T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

K. MERTEBEDEN GAUSS FİBONACCİ VE K. MERTEBEDEN GAUSS LUCAS İNDİRGEME BAĞINTILARI

DOKTORA TEZİ

EŞREF GÜREL

DENİZLİ, KASIM - 2015

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

K. MERTEBEDEN GAUSS FİBONACCİ VE K. MERTEBEDEN GAUSS LUCAS İNDİRGEME BAĞINTILARI

DOKTORA TEZİ

EŞREF GÜREL

DENİZLİ, KASIM - 2015

KABUL VE ONAY SAYFASI

EŞREF GÜREL tarafından hazırlanan "**k. MERTEBEDEN GAUSS FİBONACCİ VE k. MERTEBEDEN GAUSS LUCAS İNDİRGEME BAĞINTILARI**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 20.11.2015 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Cebir ve Sayılar Teorisi Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Doç. Dr. Mustafa AŞCI Pamukkale Üniversitesi	....
Üye Prof. Dr. Dursun TAŞCI Gazi Üniversitesi	....
Üye Yard. Doç. Dr. Şahin CERAN Pamukkale Üniversitesi	....
Üye Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL Pamukkale Üniversitesi	....
Üye Yard. Doç. Dr. Osman KEÇİLİOĞLU Kırıkkale Üniversitesi	....

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 02.12.2015 tarih ve ...45/17... sayılı kararıyla onaylanmıştır..

....

Prof. Dr. Orhan KARABULUT

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tez çalışması PAUBAPtarafından 2013 FBE 036 nolu proje ile desteklenmiştir.

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

EŞREF GÜREL

ÖZET

K. MERTEBEDEN GAUSS FİBONACCİ VE K. MERTEBEDEN GAUSS LUCAS İNDİRGEME BAĞINTILARI

DOKTORA TEZİ
EŞREF GÜREL
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. MUSTAFA AŞCI)

DENİZLİ, KASIM - 2015

Bu tezde; k. mertebeden Gauss Fibonacci ve k. mertebeden Gauss Lucas sayıları başlangıç değerleriyle birlikte tanımlandıktan sonra üreteç fonksiyonları, Binet formülleri, kombinatorial gösterimleri ve toplam formülleri elde edildi. Q_k–matrisi ve yardımcı matrislerle elemanları k. mertebeden Gauss Fibonacci ve Lucas sayıları olan matrisler elde edildi. k. mertebeden Gauss Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili önemli ilişki ve özdeşlikler ele alındı ve ispatlandı.

Birinci bölümde, temel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde Gauss Fibonacci ve Gauss Lucas sayılarının, Gauss Tribonacci sayılarının, k. mertebeden Fibonacci ve Lucas sayılarının ve Genelleştirilmiş k. mertebeden Fibonacci ve Lucas sayılarının tanımları ve önemli özdeşlikleri üzerine daha önce yapılmış çalışmalara yer verildi.

Üçüncü bölümde ise; k. mertebeden Gauss Fibonacci ve k. mertebeden Gauss Lucas indirgeme bağıntıları tanımlandı. Fibonacci sayıları teorisinin önemli özellikleri ve özdeşlikleri k. mertebeden Gauss Fibonacci ve Lucas sayıları için elde edilerek ispatlandı.

k. Mertebeden **ANAHTAR KELİMELER: Fibonacci Sayıları, Gauss Fibonacci Sayıları, Gauss Lucas Sayıları, k. Mertebeden Gauss Fibonacci Sayıları, k. Mertebeden Gauss Lucas Sayıları**

ABSTRACT

K-ORDER GAUSSIAN FIBONACCI AND
K-ORDER GAUSSIAN LUCAS RECURRENCE RELATIONS
PH.D THESIS
EŞREF GÜREL
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS

(SUPERVISOR:ASSOCIATE PROF. DR. MUSTAFA AŞCI)

DENİZLİ, NOVEMBER 2015

In this thesis; after defining k–order Gaussian Fibonacci and Lucas numbers with boundary conditions, generating functions, Binet formulas, combinatorial representations and sum formulas are given. The matrices have which entries are k–order Gaussian Fibonacci and Lucas numbers are obtained by the Q_k–matrix and assistant matrices. Important relations and identities about k–order Gaussian Fibonacci and Lucas numbers are discussed and proved.

In the first chapter; the basic definitions and theorems are given.

In the second chapter; the definitions and identities are given without proof about Gaussian Fibonacci and Lucas numbers, Gaussian Tribonacci numbers, k–generalized Fibonacci and Lucas numbers and Generalized order–k Fibonacci and Lucas numbers that are studied before.

Finally, in the third chapter; k–order Gaussian Fibonacci and Lucas recurrence relations are defined. The important properties and identities of the Fibonacci theory are obtained and proved for the k–order Gaussian Fibonacci and Lucas numbers.

KEYWORDS:Fibonacci Numbers, Gaussian Fibonacci Numbers, Gaussian Lucas Numbers, k–order Gaussian Fibonacci Numbers, k–order Gaussian Lucas Numbers.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TABLO LİSTESİ

Sayfa

SEMBOLLİSTESİ

$\mathbf{F_n}$	:	n. Fibonacci Sayısı
$\mathbf{L_n}$	:	n. Lucas Sayısı
$\mathbf{T_n}$	:	n. Tribonacci Sayısı
$\mathbf{GF_n}$	:	n. Gauss Fibonacci Sayısı
$\mathbf{GL_n}$	:	n. Gauss Lucas Sayısı
$\mathbf{GT_n}$	:	n. Gauss Tribonacci Sayısı
$\mathbf{F_n^{(k)}}$	:	n. k. Mertebeden Fibonacci Sayısı
$\mathbf{L_n^{(k)}}$	:	n. k. Mertebeden Lucas Sayısı
$\mathbf{g_n^i}$	:	n. k–Genelleştirilmiş Fibonacci Sayısı
$\mathbf{l_n^i}$	:	n. Genelleştirilmiş k. Mertebeden Lucas Sayılarının k. dizisi
$\mathbf{l_{k,n}}$	:	n. Genelleştirilmiş k. Mertebeden Lucas Sayıları
$\mathbf{GF_n^{(k)}}$	:	n. k. Mertebeden Gauss Fibonacci Sayısı
$\mathbf{GL_n^{(k)}}$	:	n. k. Mertebeden Gauss Lucas Sayısı
$\mathbf{g(t)}$	:	Fibonacci Sayılarının üreteç fonksiyonu
$\mathbf{h(t)}$	:	Lucas Sayılarının üreteç fonksiyonu
$\mathbf{\binom{n}{m}}$	:	n'in m'li kombinasyonları
$\lfloor \boldsymbol{x} \rfloor$	:	Taban fonksiyonu
$\lceil \boldsymbol{x} \rceil$	:	Tavan fonksiyonu
$\boldsymbol{Q_k}$	:	$k \times k$ boyutlu Q matrisi
$\boldsymbol{E_{k,n}}$	:	$k \times k$ boyutlu n. k. Mertebeden Gauss Fibonacci matrisi
$\boldsymbol{Z_{k,n}}$	:	$k \times k$ boyutlu n. k. Mertebeden Gauss Lucas matrisi

ÖNSÖZ

Bu tezi hazırlarken, değerli vakitlerini ve yardımlarını esirgemeyen, her safhasında bilgi ve tecrübelerine başvurduğum Sayın Hocam Doç. Dr. Mustafa AŞCI'ya, Sayın Hocam Prof. Dr. Dursun TAŞCI'ya, Yard. Doç. Dr. Şahin CERAN'a teşekkür ederim. Tezi yazmamda ve uluslararası konferanslarda beni destekleyen, bana maddi olanak sağlayan PAUBAP'a teşekkür ederim. Ayrıca maddi ve manevi her türlü desteği veren eşim Hülya GÜREL'e teşekkürü bir borç bilirim.

1 GİRİŞ

Matematik dünyasının en ilginç özelliklerine ve ilişkilerine sahip Fibonacci ve Lucas sayılarının bir başka doğal genelleştirmesi kompleks sayılar ve kompleks düzlem üzerine yapıldı. Klasik Fibonacci ve Lucas sayılarının kompleks sayılara genelleştirilmesi farklı uygulamalara zemin hazırladığı gibi yeni problemlerin de ortaya çıkmasına sebep oldu. Bu uygulama ve genelleştirmelerin detaylarıyla ilgili olarak [Vajda, 1989] ve [Koshy, 2001] incelenebilir.

Sayılar teorisinin bilinen altın oranı ardışık iki Fibonacci sayısının oranıdır

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Altın oran çok eski çağlardan beri insanların mimaride ve görsel sanatlarda kullandığı özel bir sayıdır. Günümüzde Altın oran ve Fibonacci sayıları mimari ve sanatın yanısıra teorik fizik, geometrik modelleme, mühendislik ve biyoloji gibi modern bilimin bir çok alanında olayları ve problemleri modelleyerek çözüm getirdiği için çok yönlü olarak kullanılmaktadır.

Fibonacci ve Lucas sayıları birbiriyle ilişkili yüzlerce özdeşlik ve özelliği sağlamaktadır. Fibonacci ve Lucas sayılarının genelleştirilmesiyle bu özdeşlik ve özellikler genel bir forma kavuştu. Fibonacci sayılarının Pascal üçgeni üzerindeki görüntüsünün keşfedilmesi bu sayıların kombinatorial gösterimine imkan vererek hesaplamaların daha etkin olarak yapılmasını sağladı.

A. F. Horadam (1961,1963) Fibonacci sayılarını kompleks sayılara taşıyarak Fibonacci sayıları için geçerli olan özellikleri ve özdeşlikleri Gauss Fibonacci sayıları için kurdu. J. R. Jordan (1965) Fibonacci sayıları ile Gauss Fibonacci sayıları arasındaki ilişkilerden yola çıkarak muhteşem benzerlikler keşfetti.

M. C. Er (1984) $k-$genelleştirilmiş Fibonacci sayılarınını tanımlayarak Fibonacci sayıları için yeni bir genelleme yolu buldu. Bu aşamadan sonra Lee ve Lee (1995, 2000, 2001) k. mertebeden Fibonacci ve Lucas sayıları üzerinde ve Kaygısız ve Şahin (2011) Genelleştirilmiş Lucas sayıları ve genellleştirilmiş Fibonacci sayıları arasındaki ilişkiler üzerinde çalıştı. Taşcı ve Kılıç (2004, 2006) Genelleştirilmiş k. mertebeden Fibonacci ve Lucas sayılarını tanımlayarak bu sayılar arasındaki ilişkilere yepyeni bir boyut getirdiler.

Bu tezde, Fibonacci ve Lucas sayıları, Gauss Fibonacci ve Gauss Lucas sayıları ve k. mertebeden Fibonacci ve Lucas sayıları birleştirilerek k. mertebeden Gauss Fibonacci ve Gauss Lucas sayıları başlangıç değerleriyle birlikte tanımlandı. Aynı zamanda k. mertebeden Gauss Fibonacci ve Gauss Lucas sayılarının üreteç fonksiyonları, Binet formülleri, kombinatorial gösterimleri, toplam formülleri elde edildikten sonra matris gösterimleri, önemli ilişki ve özdeşlikler kurularak ispatlandı.

1.1 Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde ikinci ve üçüncü bölümlerde kullanılan temel tanım ve teoremler verilmektedir.

