilir çalışmalara basamak teşkil etmesi bakımından akademik açıdan heyecan verici olduğu düşünülmektedir.

5. KAYNAKLAR

Aycan, C., “Genişletilmiş Jet Demetleri Üzerinde Euler-Lagrange ve Hamilton Denklemlerinin Lift’leri”, Doktora Tezi, *Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Eskişehir, (2003).

Beem, J. K., Ehrlich, P. E., *Global Lorenzian Geometry*, New York: Marcel Dekker Inc, (1981).

Besse, A.L., *Einstein Manifolds*, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, (1987).

Civelek, Ş., “Genişletilmiş Vektör Demetlerine Yüksek Mertebeden Lift’ler”, Doktora Tezi, *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,* Ankara, (1993).

Civelek, Ş., “The lifts of Lagrange and Hamilton equations to the extended vector bundles”, *Mathematical& Computational Applications*, 1, 21-28, (1996).

Dağlı, S., “Minkowski 4-uzayında Jet Yapılar ve Mekanik Sistemler”, Yüksek Lisans Tezi, *Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Denizli, (2012).

De Andres, L. C., De Leon, M., and Rodrigues, P. R., “Connections on Tangent Bundles of Higher Order Associated to Regular Lagrangians”, *Geometriae Dedicata*, 39, 17-28, (1991).

De Leon, M., and Rodrigues, P. R., *Generalized Clasical Mechanics and Field Theory*, Amsterdam: North Holland,112, (1985).

De Leon, M., and Rodrigues, P. R., *Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics*, Amsterdam: North-Hol., Elsevier Sc. Pub., 152, (1989).

Hacısalihoğlu, H. H., *Diferensiyel Geometri*, Ankara: Ankara Üniversitesi, (1993).

Kobayashi, S., and Nomizu, K., *Foundations of differential geometry*, New York: John Wiley and Sons, Inc., (1996).

O’Neill, B., *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, New York: Academic Press. Inc., (1983).

Sardanashvilly, G., “Hamiltonian Time-dependent Mechanics”, *J. Math. Physics*, 39, 2714-2729, (1998).

Sardanashvilly, G., “Classical and Quantum Mechanics With time dependent Parameters”, *J. Math. Phys.*, 41, 5245-5255, (2000).

Tozak, H., “Minkowski 4-uzayında Eğriliklerin ve Hareketlerin Geometrisi”, Yüksek Lisans Tezi, *Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Denizli, (2010).

Yano, K., and Kon, M., *Structures on Manifolds*, Singapore: World Sci. Pub. Co. Pte. Ltd., (1984).

6. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Hatem ÇOBAN
Doğum Yeri ve Tarihi	: Erzurum -31.12.1989
Lisans Üniversite	: Pamukkale Üniversitesi Matematik Bölümü,2012
Y. Lisans Üniversite	: Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,2015
Elektronik posta	: hatemcoban@outlook.com