Tanım 1.1.1: $a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ sonsuz bir dizi, $k \in \mathbb{N}$ sabit ve $f : \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^k \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Başlangıç değerleri $a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_{k-1}$ ve $\forall n \geq k$ için

$$a_n = f\left(n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, ..., a_{n-k}\right) \tag{1.1}$$

fonksiyonuna k. mertebeden indirgeme bağıntısı denir. Dizinin bütün elemanları (1.1) denklemi ve $a_0, a_1, a_2, ..., a_{k-1}$ değerleri ile belirlenir.

Tanım 1.1.2: (a_n) sonsuz bir dizi, $k \in \mathbb{N}$ sabit, $f_0, f_1, f_2, ..., f_k$ $\mathbb{N}$ 'den $\mathbb{R}$ 'ye tanımlı fonksiyonlar ve $f_k(n) \neq 0$ olmak üzere $\forall\ n \geq k$ için

$$a_n = f_1(n)a_{n-1} + f_2(n)a_{n-2} + ... + f_k(n)a_{n-k} + f_0(n) \tag{1.2}$$

biçimindeki indirgeme bağıntısına k.mertebeden lineer indirgeme bağıntısı denir.

Eğer (1.2) 'deki $f_1, f_2, ..., f_k$ fonksiyonları $f_i(n) = b_i$ $(1 \leq i \leq k)$ biçiminde sabit fonksiyonlar ise

$$a_n = b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + ... + b_k a_{n-k} + f_0(n) \tag{1.3}$$

indirgeme bağıntısına sabit katsayılı indirgeme bağıntısı denir.

Eğer (1.2) 'deki her $n \in \mathbb{N}$ için $f_0(n) = 0$ ise

$$a_n = f_1(n)a_{n-1} + f_2(n)a_{n-2} + ... + f_k(n)a_{n-k} \tag{1.4}$$

indirgeme bağıntısına homojen indirgeme bağıntısı denir.

Teorem 1.1.1: $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ indirgeme bağıntısı olsun. Bu durumda indirgeme bağıntısının karakteristik denklemi

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0 \tag{1.5}$$

ve kökleri α ve β olmak üzere genel çözümü

$$a_n = c\alpha^n + d\beta^n \tag{1.6}$$

dir. Burada c ve d sabit sayılardır.

Örnek 1.1.1:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 1 \\ a_n &= a_{n-1} + 2a_{n-2}, \quad n > 2 \end{aligned}$$

için indirgeme bağıntısının karakteristik denklemi

$$r^2 - r - 2 = 0$$

olup bu denklemin kökleri $r_1 = 2$ ve $r_2 = -1$ dür. Genel çözüm ise

$$a_n = c2^n + d\,(-1)^n$$

dir. Başlangıç şartları da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 2c - d &= 1 \\ 4c + d &= 1 \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$c = \frac{1}{3} \text{ ve } d = -\frac{1}{3}$$

bulunur. O halde indirgeme bağıntısının genel çözümü

$$a_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$$

biçimindedir.

Teorem 1.1.2: p. dereceden homojen, lineer

$$a_n = b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + ... + b_p a_{n-p} \tag{1.7}$$

indirgeme bağıntısının karakteristik denklemi

$$r^p - b_1 r^{p-1} - b_2 r^{p-2} - ... - b_{p-1} r - b_p = 0 \tag{1.8}$$

olsun. Bu karakteristik denklemin q_i katlı kökü r_i ise

$$k_{i_1} r_i^n + k_{i_2} n r_i^n + k_{i_3} n^2 r_i^n + ... + k_{iq_i} n^{q_i - 1} r_i^n \tag{1.9}$$

ifadesi a_n indirgeme bağıntısı için bir çözümdür. Burada $k_{i_1}, k_{i_2}, ..., k_{iq_i}$ keyfi sabitlerdir.

Örnek 1.1.2: Karakteristik denklemi

$$(r-5)^3 (r-7)^2 (r-3)^2 = 0$$

olan indirgeme bağıntısının genel çözümü aşağıdaki gibidir.

$$a_n = k_1 5^n + k_2 n 5^n + k_3 n^2 5^n + k_4 7^n + k_5 n 7^n + k_6 3^n + k_7 n 3^n$$

Tanım 1.1.3: Fibonacci sayıları, $\forall n \geq 2$ doğal sayısı için $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \tag{1.10}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Burada F_n 'e n. Fibonacci sayısı denir.

Tanım 1.1.4: Lucas sayıları, $\forall\ n \geq 2$ doğal sayısı için $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \tag{1.11}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Burada L_n 'e n. Lucas sayısı denir.

Tanım 1.1.5: Tribonacci sayıları, $\forall\ n \geq 3$ doğal sayısı için $T_0 = 0$, $T_1 = 1$, $T_2 = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3} \tag{1.12}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Burada T_n 'e n. Tribonacci sayısı denir.

Teorem 1.1.3:(Fibonacci ve Lucas indirgeme bağıntıları için Binet Formülleri) F_n, n. Fibonacci sayısı ve L_n, n. Lucas sayısı olmak üzere

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \tag{1.13}$$

ve

$$L_n = \alpha^n + \beta^n \tag{1.14}$$

dir. Burada $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ dir.

Teorem 1.1.4: $n \geq 1$ için

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1} \tag{1.15}$$

dir.

Tanım 1.1.7: $a_0, a_1, a_2, ...$ bir reel sayı dizisi olsun.

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ... \tag{1.16}$$

ifadesine $\{a_n\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu denir.

Teorem 1.1.5: Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} \tag{1.17}$$

ve Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu

$$h(x) = \frac{2 - x}{1 - x - x^2} \tag{1.18}$$

dir.

Charles H. King [1960] tarafından matrisler ile Fibonacci sayıları arasında çok ilginç bir ilişki kuruldu. Fibonacci sayılarının matrisler yardımıyla incelenmesi matematik dünyasının ilgisini çekerek bu alanda birçok yeni çalışmanın önünü açtı.

Teorem 1.1.6: $n \geq 2$ için $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ Fibonacci indirgeme bağıntısının matris gösterimi

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.19}$$

ile verilir. Buna göre

$$Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

dir.

Teorem 1.1.7: $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $n \geq 2$ için $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ olmak üzere $Q-$matrisi aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

(1) $Q^n Q^m = Q^m Q^n = Q^{n+m}$

(2) $Q^n = Q^{n-1} + Q^{n-2}$

(3) (Cassini Özdeşliği) $\det (Q^n) = F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$

Tanım 1.1.8: $n \geq 0$ bir tamsayı ve $0! = 1$ olmak üzere

$$n! = n\,(n-1)\,(n-2)\,...1 \tag{1.21}$$

çarpımına n faktöriyel denir.

Tablo 1.1: Pascal Üçgeni

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & & \ddots & \\
\binom{n}{0} & & \binom{n}{1} & & \cdots & & \binom{n}{m} & & \binom{n}{m+1} & & \cdots & & \binom{n}{n-1} & & \binom{n}{n}
\end{array}$$

Pascal üçgeninin $n.$ sıra $m.$ sütunundaki bir terimin katsayısını bulmak için aşağıdaki tanım verilir.

Tanım 1.1.9: n ve m pozitif tamsayılar ve $n \geq m$ olmak üzere

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!} \tag{1.22}$$

ifadesine Binom katsayıları denir.

Teorem 1.1.8: n ve m pozitif tamsayılar ve $n \geq m$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(1) $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$

(2) $\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$

Teorem 1.1.9:(Binom Teoremi) x ve y reel sayılar ve n pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \tag{1.23}$$

dir.

Tanım 1.1.10: Bir x reel sayısını x'den büyük olmayan tamsayıya dönüştüren fonksiyona taban (floor) fonksiyonu denir ve $\lfloor x \rfloor$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.11: Bir x reel sayısını x'den küçük olmayan tamsayıya dönüştüren fonksiyona tavan (ceiling) fonksiyonu denir ve $\lceil x \rceil$ ile gösterilir.

Teorem 1.1.10: x herhangi bir reel sayı ve n herhangi bir tamsayı olmak üzere;

(1) $\lfloor n \rfloor = n = \lceil n \rceil$

(2) $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$

(3) n tek tamsayı olmak üzere $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n-1}{2}$ dir.

(4) $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$, $x \notin \mathbb{Z}$ için

(5) $\lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n$

(6) n tek tamsayı olmak üzere $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \frac{n+1}{2}$ dir.

Teorem 1.1.11: Fibonacci ve Lucas sayılarının kapalı formülü

$$F_{n+1} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i} \tag{1.24}$$

ve

$$L_n = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n}{n-i} \binom{n-i}{i} \tag{1.25}$$

dir.

Teorem 1.1.12: Fibonacci ve Lucas sayılarının ilk n terim toplam formülleri

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1 \tag{1.26}$$

ve

$$\sum_{i=1}^{n} L_i = L_{n+2} - 3 \tag{1.27}$$

dir.

Sonuç 1.1.1: Yukarıdaki teoremden Fibonacci ve Lucas sayıları için aşağıdaki sonuçlar geçerlidir:

(1) $\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$

(2) $\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$

(3) $\sum_{i=1}^{n} L_{2i-1} = L_{2n} - 2$

(4) $\sum_{i=1}^{n} L_{2i} = L_{2n+1} - 1.$

Teorem 1.1.13: Fibonacci ve Lucas sayıları için

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1} \tag{1.28}$$

ve

$$\sum_{i=1}^{n} L_i^2 = L_n L_{n+1} - 2 \tag{1.29}$$

dir.

Lemma 1.1.1: Fibonacci indirgeme bağıntısı $n \geq 2$ için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

olmak üzere

$$\alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1} \tag{1.30}$$

ve

$$\beta^n = \beta F_n + F_{n-1} \tag{1.31}$$

dir. Burada $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ dir.

Sonuç 1.1.2: $n \geq 1$ için aşağıdaki sonuçlar geçerlidir.

(1) $F_n L_n = F_{2n}$

(2) $F_{n+2} - F_{n-2} = L_n$

(3) $L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$

Teorem 1.1.14: F_n Fibonacci sayısı, L_n Lucas sayısı olsun. Bu durumda m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere

$$F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_m F_{n-1} \tag{1.32}$$

ve

$$L_{m+n} = F_{m+1}L_n + F_m L_{n-1} \tag{1.33}$$

dir.

2 ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde çalıştığımız konuyla ilgili, daha önceden yayınlanmış makalelerin özetleri, yazar adı ve yayınlandığı yıl belirtilerek uygun bir sıra içinde ispatsız olarak verilmektedir.

2.1 Gauss Fibonacci ve Gauss Lucas Sayıları

(A. F. Horadam 1963) Kompleks Fibonacci sayıları üzerinde ve (J.H. Jordan 1965) Gauss Fibonacci sayıları üzerinde çalışmıştır. (Asci ve Gurel, 2013) iki değişkenli Gauss Fibonacci polinomları ve özel durumları üzerinde çalışarak Gauss Fibonacci sayılarına farklı bir boyut getirdiler.

2.1.1 Gauss Fibonacci ve Gauss Lucas Sayıları

Tanım 2.1.1.1: Gauss Fibonacci sayıları $GF_0 = i, GF_1 = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere $n > 1$ için

$$GF_n = GF_{n-1} + GF_{n-2} \tag{2.1}$$

indirgeme bağıntısıyla tanımlanır.

Ayrıca n. Fibonacci sayısı F_n olmak üzere

$$GF_n = F_n + iF_{n-1} \tag{2.2}$$

olduğu hemen görülür.

Tablo 2.1: GF_ndizisinin bazı elemanları

n	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
GF_n	i	1	$1+i$	$2+i$	$3+2i$	$5+3i$	$8+5i$	$13+8i$	$\cdots$

Tanım 2.1.1.2: Gauss Lucas sayıları $GL_0 = 2 - i$ ve $GL_1 = 1 + 2i$, başlangıç koşulları olmak üzere $n > 1$ için

$$GL_n = GL_{n-1} + GL_{n-2} \tag{2.3}$$

indirgeme bağıntısıyla tanımlanmıştır.

Aynı zamanda n. Lucas sayısı L_n olmak üzere

$$GL_n = L_n + iL_{n-1} \tag{2.4}$$

ilişkisi kolayca görülür.

Tablo 2.2: GL_n dizisinin bazı elemanları

n	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
GL_n	$2-i$	$1+2i$	$3+i$	$4+3i$	$7+4i$	$11+7i$	$18+11i$	$\cdots$

Teorem 2.1.1.1: $n \geq 2$ için Gauss Fibonacci ve Lucas sayılarının toplamı

$$\sum_{j=0}^{n} GF_j = GF_{n+2} - 1 \tag{2.5}$$

ve

$$\sum_{j=0}^{n} GL_j = GL_{n+2} - (1 + 2i) \tag{2.6}$$

dir.

Teorem 2.1.1.2:(Cassini Özdeşliği) $n \geq 1$ için

$$GF_{n+1}GF_{n-1} - GF_n^2 = (-1)^n (2 - i) \tag{2.7}$$

ve

$$GL_{n+1}GL_{n-1} - GL_n^2 = 5 (-1)^{n+1} (2 - i) . \tag{2.8}$$

Teorem 2.1.1.3: $n \geq 1$ için

$$GL_n = GF_{n+1} + GF_{n-1} \tag{2.9}$$

dir.

Teorem 2.1.1.4: n. Fibonacci sayısı F_n olsun. Bu durumda $n \geq 0$ için

$$GF_{n+1}^2 + GF_n^2 = F_{2n}\left(1 + 2i\right) \tag{2.10}$$

dir.

Teorem 2.1.1.5: n. Fibonacci sayısı F_n olsun. Bu durumda $n \geq 1$ için

$$GF_{n+1}^2 - GF_{n-1}^2 = F_{2n-1}\left(1 + 2i\right) \tag{2.11}$$

dir.

Teorem 2.1.1.6: n. Fibonacci sayısı F_n olsun. Bu durumda $n \geq 1$ için

$$GF_nGL_n = F_{2n-1}\left(1 + 2i\right) \tag{2.12}$$

dir. .

Teorem 2.1.1.7: GF_n Gauss Fibonacci sayısı, GL_n Gauss Lucas sayısı ve F_n Fibonacci sayısı olsun. Bu durumda m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere

$$GF_{n+1}GF_{m+1} + GF_nGF_m = F_{n+m}\left(1 + 2i\right) \tag{2.13}$$

dir.

Teorem 2.1.1.8: $n \geq 0$ için

$$GL_n^2 - 5GF_n^2 = 4\left(-1\right)^n\left(2-i\right) \tag{2.14}$$

dir.

Sonuç 2.1.1.1: $n \geq 2$ için GL_n bileşik sayıdır.

Teorem 2.1.1.9: $n \geq 0$ için

$$GL_{n+1} + GL_{n-1} = 5GF_n \tag{2.15}$$

dir.

Teorem 2.1.1.10: n. Fibonacci sayısı F_n olmak üzere $n \geq 0$ için

$$GF_{m+n} = F_m GF_{n+1} + F_{m-1} GF_n \tag{2.16}$$

dir.

Tanım 2.1.1.3: Gauss Fibonacci sayılarının normu n. Fibonacci sayısı F_n olmak üzere

$$\|GF_n\| = F_n^2 + F_{n-1}^2 = F_{2n-1} \tag{2.17}$$

olarak tanımlıdır.

2.1.2 Gauss Tribonacci Sayıları

Tanım 2.1.2.1: Gauss Tribonacci sayıları dizisi $GT_0 = 0$, $GT_1 = 1$ ve $GT_2 = 1 + i$ başlangıç koşulları olmak üzere

$$GT_n = GT_{n-1} + GT_{n-2} + GT_{n-3}, \ n \geq 3 \tag{2.18}$$

indirgeme bağıntısıyla tanımlanır.

Aynı zamanda n. Tribonacci sayısı T_n olmak üzere

$$GT_n = T_n + iT_{n-1} \tag{2.19}$$

ilişkisi kolayca görülür.

Tablo 2.3: GT_ndizisinin bazı elemanları

n	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
GT_n	0	1	$1+i$	$2+i$	$4+2i$	$7+4i$	$13+7i$	$24+13i$	$\cdots$

Teorem 2.1.2.1: Gauss Tribonacci sayılarının üreteç fonksiyonu

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} GT_n t^n = \frac{t + it^2}{1 - t - t^2 - t^3} \tag{2.20}$$

dir.

Binet formülü Fibonacci sayıları için çok önemli eşitliklerden biridir. Tribonacci sayılarının tanımında (1.5) eşitliği ile verilen indirgeme bağıntısının karakteristik denklemi

$$t^3 - t^2 - t - 1 = 0 \tag{2.21}$$

olur ve birbirinden farklı kökleri α , β ve γ dır. Bu durumda $w = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\left(1+\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}}+\sqrt[3]{19-3\sqrt{33}}\right)}{3} \\
\beta &= \frac{\left(1+w\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}}+w^2\sqrt[3]{19-3\sqrt{33}}\right)}{3} \\
\gamma &= \frac{\left(1+w^2\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}}+w\sqrt[3]{19-3\sqrt{33}}\right)}{3}
\end{aligned}
$$

dir.

Başlangıç koşulları ve $\alpha+\beta+\gamma=1, \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=-1$ ve $\alpha\beta\gamma=1$ kullanılırsa Tribonacci sayıları için Binet formülü

$$
T_n = \frac{\alpha^{n+2}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\beta^{n+2}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{\gamma^{n+2}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}
$$

dir. Şimdi Gauss Tribonacci sayıları için Binet formülünü (2.19) eşitliğinden verebiliriz.

Teorem 2.1.2.2: (Binet Formülü) $n \geq 0$ için

$$
\begin{aligned}
GT_n &= \left[\frac{\alpha^{n+2}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\beta^{n+2}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{\gamma^{n+2}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\right] \\
&\quad +i\left[\frac{\alpha^{n+1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\beta^{n+1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{\gamma^{n+1}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\right]
\end{aligned} \tag{2.22}
$$

dir.

Teorem 2.1.2.3: Gauss Tribonacci sayılarının kapalı formülü

$$
\begin{aligned}
GT_n &= \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{2(n-1)}{3} \right\rfloor} \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} \binom{n-m-1}{m-r}\binom{m-r}{r} \\
&\quad +i \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{2(n-2)}{3} \right\rfloor} \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} \binom{n-m-2}{m-r}\binom{m-r}{r}
\end{aligned} \tag{2.23}
$$

dir.

Teorem 2.1.2.4: Gauss Tribonacci sayılarının toplamı

$$\sum_{k=1}^{n} GT_k = \frac{1}{2}\left[GT_{n+3} - GT_{n+1} - (1+i)\right] \tag{2.24}$$

dir.

Teorem 2.1.2.5: n. Tribonacci sayısı T_n olsun. Bu durumda $n \geq 1$ için

$$\sum_{k=0}^{n} GT_k GT_{k+1} = T_{n+1}\left(GT_n + iT_n\right) \tag{2.25}$$

dir.

Teorem 2.1.2.6: $n \geq 1$ için

$$\sum_{k=1}^{n} GT_n^2 = T_n^2 + 2i \sum_{k=1}^{n} T_k T_{k-1} \tag{2.26}$$

dir.

Teorem 2.1.2.7: $n > 0$ ve $m > 0$ için

$$GT_{m+n} = T_{m+1}GT_{n+1} + T_m GT_n + T_{m-1}GT_n + T_m GT_{n-1} \tag{2.27}$$

dir.

Teorem 2.1.2.8: D_n, $n \times n$ boyutlu üçlü bant matris aşağıdaki gibi tanımlansın

$$D_n = \begin{bmatrix} 1+i & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, n \geq 2.$$

Bu durumda $D_0 = 1$ ve $D_1 = 1 + i$ olmak üzere $n \geq 2$ için

$$\det D_n = GT_{n+1} \tag{2.28}$$

dir.

Şimdi Tribonacci sayıları için 3×3 boyutlu Q matrisi rolünü oynayan Q_3, R_3 ve $E_{3,n}$ matrsileri aşağıdaki gibi tanımlansın

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 1+i & 1 & 0 \\ 1 & 0 & i \\ 0 & i & 1-i \end{bmatrix}$$

ve

$$E_{3,n} = \begin{bmatrix} GT_{n+2} & GT_{n+1} & GT_n \\ GT_{n+1} & GT_n & GT_{n-1} \\ GT_n & GT_{n-1} & GT_{n-2} \end{bmatrix}.$$

Teorem 2.1.2.9: $n \geq 2$ için

$$Q_3^n R_3 = E_{3,n} \tag{2.29}$$

dir.

2.2 k. Mertebeden Fibonacci ve Lucas Sayıları

(Er 1984, Lee ve diğerleri 2001) k. mertebeden Fibonacci ve Lucas sayıları üzerinde ve (Kaygısız ve Şahin 2011) Genelleştirilmiş Lucas sayıları ve genelleştirilmiş Fibonacci sayıları arasındaki ilişkiler üzerinde çalışmıştır.

2.2.1 k−Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas Sayıları

Tanım 2.2.1.1: $k-$genelleştirilmiş Fibonacci sayıları $1-k \leq n \leq 0$ için başlangıç değerleri

$$g_n^i = \begin{cases} 1 & \text{Eğer } i = 1-n \\ 0 & \text{Diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere $n > 0$ ve $1 \leq i \leq k$ için

$$g_n^i = \sum_{j=1}^{k} g_{n-j}^i \tag{2.30}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır.

Yukarıdaki başlangıç koşulları ve indirgeme bağıntısında $i = k = 2$ seçilirse Fibonacci sayıları elde edilir.

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...$$

$i = k = 3$ seçilirse Tribonacci sayıları elde edilir.

$$0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 45, ...$$

Tanım 2.2.1.2: Genelleştirilmiş k. mertebeden Lucas sayıları

$$l_{k,1-k} = l_{k,2-k} = ... = l_{k,-1} = -1 \text{ ve } l_{k,0} = k.$$

başlangıç değerleri olmak üzere

$$l_{k,n} = \sum_{j=1}^{k} l_{k,n-j} \tag{2.31}$$

indirgeme bağıntısıyla tanımlanır.

Burada $k = 2$ seçilirse bildiğimiz Lucas sayıları elde edilir.

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, ...$$

$k = 3$ seçilirse $3-$basamak Lucas sayıları elde edilir.

$$3, 1, 3, 7, 11, 22, 40, 73, ...$$

Tanım 2.2.1.3: Şimdi $Q-$matris rolü oynayan $k \times k$ boyutlu Q_k ve Q_k^n matrisleri aşağıdaki gibi tanımlansın öyle ki;

$$Q_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{k\times k}, \tag{2.32}$$

ve

$$Q_k^n = \begin{bmatrix} g_{n+1}^{(k)} & \cdots & g_n^{(k)} + g_{n-1}^{(k)} & g_n^{(k)} \\ g_n^{(k)} & \cdots & g_{n+1}^{(k)} + g_n^{(k)} & g_{n-1}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{n-k+3}^{(k)} & \cdots & g_{n-k+2}^{(k)} + g_{n-k+1}^{(k)} & g_{n-k+2}^{(k)} \\ g_{n-k+2}^{(k)} & \cdots & g_{n-k+3}^{(k)} + g_{n-k+2}^{(k)} & g_{n-k+1}^{(k)} \end{bmatrix}. \tag{2.33}$$

Teorem 2.2.1.1: Herhangi n ve m tamsayıları için

$$\begin{aligned} g_{n+m}^{k} &= g_{n}^{k}g_{m-(k-1)}^{k}+\left(g_{n}^{k}+g_{n-1}^{k}\right)g_{m-(k-2)}^{k} \\ &+\left(g_{n}^{k}+g_{n-1}^{k}+g_{n-2}^{k}\right)g_{m-(k-3)}^{k}+... \\ &+\left(g_{n}^{k}+g_{n-1}^{k}+...+g_{n-(k-2)}^{k}\right)g_{m-1}^{k}+g_{n+1}^{k}g_{m}^{k} \end{aligned} \tag{2.34}$$

dir.

Sonuç 2.2.1.1: Herhangi n ve m tamsayıları için

$$\begin{aligned} g_{n+m}^{k} &= g_{n-1}^{k}g_{m-(k-2)}^{k}+\left(g_{n-1}^{k}+g_{n-2}^{k}\right)g_{m-(k-3)}^{k} \\ &+\left(g_{n-1}^{k}+g_{n-2}^{k}+g_{n-3}\right)g_{m-(k-4)}^{k}+... \\ &+\left(g_{n-1}^{k}+g_{n-2}^{k}+...+g_{n-(k-1)}^{k}\right)g_{m-1}^{k}+g_{n}^{k}g_{m+1}^{k} \end{aligned} \tag{2.35}$$

dir.

Lemma 2.2.1.1: $b_k=\frac{2^{k+1}}{k+1}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k$ olsun. Bu durumda $k\geq 2$ için $b_k\leq b_{k+1}$ dir.

Lemma 2.2.1.2: $z^{k+1}-2z^k+1=0$ denkleminin $k\geq 2$ için çift katlı kökü yoktur.

Tanım 2.2.1.3'de (2.32) eşitliğiyle verilen Q_k matrisinin karakteristik polinomu $f(\lambda)=\lambda^k-\lambda^{k-1}-\lambda^{k-2}-...-\lambda-1$ ve kökleri $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,...,\lambda_k$ Lemma 2.2.1.2'den dolayı birbirinden farklıdır. $n\times n$ boyutttaki Vandermonde matrisi

$$\Lambda=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{bmatrix}$$

ve $V=\Lambda^T$ olsun. Aynı zamanda

$$d_i = \begin{bmatrix} \lambda_1^{n+i-1} \\ \lambda_2^{n+i-1} \\ \vdots \\ \lambda_k^{n+i-1} \end{bmatrix}$$

olsun. Bu durumda aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 2.2.1.2: (Binet Formülü) $k-$genelleştirilmiş Fibonacci sayısı $\left\{g_n^{(k)}\right\}$ olsun. Bu durumda $g_n = g_{n+k-2}^{(k)}$ olmak üzere

$$g_n = \frac{\det\left(V_1^k\right)}{\det\left(V\right)}. \tag{2.36}$$

dir.

$k \geq 2$ için $g_n = g_{n+k-2}^{(k)}$ dizisinin kombinatorial gösterimini tanımlayalım. $(0,1)-$ matrisi $k \times k$ boyutlu S_k ile gösterilirse

$$S_k = \begin{bmatrix} E & 1 \\ I_{k-1} & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. Buna göre Q_k matrisinin tanımından ve denklem (2.20)'den

$$S_k^n = [s_{ij}] = \begin{bmatrix} g_{n+1}^{(k)} & \cdots & g_n^{(k)} + g_{n-1}^{(k)} + g_{n-2}^{(k)} & g_n^{(k)} + g_{n-1}^{(k)} & g_n^{(k)} \\ g_n^{(k)} & \cdots & g_{n-1}^{(k)} + g_{n-2}^{(k)} + g_{n-3}^{(k)} & g_{n+1}^{(k)} + g_n^{(k)} & g_{n-1}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{n-k+3}^{(k)} & \cdots & g_{n-k+2}^{(k)} + g_{n-k+1}^{(k)} + g_{n-k}^{(k)} & g_{n-k+2}^{(k)} + g_{n-k+1}^{(k)} & g_{n-k+2}^{(k)} \\ g_{n-k+2}^{(k)} & \cdots & g_{n-k+1}^{(k)} + g_{n-k}^{(k)} + g_{n-k-1}^{(k)} & g_{n-k+3}^{(k)} + g_{n-k+2}^{(k)} & g_{n-k+1}^{(k)} \end{bmatrix}$$

dir.

Lemma 2.2.1.3: $n \geq 0$ ve $n = i-j$ için öyle ki $m_1+2m_2+...+km_k = n-i+j$ koşulunu sağlayan $m_1, m_2, ..., m_k$ pozitif tamsayılar olmak üzere

$$s_{ij} = \sum_{(m_1,m_2,...,m_k)} \frac{m_j + m_{j+1} + ... + m_k}{m_1 + m_2 + ... + m_k} \binom{m_1 + m_2 + ... + m_k}{m_1, m_2, ..., m_k} \tag{2.37}$$

dir.

Sonuç 2.2.1.2: $k-$genelleştirilmiş Fibonacci sayısı $\left\{g_n^{(k)}\right\}$ olsun. Bu durumda $m_1 + 2m_2 + ... + km_k = n - 1 + k$ koşulunu sağlayan negatif olmayan tamsayılar için

$$g_n^k = \sum_{(m_1,m_2,...,m_k)} \frac{m_k}{m_1 + m_2 + ... + m_k} \binom{m_1 + m_2 + ... + m_k}{m_1, m_2, ..., m_k} \tag{2.38}$$

dir.

2.2.2 Genelleştirilmiş k. Mertebeden Fibonacci ve Lucas Sayıları

(Taşcı ve Kılıç 2004, Kılıç ve Taşcı 2006) Genelleştirilmiş k. mertebeden Fibonacci ve Lucas sayıları ve bu sayılar arasındaki ilişkiler üzerinde çalışmıştır. Bu bölümde isimleri aynı ancak başlangıç koşulları Tanım 2.2.1.2'den farklı bir genelleştirilmiş k. mertebeden Lucas sayılarının k. dizisini tanımlayacağız.

Tanım 2.2.2.1: Genelleştirilmiş k. mertebeden Lucas sayılarının k. dizisi $1-k \leq n \leq 0$ için başlangıç değerleri

$$l_n^i = \begin{cases} 2 & \text{Eğer } i = 2-n \\ -1 & \text{Eğer } i = 1-n \\ 0 & \text{Diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere i'inci dizinin n. terimi l_n^i ile gösterildiğinde $1 \leq i \leq k$ ve $n > 0$ için

$$l_n^i = \sum_{j=1}^{k} l_{n-j}^i \tag{2.39}$$

indirgeme bağıntısıyla tanımlanır.

Tablo 2.4: $i = 1$ ve $k = 2$ seçilirse l_n^1'dizisinin bazı elemanları

n	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
l_n^1	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	13	$\cdots$

Tablo 2.5: $i = 3$ ve $k = 4$ seçilirse l_n^3dizisinin bazı elemanları

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
l_n^3	-1	2	0	1	2	5	8	16	31	60	115	222	$\cdots$

Teorem 2.2.2.1: Genelleştirilmiş k. mertebeden Fibonacci sayısı g_n^i olsun. $\forall n,\ m \in \mathbb{Z}^+$ ve $1 \leq i \leq k$ için

$$g_{n+m}^i = \sum_{j=1}^{k} g_n^i g_{m+1-j}^i \tag{2.40}$$

dir.

Teorem 2.2.2.2: Genelleştirilmiş k. mertebeden Lucas sayısı l_n^i olsun. $\forall n$, $m \in Z^+$ ve $1 \leq i \leq k$ için

$$l_{n+m}^i = \sum_{j=1}^{k} g_n^i l_{m+1-j}^i \tag{2.41}$$

dir.

Sonuç 2.2.2.1: Genelleştirilmiş k. mertebeden Fibonacci sayısı g_n^i olsun. $\forall n$, $m, p \in Z^+$ ve $1 \leq i \leq k$ için

$$g_{n+m+p}^i = \sum_{j=1}^{k} g_n^i g_{m+1-p-j}^i \tag{2.42}$$

dir.

Sonuç 2.2.2.2: Genelleştirilmiş k. mertebeden Fibonacci sayısı g_n^i olsun. $\forall n$, $m, p \in Z^+$ ve $1 \leq i \leq k$ için

$$g_{n+m}^i = \sum_{j=1}^{k} g_{n-p}^i g_{m+p-j}^i \tag{2.43}$$

dir.

Lemma 2.2.2.1: Genelleştirilmiş k. mertebeden Fibonacci sayısı ve Lucas sayısı g_n^k ve l_n^k olsun. Bu durumda $k \geq 2$ için

$$l_n^k = g_n^k + 2g_{n-1}^k \tag{2.44}$$

dir.

Teorem 2.2.2.3: Genelleştirilmiş k. mertebeden Lucas sayısı l_n^k olsun. Bu durumda $k \geq 2$ için

$$l_n^k = \frac{\det\left(V_k^{(1)}\right) + 2\det\left(\left(V_k^{(2)}\right)\right)}{\det(V)} \tag{2.45}$$

dir.

Lemma 2.2.2.2: Genelleştirilmiş k. mertebeden Fibonacci sayısı ve Lucas sayısı g_n^i ve l_n^i olsun. Bu durumda $1 \leq i \leq k$ için

$$l_n^k = 2g_n^{i-1} - g_{n-1}^i \tag{2.46}$$

dir.

Teorem 2.2.2.4: Genelleştirilmiş k. mertebeden Lucas sayısı l_n^k olsun. Bu durumda $1 \leq i \leq k$ için

$$l_n^i = \frac{2\det\left(V_{i-1}^{(1)}\right) - \det\left(\left(V_i^{(2)}\right)\right)}{\det(V)} \tag{2.47}$$

dir.

Sonuç 2.2.2.3: Genelleştirilmiş k. mertebeden Lucas sayısı $\left\{l_n^{(k)}\right\}$ olsun. Bu durumda $m_1 + 2m_2 + ... + km_k = n - 1 + k$ ve $d_1 + 2d_2 + ... + kd_k = n - 2 + k$ koşulunu sağlayan negatif olmayan tamsayılar için

$$\begin{aligned} l_n^k \quad = & \sum_{(m_1,m_2,...,m_k)} \frac{m_k}{m_1 + m_2 + ... + m_k} \binom{m_1 + m_2 + ... + m_k}{m_1, m_2, ..., m_k} \\ & +2 \sum_{(d_1,d_2,...,d_k)} \frac{d_k}{d_1 + d_2 + ... + d_k} \binom{d_1 + d_2 + ... + d_k}{d_1, d_2, ..., d_k} \end{aligned} \tag{2.48}$$

dir.

3 k. MERTEBEDEN GAUSS FİBONACCİ VE k. MERTEBEDEN GAUSS LUCAS İNDİRGEME BAĞINTILARI

Bu bölümde, k. mertebeden Gauss Fibonacci ve Lucas sayıları başlangıç değerleri ile birlikte tanımlanarak bazı önemli özellikler ve özdeşlikler ispatlarıyla birlikte verilmektedir.

3.1 k. Mertebeden Gauss Fibonacci ve k. Mertebeden Gauss Lucas Sayıları

Tanım 3.1.1: k bir tamsayı olsun. k. mertebeden Gauss Fibonacci sayıları $\left\{GF_n^{(k)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi $1-k \leq n \leq 0$ için başlangıç değerleri

$$GF_n^{(k)} = \begin{cases} 1-i, & \text{eğer } k = 1-n \text{ ise} \\ i, & \text{eğer } k = 2-n \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere $n > 0$ ve $k \geq 2$ için

$$GF_n^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} GF_{n-j}^{(k)} \tag{3.1}$$

indirgeme bağıntısıyla tanımlıdır.

Burada n. k. mertebeden Fibonacci sayısı $F_n^{(k)}$ olmak üzere

$$GF_n^{(k)} = F_n^{(k)} + iF_{n-1}^{(k)} \tag{3.2}$$

olduğu görülür.

Daha sonra kullanmak üzere $GF_n^{(k)}$ dizisinin bazı elemanları aşağıdaki tabloda verilmektedir:

Tablo 3.1: $GF_n^{(k)}$ dizisinin bazı elemanları

n	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$\cdots$
-5					$1-i$	
-4				$1-i$	i	
-3			$1-i$	i	0	
-2		$1-i$	i	0	0	
-1	$1-i$	i	0	0	0	
0	i	0	0	0	0	
1	1	1	1	1	1	
2	$1+i$	$1+i$	$1+i$	$1+i$	$1+i$	
3	$2+i$	$2+i$	$2+i$	$2+i$	$2+i$	
4	$3+2i$	$4+2i$	$4+2i$	$4+2i$	$4+2i$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tanım 3.1.2: k bir tamsayı olsun. k. mertebeden Gauss Lucas sayıları $\left\{GL_n^{(k)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi $1-k \leq n \leq 0$ için başlangıç değerleri

$$GL_n^{(k)} = \begin{cases} -1+(2k-1)\,i, & \text{eğer } k=1-n \text{ ise} \\ k-i, & \text{eğer } n=0 \text{ ise} \\ -1-i, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

olmak üzere $n>0$ ve $k \geq 2$ için

$$GL_n^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} GL_{n-j}^{(k)} \tag{3.3}$$

indirgeme bağıntısıyla tanımlıdır.

Burada n. k. mertebeden Lucas sayısı $L_n^{(k)}$ olmak üzere

$$GL_n^{(k)} = L_n^{(k)} + iL_{n-1}^{(k)} \tag{3.4}$$

olduğu görülür.

Daha sonra kullanmak üzere $GL_n^{(k)}$ dizisinin bazı elemanları aşağıdaki tabloda verilmektedir:

Tablo 3.2: $GL_n^{(k)}$ dizisinin bazı elemanları

n	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$\cdots$
-5					$-1+11i$	
-4				$-1+9i$	$-1-i$	
-3			$-1+7i$	$-1-i$	$-1-i$	
-2		$-1+5i$	$-1-i$	$-1-i$	$-1-i$	
-1	$-1+3i$	$-1-i$	$-1-i$	$-1-i$	$-1-i$	
0	$2-i$	$3-i$	$4-i$	$5-i$	$6-i$	
1	$1+2i$	$1+3i$	$1+4i$	$1+5i$	$1+6i$	
2	$3+i$	$3+i$	$3+i$	$3+i$	$3+i$	
3	$4+3i$	$7+3i$	$7+3i$	$7+3i$	$7+3i$	
4	$7+4i$	$11+7i$	$15+7i$	$15+7i$	$15+7i$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

3.2 k. Mertebeden Gauss Fibonacci ve k. Mertebeden Gauss Lucas Sayılarının Bazı Özellikleri

Teorem 3.2.1: k. mertebeden Gauss Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonu

$$g(t)=\sum_{n=0}^{\infty} GF_n^{(k)}t^n=\frac{GF_0^{(k)}+\left(GF_1^{(k)}-GF_0^{(k)}\right)t+(GF_2^{(k)}-GF_1^{(k)}-GF_0^{(k)})t^2}{1-\sum\limits_{j=1}^{k}t^j} \tag{3.5}$$

ve k. mertebeden Gauss Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu

$$h(t)=\sum_{n=0}^{\infty} GL_n^{(k)}t^n=\frac{GL_0^{(k)}+\sum\limits_{m=1}^{k-1}\left(GL_m^{(k)}-\sum\limits_{j=1}^{m}GL_{j-1}^{(k)}\right)t^m}{1-\sum\limits_{j=1}^{k}t^j} \tag{3.6}$$

dir.

İspat: k. mertebeden Gauss Fibonacci sayıları $GF_n^{(k)}$'nın üreteç fonksiyonu $g(t)$ olsun. Buna göre;

$$\begin{aligned}
g(t)-tg(t)-...-t^k g(t) &= GF_0^{(k)}+t\left(GF_1^{(k)}-GF_0^{(k)}\right)\\
&\quad +t^2\left(GF_2^{(k)}-GF_1^{(k)}-GF_0^{(k)}\right)\\
&\quad +t^3\left(GF_3^{(k)}-GF_2^{(k)}-GF_1^{(k)}-GF_0^{(k)}\right)\\
&\quad +\sum_{n=4}^{\infty}t^n\left(GF_n^{(k)}-\sum_{j=0}^{n-1}GF_j^{(k)}\right)\\
&= GF_0^{(k)}+\left(GF_1^{(k)}-GF_0^{(k)}\right)t\\
&\quad +(GF_2^{(k)}-GF_1^{(k)}-GF_0^{(k)})t^2.
\end{aligned}$$

İfade $g(t)$ parantezine alınırsa

$$g(t)=\frac{GF_0^{(k)}+\left(GF_1^{(k)}-GF_0^{(k)}\right)t+(GF_2^{(k)}-GF_1^{(k)}-GF_0^{(k)})t^2}{1-\sum\limits_{j=1}^{k}t^j}$$

eşitliği elde edilir.

k. mertebeden Gauss Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu $h(t)$ benzer şekilde elde edilir.

Sonuç 3.2.1: $k = 2$ olsun. Bu durumda bilinen Gauss Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonu

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} GF_n t^n = \frac{i + (1-i)t}{1 - t - t^2} \tag{3.7}$$

ve Gauss Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} GL_n t^n = \frac{2 - i + (i-1)\,t}{1 - t - t^2} \tag{3.8}$$

dir.

Sonuç 3.2.2: $k = 3$ olsun. Bu durumda Gauss Tribonacci sayılarının üreteç fonksiyonu

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} GT_n t^n = \frac{t + it^2}{1 - t - t^2 - t^3} \tag{3.9}$$

dir.

Teorem 3.2.2: k. mertebeden Gauss Fibonacci sayı dizisi $\left\{GF_n^{(k)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ olsun. Bu durumda $n_1 + 2n_2 + ... + kn_k = n$ ve $r_1 + 2r_2 + ... + kr_k = n - 1$ ilişkisini sağlayan tüm $n_1, n_2, ..., n_k$ ve $r_1, r_2, ..., r_k$ pozitif tamsayılar olmak üzere $n \geq 0$ için

$$GF_{n+1}^{(k)} = \sum_{n_1, n_2, ..., n_k} \binom{n_1 + n_2 + ... + n_k}{n_1, n_2, ..., n_k} + i \sum_{r_1, r_2, ..., r_k} \binom{r_1 + r_2 + ... + r_k}{r_1, r_2, ..., r_k} \tag{3.10}$$

dir.

İspat: Lemma 2.2.1.3'de elde edilen (2.37) eşitliği ve Sonuç 2.2.1.2'de elde edilen (2.38) eşitliği Gauss Fibonacci sayılarının tanımında verilen (3.2) denkleminde yerine yazılırsa ispat biter.

Sonuç 3.2.3: $k = 2$ olsun. Bu durumda bilinen Gauss Fibonacci sayılarının kapalı formülü

$$GF_{n+1} = \sum_{n_1=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n - n_1}{n_1} + i \sum_{n_1=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n - n_1 - 1}{n_1} \tag{3.11}$$

dir.

Sonuç 3.2.4: $k=3$ olsun. Bu durumda Gauss Tribonacci sayılarının kapalı formülü

$$GT_{n+1} = \sum_{n_1=0}^{\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor} \sum_{n_2=0}^{\left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor} \binom{n-n_1}{n_1-n_2}\binom{n_1-n_2}{n_2} + i \sum_{n_1=0}^{\left\lfloor \frac{2(n-1)}{3} \right\rfloor} \sum_{n_2=0}^{\left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor} \binom{n-n_1-1}{n_1-n_2}\binom{n_1-n_2}{n_2} \tag{3.12}$$

dir.

Fibonacci sayıları teorisinin en çok bilinen ve çalışılan konularından biri de Binet Formülleridir.

k. mertebeden Gauss Fibonacci sayılarının (3.1) eşitliğinde verilen indirgeme bağıntısının karakteristik polinomu $f(\lambda) = \lambda^k - \lambda^{k-1} - \lambda^{k-2} - ... - \lambda - 1$ dir. Lemma 2.2.1.1 ve Lemma 2.2.1.2 den dolayı karakteristik polinomun kökleri birbirinden farklıdır Karakteristik polinomun birbirinden farklı kökleri $x_1, x_2, x_3, ..., x_{k-1}, x_k$ olsun. Daha önce k. mertebeden Fibonacci sayılarının köklerinin birbirinden farklı olduğu ispatlanarak Binet formülleri verildiğinden dolayı k. mertebeden Gauss Fibonacci ve Gauss Lucas sayılarının Binet formüllerini (3.2) eşitliğini de kullanarak aşağıdaki teoremde verebiliriz.

Teorem 3.2.3: (Binet Formülleri) $n \geq 0$ için

$$GF_n^{(k)} = c_1x_1^n + c_2x_2^n + ... + c_kx_k^n + i\left(c_1x_1^{n-1} + c_2x_2^{n-1} + ... + c_kx_k^{n-1}\right) \tag{3.13}$$

ve

$$GL_n^{(k)} = t_1x_1^n + t_2x_2^n + ... + t_kx_k^n + i\left(t_1x_1^{n-1} + t_2x_2^{n-1} + ... + t_kx_k^{n-1}\right) \tag{3.14}$$

dir.

İspat: k. mertebeden Fibonacci sayılarının tanımından ve n. k. mertebeden Fibonacci sayısı $F_n^{(k)}$ olmak üzere

$$GF_n^{(k)} = F_n^{(k)} + iF_{n-1}^{(k)}$$

(3.2) eşitliğinden ve Teorem 2.2.1.2'den k. mertebeden Fibonacci ve Lucas sayılarının Binet formülleri yazılır ve ispat tamamlanır.

Şimdi Q matris rolü oynayan Q_k, R_k, Y_k, $Z_{k,n}$ ve $E_{k,n}$ matrislerini tanımlayabiliriz. Q_k, R_k, Y_k, $Z_{k,n}$ ve $E_{k,n}$ matrisleri $k \times k$ boyutunda aşağıdaki gibi olsun.

$$Q_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{k\times k},$$

$$R_k = \begin{bmatrix} GF_{k-1}^{(k)} & GF_{k-2}^{(k)} & GF_{k-3}^{(k)} & \cdots & GF_2^{(k)} & GF_1^{(k)} & 0 \\ GF_{k-2}^{(k)} & GF_{k-3}^{(k)} & GF_{k-4}^{(k)} & \cdots & GF_1^{(k)} & 0 & 0 \\ GF_{k-3}^{(k)} & GF_{k-4}^{(k)} & GF_{k-5}^{(k)} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ GF_2^{(k)} & GF_1^{(k)} & 0 & \cdots & \vdots & 0 & 0 \\ GF_1^{(k)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & i & 1-i \end{bmatrix}_{k\times k}, \tag{3.15}$$

$$Y_k = \begin{bmatrix} GL_{k-1}^{(k)} & GL_{k-2}^{(k)} & \cdots & GL_2^{(k)} & GL_1^{(k)} & k-i \\ GL_{k-2}^{(k)} & GL_{k-3}^{(k)} & \cdots & GL_1^{(k)} & k-i & -1-i \\ GL_{k-3}^{(k)} & GL_{k-4}^{(k)} & \cdots & k-i & -1-i & -1-i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ GL_2^{(k)} & GL_1^{(k)} & \cdots & \vdots & -1-i & -1-i \\ GL_1^{(k)} & k-i & \cdots & -1-i & -1-i & -1-i \\ k-i & -1-i & \cdots & -1-i & -1-i & -1+(2k-1)\,i \end{bmatrix}_{k\times k}, \tag{3.16}$$

$$Z_{k,n} = \begin{bmatrix} GL_{n+k-1}^{(k)} & GL_{n+k-2}^{(k)} & \cdots & GL_{n+1}^{(k)} & GL_n^{(k)} \\ GL_{n+k-2}^{(k)} & GL_{n+k-3}^{(k)} & \cdots & GL_n^{(k)} & GF_{n-1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ GL_{n+1}^{(k)} & GL_n^{(k)} & \cdots & GL_{n-k+3}^{(k)} & GL_{n-k+2}^{(k)} \\ GL_n^{(k)} & GL_{n-1}^{(k)} & \cdots & GL_{n-k+2}^{(k)} & GL_{n-k+1}^{(k)} \end{bmatrix}_{k\times k} \tag{3.17}$$

ve

$$E_{k,n} = \begin{bmatrix} GF_{n+k-1}^{(k)} & GF_{n+k-2}^{(k)} & \cdots & GF_{n+1}^{(k)} & GF_{n}^{(k)} \\ GF_{n+k-2}^{(k)} & GF_{n+k-3}^{(k)} & \cdots & GF_{n}^{(k)} & GF_{n-1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ GF_{n+1}^{(k)} & GF_{n}^{(k)} & \cdots & GF_{n-k+3}^{(k)} & GF_{n-k+2}^{(k)} \\ GF_{n}^{(k)} & GF_{n-1}^{(k)} & \cdots & GF_{n-k+2}^{(k)} & GF_{n-k+1}^{(k)} \end{bmatrix}_{k\times k} . \tag{3.18}$$

Şimdi aşağıdaki lemmayı verelim:

Lemma 3.2.1: $n \geq 1$ olsun. Bu durumda

$$E_{k,n+1} = Q_k E_{k,n} \tag{3.19}$$

ve

$$Z_{k,n+1} = Q_k Z_{k,n} \tag{3.20}$$

dir.

İspat: $n \geq 1$ için $k \times k$ boyutlu matrisler çarpılır

$$\begin{aligned} Q_k E_{k,n} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}_{k\times k} \begin{bmatrix} GF_{n+k-1}^{(k)} & GF_{n+k-2}^{(k)} & \cdots & GF_{n}^{(k)} \\ GF_{n+k-2}^{(k)} & GF_{n+k-3}^{(k)} & \cdots & GF_{n-1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ GF_{n+1}^{(k)} & GF_{n}^{(k)} & \cdots & GF_{n-k+2}^{(k)} \\ GF_{n}^{(k)} & GF_{n-1}^{(k)} & \cdots & GF_{n-k+1}^{(k)} \end{bmatrix}_{k\times k} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & \cdots & a_{k-1,k-1} & a_{k-1,k} \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \cdots & a_{k,k-1} & a_{k,k} \end{bmatrix}_{k\times k} \end{aligned}$$

matrislerin eşitliği kullanılırsa;

1. satırda;

$$\begin{aligned} a_{11} &= GF_{n+k-1}^{(k)} + GF_{n+k-2}^{(k)} + ... + GF_{n+1}^{(k)} + GF_{n}^{(k)} = GF_{n+k}^{(k)}, \\ a_{12} &= GF_{n+k-2}^{(k)} + GF_{n+k-3}^{(k)} + ... + GF_{n}^{(k)} + GF_{n-1}^{(k)} = GF_{n+k-1}^{(k)}, \\ &\quad ... \\ a_{1,k} &= GF_{n}^{(k)} + GF_{n-1}^{(k)} + ... + GF_{n-k+2}^{(k)} + GF_{n-k+1}^{(k)} = GF_{n+1}^{(k)}. \end{aligned}$$

2. satırda

$$\begin{aligned} a_{21} &= GF_{n+k-1}^{(k)}, \\ a_{22} &= GF_{n+k-2}^{(k)}, \\ &\ldots \\ a_{2,k} &= GF_{n}^{(k)} \end{aligned}$$

ve diğer satır ve sütun elemanları bulunursa

k.satırda

$$\begin{aligned} a_{k,1} &= GF_{n+1}^{(k)}, \\ a_{k,2} &= GF_{n}^{(k)}, \\ &\ldots \\ a_{k,k} &= GF_{n-k+2}^{(k)} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{bmatrix} GF_{n+k}^{(k)} & GF_{n+k-1}^{(k)} & \cdots & GF_{n+2}^{(k)} & GF_{n+1}^{(k)} \\ GF_{n+k-1}^{(k)} & GF_{n+k-2}^{(k)} & \cdots & GF_{n+1}^{(k)} & GF_{n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ GF_{n+2}^{(k)} & GF_{n+1}^{(k)} & \cdots & GF_{n-k+4}^{(k)} & GF_{n-k+3}^{(k)} \\ GF_{n+1}^{(k)} & GF_{n}^{(k)} & \cdots & GF_{n-k+3}^{(k)} & GF_{n-k+2}^{(k)} \end{bmatrix} = E_{k,n+1}$$

dir.

Şimdi Gauss Lucas sayıları için ispatlayalım. $n \geq 1$ için $k \times k$ boyutlu matrisler çarpılırsa

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}_{k\times k} \begin{bmatrix} GL_{n+k-1}^{(k)} & GL_{n+k-2}^{(k)} & \cdots & GL_{n}^{(k)} \\ GL_{n+k-2}^{(k)} & GL_{n+k-3}^{(k)} & \cdots & GL_{n-1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ GL_{n+1}^{(k)} & GL_{n}^{(k)} & \cdots & GL_{n-k+2}^{(k)} \\ GL_{n}^{(k)} & GL_{n-1}^{(k)} & \cdots & GL_{n-k+1}^{(k)} \end{bmatrix}_{k\times k}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1,k-1} & b_{1,k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2,k-1} & b_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{k-1,1} & b_{k-1,2} & \cdots & b_{k-1,k-1} & b_{k-1,k} \\ b_{k,1} & b_{k,2} & \cdots & b_{k,k-1} & b_{k,k} \end{bmatrix}_{k\times k}$$

matris çarpımı ve matrislerin eşitliği kullanılırsa;

1. satırda;

$$\begin{aligned}
b_{11} &= GL_{n+k-1}^{(k)} + GL_{n+k-2}^{(k)} + ... + GL_{n+1}^{(k)} + GL_{n}^{(k)} = GL_{n+k}^{(k)}, \\
b_{12} &= GL_{n+k-2}^{(k)} + GL_{n+k-3}^{(k)} + ... + GL_{n}^{(k)} + GL_{n-1}^{(k)} = GL_{n+k-1}^{(k)}, \\
&\quad ... \\
b_{1,k} &= GL_{n}^{(k)} + GL_{n-1}^{(k)} + ... + GL_{n-k+2}^{(k)} + GL_{n-k+1}^{(k)} = GL_{n+1}^{(k)}.
\end{aligned}$$

2. satırda

$$\begin{aligned}
b_{21} &= GL_{n+k-1}^{(k)}, \\
b_{22} &= GL_{n+k-2}^{(k)}, \\
&\quad ... \\
b_{2,k} &= GL_{n}^{(k)}
\end{aligned}$$

ve diğer satır ve sütun elemanları bulunur

k.satırda

$$\begin{aligned}
b_{k,1} &= GL_{n+1}^{(k)}, \\
b_{k,2} &= GL_{n}^{(k)}, \\
&\quad ... \\
b_{k,k} &= GL_{n-k+2}^{(k)}
\end{aligned}$$

ve böylece

$$\begin{bmatrix}
GL_{n+k}^{(k)} & GL_{n+k-1}^{(k)} & \cdots & GL_{n+2}^{(k)} & GL_{n+1}^{(k)} \\
GL_{n+k-1}^{(k)} & GL_{n+k-2}^{(k)} & \cdots & GL_{n+1}^{(k)} & GL_{n}^{(k)} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
GL_{n+2}^{(k)} & GL_{n+1}^{(k)} & \cdots & GL_{n-k+4}^{(k)} & GL_{n-k+3}^{(k)} \\
GL_{n+1}^{(k)} & GL_{n}^{(k)} & \cdots & GL_{n-k+3}^{(k)} & GL_{n-k+2}^{(k)}
\end{bmatrix} = Z_{k,n+1}$$

dir.

Teorem 3.2.4: $n \geq 1$ olsun. Bu durumda

$$Q_k^n R_k = E_{k,n} \tag{3.21}$$

dir.

İspat: n üzerinde tümevarım uygulanırsa. Eğer $n = 1$ ise, k. mertebeden Gauss Fibonacci sayılarının ve $E_{k,n}$ tanımından

$$Q_k R_k = E_{k,1}$$

dir.

Farzedelim ki eşitlik n için sağlansın. Bu durumda

$$Q_k^n R_k = E_{k,n}$$

olur ve şimdi $n+1$ için ispatlanır.

$$\begin{aligned} Q_k^{n+1} R_k &= Q_k Q_k^n R_k \\ &= Q_k E_{k,n} \\ &= E_{k,n+1} \end{aligned}$$

dir.

Sonuç 3.2.5: $k = 2$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} Q_2^n R_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1-i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} GF_{n+1} & GF_n \\ GF_n & GF_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= E_{2,n} \end{aligned}$$

Sonuç 3.2.6: $k = 3$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} Q_3^n R_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1+i & 1 & 0 \\ 1 & 0 & i \\ 0 & i & 1-i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} GT_{n+2} & GT_{n+1} & GT_n \\ GT_{n+1} & GT_n & GT_{n-1} \\ GT_n & GT_{n-1} & GT_{n-2} \end{bmatrix} \\ &= E_{3,n} \end{aligned}$$

dir.

Teorem 3.2.5: $n \geq 1$ olsun. Bu durumda

$$Q_k^n Y_k = Z_{k,n} \tag{3.22}$$

dir.

İspat: n üzerinde tümevarım uygulanırsa. Eğer $n = 1$ için, k. mertebeden Gauss Lucas sayılarının ve $Z_{k,n}$ tanımından

$$Q_k Y_k = Z_{k,1}$$

dir.

Farzedelim ki eşitlik n için sağlansın. Bu durumda

$$Q_k^n Y_k = Z_{k,n}$$

olur ve şimdi $n+1$ için ispatlanırsa

$$\begin{aligned} Q_k^{n+1} Y_k &= Q_k Q_k^n Y_k \\ &= Q_k Z_{k,n} \\ &= Z_{k,n+1} \end{aligned}$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.7: $k = 2$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} Q_2^n Y_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1+2i & 2-i \\ 2-i & -1+3i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} GL_{n+1} & GL_n \\ GL_n & GL_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= E_{2,n} \end{aligned}$$

dir.

Teorem 3.2.6: m ve n tamsayıları için

$$GF_{n+m}^{(k)} = F_{n+1}^{(k)} GF_m^{(k)} + \sum_{j=0}^{k-2} \left(GF_{m-(k-j-1)}^{(k)} \sum_{p=0}^{j} F_{n-p}^{(k)} \right) \tag{3.23}$$

dir.

İspat: $k \geq 2$ için

$$Q_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{k \times k}$$

Bu durumda denklem (2.33) den

$$Q_k^n = \begin{bmatrix} F_{n+1}^{(k)} & \cdots & F_n^{(k)} + F_{n-1}^{(k)} + F_{n-2}^{(k)} & F_n^{(k)} + F_{n-1}^{(k)} & F_n^{(k)} \\ F_n^{(k)} & \cdots & F_{n-1}^{(k)} + F_{n-2}^{(k)} + F_{n-3}^{(k)} & F_{n+1}^{(k)} + F_n^{(k)} & F_{n-1}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{n-k+3}^{(k)} & \cdots & F_{n-k+2}^{(k)} + F_{n-k+1}^{(k)} + F_{n-k}^{(k)} & F_{n-k+2}^{(k)} + F_{n-k+1}^{(k)} & F_{n-k+2}^{(k)} \\ F_{n-k+2}^{(k)} & \cdots & F_{n-k+1}^{(k)} +_{n-k}^{(k)} + F_{n-k-1}^{(k)} & F_{n-k+3}^{(k)} + F_{n-k+2}^{(k)} & F_{n-k+1}^{(k)} \end{bmatrix}_{k \times k}$$

dir. $Q_k^{n+m} = Q_k^n Q_k^m$ olduğundan ve Teorem 3.2.4'den $Q_k^n R_k = E_{k,n}$ olduğu görülür.

$Q_k^{n+m} R_k = E_{k,n+m}$ ve $Q_k^n Q_k^m R_k = E_{k,n+m}$ eşitliğinde $Q_k^n E_{k,m} = E_{k,n+m}$ olduğundan matris işlemleri ve matrislerin eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} GF_{n+m}^{(k)} &= F_n^{(k)} GF_{m-(k-1)}^{(k)} + \left(F_n^{(k)} + F_{n-1}^{(k)}\right) GF_{m-(k-2)}^{(k)} \\ &\quad + \left(F_n^{(k)} + F_{n-1}^{(k)} + F_{n-2}^{(k)}\right) GF_{m-(k-3)}^{(k)} + ... \\ &\quad + \left(F_n^{(k)} + F_{n-1}^{(k)} + ... + F_{n-(k-2)}^{(k)}\right) GF_{m-1}^{(k)} + F_{n+1}^{(k)} GF_m^{(k)} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.8: $k = 2$ olsun. Bu durumda

$$GF_{n+m} = F_{n-1} GF_m + F_n GF_{m+1}$$

dir.

Sonuç 3.2.9: $k = 3$ olsun. Bu durumda T_n bilinen n.Tribonacci sayısı ve GT_n de n. Gauss Tribonacci sayısı olmak üzere

$$GT_{n+m} = T_n GT_{m-2} + (T_n + T_{n-1})\, GT_{m-1} + T_{n+1} GT_m$$

dir.

Teorem 3.2.7: m ve n tamsayıları için

$$GL_{n+m}^{(k)} = F_{n+1}^{(k)} GL_m^{(k)} + \sum_{j=0}^{k-2} \left(GL_{m-(k-j-1)}^{(k)} \sum_{p=0}^{j} F_{n-p}^{(k)} \right) \tag{3.24}$$

dir.

İspat: Teorem 3.2.5.'de $Q_k^{n+m} = Q_k^n . Q_k^m$ kullanılırsa

$$Q_k^{n+m} Y_k = Z_{k,n+m}$$

ve

$$Q_k^n Q_k^m Y_k = Z_{k,n+m}$$

eşitliğinde

$$Q_k^n Z_{k,m} = Z_{k,n+m}$$

olduğundan matris işlemleri ve matrislerin eşitliği kullanılırsa ispat biter.

Sonuç 3.2.10: $k = 2$ için

$$GL_{n+m} = F_{n+1} GL_m + F_n GL_{m-1}$$

dir.

Teorem 3.2.8: k. mertebeden Gauss Fibonacci ve Gauss Lucas sayılarının toplamı

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} GF_j^{(k)} &= \frac{1}{k-1} \Big(GF_{n+k}^{(k)} - GF_k^{(k)} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{k-2} (k-j-1) \left(GF_j^{(k)} - GF_{n+j}^{(k)} \right) \Big) \end{aligned} \tag{3.25}$$

ve

$$\sum_{j=1}^{n} GL_j^{(k)} = \frac{1}{k-1}\Big(GL_{n+k}^{(k)} - GL_k^{(k)} + \sum_{j=1}^{k-2}(k-j-1)\Big(GL_j^{(k)} - GL_{n+j}^{(k)}\Big)\Big) \tag{3.26}$$

dir.

İspat: k. mertebeden Gauss Fibonacci sayılarının indirgeme bağıntısından ve (3.1) eşitliğinden

$$GF_{n-k}^{(k)} = GF_n^{(k)} - \sum_{j=1}^{k-1} GF_{n-j}$$

eşitliği yazılır ve bu eşitlikten

$$\begin{aligned}
GF_1^{(k)} &= GF_{k+1}^{(k)} - GF_k^{(k)} - ... - GF_3^{(k)} - GF_2^{(k)} \\
GF_2^{(k)} &= GF_{k+2}^{(k)} - GF_{k+1}^{(k)} - ... - GF_4^{(k)} - GF_3^{(k)} \\
GF_3^{(k)} &= GF_{k+3}^{(k)} - GF_{k+2}^{(k)} - ... - GF_5^{(k)} - GF_4^{(k)} \\
&\vdots \\
GF_{m-1}^{(k)} &= GF_{k+m-1}^{(k)} - GF_{k+m-2}^{(k)} - ... - GF_{m+1}^{(k)} - GF_m^{(k)} \\
GF_m^{(k)} &= GF_{k+m}^{(k)} - GF_{k+m-1}^{(k)} - ... - GF_{m+2}^{(k)} - GF_{m+1}^{(k)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} GF_j^{(k)} &= GF_{k+m}^{(k)} - GF_2^{(k)} - 2GF_3^{(k)} - 3GF_4^{(k)} \\
&\quad -... - (k-2)\, GF_{k-1}^{(k)} - (k-1)\, GF_k^{(k)} \\
&\quad - (k-2) \sum_{j=k+1}^{m+1} GF_j^{(k)} - (k-3)\, GF_{m+2}^{(k)} \\
&\quad - (k-4)\, GF_{m+3}^{(k)} - ... - 3GF_{k+m-4}^{(k)} - 2GF_{k+m-3}^{(k)} \\
&\quad -GF_{k+m-2}^{(k)}
\end{aligned}$$

yukarıdaki eştilikte aşağıdaki terimler eklenir ve çıkarılırsa

$$\begin{aligned}
&(k-2)\, GF_1^{(k)} - (k-2)\, GF_1^{(k)} + (k-2)\, GF_2^{(k)} - (k-2)\, GF_2^{(k)} \\
&+ (k-2)\, GF_3^{(k)} - (k-2)\, GF_3^{(k)} + ... + (k-2)\, GF_k^{(k)} - (k-2)\, GF_k^{(k)}
\end{aligned}$$

işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} GF_j^{(k)} &= GF_{k+m}^{(k)} + (k-2)\, GF_1^{(k)} + (k-3)\, GF_2^{(k)} + ... \\ &\quad +2GF_{k-3}^{(k)} + GF_{k-2}^{(k)} - GF_k^{(k)} - (k-2) \sum_{j=1}^{m} GF_j^{(k)} \\ &\quad - (k-2)\, GF_{m+1}^{(k)} - (k-3)\, GF_{m+2}^{(k)} - ... \\ &\quad -3GF_{k+m-4}^{(k)} - 2GF_{k+m-3}^{(k)} - GF_{k+m-2}^{(k)}\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}(k-1) \sum_{j=1}^{m} GF_j^{(k)} &= GF_{k+m}^{(k)} - GF_k^{(k)} + \sum_{j=1}^{k-2} (k-j-1)\, GF_j^{(k)} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{k-2} (k-j-1)\, GF_{m+j}^{(k)}\end{aligned}$$

yazılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} GF_j^{(k)} &= \frac{1}{k-1} \left(GF_{k+m}^{(k)} - GF_k^{(k)} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^{k-2} (k-j-1) \left(GF_j^{(k)} - GF_{m+j}^{(k)} \right) \right)\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde Gauss Lucas sayılarının tanımından ve (3.3) eşitliği kullanılırsa Gauss Lucas sayılarının toplamı bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.11: $k = 2$ için Gauss Fibonacci ve Lucas sayılarının toplamı

$$\sum_{j=1}^{n} GF_j = GF_{n+2} - (1+i)$$

ve

$$\sum_{j=1}^{n} GL_j = GL_{n+2} - (3+i)$$

dir.

Sonuç 3.2.12: $k = 3$ için Gauss Tribonacci sayılarının toplamı

$$\sum_{j=1}^{n} GT_j = \frac{1}{2}\left[GT_{n+3} - GT_{n+1} - (1+i)\right]$$

dir.

Teorem 3.2.9: $n \geq 0$ için

$$GL_n^{(k)} = kGF_{n+1}^{(k)} - \sum_{j=1}^{k-1} (k-j)\, GF_{n+1-j}^{(k)} \tag{3.27}$$

dir.

İspat: Teorem n üzerinde tümevarım uygulanarak ispatlanabilir. Eğer $n = 0$ ve $k = 2$ olursa $GL_0^{(2)} = 2 - i$, $GF_0^{(2)} = i$ ve $GF_1^{(2)} = 1$ olduğundan

$$GL_0^{(2)} = 2GF_1^{(2)} - GF_0^{(2)}$$

eşitliği doğrudur. Aynı zamanda $n = 0$ ve $k > 2$ olursa $GL_0^{(k)} = k - i$ ve k. mertebeden Gauss Fibonacci sayılarının tanımından $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\begin{aligned} kGF_1^{(k)} - \sum_{j=1}^{k-1} (k-j)\, GF_{1-j}^{(k)} &= kGF_1^{(k)} - (k-1)\, GF_0^{(k)} - ... - GF_{2-k}^{(k)} \\ &= k - 0 - 0 - ... - 0 - i \\ &= k - i \\ &= GL_0^{(k)} \end{aligned}$$

dır. Farzedelim ki eşitlik n için sağlansın

$$GL_n^{(k)} = kGF_{n+1}^{(k)} - \sum_{j=1}^{k-1} (k-j)\, GF_{n+1-j}^{(k)}.$$

Bu durumda $n + 1$ için ispatlanır. k. mertebeden Gauss Lucas sayılarının tanımında

$$GL_{n+1}^{(k)} = GL_n^{(k)} + GL_{n-1}^{(k)} + GL_{n-2}^{(k)} ... + GL_{n+1-k}^{(k)}$$

yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
GL_{n+1}^{(k)} &= \left(kGF_{n+1}^{(k)} - \sum_{j=1}^{k-1}(k-j)\,GF_{n+1-j}^{(k)}\right) \\
&\quad + \left(kGF_{n}^{(k)} - \sum_{j=1}^{k-1}(k-j)\,GF_{n-j}^{(k)}\right) \\
&\quad + \left(kGF_{n-1}^{(k)} - \sum_{j=1}^{k-1}(k-j)\,GF_{n-1-j}^{(k)}\right) + ... \\
&\quad + \left(kGF_{n+2-k}^{(k)} - \sum_{j=1}^{k-1}(k-j)\,GF_{n+1-k-j}^{(k)}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
GL_{n+1}^{(k)} &= k\left(GF_{n+1}^{(k)} + GF_{n}^{(k)} + ... + GF_{n+2-k}^{(k)}\right) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{k-1}(k-j)\left(GF_{n+1-j}^{(k)} + GF_{n-j}^{(k)} + ... + GF_{n+1-k-j}^{(k)}\right) \\
GL_{n+1}^{(k)} &= kGF_{n+2}^{(k)} - \sum_{j=1}^{k-1}(k-j)\,GF_{n+2-j}^{(k)}
\end{aligned}
$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.13: $k = 2$ ve $n \geq 0$ için

$$GL_{n+1} = 2GF_{n+2} - GF_{n+1}.$$

Teorem 3.2.10: $n \geq 0$ için

$$GL_{n}^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} jGF_{n+1-j}^{(k)} \tag{3.28}$$

dir.

İspat: n üzerinde tümevarım uygulanırsa $n = 0$ ve $k = 2$ olursa $GL_0^{(2)} = 2-i$, $GF_0^{(2)} = i$ ve $GF_{-1}^{(2)} = 1 - i$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
GL_0^{(2)} &= \sum_{j=1}^{2} jGF_{1-j}^{(k)} \\
&= 1GF_0^{(2)} + 2GF_{-1}^{(k)} \\
&= i + 2\,(1-i) \\
&= 2 - i
\end{aligned}
$$

olduğu kolayca görülür. Aynı zamanda $n=0$ ve $k>2$ olursa $GL_0^{(k)}=k-i$ ve k. mertebeden Gauss Fibonacci sayılarının tanımından $n \in Z^+$ için

$$\begin{aligned}
GL_0^{(k)} &= \sum_{j=1}^{k} jGF_{1-j}^{(k)}. \\
&= GF_0^{(k)} + 2GF_{-1}^{(k)} + ... (k-1)\, GF_{2-k}^{(k)} + kGF_{1-k}^{(k)} \\
&= 0+0+0+...+(k-1)\, i + k\,(1-i) \\
&= k-i \\
&= GL_0^{(k)}
\end{aligned}$$

dır.

Farzedelim ki eşitlik n için sağlansın

$$GL_n^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} jGF_{n+1-j}^{(k)}$$

Bu durumda $n+1$ için ispatlanır. k. mertebeden Gauss Lucas sayılarının tanımından

$$\begin{aligned}
GL_{n+1}^{(k)} &= GL_n^{(k)} + GL_{n-1}^{(k)} + GL_{n-2}^{(k)} ... + GL_{n+1-k}^{(k)} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{k} jGF_{n+1-j}^{(k)}\right) + \left(\sum_{j=1}^{k} jGF_{n-j}^{(k)}\right) \\
&\quad + \left(\sum_{j=1}^{k} jGF_{n-1-j}^{(k)}\right) + ... + \left(\sum_{j=1}^{k} jGF_{n-k-j}^{(k)}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{k} j\left(GF_{n+1-j}^{(k)} + GF_{n-j}^{(k)} + ... + GF_{n-k-j}^{(k)}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{k} jGF_{n+2-j}^{(k)}
\end{aligned}$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.14: $n \geq 0$ için

$$GL_n = GF_n + 2GF_{n-1}$$

dir.

4 SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, k. mertebeden Gauss Fibonacci ve k. mertebeden Lucas sayıları başlangıç koşullarıyla birlikte tanımlanarak k. mertebeden Gauss Fibonacci ve Lucas sayılarının üreteç fonksiyonları, Binet formülleri, kombinatorial gösterimleri ve toplam formülleri elde edildi. k. mertebeden Fibonacci sayıları için verilen Q_k-matrisi ve yardımcı matrislerle elemanları k. mertebeden Gauss Fibonacci ve Lucas sayıları olan matrisler elde edildikten sonra önemli ilişki ve özdeşlikler kurularak ispatlandı.

Öneri olarak, bu tezde çalıştığımız k. mertebeden Gauss Fibonacci ve Lucas sayılarını düşünerek bir değişkenli k. mertebeden Gauss Fibonacci ve Lucas polinomları ve iki değişkenli k. mertebeden Gauss Fibonacci ve Lucas polinomları tanımlanarak daha genel incelemeler yapılabilir. Ayrıca elemanları k. mertebeden Gauss Fibonacci sayıları olan matrisin çarpanlara ayrılması üzerine çalışma yapılabilir. Böylece yeni bir araştırma alanı ve genellemeler ortaya çıkacaktır.

4. KAYNAKLAR

Asci, M., Gurel, E., "Bivariate Gaussian Fibonacci and Lucas Polynomials", Ars Comb.,109, 461-472,(2013).

Asci, M., Gurel, E. "Some Properties of Gaussian Triboancci numbers and Gaussian Tribonacci polynomials" Submitted to Journal.

Er, M. C., "Sums of Fibonacci numbers by matrix methods." Fibonacci Quart., 22 (3), 204-207,(1984).

Gurel, E., Asci, M., "Some Properties of k–order Gaussian Fibonacci and Lucas Numbers",Ars Comb., (in press) (2014).

Horadam, A. F., "A Generalized Fibonacci Sequence",American Math. Monthly, 68, 455-459,(1961).

Horadam, A. F., "Complex Fibonacci Numbers and Fibonacci Quaternions", American Math. Monthly, 70,289-291,(1963).

Jordan, J. H., "Gaussian Fibonacci and Lucas numbers", Fibonacci Quart., 3,315-318,(1965).

Kaygisiz, K., Sahin, A., "Generalized Lucas Numbers and Relations with Generalized Fibonacci Numbers", arXivpreprintarXiv,1111.2567, (2011).

Kilic, E.,Tasci,D., "On the generalized order-k Fibonacci and Lucas numbers", Rocky Mountain J. Math., 36(6),1915-1926,(2006).

King, C.H., "Some Properties of Fibonacci Numbers", Master's Thesis, San Jose State College, San Jose, CA, (1960).

Koshy, T. "Fibonacci and Lucas Numbers with Applications", A Wiley-Interscience Publication, (2001).

Lee, G-Y., Lee, S-G., Kim J-S., Shin H-K., "The Binet Formula and Representations of k-Generalized Fibonacci Numbers", The Fibonacci Quart.,39(2), 158-164,(2001).

Lee, G-Y., "k-Lucas numbers and associated bipartite graphs", Linear Algebra and Appl., 320(1), 51-61,(2000).

Lee, G-Y, Lee, S-G. "A note on generalized Fibonacci numbers", Fibonacci Quart 33, 273-8,(1995).

Tasci, D.,Kilic, E., "On the order-k generalized Lucas numbers", Appl. Math. Comput., 155(3), 637-641,(2004).

Vajda, S., "Fibonacci and Lucas Numbers, and the Golden SectionTheory and Applications", Ellis Harwood Limitted, (1989).

5. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:EŞREF GÜREL
Doğum Yeri ve Tarihi	: ÇAL, 13/05/1974
Lisans Üniversite	: MARMARA ÜNİVERSİTESİ
Y. Lisans Üniversite	:PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
Elektronik posta	:esrefgurel@hotmail.com
İletişim Adresi	:NEZİHE–DERYA BALTALI BİLİM VE SANAT MERKEZİ Çamlaraltı M. Üniversite C. No:36 DENİZLİ

Yayın Listesi **:**

• Asci M., Gurel E., "Bivariate Gaussian Fibonacci and Lucas Polynomials", Ars Comb.,109,461-472, (2013).

• Asci M., Gurel E., "Gaussian Jacobsthal and Gaussian Jacobsthal Lucas Polynomials", Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, Vol.19, No:1, 25-36, (2013).

• Asci, M., Gurel, E., "Gaussian Jacobsthal and Gaussian Jacobsthal Lucas Numbers", Ars Comb., 111, 53-63, (2013).

• Asci, M., Gurel, E. "Gaussian Fibonacci p-Numbers and Gaussian Lucas p-Numbers",Ars Comb.,(in press) (2013).

• Asci, M., Gurel, E. "Some Properties of Gaussian Triboancci numbers and Gaussian Tribonacci polynomials" Submitted to Journal.

• Gurel, E., Asci, M., "Some Properties of Bivariate Gaussian Fibonacci and Gaussian Lucas p-Polynomials", Ars Comb.,(in press) (2015).

• Gurel, E., Asci, M., "Some Properties of k-order Gaussian Fibonacci and Lucas Numbers", Ars Comb.,(in press) (2014).

• Gurel, E., Asci, M.,"Elementary Problems and Solutions" B-1131, B-1132, Fibonacci Quarterly, Vol. 52, No:3, 2014, pp. 276 – 277, (2014).

• Gürel, E., "Asal Gamma Halkalarında Sol Türev", Yüksek Lisans Tezi, Pamukkale Üniversitesi, Denizli, (2002).

Konferans listesi :

• Esref Gurel, "A New Extentions of Gaussian Fibonacci p-Polynomials", The Second International Conference on Mathematics and Statistics, (AUS-ICMS'15), Sharjah, 2015(American University of Sharjah).

• Esref Gurel, "Identities on k-order Gaussian Fibonacci Numbers and k-order Gaussian Lucas Numbers", 3rd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA), Vienna, 2014 (Vienna University of Tech.)

• Esref Gurel, "Some results on Gaussian Fibonacci and Lucas p-Numbers", The Fourth International Conference of Matrix Analysis and Applications (ICMAA 2013), Konya,Turkey, 2013(Selçuk University)

• Eşref Gürel, "Üçgenden Çokgenler" Eğitimde Örnek Uygulamalar Sempozyumu, Denizli, 2013 (ODTÜ Geliştirme Vakfı Okulları)

• Eşref Gürel, "BİLSEM Modeli", Üstün Yetenekliler/Zekalılar Çalıştayı, Kocaeli, 2009 (TÜSSİDE)

• Eşref Gürel (Dinleyici) , 6. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, İstanbul, 2004, (Marmara Üniversitesi)

• Eşref Gürel (Dinleyici), Türkiye Üstün Yetenekli Çocuklar Kongresi, İstanbul, 2004, (Marmara Üniversitesi)